Matemática Financeira

Com uso da Calculadora HP-12C

Tem-se como princípio despertar o interesse do aluno para prepará-lo a exercer criticamente a cidadania e analisar situações financeiras do seu cotidiano. Nossa proposta é uma abordagem visual e prática, considerando os princípios da Matemática Financeira

Prof. José Carlos Moretti Junior

Introdução

As questões de Matemática Financeira envolvem basicamente o cálculo de juros simples para as aplicações a curto ou curtíssimo prazo e o cálculo de juros compostos para as aplicações a longo prazo.

A Matemática Financeira é uma ferramenta útil na análise de algumas alternativas de investimentos ou financiamentos de bens de consumo. A idéia básica é simplificar a operação financeira a um Fluxo de Caixa e empregar alguns procedimentos matemáticos.

Uma advertência deve ser feita àqueles que pretendem estudar Matemática Financeira ou se dedicar a algum trabalho nessa área. São exigidos desses estudantes e profissionais análise atenta dos problemas que querem resolver, compreensão clara das operações financeiras ali envolvidas e familiaridade não só com a linguagem dos negócios, como também com fórmulas e calculadoras que utilizará. E tudo isso só se consegue com muito exercício, principalmente para aqueles que se lançam na área pela primeira vez.

1.

Nomenclatura utilizada em Matemática Financeira

1.1 – Taxa de Juros

i = do inglês *Interest*, taxa de juros é o índice que determina a remuneração de um capital num determinado período de tempo (dias, meses, anos etc.). A taxa de juros pode ser apresentada de duas formas – no formato percentual ou no unitário, por exemplo:

- **Taxa percentual:** 34% ao mês, 10% ao semestre, 12% ao ano etc.
- **Taxa unitário:** 0,34 ao mês, 0,10 ao semestre, 0,12 ao ano etc.

No exemplo acima percebe-se que 34% ao mês nada mais é que 34%÷100 = 0,34.

1.2 – Capital ou Valor Presente

C ou PV = é o valor inicial de uma operação, ou seja, Capital é o valor – normalmente dinheiro – que você quer aplicar ou emprestar. Também chamado Capital Inicial ou Principal, representado pela letra "C" ou "PV". (Valor Presente – abreviações das palavras em inglês a *Present Value*. No curso adotaremos a terminologia "C ou PV").

1.3 – Montante ou Valor Futuro

M ou FV = do inglês *aMount*, Montante (M) ou Valor Futuro (FV – abreviação das palavras correspondentes em inglês a *Future Value*) é o capital inicial acrescido do rendimento obtido durante o período de aplicação, ou seja, é composto de amortização mais juros, e é representado pela letra "M" ou "FV", ou seja: M = C + J ou FV = PV + J.

1.4 – Juro

J = Juro é a remuneração do capital empregado.

- **PARA O INVESTIDOR**: é a remuneração do investimento.
- **PARA O TOMADOR**: é o custo do capital obtido por empréstimo.

Existem dois regimes de juros:

a) Simples;

b) Compostos.

1.5 – Período

n = nesse caso é uma incógnita referente ao período de tempo (dias, semanas, meses, anos) de uma aplicação financeira.

Algumas abreviações utilizadas em períodos (n):

- **a.d**. = abreviação usada para designar **ao dia**
- **a.m.** = abreviação usada para designar **ao mês**
- **a.b**. = abreviação usada para designar **ao bimestre**
- **a.t.** = abreviação usada para designar **ao trimestre**
- **a.q.** = abreviação usada para designar **ao quadrimestre**
- **a.s.** = abreviação usada para designar **ao semestre**
- **a.a.** = abreviação usada para designar **ao ano**

1.6 – Desconto

d = do inglês *Discount*. É usado para representar o desconto conseguido numa aplicação financeira.

1.7 – Valor Nominal

N = do inglês *Nominal*. É usado para representar o Valor Nominal ou de face de um documento financeiro.

1.8 – Valor Atual

A = do inglês *Actual*. É usado para representar o Valor Atual ou Real de um documento financeiro em uma determinada data.

2.

Breve apresentação da Calculadora HP-12C

A explicação da teoria dos capítulos não depende de nenhum instrumento de cálculo mais sofisticado. Deste modo pode-se entender os conceitos relacionados à matemática financeira sem a calculadora HP-12C, mas não irá operacionalizá-los dinamicamente e, portanto, poderá encontrar dificuldades para fixar o aprendizado.

Importante!!! O custo da calculadora é muito baixo se comparado à economia que ela pode proporcionar. Assim, para aqueles que não gosta de desperdiçar dinheiro, tenha uma calculadora HP-12C como aliada.

Por ser um instrumento bem difundido, prático e de fácil manuseio, a calculadora HP-12C pode ser de grande utilidade no dia-a-dia. Associada aos conhecimentos da matemática financeira, essa calculadora auxiliará no orçamento doméstico, nas decisões de compras (principalmente no que diz respeito à forma de pagamento) e nas suas aplicações financeiras.

2.1 – Calculadora HP-12C

A calculadora HP-12C é indiscutivelmente a melhor e mais antiga calculadora financeira disponível no mercado mundial. Lançada em 1981, pela Hewlett-Packard (sigla HP), a 12C ganhou rapidamente destaque em relação às outras calculadoras da mesma série pela sua robustez, durabilidade e, sobretudo, pela sua simplicidade. A calculadora HP-12C é também conhecida como a “calculadora que nunca morrerá”, sendo não só a mais antiga, como também a mais vendida.

Com desempenho comprovado, a HP-12C possui mais de 120 funções embutidas em sua memória – realizando desde cálculos financeiros, matemáticos e estatísticos, até operações com datas. Didaticamente, as teclas da HP-12C podem ser divididas em oito grandes setores:

1. **entrada de dados;**
2. **operações básicas;**
3. **potência, raiz e inverso de um valor;**
4. **armazenamento de dados;**

5. **funções financeiro;**
6. **porcentagem;**
7. **calendário; e**
8. **limpeza.**

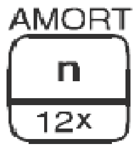
Geralmente, é preciso executar mais de uma operação em seqüência. Para facilitar os cálculos e realizá-los sem o uso dos parênteses, a calculadora HP-12C trabalha com o sistema RPN (*reverse polish notation*) ou notação polonesa inversa. A principal característica do modo RPN está em introduzir os números primeiros e depois o sinal da operação.

A HP-12C Platinum também apresenta a possibilidade de operação no sistema tradicional algébrico, denominado ALG[1], assim a seqüência para resolver uma operação é: número, sinal da operação, outro número e pressiona-se a tecla igual.

2.2 – O Teclado

Muitas das teclas da HP-12C executam de duas a três funções. Sendo assim, temos funções primárias e secundárias. A função primária de uma tecla é indicada pelos caracteres em branco *(na face central da tecla).* As funções secundárias são indicadas pelos caracteres em dourado *(na face superior da tecla)* e azul *(na face inferior da tecla)*. Essas funções secundárias são selecionadas apertando a tecla de *prefixo* adequada, antes da tecla de função.

[1] Para ajustar a calculadora HP-12C Platinum para o sistema ALG (algébrico) é preciso pressionar a tecla [f] seguida de [ALG] do teclado. Para ajustar para o sistema RPN, pressione [f] [RPN].



Como usar as teclas de função?

- Para usar a função superior (dourado) basta pressionar o *prefixo* dourado [**f**]
- Para usar a função central (branca) basta apenas pressiona-la sozinha.
- Para usar a função inferior (azul) basta pressionar o *prefixo* azul [**g**]

Apertando uma das teclas de *prefixo* **[f]** ou **[g]**, o indicar de estado correspondente ficará visível no visor. Os indicadores de estado são desligados assim que você apertar a tecla da função secundária. Se você pressionar uma tecla de *prefixo* por engano, basta pressionar a tecla de limpeza: **[f] CLEAR [PREFIX]**. Lembre-se sempre de que a tecla de *prefixo* vem antes da tecla da função secundária, ou seja, antes de executar a função ative o *prefixo* adequado.

2.3 – Teclas de "CLEAR" – Limpeza

Há várias operações que apagam e zeram os registros da 12C, como se pode ver na tabela abaixo:

Tecla	Função
[CLx]	O visor (o registrador X).
[f] CLEAR [Σ]	Os registradores estatísticos (R1 a R6), os registradores da pilha operacional e o visor.
[f] CLEAR [PRGM]	A memória de programação (somente quando pressionadas no modo PRGM).
[f] CLEAR [FIN]	Os registradores financeiros.
[f] CLEAR [REG]	Os registradores de armazenamento de dados, os registradores financeiros, os registradores da pilha operacional, o último X (LAST X) e o visor.

2.4 – Pilha Automática de Memória

2.4.1 – Pilha Operacional

A HP-12C possui quatro registros especiais que são utilizados para armazenar números durante os cálculos. Os registradores da pilha operacional são identificados por T, Z, Y e X. Para compreender como esses registradores são utilizados, eles devem ser mentalmente visualizados como se estivessem empilhados.

T	
Z	
Y	
X	

O número do registro X – e no caso de operações matemáticas com dois números, o número do registro Y – são os registradores utilizados durante as operações. Os registradores Z e T são utilizados basicamente para a retenção de resultados intermediários em cálculos complexos.

Lembre-se de que os números mostrados no visor sempre estarão no registrador X (da pilha operacional).

Vejamos abaixo como a pilha operacional se comporta durante os cálculos aritméticos simples e os cálculos complexos em cadeia.

Vamos inicialmente examinar o cálculo aritmético simples no diagrama a seguir:

- Vamos resolver o cálculo 8 + 3:

	T	0	0	0	0
	Z	0	0	0	0
	Y	0	8	8	0
Visor	X	8	8	3	11
Operação:		8	[ENTER]	3	[+]

Conforme o diagrama acima, assim que o número é introduzido na calculadora 12C, ele é automaticamente armazenado no registro X. Os números permanecem no registrador X, até que a tecla **[ENTER]** seja pressionada. Quando isso ocorre, o número mostrado no registro X é copiado para o registro Y. Este processo faz parte do deslocamento ascendente da pilha operacional. *Lembre-se de que a tecla **[ENTER]** separa o primeiro número do segundo, além de informar para a calculadora que o número já está completo.*

- Vamos agora examinar o seguinte cálculo complexo (9 x 4) + (12 – 8):

	T	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Z	0	0	0	0	0	36	36	0	0
	Y	0	9	9	0	36	12	12	36	0
Visor	X	9	9	4	36	12	12	8	4	40
Operação:		9	[ENTER]	4	[x]	12	[ENTER]	8	[-]	[+]

Observe que os resultados intermediários não só são apresentados quando calculados, como também são armazenados e recuperados na hora exata em que são necessários. É assim basicamente que a pilha operacional funciona.

2.5 – Revisão de Tópicos Úteis na Matemática e Cálculos na HP (potenciação, radiação e logaritmos)

2.5.1 – Potenciação

Ao realizar uma operação de multiplicação de mesma base mais de uma vez, por exemplo, o recurso da potenciação pode ser utilizado. Assim, **potenciação** *é a operação em que, dados uma base e um expoente, se calcula uma potência*, cuja definição de **potência** diz: *produto de fatores iguais. É o resultado da potenciação*.

a – Propriedades da Potenciação

→ $x^1 = x$ para qualquer número real

→ $x^0 = 1$ para qualquer número real e $x \neq 0$

→ $x^{-n} = 1 \div x^n$ para qualquer número real e $x \neq 0$

→ $x^{a \div b} = \sqrt[b]{x^a}$ para qualquer número real e $x \neq 0$; $b \neq 0$; então $a \div b \in$ racionais

→ $x^a \cdot x^a = x^{a+b}$

→ $x^a \div x^a = x^{a-b}$

→ $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

→ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

→ $(a \div b)^n = a^n \div b^n$

PELA HP-12C

Os cálculos que envolvem valores exponenciais são realizados na calculadora HP-12C como o auxílio da tecla **[Y^X]**. Essa tecla significa que o número que está na pilha Y deve ser elevado ao número digitado por último (que está o visor), ou seja, na pilha X.

***(01) Exemplo*:** Calcular a seguinte operação: $\{(1 + 0{,}07)^{18} - 1\} \times 100$.

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
1	**[ENTER]**	1,00
0,07	**[+]**	1,07
18	**[Y^X]**	3,38
1	**[-]**	2,38
100	**[X]**	237,99
237,99		

2.5.2 – Radiciação

A definição de radiciação é a seguinte: *é a operação em que, dados o radicando e o índice, se calcula uma raiz*.

Uma raiz pode ser quadrada, cúbica, quarta, quinta e sexta, etc. O tipo da raiz é simbolizada pelo radical, e o número do qual se deve extrais a raiz chama-se radicando. Normalmante, quando o índice é omitido da notação, a raiz é quadrada. Nos outros casos, ele é expresso claramente.

A radiciação é uma operação inversa à potenciação. Portanto $\sqrt[4]{16} = 2$, então $2^4 = 16$. O termo que simboliza a raiz é o *radical* e ele pode ser representado na forma de potência.

Note que $2^4 = 16$; $\sqrt[4]{16} = 2$; substitui $\sqrt[4]{2^4} = 2$; elimina o radical $2^{4/4} = 2$. O radicando pode estar elevado a um número qualquer. Veja o número 2^4 dentro da raiz: ele está substituindo o número 16. Logo:

$\sqrt[a]{x^b} = x^{b/a}$

PELA HP-12C

Para que a HP-12C realize esse cálculo, onde aparecer 1 sobre algo no expoente, deverá ser utilizada a tecla **[1/X]**.

***(02) Exemplo*:** Calcular a seguinte operação: $\{(1 + 1{,}55)^{1/12} - 1\} \times 100$.

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
1	[ENTER]	1,00
1,55	[+]	2,55
12	[1/X]	0,08
	[Y^X]	1,08
1	[-]	0,08
100	[X]	8,11
8,11		

2.5.3 – Logaritmo

Fazemos uma breve revisão do cálculo de logaritmos pois a maioria das aplicações existentes no mercado financeiro estão inseridas no regime de capitalização composta a qual, matematicamente, tem comportamento exponecial ou logarítmico.

Imaginemos a seguinte situação $2^X = 32$; podemos escrever;

$2^X = 2^5 \Rightarrow X = 5$.

Neste caso, dizemos que o logaritmo de 32 na base 2 é 5 e se indica:

$\log_2 32 = 5 \Rightarrow 2^5 = 32$; do mesmo modo:

$(1/5)^X = 125 \Rightarrow (5^{-1})^X = 125 \Rightarrow 5^{-X} = 125 \Rightarrow X= -3$.

Dizemos que o logaritmo de 125 na base 1/5 é -3 e se indica:

$\log_{1/5} 125 = -3 \Rightarrow (1/5)^3 = 125$.

Quando são dados dois números reais a e b com b > 0 e 1 ≠ a > 0, ao número x tal que:

$$a^X = b$$

chama-se logaritmo de b na base a; indica-se:

$$Log_a\ b = x$$

Vale então a equivalência:

$$Log_a\ b = x \Rightarrow a^X = b$$

Notação:

Quando $Log_a\ b = x$, temos: **x** é o *Logaritmo* de b na base a;

a é a *Base* do sistema de logaritmo;

b é o *Antilogaritmo* ou *Logaritmando*.

a – Propriedades dos Logaritmos

→ Logaritmo de um produto: $Log_a (b \cdot c) = Log_a b + Log_a c$

→ Logaritmo de um quociente: $Log_a (b \div c) = Log_a b - Log_a c$

→ Logaritmo de uma potência: $Log_a b^X = n \cdot Log_a b$

→ Logaritmo de uma raiz: $Log_a \sqrt[n]{b} = Log_a b^{1/n} = 1/n \cdot Log_a b$

b – Mudança de Base

$Log_a b = Log_c b \div Log_c a$, onde: $b > 0$

$0 < a \neq 1$

$0 < c \neq 1$

PELA HP-12C

A calculadora HP-12C trabalha com o logaritmo *neperiano*[2] (LN) na base *Euller* (leia *óiler*), cujo número é, aproximadamente, 2,718281. Esse número é expresso pela letra *e*. Não há uma forma direta de calcular o logaritmo em outra base por nenhuma função específica da HP-12C[3]. Existe uma tecla da calculadora relacionada a esse logaritmo, em que a função LN é secundária. Para acioná-la, pressione **[g] [LN]**.

***(03) Exemplo*:** Calcular a seguinte operação: $\ln(1,35)^4 + \ln(1,05)^2$.

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
1,35	**[ENTER]**	1,35
4	**[Y^X]**	3,32
	[g] [LN]	1,20
1,05	**[ENTER]**	1,05
2	**[Y^X]**	1,10
	[g] [LN]	0,10
	[+]	1,30
1,30		

2.6 – Função "C" - e as teclas [STO] e [EEX]

Com a seqüência de teclas **[STO] [EEX]** aparecerá no visor da

[2] $Log_e b \Rightarrow Ln b^{**}$.

[3] Em todos os exercícios desta apostila, quando do uso de logaritmos, adotou-se os de base *e* em função da possibilidade de o aluno poder resolvê-lo concomitantemente com uma calculadora financeira a qual, em sua maioria, apresenta em seu teclado o logaritmo neperiano.

calculadora a letra "C". Se a letra "C" não estiver aparecendo, a HP-12C fará os cálculos levando em consideração os dois Regimes de Capitalização. Na verdade, o objetivo é utilizar o regime de Capitalização Simples (convenção linear) para os períodos de tempo inferiores ao tempo da taxa, e para os períodos inteiros iguais ou superiores ao tempo da taxa será utilizado o regime de Capitalização Composta.

(04) Exemplo**:** Calcular o valor futuro de uma aplicação de R$ 1.450,30, aplicado a taxa de 15% ao ano, durante 3,5 anos.

Dados:

PV = R$ 1.450,30

i = 15% a.a.

n = 3,5 anos

FV = ?

PELA HP-12C

Com o uso do "C" no visor	
Pressione	**Visor**
[f] CLEAR [FIN]	0,00
1.450,30	1.450,30
[CHS]	- 1.450,30
[PV]	- 1.450,30
15	15,00
[i]	15,00
3,50	3,50
[n]	3,50
[FV]	2.365,38

Sem o uso do "C" no visor	
Pressione	**Visor**
[f] CLEAR [FIN]	0,00
1.450,30	1.450,30
[CHS]	- 1.450,30
[PV]	- 1.450,30
15	15,00
[i]	15,00
3,50	3,50
[n]	3,50
[FV]	2.371,15

Observe que existe uma diferença de **R$ 5,77** (2.371,15 – 2.365,38). Vejamos por quê:

<u>1º Passo</u> Determinar o valor futuro para o período de 3 anos (**período inteiro**) pelo regime de **Juros Compostos**.	**FV** (3 anos) = 1.450,30 $(1,15)^3$ **FV** (3 anos) = **R$ 2.205,73**
<u>2º Passo</u> Determinar o valor dos juros correspondente a meio ano (**período fracionário**) pelo regime de **Juros Simples**.	**J** (0,5 anos) = (2.205,73 x 0,15 x 0,5) **J** (0,5 anos) = **R$ 165,43**
<u>3º Passo</u> Determinar o valor futuro (3,5 anos).	**FV** (3,5 anos) = R$ 2.205,73 + R$ 165,43 **FV** (3,5 anos) = **R$ 2.371,15**

Para tanto, adotaremos, neste estudo, o uso do Regime de Capitalização Composta (usando o "C").

2.7 – Funções Financeiras

A calculadora HP-12C disponibiliza 22 teclas para solucionar os problemas financeiros: juros simples, juros compostos, série de pagamentos ou anuidades, amortização, taxa interna de retorno, valor presente líquido, depreciação, e preço de títulos[4]. Observe abaixo como executar cada uma das operações financeiras.

Tecla	Função	Tecla	Função
n	Número de períodos	**i**	Taxa de juros
PV	Valor presente	**PMT**	Pagamento/Recebimento
FV	Valor futuro	**[f] AMORT**	Amortização
[f] INT	Juros simples	**[f] NPV**	Valor presente líquido
[f] IRR	Taxa interna de retorno	**[g] 12x**	Multiplica por 12
[g] 12÷	Divide por 12	**[g] CFo**	Fluxo inicial de caixa
[g] CFj	Fluxos de caixa seguintes	**[g] Nj**	Número de fluxos de caixa
[f] PRICE	Preço do título ou debênture	**[f] YTM**	Rendimento até o vencimento
[f] SL	Depreciação pelo método linear	**[f] SOYD**	Depreciação pelo método das somas dos dígitos
[f] DB	Depreciação pelo método do declínio em dobro	**[g] BEG**	Pagamentos antecipados
[g] END	Pagamentos postecipados		

[4] Não abordaremos nesta apostila o tópico "preço de títulos (ou BOND)". Para maiores informações a respeito desta função, consulte o manual da calculadora.

2.7.2 – Registradores Financeiros

Além dos registradores de armazenamento de dados, a calculadora 12C tem cinco registros especiais para cálculos financeiros. Esses registros são denominados: **n, i, PV, PMT e FV**. Essas teclas podem ser utilizadas para armazenar um número mostrado no registrador correspondente, para calcular o valor correspondente e armazenar o resultado no registro correspondente, ou para exibir o número armazenado no registro correspondente[5].

Para armazenar um número em um registro financeiro, digite o número e aperte a tecla correspondente (**[n]**, **[i]**, **[PV]**, **[PMT]** ou **[FV]**). Para recuperar o número armazenado em um dos registradores financeiros, basta pressionar **[RCL]**, e em seguida a tecla correspondente.

Lembre-se sempre de que toda função financeira utiliza os números armazenados em alguns dos registros. Portanto, antes de começar um novo cálculo financeiro, <u>convém se adotar a prática de apagar todos os registros financeiros</u>, pressionando-se **[f] CLEAR [FIN]** ou **[f] CLEAR [REG]**[6].

Abaixo apresenta-se as funções financeiras básicas correspondente as cinco teclas programadas para trabalhar conjuntamente da calculadora HP-12C (**[n]**, **[i]**, **[PV]**, **[PMT]** ou **[FV]**).

Tecla	Definição	Utilidade
PV	Valor presente	Sempre em função de taxa e tempo. Quando se deseja calcular o valor de uma mercadoria (PV) a partir do valor das parcelas (PMT), ou determinar o valor que se deve aplicar hoje (PV) para ter direito de receber determinada quantia no futuro (FV).
PMT	Pagamento/Recebimento	Sempre em função de taxa e tempo. Quando se deseja partir do valor de uma mercadoria (PV) para se calcular o valor das parcelas (PMT), ou determinar o valor que se deve aplicar mensalmente (PMT) para ter direito a receber determinada quantia no futuro (FV); útil para o planejamento da aposentadoria, de viagens ou para a aquisição de um bem à vista.
FV	Valor futuro	Sempre em função de taxa e tempo. Quando se quer calcular o valor a receber no futuro (FV) a partir de uma única aplicação no presente (PV), ou determinar o valor que se tem direito de receber no futuro (FV) a partir de uma série de

[5] A operação a ser realizada quando uma dessa teclas é pressionada, depende da operação anterior; se um número tiver sido armazenado num registrador financeiro (através de **[n]**, **[i]**, **[PV]**, **[PMT]**, **[FV]**, **[12x]** ou **[12÷]**), ao se pressionar uma dessas cinco teclas se calculará o valor correspondente, o qual será armazenado no registrador correspondente; caso contrário, ao se pressionar uma dessas cinco teclas, simplesmente se estará armazenando o conteúdo do visor no registrador correspondente.

[6] Cuja função é apagar os registradores de armazenamento de dados, os registradores financeiros, os registradores da pilha operacional e ÚLTIMO X (*LAST X*), e o visor.

		depósitos/aplicações mensais (PMT).
i	Taxa de juros	Em função de PV, PMT e FV associados ao tempo. Quando se deseja calcular a taxa de juros de um financiamento (i) a partir do valor das parcelas (PMT) e do financiado (PV), ou determinar a taxa de rendimento (i) de uma aplicação em que um único valor foi depositado (PV) e depois de certo tempo foi resgatado (FV).
n	Número de períodos	Em função de PV, PMT e FV associados ao tempo. Quando se deseja calcular quanto tempo um capital (PV) deve ficar aplicado para se ter o direito de resgatar um valor desejado (FV), ou determinar quantas parcelas (n) seriam necessárias para se acumular certo valor de resgate (FV), ou saber quantas (n) parcelas fixas (PMT) serão necessárias para que um valor financiado (PV) seja pago, dada uma taxa de juros.

3. Regime de Capitalização a Juros Simples

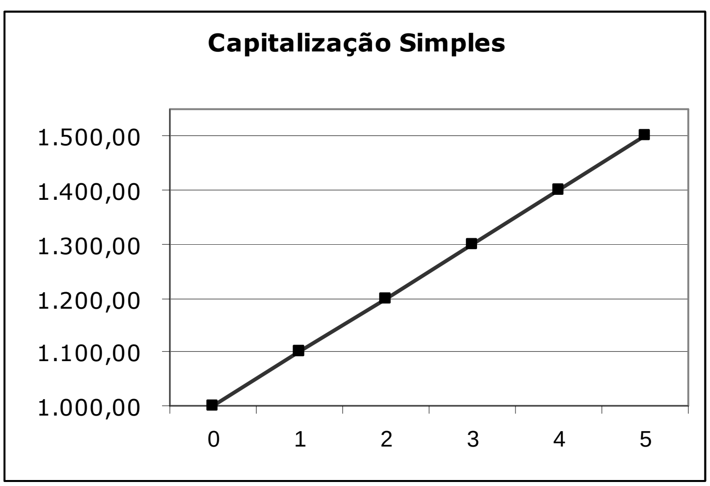
Antes de adentramos nos assuntos específicos, apresentamos os principais objetivos da Matemática Financeira, que são:

- Estudo do valor do dinheiro no tempo;
- Efetuar análises e comparações dos vários fluxos de entrada e saída de dinheiro verificados em diferentes momentos.

Importante!!!

Compatibilidade dos dados: *Se a taxa de juros for mensal, trimestral ou anual, os períodos deverão ser respectivamente, mensais, trimestrais ou anuais, de modo que os conceitos de taxas de juros e períodos sejam compatíveis, coerentes ou homogêneos. Situações onde isto não ocorre, serão estudadas à parte e deverão ser feitas conversões de unidades.*

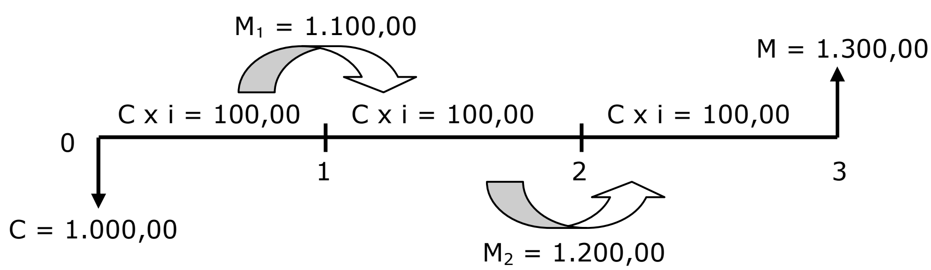
A definição de capitalização a juros simples se concentra na aplicação dos conceitos mais básicos de matemática. O valor do montante de uma dívida pode ser calculado de forma linear e muitas vezes até de maneira intuitiva. Matematicamente, o cálculo a Juros Simples é conhecido por cálculo linear de juros. Graficamente, tem-se:



Note que existe uma reta ligando os valores, isso é característica de uma função linear de 1º grau.

***(05) Exemplo*:** Demonstração do regime de capitalização simples para uma aplicação financeira de R$ 1.000,00 por um período de 3 meses a uma taxa de 10% ao mês.

n	Capital aplicado	Juros de cada período	Valor acumulado (Montante)
0	1.000,00	0,00	1.000,00
1	1.000,00	1.000,00 x 10% = 100,00	1.000,00 + 100,00 = 1.100,00
2	1.000,00	1.000,00 x 10% = 100,00	1.100,00 + 100,00 = 1.200,00
3	1.000,00	1.000,00 x 10% = 100,00	1.200,00 + 100,00 = 1.300,00



3.1 –Valor Futuro ou Montante (Simples)

Montante **(M)** é a soma do Capital **(C)** ou Valor Presente **(PV)** com os Juros **(J)**. O Montante também é conhecido como Valor Futuro **(FV)**. O Valor Futuro é dado por uma das fórmulas:

- Valor Futuro após período 1:

$\mathbf{FV_1}$ = PV + J = PV + (PV x i x 1) = **PV [1 + (i x 1)]** $\longrightarrow$ n = 1

- Valor Futuro após período 2:

$\mathbf{FV_2}$ = PV + J = PV + (PV x i x 2) = **PV [1 + (i x 2)]** $\longrightarrow$ n = 2

- Valor Futuro após período 3:

$\mathbf{FV_3}$ = PV + J = PV + (PV x i x 3) = **PV [1 + (i x 3)]** $\longrightarrow$ n = 3

- Valor Futuro após período ***n***:

Para um período **n**:

$$\mathbf{FV = PV\ .\ (1 + i\ .\ n)}$$

PELA HP-12C

Para o cálculo do Valor Futuro **(FV)**, basta introduzir (na ordem desejada) os valores conhecidos, conforme as instruções dos quadros abaixo:

1.	Digite o número de dias e pressione **[n]**.
2.	Digite a taxa de juros anual e pressione **[i]**.
3.	Digite o valor do principal e pressione **[CHS]**[7] **[PV]**.
4.	Aperte **[f] INT** para calcular e exibir os juros ordinários.
5.	Aperte **[+]** para calcular o valor futuro (principal + juros)

Observação: para calcular juros simples na HP-12C, **a taxa de juros (i) deverá ser expressa em ano e o número de períodos (n) expresso em dias**. As quantidades de **n**, **i** e **PV** podem ser informados em qualquer ordem.

***(06) Exemplo*:** Qual o valor de resgate de uma aplicação de R$ 3.975,59 aplicados em CDB pós-fixado de 90 dias, a uma taxa de 1,54% ao mês?

Dados:

PV = R$ 3.975,59

i = 1,54% a.m. (1,54% a.m. x 12 meses = 18,48% a.a.)

n = 90 dias (90 dias ÷ 30 dias = 3 meses)

FV = ?

Taxa Unitário
1,54% ÷ 100 = 0,0154

***Resolução*:** FV = PV x (1 + i x n)

FV = 3.975,59 x (1 + 0,0154 x 3)

FV = R$ 4.159,26

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor	
	[f] CLEAR [REG]	0,00	→ Limpar registradores
3.975,59	**[CHS]**	- 3.975,59	Inserção dos dados conhecidos
	[PV]	- 3.975,59	
90,00	**[n]**	90,00	
18,48	**[i]**	18,48	
	[f] INT	183,67	→ Juro
	[+]	4.159,26	→ Valor Futuro
R$ 4.159,26			

3.2 – Valor Presente ou Capital

[7] A tecla **[CHS]** é pressionada para trocar o sinal do principal antes de armazená-lo. Isso é necessário devido à convenção para sinais de fluxos de caixa, que se aplica principalmente a cálculos de juros compostos.

A fórmula do Valor Capital **(C)** ou Valor Presente **(PV)** pode ser deduzida a partir da fórmula do Montante **(M)** ou Valor Futuro **(FV)**.

Assim:

$$FV = PV\ (1 + i \times n) \Leftrightarrow PV\ (1 + i \times n) = FV$$

Colocando o **PV** em evidência, teremos:

$$\mathbf{PV = \frac{FV}{(1 + i\ .\ n)}}$$

PELA HP-12C

1.	Digite valor futuro e pressione **[ENTER]**.
2.	Digite 1 e pressione **[ENTER]**.
3.	Digite a taxa de juros (unitário) e pressione **[ENTER]**.
4.	Digite o período e pressione **[X]**.
5.	Pressione **[+] [÷]** para calcular e exibir o valor presente.

Note que não são utilizadas as teclas financeiras para o calculo do valor presente (PV). Isso ocorre porque a calculadora HP-12C não calcula, diretamente, o valor presente pelas teclas financeiras, sendo possível apenas com cálculo matemático da fórmula.

***(07) Exemplo*:** Determine o valor da aplicação cujo valor de resgate bruto foi de R$ 4.248,00 por um período de 3 meses, sabendo-se que a taxa da aplicação foi de 1,77% ao mês.

Dados:

FV = R$ 4.248,00

i = 1,77% a.m.

n = 3 meses (3 meses x 30 dias = 90 dias)

PV = ?

***Resolução*:**

$$PV = \frac{FV}{(1 + i \times n)}$$

$$PV = \frac{4.248,00}{(1 + 0,0177 \times 3)}$$

Taxa Unitário
1,77% ÷ 100 = 0,0177

$$PV = \frac{4.248,00}{(1,0531)}$$

PV = R$ 4.033,80

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
4.248,00	**[ENTER]**	4.248,00
1,00	**[ENTER]**	1,00
0,0177	**[ENTER]**	0,0177
3,00	**[X]**	0,0531
	[+]	1,0531
	[÷]	4.033,80
	R$ 4.033,80	

3.3 – Cálculo dos Juros Simples

É a mais simples forma de cálculo na Matemática Financeira. Podemos entender os juros simples como sendo o sistema de capitação linear. O regime de juros será simples quando o percentual de juros incidir apenas sobre o valor do capital inicial, ou seja, sobre os juros gerados, a cada período, não incidirão novos juros.

É composto da seguinte Fórmula:

$$J = PV \cdot i \cdot n$$

Lembre-se: no regime de juros simples, a taxa incide sobre o capital inicial aplicado, sendo proporcional ao seu valor e ao tempo de aplicação.

Colocando o **PV** em evidência, teremos:

$$PV = \frac{J}{(i \cdot n)}$$

Colocando o **n** em evidência, teremos:

$$n = \frac{J}{(i \cdot PV)}$$

Colocando o **i** em evidência, teremos:

$$i = \frac{J}{(n \cdot PV)}$$

Se considerarmos o Valor Futuro **(FV)** como sendo **FV = PV + J** e que juro **(J)** seja **J = PV x i**, podemos então deduzir que da relação entre duas formulas teremos:

$$i = \frac{FV}{PV} - 1$$

É conveniente observar que os juros simples podem ser:

- **Exatos**: quando se emprega na unidade de tempo o calendário civil – ano com 365 ou 366 dias; mês com 28, 29, 30 ou 31 dias, conforme o caso.
- **Ordinários (Comercial)**: quando se emprega na unidade de tempo o calendário comercial – ano com 360 dias e mês com 30 dias.

Vamos utilizar em nosso curso apenas os **juros ordinários** (ano comercial), por ser o usual nas instituições financeiras.

PELA HP-12C

A HP-12C calcula automaticamente juros simples ordinários (utilizando o ano comercial de 360 dias) e exatos (utilizando um ano de 365 dias). É possível exibir no visor qualquer um dos dois resultados.

Observe os principais passos para calcular juros simples ordinários e exatos simultaneamente:

1.	Digite o número de dias e pressione **[n]**.
2.	Digite a taxa de juros anual e pressione **[i]**.
3.	Digite o valor do principal e pressione **[CHS] [PV]**.
4.	Aperte **[f] INT** para calcular e exibir os juros ordinários.
5.	Se você quiser exibir os juros exatos, pressione **[R↓] [x ≤≥ y]**
6.	Aperte **[+]** para calcular o valor futuro (principal + juros)

Observação: para calcular juros simples na HP-12C, **a taxa de juros (i) deverá ser expressa em ano e o número de períodos (n) expresso em dias**. As quantidades de **n**, **i** e **PV** podem ser informados em qualquer ordem.

***(08) Exemplo*:** Determine o juro obtido com um capital de R$ 1.250,23 durante 5 meses com taxa de 5,5% ao mês.

Dados:

PV = R$ 1.250,23

i = 5,5% a.m.

n = 5 meses

J = ?

***Resolução*:** J = PV x i x n

J = 1.250,23 x 0,055 x 5

Taxa Unitário
5,5% ÷ 100 = 0,055

J = R$ 343,81 (Juros Comercial)

Na resolução pela HP-12C de juros simples, primeiramente transformaremos o prazo sempre em dias e a taxa sempre ao ano. Ou seja: 5 meses x 30 dias = 150 dias e 5,5% a.m. x 12 meses = 66% a.a.

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor	
	[f] CLEAR [REG]	0,00	→ Limpar registradores
1.250,23	**[CHS]**	-1.250,23	Inserção dos dados conhecidos
	[PV]	- 1.250,23	
150,00	**[n]**	150,00	
66,00	**[i]**	66,00	
	[f] INT	343,81	→ Resultado
R$ 343,81			→ Juros Comercial
	[R↓] [x <> y]	339,10	→ Resultado
R$ 339,10			→ Juros Exato

3.4 – Taxas Proporcionais e Equivalentes a Juros Simples

Em inúmeras operações o prazo a que se refere a taxa de juros e o prazo de capitalização dos juros não são coincidentes. O juro pode ser capitalizado em prazo inferior ao da taxa, devendo-se nesta situação ser definido como o prazo da taxa será rateado ao período de capitalização.

Por exemplo, sabe-se que a Caderneta de Poupança paga uma taxa de juros de 6% ao ano, a qual é capitalizada ao principal todo mês através de um percentual proporcional de 0,5%. Tem-se aqui, então, dois prazos – prazo da taxa: ao ano, e prazo de capitalização: ao mês.

No regime de juros simples a transformação do prazo específico da taxa para o de capitalização, ou de maneira inversa, é processada pela denominada taxa proporcional de juros, obtida da divisão entre a taxa de juros considerada na operação e o número de vezes em que ocorrerão os juros (quantidade de períodos de capitalização).

Voltando ao exemplo da Caderneta de Poupança de 6% juros ao ano capitalizado mensalmente (ocorrerão 12 vezes juros no período de um ano), o percentual de juros que incidirá sobre o capital a cada mês será:

$$\text{Taxa Proporcional} = \frac{6\%}{12} = 0{,}5\% \text{ ao mês}$$

As taxas de juros simples se dizem equivalentes quando aplicadas a um mesmo capital e pelo mesmo intervalo de tempo, produzem o mesmo volume linear de juros.

Por exemplo, em juros simples, um capital de R$ 5.000,00, se aplicado a 2,5% ao mês ou 15% ao semestre pelo prazo de um ano, produz o mesmo montante linear de juros:

J (2,5% a.m.) = 5.000,00 x 0,025 x 12 = R$ 1.500,00

J (15% a.s.) = 5.000,00 x 0,15 x 2 = R$ 1.500,00

Os juros produzidos pelas duas taxas lineares de juros são iguais, logo são definidas como equivalentes.

3.5 – Exercícios Propostos

1. Calcule os juros de um investimento de R$ 2.500,00 à taxa de 8,4% ao ano, pelo prazo de 1 ano. *Resposta: R$ 210,00*
2. Calcule os juros de uma aplicação de R$ 600,00 á uma taxa de 3% ao mês, durante 90 dias. *Resposta: R$ 53,26*
3. Calcule o montante de uma aplicação de R$ 4.500,00 à taxa de 23% ao ano, durante 145 dias. *Resposta: R$ 4.916,88*
4. Calcule o montante de um empréstimo de R$ 450,00 à uma taxa de 5% ao mês, durante 23 dias. *Resposta: R$ 467,01*
5. Um contrato de empréstimo prevê juros simples de 12% ao ano. Qual o valor dos juros cobrados sobre um principal de R$ 890,00 num prazo de 56 dias. *Resposta: R$ 16,61*
6. Qual é o capital que, à taxa de 10% ao ano, em 25 dias, produz o montante de R$ 7.280,45? *Resposta: R$ 7.230,24*
7. Determinar o capital e os juros cuja soma, no fim de 5 meses, à taxa de 5,5%ao ano, atingiu R$ 17.676,00. *Resposta: C = R$ 17.280,00 e J = R$ 396,00*
8. Determinar a que taxa mensal esteve aplicado um capital de R$ 48.000,00 que, em 3 meses e 20 dias, rendeu R$ 440,00 de juros. *Resposta: 0,25% ao mês*

9. Determinar em quantos meses um capital de R$ 32.000,00 aplicado à taxa de 12% ao ano, rendeu R$ 4.800,00 de juros simples. *Resposta: 15 meses*

10. Uma pessoa aplicou R$ 215.000,00 do seguinte modo: R$ 125.000,00 à 15% a.a.; R$ 90.000,00 a uma taxa desconhecida. Sabendo que, ao fim de 6 meses, a primeira importância tinha rendido $ 1.250,00 a mais do que a segunda, determine a taxa da segunda aplicação. *Resposta: 1,50 a.m.*

11. Calcular a taxa anual proporcional a:

a) 6% ao mês; *(Resposta: 72% ao ano)*
b) 10% ao bimestre. *(Resposta: 60% ao ano)*

12. Calcular a taxa de juros semestral proporcional a:

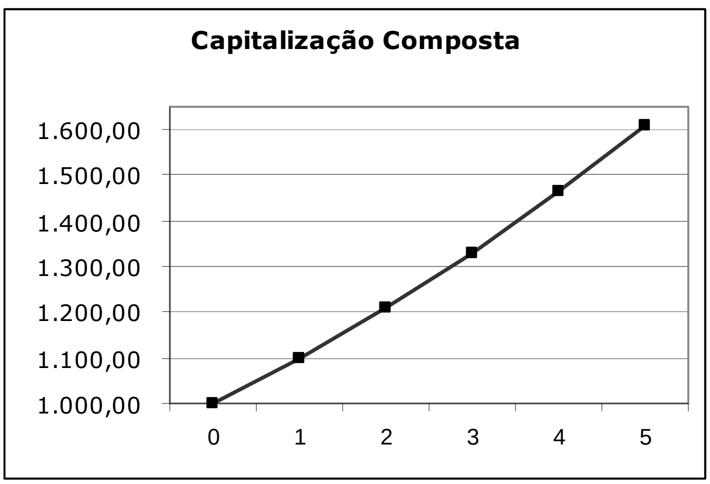
a) 60% ao ano; *(Resposta: 30% ao semestre)*
b) 9% ao trimestre. *(Resposta: 18% ao semestre)*

4.

Regime de Capitalização em Juros Compostos

Podemos entender os Juros Compostos como sendo o que popularmente chamamos de **juros sobre juros**. Mas, na verdade, o correto é afirmar que os juros incidem sobre o montante.

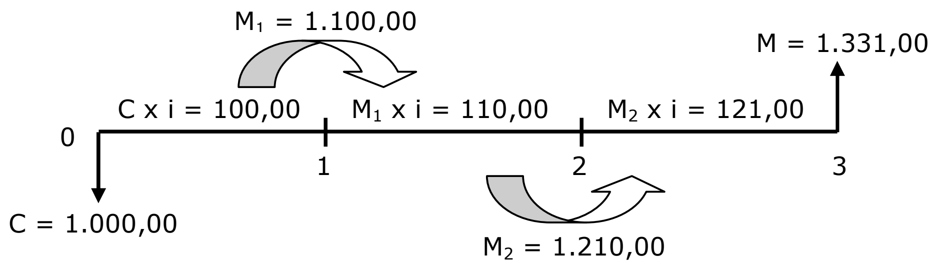
O regime de Juros Compostos é o mais comum no sistema financeiro e, portanto, o mais útil para cálculos de problemas do dia-a-dia. Os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte. Matematicamente, o cálculo a Juros Compostos é conhecido por cálculo exponencial de juros. Graficamente, tem-se:



Note que existe uma curva no gráfico, indicando que nele há uma função exponencial.

***(09) Exemplo*:** Demonstração do regime de capitalização composta para uma aplicação financeira de R$ 1.000,00 por um período de 3 meses a uma taxa de 10% ao mês.

n	Capital aplicado	Juros de cada período	Valor acumulado (Montante)
0	1.000,00	0,00	1.000,00
1	1.000,00	1.000,00 x 10% = 100,00	1.000,00 + 100,00 = 1.100,00
2	1.100,00	1.100,00 x 10% = 110,00	1.100,00 + 110,00 = 1.210,00
3	1.210,00	1.210,00 x 10% = 121,00	1.210,00 + 121,00 = 1.331,00



4.1 – Valor Futuro ou Montante (Composto)

Para encontrarmos o Montante **(M)** ou Valor Futuro **(FV)** de uma operação comercial ou financeira, vamos considerar um Valor Presente **(PV)**, uma Taxa **(i)** e calculemos o Valor Futuro **(FV)** obtido a juros compostos, após **(n)** Períodos de tempo.

- Valor Futuro após período 1:

$\mathbf{FV_1} = PV + PV \times i = \mathbf{PV\ (1 + i)^1} \longrightarrow n = 1$

- Valor Futuro após período 2:

$\mathbf{FV_2} = FV_1 + FV_1 \times i = PV\ (1 + i)\ (1 + i) = \mathbf{PV\ (1 + i)^2} \longrightarrow n = 2$

- Valor Futuro após período 3:

$\mathbf{FV_3} = FV_2 + FV_2 \times i = FV_2\,(1 + i) = PV\ (1 + i)^2\ (1 + i) = \mathbf{PV\ (1 + i)^3} \longrightarrow n = 3$

- Valor Futuro após período ***n***:

Para um período **n**:

$$\mathbf{FV = PV\ .\ (1+i)^n}$$

PELA HP-12C

Lembrando: nas calculadoras financeiras é possível calcular diretamente qualquer uma das variáveis da formula $\mathbf{FV = PV\ .\ (1+i)^n}$, para tanto é preciso que sejam conhecidas três variáveis para que seja calculada a quarta variável.

Para o cálculo do Valor Futuro **(FV)**, basta introduzir (na ordem desejada) os valores conhecidos, conforme as instruções dos quadros abaixo:

1.	Digite o número de períodos e pressione **[n]**.
2.	Digite a taxa de juros e pressione **[i]**.
3.	Digite o valor do principal e pressione **[CHS] [PV]**.
4.	Pressione **[FV]** para calcular e exibir o valor futuro.

***(10) Exemplo*:** Calcular o montante de um capital de R$ 5.000,00 pelo prazo de 5 meses à uma taxa de 4% ao mês.

Dados:

PV = R$ 5.000,00

i = 4% a.m.

n = 5 meses

FV = ?

***Resolução*:**

$FV = PV \times (1+i)^n$

$FV = 5.000,00 \times (1+0,04)^5$

$FV = 5.000,00 \times (1,04)^5$

$FV = 5.000,00 \times (1,2166529)$

FV = R$ 6.083,26

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor	
	[f] CLEAR [REG]	0,00	Limpar registradores
5.000,00	**[CHS]**	- 5.000,00	
	[PV]	- 5.000,00	Inserção dos dados conhecidos
5,00	**[n]**	5,00	
4,00	**[i]**	4,00	
	[FV]	6.083,26	Resultado
R$ 6.083,26			

4.2 – Valor Presente ou Capital

A fórmula do Valor Presente **(PV)** pode ser facilmente obtida a partir da fórmula do Valor Futuro **(FV)**, basta isolar a variável **(PV)** e dividir o **FV** pelo coeficiente do **PV**, ou seja, $\mathbf{(1+i)^n}$. Sendo assim teremos:

$$FV = PV\,(1 + i)^n \Leftrightarrow PV\,(1 + i)^n = FV \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{PV = \frac{FV}{(1 + i)^n}}$$

PELA HP-12C

1.	Digite o número de períodos e pressione **[n]**.
2.	Digite a taxa de juros e pressione **[i]**.
3.	Digite o valor futuro e pressione **[CHS] [FV]**.
4.	Pressione **[PV]** para calcular e exibir o valor presente.

***(11) Exemplo*:** No final de dois anos, um correntista deverá efetuar um pagamento de R$ 2.000,00 a um banco, referente ao valor de um empréstimo contratado na data de hoje, mais os juros devidos, correspondente a uma taxa de 4% ao mês. Qual o valor emprestado?

Dados:

FV = R$ 2.000,00

i = 4% a.m.

n = 2 anos = 24 meses

PV = ?

***Resolução*:**

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$$

$$PV = \frac{2.000,00}{(1+0,04)^{24}} \Leftrightarrow PV = \frac{2.000,00}{(1,04)^{24}} \Leftrightarrow PV = \frac{2.000,00}{2,563304165}$$

PV = R$ 780,24

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor	
	[f] CLEAR [REG]	0,00	→ Limpar registradores
2.000,00	**[CHS]**	- 2.000,00	Inserção dos dados conhecidos
	[FV]	- 2.000,00	
24,00	**[n]**	24,00	
4,00	**[i]**	4,00	
	[PV]	780,24	→ Resultado
R$ 780,24			

4.3 – Prazo (período)

O cálculo do Prazo (período) pelo Regime de Capitalização Composta não é possível por meio de uma fórmula simples como visto no Regime de Capitalização Simples. Neste caso, é necessário calcular através de logaritmo.

Para o cálculo do prazo (n), apresentaremos a fórmula:

$$FV = PV\,(1 + i)^n \Leftrightarrow PV\,(1 + i)^n = FV \Leftrightarrow$$

$$(1 + i)^n = \frac{FV}{PV} \Leftrightarrow n.\,\text{Log}\,(1 + i) = \text{Log}\frac{FV}{PV}$$

$$\mathbf{n = \frac{Log\,\frac{FV}{PV}}{Log\,(1 + i)}}$$

ou

$$\mathbf{n = \frac{Log\,FV - Log\,PV}{Log\,(1 + i)}}$$

PELA HP-12C

1.	Digite o valor presente e pressione **[CHS] [PV]**.
2.	Digite o valor futuro e pressione **[FV]**.
3.	Digite a taxa de juros e pressione **[i]**.
4.	Aperte **[n]** para calcular e exibir o número de períodos (prazo).

***(12) Exemplo*:** Em que prazo um empréstimo de R$ 4.278,43 pode ser liquidado em um único pagamento de R$ 6.559,68, sabendo-se que a taxa contratada é de 3,25% ao mês?

Dados:

PV = R$ 4.278,43

FV = R$ 6.559,68

i = 3,25% a.m.

n = ?

***Resolução*:**

$$n = \frac{\text{Log FV} - \text{Log PV}}{\text{Log}\,(1 + i)}$$

$$n = \frac{\text{Log } 6.559{,}68 - \text{Log } 4.278{,}43}{\text{Log } (1 + 0{,}0325)}$$

$$n = \frac{\text{Log } 6.559{,}68 - \text{Log } 4.278{,}43}{\text{Log } (1{,}0325)}$$

$$n = \frac{8{,}78869710 - 8{,}36134139}{0{,}031983046}$$

$$n = \frac{0{,}4273557}{0{,}031983046}$$

$n = 13{,}36$ meses

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor	
	[f] CLEAR [REG]	0,00	Limpar registradores
4.278,43	**[CHS]**	- 4.278,43	Inserção dos dados conhecidos
	[PV]	- 4.278,43	
6.559,68	**[FV]**	6.559,68	
3,25	**[i]**	3,25	
	[n]	14	Resultado
14 meses			

Observe que na resolução pela HP-12C que, quando efetuamos o cálculo usando as teclas financeiras, **o prazo retorna em períodos inteiros**. Na verdade, **qualquer prazo efetuado através da HP-12C será sempre arredondado para maior**. Neste caso, se houver a necessidade de saber o período exato devemos usar a função **[FRAC]**.

Através da função **[FRAC]** é possível eliminar a parte inteira de um número e manter a parte fracionária. O inverso, ou seja, eliminar a parte fracionária de um número e manter a parte inteira, ocorre através da função **[INTG]**.

Vamos comprovar:

Tomando com base a resolução do exemplo anterior, temos que o prazo foi de 13,36194504 meses. Observe que existe uma parte fracionária que, neste caso, representa a quantidade de dias (0,36194504). Para calcularmos a quantidade de dias, basta multiplicar a parte fracionária por 30 dias (mês comercial).

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
13,36194504	[g]	13,36194504
	[FRAC]	0,361945040
30	[X]	10,85835120
11 dias		

No caso de dias, poderemos arredondar o número para maior, então poderemos dizer que a resposta exata do exemplo seja **13 meses e 11 dias**.

4.4 – Taxa

Para calcularmos a Taxa de juros em uma operação de juros compostos é necessário conhecer o Valo Futuro **(FV)** e o Valor Presente **(PV)**, e o período **(n)** de tempo da operação financeira.

Assim teremos:

$$FV = PV\,(1 + i)^n \Leftrightarrow PV\,(1 + i)^n = FV \Leftrightarrow$$

$$(1 + i)^n = \frac{FV}{PV} \Leftrightarrow$$

$$i = \left\{ \left[\frac{FV}{PV} \right]^{1/n} - 1 \right\} . 100$$

Multiplica-se por 100 (cem), na fórmula acima, para encontrar a taxa de juros em percentuais, visto que para todas as fórmulas em matemática financeira utiliza-se a taxa de juros unitária, ou seja, sem essa operação de multiplicação o resultado obtido seria de taxa de juros unitário e não em percentuais habitualmente usado.

PELA HP-12C

1.	Digite o número de períodos e pressione **[n]**.
2.	Digite o valor presente e pressione **[CHS] [PV]**.
3.	Digite o valor futuro e pressione **[FV]**.
4.	Pressione **[i]** para calcular e exibir a taxa de juros.

***(13) Exemplo*:** Uma loja financia a venda de uma máquina no valor de R$ 1.210,72, sem entrada, para pagamento em uma única prestação de R$ 1.695,01 no final de 270 dias. Qual a taxa mensal cobrada pela loja?

Dados:

PV = R$ 1.210,72

FV = R$ 1.695,01

n = 270 dias (270 dias ÷ 30 dias = 9 meses).

i = ?

***Resolução*:**

$$i = \left\{ \left[\frac{FV}{PV} \right]^{1/n} - 1 \right\} . 100$$

$$i = \left\{ \left[\frac{1.695,01}{1.210,72} \right]^{1/9} - 1 \right\} . 100$$

$$i = \{(1,40)^{0,111} - 1\} . 100$$

$$i = \{1,038093580 - 1\} . 100 \Leftrightarrow i = \{0,038093580\} . 100$$

$$i = 3,81\% \text{ a.m.}$$

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor	
	[f] CLEAR [REG]	0,00	Limpar registradores
1.210,72	**[CHS]**	- 1.210,72	Inserção dos dados conhecidos
	[PV]	- 1.210,72	
1.695,01	**[FV]**	1.695,01	
9	**[n]**	9	
	[i]	3,809358	Resultado
3,81% a.m.			

4.5 – Cálculo dos Juros Compostos

Como visto, o juros simples é calculado através da fórmula **J = PV x i x n**, neste caso para acharmos os juros de uma aplicação de R$ 1.000,00 para um período de 5 meses com uma taxa de 10% ao mês, basta efetuar uma simples operação de multiplicação:

J = 1.000,00 x 0,10 x 5 = R$ 500,00

No caso dos juros compostos, a fórmula que calcula os juros é a seguinte:

$$J = - PV + FV \Leftrightarrow J = - PV + PV\ (1 + i)^n \Leftrightarrow$$

$$J = PV \cdot [(1 + i)^n - 1]$$

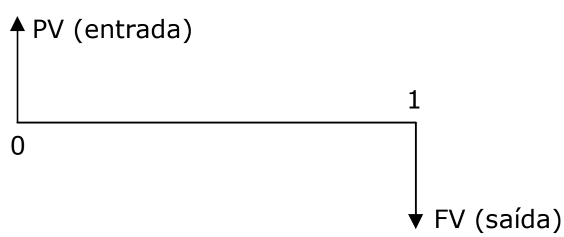
PELA HP-12C

Para operar com juros compostos na 12C, você precisa sempre ter uma incógnita. Suas principais variáveis são: **n** (número de períodos), **i** (taxa de juros), **PV** (capital principal ou inicial) e **FV** (montante ou valor futuro). Lembre-se de que a taxa de juros e o número de períodos devem estar na mesma unidade de tempo. A partir daí, basta introduzir (na ordem desejada) os valores conhecidos.

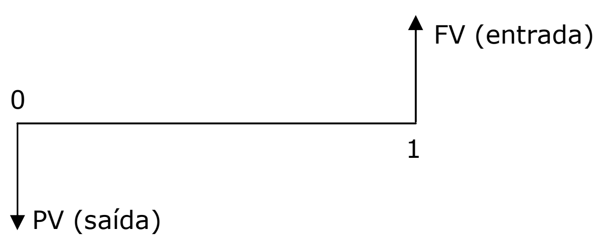
Na HP-12C a tecla **[CHS]** (do inglês *Change Sign*) serve para introduzir ou tirar um sinal negativo de um número, ou seja, é pressionada para trocar o sinal do principal antes de armazená-lo. Isso é necessário devido à convenção para sinais de fluxos de caixa, que se aplica principalmente a cálculos de juros compostos.

Fixando: é importante ressaltar que a HP-12C precisa de ajuda para comparar o fluxo de caixa, ou seja, é preciso informar quando temos uma entrada ou uma saída. Observe os fluxos de caixa a seguir:

- Do ponto de vista de quem recebe um empréstimo:



- Do ponto de vista do emprestador:



***(14) Exemplo*:** Calcular os juros de capital de R$ 1.000,00 pelo prazo de 5 meses à taxa de 10% ao mês.

Dados:

PV = R$ 1.000,00

i = 10% a.m.

n = 5 meses

J = ?

Resolução: $J = PV \times [(1+i)^n - 1]$

$J = 1.000,00 \times [(1+0,10)^5 - 1]$

$J = 1.000,00 \times [1,61051 - 1]$

$J = 1.000,00 \times [0,61051]$

J = R$ 610,51

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
1.000,00	**[CHS]**	- 1.000,00
	[PV]	- 1.000,00
5,00	**[n]**	5,00
10,00	**[i]**	10,00
	[FV]	1.610,51
	[RCL]	1.610,51
	[PV]	-1000,00
	[+]	610,51
	R$ 610,51	

4.6 – Taxas Equivalentes a Juros Compostos

Duas taxas ou mais são consideradas equivalentes, a juros compostos, quando aplicadas a um mesmo capital, por um período de tempo equivalente e geram o mesmo rendimento. Em outras palavras, dizemos que duas ou mais taxas são equivalentes quando um valor é aplicado por um prazo e, calculado o montante com as diversas taxas, obtemos o mesmo resultado.

Por essa definição, teremos:

$$i_{eq} = \left\{ \left[1 + i_c \right]^{qq/qt} - 1 \right\} . 100$$

Onde:

$i_{(eq)}$ = taxa equivalente;

i_c = taxa conhecida;

qq = quanto eu quero (o prazo da taxa a ser calculada); e

qt = quanto eu tenho (o prazo da operação que foi informada).

Vale lembrar que os prazos, tanto o **prazo que tenho** como o **prazo que quero**, **devem estar sempre na mesma unidade de tempo**.

PELA HP-12C

1.	Digite a taxa conhecida **(i_c)** e pressione **[ENTER]**.
2.	Digite 100 e pressione **[÷]**.
3.	Digite 1 e pressione **[+]**.
4.	Digite o prazo da taxa a ser calculada **(qq)** e pressione **[ENTER]**.
5.	Digite o prazo da taxa informada **(qt)** e pressione **[÷] [y^x]**.
6.	Digite 1 e pressione **[-]**.
7.	Digite 100 e pressione **[x]**.

***(15) Exemplo*:** Calcular a equivalência ao mês da taxa 79,5856% ao ano.

Dados:

i_c = 79,5856% a.a.

i_{eq} = ?

***Resolução*:**

$i_{eq} = \{(1 + i_c)^{qq/qt} - 1\} . 100$

$i_{eq} = \{(1 + 0,795856)^{30/360} - 1\} . 100$

$i_{eq} = \{(1,795856)^{0,083333} - 1\} . 100$

$i_{eq} = \{1,04999998 - 1\} . 100$

$i_{eq} = \{0,04999998\} . 100$

i_{eq} = 5,00% a.m.

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
79,5856	**[ENTER]**	79,5856
100,00	**[÷]**	0,795856
1,00	**[+]**	1,795856
30,00	**[ENTER]**	30,00
360,00	**[÷]**	0,083333
	[y^x]	1,049999
1,00	**[-]**	0,049999
100,00	**[x]**	4,999998
5,00% a.m.		

4.7 – Taxa Efetiva, Taxa Líquida, Taxa Real e Taxa de Inflação

O conceito de Taxa Efetiva **(i_{te})** de juros pode ser entendido como sendo o ganho real para uma aplicação, por um determinado período, sem considerarmos a Taxa de Inflação **(i_k)**, ou seja, a Taxa Efetiva tem seu foco direcionado para medir o ganho efetivo de uma determinada aplicação.

A Taxa Líquida **(i_{tl})** é assim chamada quando reduzida de possíveis custos financeiros, o que não deve ser confundido com a Taxa Real **(i_r)** de juros que compara uma determinada taxa em um período de tempo com a inflação ou custo de oportunidade do mesmo período.

Embora a Taxa de Inflação seja calculada por órgãos que fazem levantamentos estatísticos de preços no mercado, sempre será possível "projetar" a Taxa de Inflação **(i_k)** através dos valores que o mercado financeiro apresenta.

Assim teremos:

$$i_{te} = \{(1 + i)^{qq/qt} - 1\} . 100$$

$$i = \left\{ \left[\frac{(1 + i)}{(1 + i_r)} \right] - 1 \right\} . 100$$

$$i_{tl} = \left[\frac{\text{Rendimento Líquido}}{\text{Valor Presente}} \right]$$

$$i_r = \left\{ \left[\frac{(1 + i)}{(1 + i_k)} \right] - 1 \right\} . 100$$

Onde:

i_{te} = taxa efetiva;

i_k = taxa da inflação;

i_{tl} = taxa líquida;

i_r = taxa real;

qq = quanto eu quero (o prazo da taxa a ser calculada); e

qt = quanto eu tenho (o prazo da operação que foi informada).

(16) Exemplo: Uma aplicação durante o ano de 2006 rendeu 9,5% ao ano, sabendo-se que a taxa de inflação do período foi de 5,8% ao ano, determine a taxa real de juros.

Dados:

i_k = 5,8% a.a.

i = 9,5% a.a.

i_r = ?

Resolução:

$$i_r = \left\{ \left[\frac{(1 + i)}{(1 + i_k)} \right] - 1 \right\} . 100$$

$i_r = \{[(1 + i) \div (1 + i_k)] - 1\} . 100$

$i_r = \{[(1 + 0{,}095) \div (1 + 0{,}058)] - 1\} . 100$

$i_r = \{[1{,}095 \div 1{,}058] - 1\} . 100 = \{1{,}034972 - 1\} . 100$

$i_r = 0{,}034972 . 100$

i_r = 3,5% a.a.

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
1,095	**[CHS]**	-1,095
	[FV]	-1,095
1,058	**[PV]**	1,058
1,00	**[n]**	1,00
	[i]	3,50
	3,50% a.m.	

A – Explicações Adicionais

1. Taxa: É o percentual da remuneração do capital.
2. Taxa Nominal: A taxa é nominal quando sua unidade de tempo difere daquela referida no período de capitalização. Geralmente, a taxa nominal é expressa em anos. Exemplo: 24% ao ano capitalizado mensalmente. (2% ao mês).
3. Taxa Proporcional: A proporcionalidade de taxas é realizada como se estivéssemos trabalhando com juros simples. Exemplo: 12% ao ano é proporcional a 1% ao mês.
4. Taxa Efetiva: Uma taxa é efetiva quando sua unidade de tempo coincide com a referida no período de capitalização. (A taxa nominal é convertida para taxa efetiva). Exemplo: 2% ao mês capitalizado mensalmente.

4.8 – Exercícios Propostos

1. Calcule o montante final de um empréstimo de R$ 4.500,00, durante 18 meses, a uma taxa de 8,5% ao mês. *Resposta: R$ 19.541,05*

2. Calcule o montante final de um financiamento de R$ 500,00, durante 7 anos, a uma taxa de 4% ao mês. *Resposta: R$ 13.482,50*

3. Calcule o montante de uma aplicação de R$ 789,00 durante 6 meses, a uma taxa de juros de 2,5% ao mês. *Resposta: R$ 915,00*

4. Calcule o montante de um empréstimo de R$ 450,00 a uma taxa de 12% ao mês, durante 7 meses. *Resposta: R$ 994,81*

5. Calcule o montante de uma aplicação de R$ 100,00 a uma taxa de 1% ao mês, durante 120 meses. *Resposta: R$ 330,04*

6. Pedro pagou para um banco R$ 125,00, referente a um empréstimo que contraiu há 4 meses atrás, a uma taxa de 5% ao mês. Quanto Pedro pegou? *Resposta: R$ 102,84*

7. João resgatou de sua conta de investimento R$ 9.890,00. Quanto ele depositou 24 meses atrás, considerando uma taxa de juros de 6% ao mês? Resposta: R$ 2.442,62

8. A empresa ABC pagou R$ 25.000,00 para quitar um empréstimo obtido há 8 meses atrás. A taxa de juros foi 3,5% ao mês, de quanto foi o empréstimo? *Resposta: R$ 18.985,29*

9. Madalena resgatou de sua poupança R$ 10.000,00. Quanto ela depositou 15 anos atrás, considerando uma taxa de 11% ao ano. *Resposta: R$ 2.090,04*

10. Paulo pegou um empréstimo de R$ 1.000,00. Sete meses depois ele pagou R$ 2.000,00 para quitar a divida. Qual foi a taxa de juros praticada? Resposta: 10,41%

11. Joana pediu emprestado R$ 500,00 para uma amiga. Dentro de 12 meses, ela acertou que só poderia pagar R$ 800,00. Qual é a taxa de juros desse empréstimo? *Resposta: 3,99%*

12. A empresa FOCOS pagou R$ 90.000,00 para quitar um empréstimo de R$ 62.000,00, obtido 20 meses atrás. Qual foi a taxa de juros dessa operação? *Resposta: 1,88%*

13. A empresa RTO pegou um financiamento de R$ 45.000,00. A previsão do gerente é de pagar R$ 67.500,00 daqui a 6 meses. Qual será a taxa de juros praticada? *Resposta: 6,99%*

14. Um banco emprestou para um correntista R$ 400,00. O empréstimo tem duração de 8 meses e prevê um montante de R$ 600,00. Qual é a taxa de juros? *Resposta: 5,20%*

15. Fábio precisa de um empréstimo de R$ 600,00. O banco quer uma taxa de juros de 6% ao mês, o que resultará num montante de R$ 900,00. Em quantos meses, Fábio

vai pagar esse empréstimo? *Resposta: 7 meses*

16. Alberto pegou emprestado de seu amigo R$ 350,00. Acertou que poderia pagar R$ 500,00, a uma taxa de juros de 4% ao mês. Qual a duração do empréstimo? *Resposta: 10 meses*

17. Samuel pagou R$ 576,00 para quitar um empréstimo de R$ 300,00. A taxa de juros foi de 9% ao mês, quantos meses levou para Samuel quitar a divida? *Resposta: 8 meses*

18. Carlos pagou R$ 900,00 para um parente, referente a um empréstimo de R$ 600,00. A uma taxa de juro de 2,5% ao mês, quantos meses durou esse empréstimo? *Resposta: 17 meses*

19. A empresa ALFA pagou R$ 145.000,00 para quitar um financiamento de R$ 92.000,00. A taxa de juros foi de 3% ao mês. Quantos meses durou esse financiamento? *Resposta: 16 meses*

20. Considere uma aplicação em CDB de 19,5% ao ano para um período de 33 dias. Observe ainda que a taxa de inflação para o mesmo período foi de 15% ao ano. Sabendo que o rendimento desta aplicação pagara imposto de 15%, pergunta-se: Qual a taxa efetiva e a taxa líquida desta aplicação? Qual a taxa real de juros? *Resposta: Taxa Efetiva = 1,65% a.p., Taxa Líquida = 1,40% a.p. e Taxa Real: 0,1087% a.p.*

5.

Descontos

5.1 – Desconto Simples

A operação de se liquidar um título antecipadamente envolve geralmente uma recompensa, ou um desconto pelo pagamento antecipado. Desta maneira, desconto pode ser entendido como a diferença entre o valor nominal de um título e o seu valor atualizado apurado n períodos antes de seu vencimento, ou seja:

Desconto = Valor Nominal – Valor Descontado

ou, ainda

Valor Descontado = Valor Nominal – Desconto

O uso do desconto simples é amplamente utilizado em operações de curto prazo, sendo identificados dois tipos de desconto: desconto racional ("por dentro") e desconto bancário ou comercial ("por fora").

5.1.1 – Desconto Racional Simples ("Por Dentro")

O desconto racional simples incorpora os conceitos e relações básicas de juros simples, conforme desenvolvido no terceiro capítulo.

Este tipo de desconto, raramente utilizado no mercado, difere pela base de cálculo, pois, nesse caso, o desconto incide sobre o Valor Atual **(Ar)** (ou valor descontado) do título em questão. Assim, para um título descontando **n** períodos de tempos antes de seu vencimento (prazo do desconto), a uma taxa periódica de desconto **i** e com um certo valor atual **Ar**, temos:

$$Dr = Ar \cdot i \cdot n$$

Pela própria definição de desconto, tem-se:

$$Dr = N - Ar$$

Onde:

Dr = Desconto Racional Simples; e

N = Valor Nominal (também chamado de valor de face ou valor de resgate) é o valor do título apontado na data de vencimento.

Como:

$$\boxed{Ar = C = \frac{N}{1 + i \times n}}$$

tem-se:

$$Dr = N - \frac{N}{1 + i \times n} \Leftrightarrow Dr = \frac{N(1 + i \times n) - N}{1 + i \times n} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{Dr = \frac{N \times i \times n}{1 + i \times n}}$$

***(17) Exemplo*:** Um título de valor nominal de R$ 25.000,00 é descontado 2 meses antes do seu vencimento, à taxa de juros simples de 2,5% ao mês. Qual o desconto racional? E qual é o valor atual?

Dados:

N = R$ 25.000,00

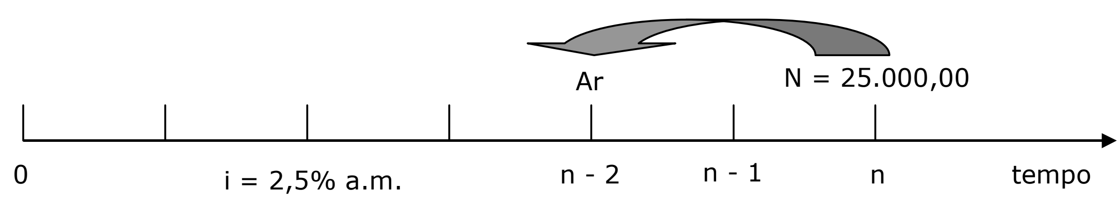
n = 2 meses

i = 2,5% a.m.

Dr = ?

Ar = ?

***Graficamente*:**



***Resolução*:** $Dr = \frac{N \times i \times n}{1 + i \times n}$

$$Dr = \frac{25.000,00 \times 0,025 \times 2}{1 + 0,025 \times 2}$$

$$Dr = \frac{1.250,00}{1,05}$$

Dr = R$ 1.190,48

Ar = N – Dr

Ar = 25.000,00 - 1.190,48

Ar = R$ 23.809,52

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
25.000,00	**[ENTER]**	25.000,00
0,025	**[x]**	625,00
2,00	**[x]**	1.250,00
1,00	**[ENTER]**	1,00
0,025	**[ENTER]**	0,025
2,00	**[x]**	0,05
	[+]	1,05
	[÷]	1.190,48
R$ 1.190,48		
	[CHS]	-1.190,48
25.000,00	**[+]**	23.809,52
R$ 23.809,52		

5.1.2 – Desconto Bancário ou Comercial Simples ("Por Fora")

Desconto Bancário[8] ou Desconto Comercial Simples ("Por Fora") é aquele que calcula os juros devidos ao período faltante para o vencimento do papel, abatendo essa importância da dívida, ou seja, é o valor obtido pelo cálculo do juro simples sobre o valor nominal (valor de face ou valor de resgate) de um determinado compromisso antes de seu vencimento. É importante ressaltar que, independente do prazo de vencimento do título, a base de cálculo sempre será o Valor Nominal **(N)**.

[8] Assim chamado pela sua ampla utilização nas operações comerciais e principalmente nas operações bancárias, tendo em vista que para as instituições financeiras este tipo de operação é muito mais interessante do ponto de vista financeiro que a operação de Desconto Racional Simples.

Observe que, ao contrário do desconto racional, que calculam os encargos sobre o capital efetivamente liberado na operação, ou seja, sobre o valor presente, o critério do desconto bancário apura os juros sobre o montante, indicando custos adicionais ao tomador de recursos.

Vamos expressar essa situação através da seguinte fórmula:

$$\mathbf{Dc = N\ .\ d\ .\ n}$$

Onde:

Dc = Desconto Comercial Simples;

d = taxa de desconto periódica; e

n = prazo de desconto.

Como visto, podemos definir Valor Atual **(Ac)** como sendo a diferença entre o Valor Nominal **(N)** e o desconto **(Dc)**, logo:

$$Ac = N - Dc \Leftrightarrow Ac = N - N \times d \times n \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{Ac = N\ .\ (1 - d\ .\ n)}$$

***(18) Exemplo*:** Um título de valor nominal de R$ 25.000,00 é descontado 2 meses antes do seu vencimento, à taxa de juros simples de 2,5% ao mês. Qual o desconto bancário? E qual é o valor atual?

Dados:

N = R$ 25.000,00

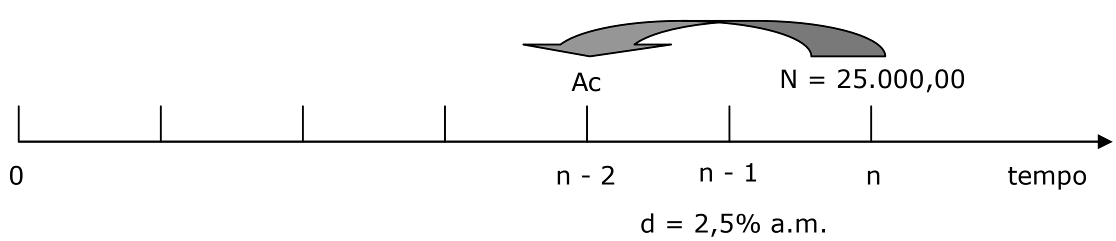
n = 2 meses

d = 2,5% a.m.

Dc = ?

Ac = ?

***Graficamente*:**



***Resolução*:**

Dc = N . d . n

Dc = 25.000,00 . 0,025 . 2

Dc = R$ 1.250,00

Ac = N – Dc

Ac = 25.000,00 - 1.250,00

Ac = R$ 23.750,00

PELA HP-12C

Primeiramente deve-se, como visto anteriormente ao se estudar Juros Simples, transformar o prazo **n** em dias e a taxa de desconto **d** ao ano, ou seja, o prazo de 2 meses corresponde a 60 dias (2 meses x 30 dias), e a taxa de desconto de 2,5% ao mês equivale (taxa proporcional – item 3.4) a 30% ao ano (2,5% x 12 meses), logo:

Digite	Pressione	Visor	
	[f] CLEAR [REG]	0,00	
25.000,00	[CHS]	- 25.000,00	Inserção de **N**
	[PV]	- 25.000,00	
30,00	[i]	30,00	Inserção de **i**
60,00	[n]	60,00	Inserção de **n**
	[f] [INT]	1.250,00	Resultado **Dc**
R$ 1.250,00			
	[-]	23.750,00	Resultado **Ac**
R$ 23.750,00			

ou

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
25.000,00	[ENTER]	25.000,00
0,025	[x]	625,00
2,00	[x]	1.250,00
R$ 1.250,00		
	[CHS]	-1.250,00
25.000,00	[+]	23.750,00
R$ 23.750,00		

a – Despesas Bancárias

É importante registrar que em operações de desconto com bancos comerciais são geralmente cobradas taxas adicionais de desconto a pretexto de cobrir certas despesas administrativas e operacionais. Estas taxas são geralmente prefixadas e incidem sobre o Valor Nominal **(N)** do título uma única vez no momento do desconto.

Chamando de **t** taxa administrativa cobrada pelos bancos em suas operações de desconto e incluindo esta taxa na fórmula de desconto bancário ("por fora"), tem-se:

$$Dc = N \times d \times n \Leftrightarrow Dc = (N \times d \times n) + (t \times N) \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{Dc = N \,.\, (d \,.\, n + t)}$$

De forma análoga, o Valor Descontado **(Ac)** incluindo a cobrança da taxa administrativa **t**, é apurado da seguinte forma:

$$Ac = N - Dc \Leftrightarrow Ac = N - N \,.\, (d \,.\, n + t) \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{Ac = N \,.\, [1 - (d \,.\, n + t)]}$$

***(19) Exemplo*:** Uma duplicata de valor nominal de R$ 60.000,00 é descontada num banco dois meses antes de seu vencimento. Sendo de 2,8% ao mês a taxa de desconto usado na operação, calcular o desconto e o valor descontado. Sabe-se ainda que o banco cobra 1,5% sobre o valor nominal do título, descontados integralmente no momento da liberação dos recursos, como despesas administrativas.

Dados:

N = R$ 60.000,00

n = 2 meses

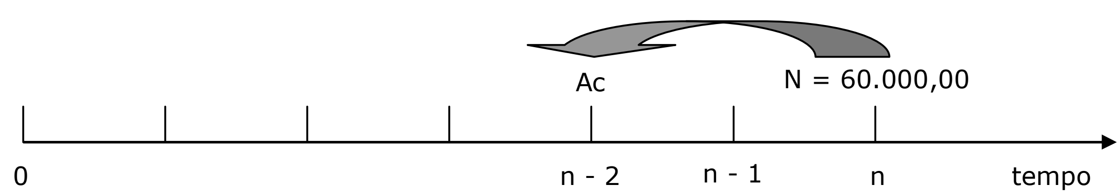
d = 2,8% a.m.

t = 1,5% sobre N

Dc = ?

Ac = ?

***Graficamente*:**



d = 2,8% a.m.

t = 1,5% sobre N

***Resolução*:**

$Dc = N \,.\, (d \,.\, n + t)$

$Dc = 60.000,00 \,.\, (0,028 \,.\, 2 + 0,015)$

$Dc = 60.000,00 \,.\, (0,071)$

Dc = R$ 4.260,00

Ac = N – Dc

Ac = 60.000,00 - 4.260,00

Ac = R$ 55.740,00

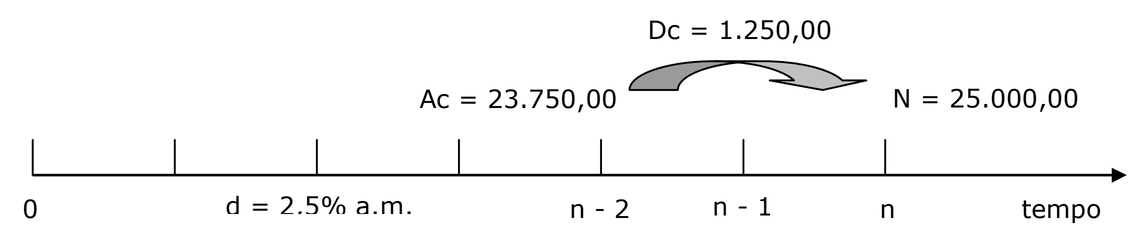
PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
60.000,00	[ENTER]	60.000,00
0,028	[ENTER]	0,028
2	[x]	0,056
0,015	[+]	0,071
	[x]	4.260,00
R$ 4.260,00		
	[CHS]	-1.250,00
60.000,00	[+]	55.740,00
R$ 55.740,00		

b – Taxa Efetiva de Juros do Desconto Bancário ou Comercial

É importante salientar que o Desconto Bancário, ao ser apurado sobre o Valor Nominal (**N**) do título, admite implicitamente uma taxa de juros superior àquela declarada para a operação.

Voltemos ao exemplo 18 acima (item 5.2). Observe que a taxa de juros (desconto) adotada de 2,5% ao mês não iguala **Ac** e **N** em nenhum momento do tempo. Ou seja, se aplicada ao Valor Atual **(Ac)** de R$ 23.750,00, não produz, para o período **(n)** de 2 meses, o Valor Nominal **(N)** de R$ 25.000,00 (atinge a: R$ 23.750,00 + 2,5% x 2 = R$ 24.937,50).



Logo, há uma taxa efetiva (implícita) de juros na operação, superior aos declarados 2,5% ao mês, que conduz **Ac** e **N** a um mesmo resultado no período. Essa taxa é obtida pelo critério de Desconto Racional ("por dentro"):

$$D = C \times i \times n \Leftrightarrow$$

$$i = \frac{D}{C \times n}$$

Resumidamente, os cálculos de apuração da taxa racional de juros podem ser substituídos pelo emprego direto da seguinte fórmula:

$$i = \frac{d \times n}{1 - d \times n}$$

Assim, para a obtenção da taxa de juros **(i)** da operação, basta tão-somente conhecer a Taxa de Desconto Bancário **(d)** e o Prazo do Desconto **(n)**. Aplicando essa fórmula no exemplo anterior, têm-se:

$$i = \frac{d \times n}{1 - d \times n} \quad \Leftrightarrow \quad i = \frac{0{,}025 \times 2}{1 - 0.025 \times 2} \quad \Leftrightarrow \quad i = \frac{0{,}05}{0.95} \quad \Leftrightarrow \quad i = 5{,}26\%\ \text{a.b.}$$

Observe, pelo exemplo, que a taxa de juros encontrada é para o período todo da operação (2 meses), e a partir deste resultado, pode-se obter, pelo critério de juros compostos (item 4.6), a taxa equivalente para os intervalos de tempo. Exemplo:

Taxa Efetiva Mensal:

$$i_{eq} = \left\{ \left[1 + i_c \right]^{qq/qt} - 1 \right\} . 100$$

$$i_{eq} = \left\{ \left[1 + 0{,}05266 \right]^{1/2} - 1 \right\} . 100$$

$$i_{eq} = \left\{ \left[1{,}05266 \right]^{0{,}5} - 1 \right\} . 100$$

$$i_{eq} = \left\{ \left[1{,}05266 \right]^{0{,}5} - 1 \right\} . 100$$

i_{eq} = (1,02598 -1) . 100

i_{eq} = 2,60% a.m.

Taxa Efetiva Anual:

$$i_{eq} = \left\{ \left[1 + i_c \right]^{qq/qt} - 1 \right\} . 100$$

$$i_{eq} = \left\{ \left[1 + 0{,}05266 \right]^{12/2} - 1 \right\} . 100$$

$$i_{eq} = \left\{ \left[1{,}05266 \right]^{6} - 1 \right\} . 100$$

$$i_{eq} = \left\{ \left[1{,}05266 \right]^{6} - 1 \right\} . 100$$

$i_{eq} = (1{,}36037 - 1) . 100$

$i_{eq} = 36{,}04\%$ a.a.

E assim por diante.

5.1.3 – Exercícios Propostos

1. Qual o valor atual de um título de crédito de valor nominal de R$ 1.350,00, resgatado 2 meses antes do vencimento, à taxa de 44% ao ano? *Resposta: R$ 1.251,00*
2. Uma duplicata, cujo valor de resgate é de R$ 500,00, foi resgatado 3 meses antes do vencimento através do desconto bancário, à taxa de 28% ao ano. Qual o valor do desconto? *Resposta: R$ 35,00*
3. Qual a taxa que deverá ser aplicada em uma operação de desconto bancário, para que o valor atual de um título represente 2/3 do valor nominal, sabendo-se que o mesmo foi resgatado 3 meses antes do vencimento? *Resposta: 11,11% a.m.*
4. Uma pessoa pretende resgatar um título de valor nominal de R$ 800,00, o qual vencerá dentro de 3 meses. Qual o desconto a que terá direito, se o critério utilizado for o desconto racional simples á razão de 5% ao mês? *Resposta: R$ 104,35*
5. Qual o desconto racional de um título cujo valor é de R$ 1.420,00, resgatado 5 meses antes de seu vencimento, à razão de 10% ao mês? *Resposta: R$ 473,33*
6. Um título foi resgatado racionalmente à taxa de 10% ao mês. Determine o prazo de antecipação, sabendo que o valor atual representa 5/8 de N. *Resposta: 6 meses*
7. Um banco credita na conta de um cliente a quantia de R$ 27.000,00 proveniente do desconto de um título efetuado 80 dias antes de seu vencimento. Sendo de 2,85% ao mês a taxa de desconto e de 1,5% a taxa administrativa cobrada pelo banco, pede-se determinar o valor nominal deste título. *Resposta: R$ 29.702,97*

8. Uma instituição desconta comercialmente um título n dias antes de seu vencimento, creditando o valor líquido de R$ 54.400,00 na conta do cliente. O valor de resgate deste título é de R$ 63.000,00 tendo sido adotada a taxa de desconto "por fora" de 2,2% ao mês. Pede-se determinar o prazo de antecipação deste título. *Resposta: 6,2 meses*

9. Uma instituição financeira púbica que sua taxa de desconto é de 3,5% ao mês. Admitindo um prazo de desconto de dois meses, calcular a taxa efetiva para o período (simples) e a taxa efetiva mensal (composta). *Resposta: 7,53% a.b. e 3,7% a.m.*

10. Admita que uma instituição esteja cobrando juros "por fora" de 2,2% ao mês em suas operações de desconto. Sendo um título descontado 39 dias antes de seu vencimento, pede-se determinar a taxa efetiva (implícita) de juros mensal e anual. *Resposta: 2,25% a.m. e 30,7% a.a.*

5.2 – Desconto Composto

O desconto composto, utilizado basicamente em operações de longo prazo, pode ser identificado, igualmente ao desconto simples, em dois tipos: o desconto racional ("por dentro") e o desconto bancário ou comercial ("por fora").

O desconto bancário ou comercial composto ("por fora") é raramente utilizado no Brasil, não apresentando uso prático. O desconto racional ("por dentro") envolve Valor Atual **(Ar)** e Valor Nominal **(N)** de um título capitalizado segundo o regime de juros compostos, apresentando, portanto, larga utilização prática.

5.2.1 – Desconto Racional Composto ("Por Dentro")

O Desconto Racional Composto **(Dr)** equivale à soma de Descontos Racionais Simples calculados isoladamente em cada um dos períodos que faltam para o vencimento do título, isto implica em calcular o Valor Atual **(Ar)** em cada **n** período. Assim sendo, o Valor Atual **(Ar)** equivale ao Valor Presente **(PV)** de juros compostos, ou seja:

$$\mathbf{Ar = \frac{N}{(1+i)^n}}$$

Por outro lado, sabe-se que o desconto é obtido pela diferença entre o Valor Nominal **(N)** e o Valor Atual **(Ar)**. Logo, o Desconto Racional Composto **(Dr)** tem a seguinte expressão de cálculo:

$$Dr = N - \frac{N}{(1+i)^n}$$

$$Dr = N - Ar \Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{Dr = N \cdot \left[1 - \frac{1}{(1 + i)^n} \right]}$$

Onde:

i = taxa de desconto; e

n = prazo de desconto.

***(20) Exemplo*:** Determinar o desconto racional composto e o valor atual de um título de valor nominal de R$ 25.000,00, considerando uma taxa de juros compostos de 2,5% ao mês, sendo descontado 2 meses antes de seu vencimento.

Dados:

N = R$ 25.000,00

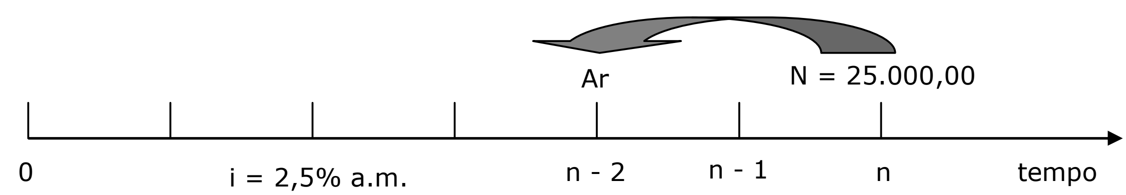
n = 2 meses

i = 2,5% a.m.

Dr = ?

Ar = ?

***Graficamente*:**



***Resolução*:**

$$Ar = \frac{N}{(1 + i)^n}$$

$$Ar = \frac{25.000,00}{(1 + 0,025)^2}$$

$$Ar = \frac{25.000,00}{(1,025)^2}$$

$$Ar = \frac{25.000,00}{1,050625}$$

Ar = R$ 23.795,36

Dr = N – Ar

Dr = 25.000,00 - 23.795,36

Dr = R$ 1.204,64

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor	
	[f] CLEAR [REG]	0,00	
25.000,00	[FV]	25.000,00	→ Inserção de **N**
2,50	[i]	2,50	→ Inserção de **i**
2,00	[n]	2,00	→ Inserção de **n**
	[PV]	-23.795,36	→ Resultado **Ar**
R$ 23.795,36			
	[RCL]	-23.795,36	
	[FV]	25.000,00	
	[+]	1.204,64	→ Resultado **Dr**
R$ 1.204,64			

5.2.2 – Desconto Bancário ou Comercial Composto ("Por Fora")

O Desconto Bancário ou Comercial Composto ("por fora") caracteriza-se pela incidência sucessiva da taxa de desconto sobre o Valor Nominal **(N)** do título, o qual é deduzido, em cada período, dos descontos obtidos em períodos anteriores.

Considere um título de Valor Nominal **(N)**, com vencimento em um período **(n)**, e um Valor Atual **(Ac)**, que produz um Valor Futuro **(FV)** igual a **N**, quando aplicado por **n** períodos a uma taxa composta de desconto **(d)** por período:

$$Dc = N - Ac \Leftrightarrow Dc = N - N \times (1 - d)^n \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{Dc = N \cdot [1 - (1 - d)^n]\}}$$

Colocando o **Ac** em evidência, teremos:

$$\mathbf{Ac = N \cdot (1 - d)^n}$$

***(21) Exemplo*:** Uma duplicata no valor de R$ 25.000,00, 60 dias para seu vencimento, é descontada a uma taxa de 2,5% ao mês, de acordo com o conceito de desconto composto. Calcular o valor atual creditado na conta e o valor do desconto concedido.

Dados:

N = R$ 25.000,00

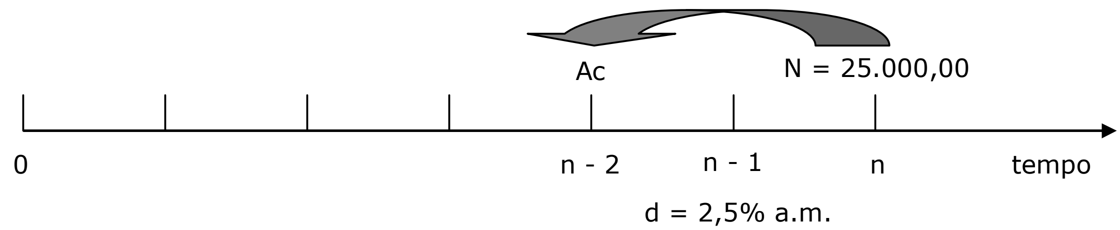
n = 60 dias (60 dias ÷ 30 dias = 2 meses)

d = 2,5% a.m.

Ac = ?

Dc = ?

***Graficamente*:**



***Resolução*:**

$Ac = N \times (1 - d)^n$

$Ac = 25.000,00 \times (1 + 0,025)^2$

$Ac = 25.000,00 \times (0,9750)^2$

$Ac = 25.000,00 \times (0,950625)$

Ac = R$ 23.765,63

Dc = N – Ac

Dc = 25.000,00 - 23.765,63

Dc = R$ 1.234,38

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
25.000,00	**[ENTER]**	25.000,00
1,00	**[ENTER]**	1,00
0,025	**[-]**	0,975
2,00	**[y^x]**	0,950625
	[x]	23.765,62
R$ 23.765,62		
	[CHS]	-23.765,62
25.000,00	**[+]**	1.234,38
R$ 1.234,38		

5.2.3 – Exercícios Propostos

1. Um título de valor nominal de R$ 800,00 foi resgatado 6 meses antes do vencimento à taxa de 5% ao mês. Determine o valor do resgate, empregando o desconto racional composto. *Resposta: R$ 596,97*

2. Qual o desconto composto relativo a um título de valor nominal de R$ 1.000,00, descontado 6 meses antes do vencimento à razão de 7% ao mês? *Resposta: R$ 333,66*

3. Qual o valor atual de um título de valor nominal igual a R$ 730,00, descontado pelo critério racional composto 11 meses antes do vencimento, à taxa de 51,11% ao ano? *Resposta: R$ 500,00*

4. Uma duplicata, no valor de R$ 2.000,00, é resgatada 2 meses antes do vencimento, obedecendo ao critério de desconto comercial composto. Sabendo-se que a taxa de desconto é de 10% ao mês, qual o valor descontado e qual o valor do desconto? *Resposta: Ac = R$ 1.620,00 e Dc = R$ 380,00*

5. Um título de valor nominal de R$ 59.895,00 foi pago 3 meses antes do vencimento. Se a taxa de desconto comercial composto era de 10%, qual o valor atual desse título? *Resposta: R$ 45.000,00*

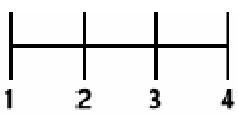
6.

Série Uniforme de Pagamentos Periódicos

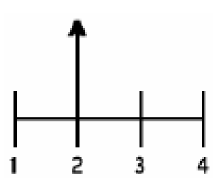
Antes do estudo das séries de pagamentos propriamente dito, é necessário a padronização a respeito dos fluxos de pagamentos (fluxos de caixa).

O diagrama de fluxo de caixa é um valioso instrumento auxiliar para o uso da calculadora HP-12C. O diagrama é uma simples descrição gráfica temporal e direcional das transações financeiras. O fluxo começa com uma linha horizontal denominada "linha do tempo".

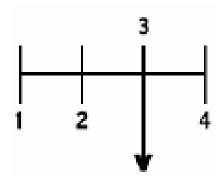
Essa linha representa o período de duração do problema financeiro, que pode ser em anos, meses, dias, trimestres, etc.



O intercâmbio do dinheiro num problema é desenhado com flechas verticais. O dinheiro recebido é representado por uma flecha apontada para cima (valor positivo), que se inicia no ponto da linha do tempo onde a transação ocorreu. O dinheiro que é pago é representado por uma flecha apontada para baixo (valor negativo).



Dinheiro recebido



Dinheiro pago

PELA HP-12C

A calculadora HP-12C permite também a solução de problemas que envolvam pagamentos periódicos. Em geral, todos os pagamentos são iguais, e são denominados de anuidades. Além disso, os cálculos podem ser efetuados em duas modalidades: **BEG** (*BEGin* = início), quando os pagamentos forem realizados no início dos períodos; e **END** (*END* = fim), quando os pagamentos forem realizados no final dos períodos[9].

Para operar com série de pagamentos/anuidades na 12C, você precisa sempre ter três informações financeiras, que podem ser: **n** (número de períodos), **i** (taxa de juros), **PV** (capital ou valor presente) e **FV** (montante ou valor futuro). A incógnita é a tecla **PMT**, que é o pagamento periódico. Lembre-se de respeitar a convenção de sinal do fluxo de caixa. A partir daí, basta introduzir os valores conhecidos, conforme as instruções dos quadros abaixo:

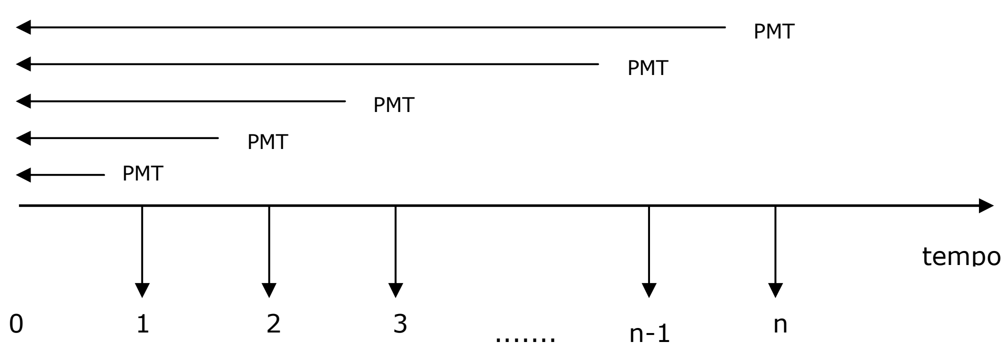
1.	Digite o número de períodos e pressione **[n]**. **(se for fornecido)**
2.	Digite o valor presente e pressione **[CHS] [PV]**. **(se for fornecido)**
3.	Digite o valor futuro e pressione **[FV]**. **(se for fornecido)**
4.	Digite a taxa de juros e pressione **[i]**. **(se for fornecido)**
5.	Pressione **[PMT]** para calcular e exibir a prestação.

Lembre-se de que é preciso ter três informações financeiras para realizar os cálculos de pagamento. Portanto, armazene na máquina apenas os dados que lhe forem fornecidos.

6.1 – Série Uniforme de Pagamentos Periódicos Postecipadas

As séries uniformes de pagamentos periódicos postecipadas são aquelas em que o primeiro pagamento ou recebimento ocorre no momento 1 (cada pagamento ou recebimento realiza-se no final de cada intervalo de tempo); este sistema é também chamado de sistema de pagamento ou recebimento sem entrada **(0 + n)**. Pagamentos ou recebimentos podem ser chamados de prestação, representada pela sigla **PMT** que vem do inglês *Payment* e significa pagamento ou recebimento.

6.1.1 – Valor Presente da Série



[9] O indicador de estado **BEG** fica aceso no visor quando tal modalidade está em vigor. Se o **BEG** não estiver no visor, a modalidade de pagamento em vigor será **END** (padrão de fábrica).

Dado o fluxo acima, podemos encontrar o Valor Presente **(PV)** do mesmo descontando ou descapitalizando cada valor das prestações **(PMT)** para uma mesma data, ou seja, o conceito de **PV** consiste em trazer cada um dos termos para a data focal "zero" e, na seqüência, somá-los, obtendo-se o Valor Presente **(PV)** da série uniforme de pagamentos periódicos postecipadas.

Sendo informados uma Taxa **(i)**, um Prazo **(n)** e o valor de um Pagamento ou Prestação **(PMT)** será possível calcular o Valor Presente **(PV)** de uma série uniforme de pagamentos periódicos postecipadas. Assim, tem-se:

$$PV = \frac{PMT}{(1+i)} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \frac{PMT}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{PMT}{(1+i)^{n-1}} + \frac{PMT}{(1+i)^n}$$

Colocando-se **PMT** em evidência:

$$PV = PMT \cdot \left(\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \right)$$

A expressão entre colchetes é denominada de Fator de Valor Presente, sendo representada pela Matemática Financeira por **FPV (i, n)**. Com isso, a formulação genérica do Valor Presente **(PV)** assume a expressão:

$$PV = PMT \times FPV\ (i, n)$$

Observe que **FPV**, conforme é apresentado na formulação anterior entre colchetes, equipara-se à soma de uma progressão geométrica (PG) de n termos, sendo o primeiro termo (a_1) e a razão (q) igual a $1 \div (1 + i)$, e o n-ésimo termo (a_n) igual a $1 \div (1 + i)^n$. Então:

$$PV = PMT \cdot \left(\frac{a_1 \times (q^n - 1)}{q - 1} \right) \Leftrightarrow PV = PMT \cdot \left(\frac{\frac{1}{(1+i)} \times \frac{1}{(1+i)^n} - 1}{\frac{1}{(1+i)} - 1} \right)$$

Desenvolvendo matematicamente a expressão acima, obtêm-se a fórmula do Valor Presente **(PV)** de uma série uniforme de pagamentos periódicos postecipadas:

$$\mathbf{PV = PMT \cdot \left\{ \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \right] \right\}}$$

Observação: a relação $\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \right]$ é comumente chamado de **Fator de Valor Presente por Operação Múltipla**.

A relação acima nos permite, ainda, encontrar a Prestação **(PMT)** dado o Valor Presente **(PV)**, como segue:

$$\textbf{PMT} = \textbf{PV} \,.\, \left\{ \frac{\left[(1 + i)^n \,.\, i \right]}{\left[(1 + i)^n - 1 \right]} \right\}$$

(22) Exemplo: Calcular o valor de um financiamento a ser quitado através de seis pagamentos mensais de R$ 1.500,00, vencendo a primeira parcela a 30 dias da liberação dos recursos, sendo de 3,5% ao mês a taxa de juros negociada na operação.

Dados:

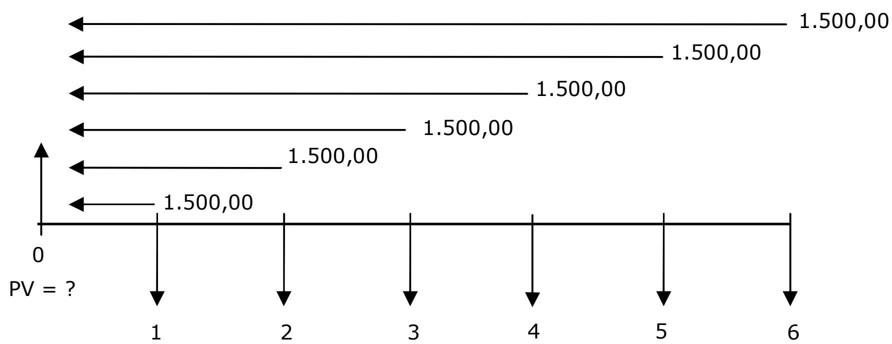
PMT = R$ 1.500,00

n = 6 meses

i = 3,5% a.m.

PV = ?

Graficamente:



Resolução:

$$PV = PMT \times \left\{ \frac{\left[(1 + i)^n - 1 \right]}{\left[(1 + i)^n \,.\, i \right]} \right\}$$

$$PV = 1.500,00 \times \left\{ \frac{\left[(1 + 0,035)^6 - 1 \right]}{\left[(1 + 0,035)^6 \times 0,035 \right]} \right\}$$

$$PV = 1.500,00 \times \left\{ \frac{\left[(1,035)^6 - 1 \right]}{\left[(1,035)^6 \times 0,035 \right]} \right\}$$

$$PV = 1.500,00 \times \left\{ \frac{\left[1,2293 - 1 \right]}{\left[1,2293 \times 0,035 \right]} \right\} \Leftrightarrow PV = 1.500,00 \times \left\{ \frac{0,2293}{0,043} \right\}$$

PV = 1.500,00 x 5,3285

PV = R$ 7.992,83

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
1.500,00	[CHS]	-1.500,00
	[PMT]	-1.500,00
6,00	[n]	6,00
3,50	[i]	3,50
	[PV]	7.992,83
R$ 7.992,83		

***(23) Exemplo*:** Você compra um carro semi-novo nas seguintes condições: uma entrada de R$ 3.500,00 mais 36 prestações iguais e sucessivas. Sabendo que o valor do veículo à vista é de R$ 16.000,00 e a taxa de financiamento é de 2,7214% ao mês, calcule o valor de cada prestação.

Dados:

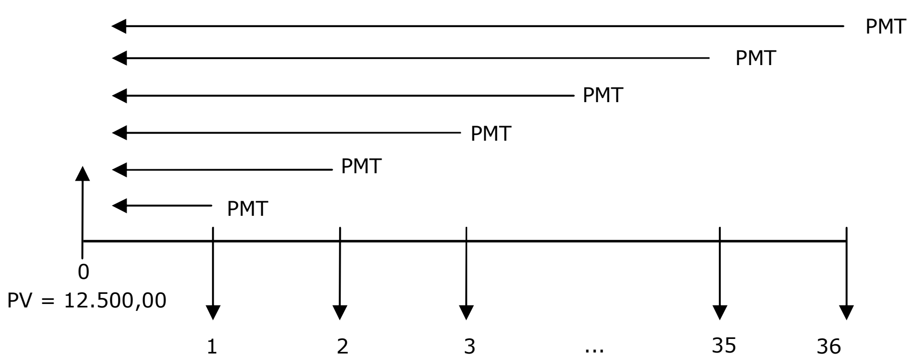
PV = R$ 16.000,00 – R$ 3.500,00 = R$ 12.500,00

n = 36 meses

i = 2,7214% a.m.

PMT = ?

Graficamente:



***Resolução*:**

$$PMT = PV \times \left\{ \frac{\left[(1+i)^n \times i \right]}{\left[(1+i)^n - 1 \right]} \right\}$$

$$PMT = 12.500,00 \times \left\{ \frac{\left[(1 + 0,027214)^{36} \times 0,027214 \right]}{\left[(1 + 0,027214)^{36} - 1 \right]} \right\}$$

$$PMT = 12.500,00 \times \left\{ \frac{\left[(1,027214)^{36} \times 0,027214 \right]}{\left[(1,027214)^{36} - 1 \right]} \right\}$$

$$PMT = 12.500,00 \text{ x} \left\{ \frac{\left(2,629017 \text{ x } 0,027214\right)}{\left(2,629017 - 1\right)} \right\}$$

$$PMT = 12.500,00 \text{ x} \left\{ \frac{\left(0,071546\right)}{\left(1,629017\right)} \right\}$$

$$PMT = 12.500,00 \text{ x } 0,043920$$

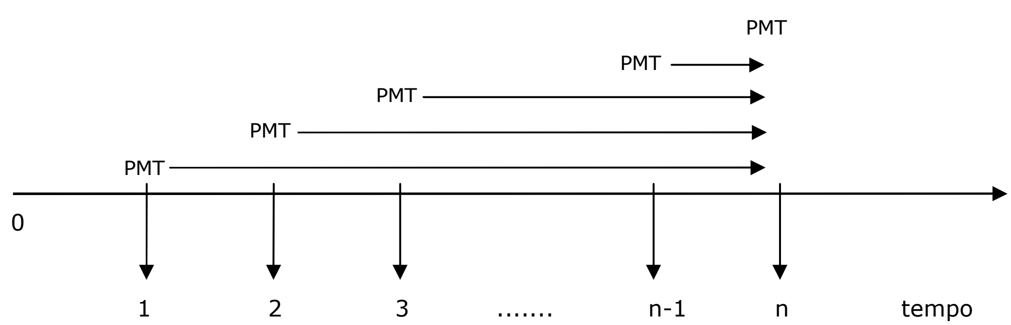
$$PMT = R\$ \ 549,00$$

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
12.500,00	**[PV]**	12.500,00
36,00	**[n]**	36,00
2,7214	**[i]**	2,7214
	[PMT]	-549,00
R$ 549,00		

6.1.2 – Valor Futuro da Série

É a soma dos montantes de cada uma das prestações em uma determinada data. Isto posto, vamos determinar o montante da série na data n, imediatamente após a realização do último pagamento.



Sendo informados uma Taxa **(i)**, um Prazo **(n)** e o valor de um Pagamento ou Prestação **(PMT)** será possível calcular o Valor Futuro **(FV)** de uma série uniforme de pagamentos periódicos postecipadas. Assim, tem-se:

$$FV = PMT + PMT \text{ x } (1 + i) + PMT \text{ x } (1 + i)^2 + PMT \text{ x } (1 + i)^3 + \ldots + PMT \text{ x } (1 + i)^{n-1}$$

Colocando-se PMT em evidência:

$FV = PMT \times [1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + \ldots + (1 + i)^{n-1}$

Identicamente, a expressão em colchetes é definida por Fator de Valor Futuro e representada por **FFV (i, n)**. Com isso, a formulação genérica do Valor Futuro **(FV)** assume a expressão:

$$FV = PMT \times FFV(i, n)$$

Da mesma maneira em relação ao desenvolvimento da fórmula do Valor Presente **(PV)**, observe que a expressão do **FFV** equipara-se à soma dos termos de uma progressão geométrica (PG). Então:

$$FV = PMT \cdot \left(\frac{a_1 \times (q^n - 1)}{q - 1} \right) \Leftrightarrow FV = PMT \cdot \left(\frac{1 \times (1 + i)^n - 1}{(1 + i) - 1} \right)$$

Desenvolvendo os ajustes e simplificações necessárias, chega-se a:

$$\mathbf{FV = PMT \cdot \left\{ \frac{\left[(1 + i)^n - 1 \right]}{i} \right\}}$$

Observação: o quociente $\left\{ \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right\}$ será chamado de **Fator de Acumulação de Capital por Operação Múltipla**.

Da fórmula do Valor Futuro **(FV)** acima, encontramos a Prestação **(PMT)**:

$$\mathbf{PMT = FV \cdot \left\{ \frac{i}{\left[(1 + i)^n - 1 \right]} \right\}}$$

***(24) Exemplo*:** Você deposita, ao final de cada mês, R$ 105,00 durante 24 meses. O banco remunera essa operação financeira a uma taxa de 1,50% ao mês. Sabendo que o saque do montante acumulado será feito junto à última parcela, calcule qual será o montante depositado nesse banco.

Dados:

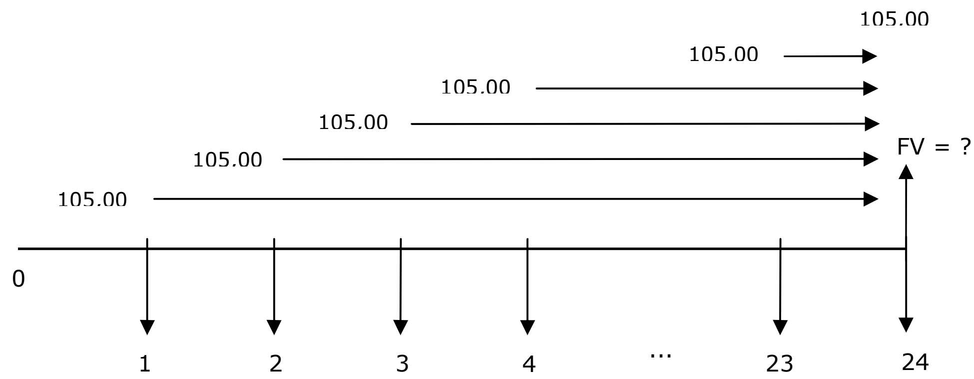
PMT = R$ 105,00

n = 24 meses

i = 1,50% a.m.

FV = ?

***Graficamente*:**



***Resolução*:**

$$FV = PMT \times \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$

$$FV = 105{,}00 \times \left(\frac{(1+0{,}015)^{24} - 1}{0{,}015}\right)$$

$$FV = 105{,}00 \times \left(\frac{(1{,}015)^{24} - 1}{0{,}015}\right) \Leftrightarrow FV = 105{,}00 \times \left(\frac{1{,}4295 - 1}{0{,}015}\right)$$

$$FV = 105{,}00 \times \left(\frac{0{,}4295}{0{,}015}\right) \Leftrightarrow PMT = 105{,}00 \times 28{,}6335$$

$$FV = R\$\ 3.006{,}52$$

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
105,00	**[CHS]**	-105,00
	[PMT]	-105,00
24,00	**[n]**	24,00
1,50	**[i]**	1,50
	[FV]	3.006,52
R$ 3.006,52		

***(25) Exemplo*:** Determinar o valor de depósitos mensais que, quando aplicado a uma taxa de 4% ao mês durante 7 meses, produz um montante de R$ 5.000,00, pelo regime de juros compostos.

Dados:

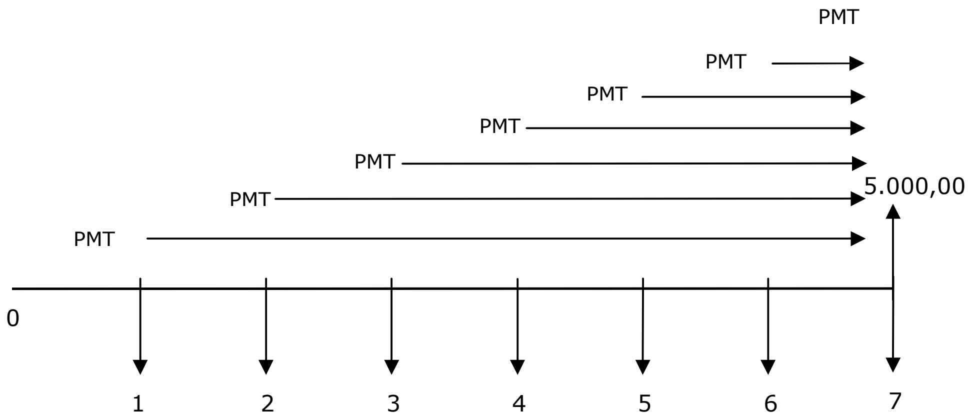
FV = R$ 5.000,00

n = 7 meses

i = 4% a.m.

PMT = ?

***Graficamente*:**



***Resolução*:**

$$PMT = FV \times \left(\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right)$$

$$PMT = 5.000,00 \times \left(\frac{0,04}{(1+0,04)^7 - 1}\right)$$

$$PMT = 5.000,00 \times \left(\frac{0,04}{(1,04)^7 - 1}\right) \Leftrightarrow PMT = 5.000,00 \times \left(\frac{0,04}{1,3159 - 1}\right)$$

$$PMT = 5.000,00 \times \left(\frac{0,04}{0,3159}\right) \Leftrightarrow PMT = 5.000,00 \times 0,1266$$

$$PMT = R\$\ 633,05$$

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
5.000,00	**[FV]**	5.000,00
7,00	**[n]**	7,00
4,00	**[i]**	4,00
	[PMT]	-633,05
R$ 633,05		

6.2 – Série Uniforme de Pagamentos Periódicos Antecipadas

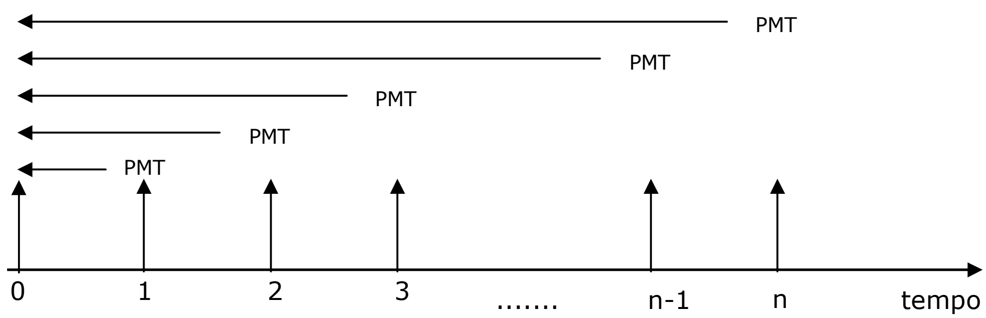
As séries uniformes de pagamentos periódicos antecipadas são aquelas em que os pagamentos ou recebimentos sempre irão ocorrer no início de cada intervalo de tempo (o primeiro pagamento ocorre na data focal "zero"); este sistema é também chamado de sistema de pagamento ou recebimento com entrada **(1 + n)**.

PELA HP-12C

Como em uma série uniforme de pagamentos periódicos antecipados inicia-se no início de cada intervalo de tempo é necessário informar, para calculadora HP-12C identificar essa série, que os pagamentos iniciam-se nestes períodos. Assim, para o procedimento de cálculo pela calculadora HP-12C no sistema de pagamentos antecipados será necessário acionar a função **[g] [BEG]**.

6.2.1 – Valor Presente da Série

Dado o fluxo abaixo, para se calcular o Valor Presente **(PV)**, procede-se de maneira idêntica às rendas postecipadas, ou seja, descontam-se (descapitaliza-se) todas as Prestações **(PMT)** para a data zero e, nesta data, as somamos.



Sendo informados uma Taxa **(i)**, um Prazo **(n)** e o valor de um Pagamento ou Prestação **(PMT)** será possível calcular o Valor Presente **(PV)** de uma série uniforme de pagamentos periódicos antecipadas através da fórmula:

$$PV = PMT \cdot \left\{ \frac{\left[(1+i)^n - 1 \right]}{\left[(1+i)^{n-1} \cdot i \right]} \right\}$$

A relação acima nos permite, ainda, encontrar a Prestação **(PMT)** dado o Valor Presente **(PV)**, como segue:

$$PMT = PV \cdot \left\{ \frac{\left[(1+i)^{n-1} \cdot i \right]}{\left[(1+i)^n - 1 \right]} \right\}$$

(24) *Exemplo*: Um automóvel que custa à vista R$ 17.800,00 pode ser financiado em 36 pagamentos iguais; sabendo-se que a taxa de financiamento é de 1,99% ao mês, calcule o valor da prestação mensal deste financiamento.

Dados:

PV = R$ 17.800,00

n = 36 meses

i = 1,99% a.m.

PMT = ?

***Resolução*:**

$PMT = PV \times \{[(1 + i)^{n-1} \times i] \div [(1 + i)^{n} - 1]\}$

$PMT = 17.800 \times \{[(1 + 0{,}0199)^{36-1} \times 0{,}0199] \div [(1 + 0{,}0199)^{36} - 1]\}$

$PMT = 17.800 \times \{[(1{,}0199)^{35} \times 0{,}0199] \div [(1{,}0199)^{36} - 1]\}$

$PMT = 17.800 \times \{[1{,}993038612 \times 0{,}0199] \div [2{,}032700080 - 1]\}$

$PMT = 17.800 \times \{0{,}039661468 \div 1{,}032700080\}$

$PMT = 17.800 \times \{0{,}038405602\}$

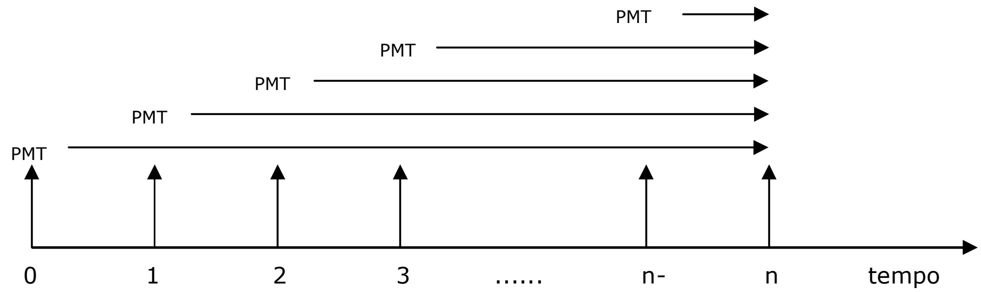
PMT = R$ 683,62

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
	[g] [BEG]	0,00
17.800,00	**[PV]**	17.800,00
36,00	**[n]**	36,00
1,99	**[i]**	1,99
	[PMT]	-683,62
R$ 683,62		

6.2.2 – Valor Futuro da Série

É a soma dos valores dispostos ao longo do fluxo de caixa em uma determinada data. Visando uniformizar os procedimentos, vamos **capitalizar** os valores para a data **n**.



Sendo informados uma Taxa **(i)**, a Prestação **(PMT)** e o Prazo **(n)**, será possível calcular o Valor Futuro **(FV)** de uma série uniforme de pagamentos periódicos antecipadas através da fórmula:

$$\mathbf{FV = PMT \,.\, \left\{ \frac{\left[(1+i)^n - 1 \right]}{i} \right\} . \,(1+i)}$$

Dessa fórmula, encontramos a Prestação **(PMT)**:

$$\mathbf{PMT = FV \,.\, \left\{ \frac{i}{\left[(1+i)^n - 1 \right]} \right\} . \left(\frac{1}{(1+i)} \right)}$$

***(25) Exemplo*:** Um poupador necessita acumular nos próximos 5 anos a importância de R$ 37.500,00, e acredita que, se na data de hoje abrir uma caderneta de poupança, com depósitos mensais de R$ 500,00, ele terá o valor que precisa. Considerando que a poupança pague, em média, uma taxa de 0,8% ao mês, pergunta-se: o poupador conseguirá acumular o valor de que precisa?

Dados:

PMT = R$ 500,00

n = 5 anos (5 anos x 12 meses = 60 meses)

i = 0,8% a.m.

FV = ?

***Resolução*:**

$FV = PMT \times \{[(1 + i)^n - 1] \div i\} \times (1 + i)$

$FV = 500{,}00 \times \{[(1 + 0{,}008)^{60} - 1] \div 0{,}008\} \times (1 + 0{,}008)$

$FV = 500{,}00 \times \{[(1{,}008)^{60} - 1] \div 0{,}008\} \times (1{,}008)$

$FV = 500{,}00 \times \{[1{,}612990935 - 1] \div 0{,}008\} \times (1{,}008)$

$FV = 500{,}00 \times \{0{,}612990935 \div 0{,}008\} \times (1{,}008)$

$FV = 500{,}00 \times \{76{,}62386688\} \times (1{,}008)$

$FV = 38.311{,}93 \times (1{,}008)$

$FV = R\$\ 38.618{,}43$

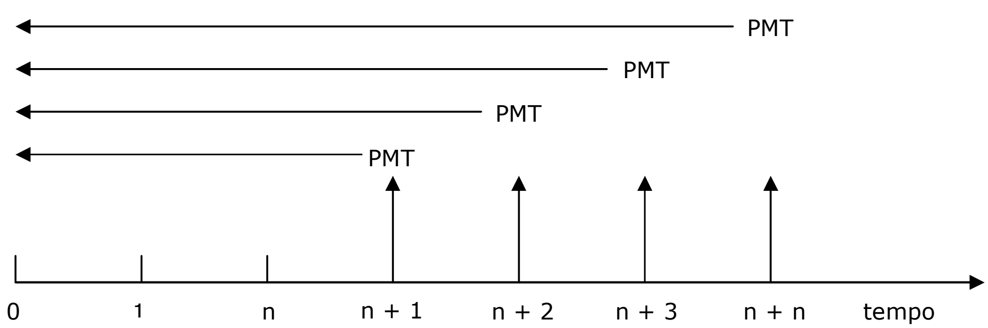
PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
	[g] [BEG]	0,00
500,00	**[CHS]**	-500,00
	[PMT]	-500,00
60,00	**[n]**	60,00
0,80	**[i]**	0,80
	[FV]	38.618,43
	R$ 38.618,43	

6.3 – Série Uniforme de Pagamentos Periódicos Diferidas

Finalmente, apresenta-se um conjunto de pagamentos (ou recebimentos) que ocorrem sempre após um certo período de Carência, também chamado Prazo de Diferimento. São aquelas séries em que os períodos ou intervalos de tempo entre as Prestações **(PMT)** ocorrem pelo menos a partir do 2º período, ou seja, se consideramos um período como sendo **n**, o período seguinte será **n + 1**, o próximo será **n + 2** e assim sucessivamente.

6.3.1 – Valor Presente da Série



Em relação ao fluxo acima, vamos determinar o Valor Presente (PV) na data zero.

Sendo informados uma Taxa **(i)**, um Prazo **(n)**, uma Prestação **(PMT)** e um Período de Carência **(c)**, será possível calcular o Valor Presente **(PV)** de uma série uniforme de pagamentos periódicos diferida através da fórmula:

$$PV = \frac{PMT \cdot \left\{ \left[\dfrac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] \right\}}{(1 + i)^{C-1}}$$

A relação acima nos permite, ainda, encontrar a Prestação **(PMT)** dado o Valor Presente **(PV)**, como segue:

$$PMT = \left[\frac{PV \cdot (1 + i)^{C-1} \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}} \right]$$

***(26) Exemplo*:** Uma mercadoria encontra-se em promoção e é comercializada em 5 prestações iguais de R$ 150,00; a loja está oferecendo ainda uma carência de 5 meses para o primeiro pagamento. Determine o valor à vista desta mercadoria, sabendo-se que a taxa de juros praticada pela loja é de 3% ao mês.

Dados:

PMT = R$ 150,00

n = 5 meses

c = 5 meses

i = 3% a.m.

PV = ?

***Resolução*:**

$PV = \{PMT \times \{[1 - (1 + i)^{-n}] \div i\}\} \div (1 + i)^{c-1}$

$PV = \{150{,}00 \times \{[1 - (1 + 0{,}03)^{-5}] \div 0{,}03\}\} \div (1 + 0{,}03)^{5-1}$

$PV = \{150{,}00 \times \{[1 - (1{,}03)^{-5}] \div 0{,}03\}\} \div (1{,}03)^{5-1}$

$PV = \{150{,}00 \times \{[1 - 0{,}862608784] \div 0{,}03\}\} \div (1{,}03)^{4}$

$PV = \{150{,}00 \times \{0{,}137391216 \div 0{,}03\}\} \div 1{,}125508810$

$PV = \{150{,}00 \times 4{,}579707187\} \div 1{,}125508810$

$PV = 686{,}96 \div 1{,}125508810$

PV = R$ 610,35

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
150,00	**[CHS]**	-150,00
	[PMT]	-150,00
5,00	**[n]**	5,00
3,00	**[i]**	3,00
	[PV]	686,96
	R$ 686,96	
	[CHS]	-686,96
	[FV]	-686,96
	[PV]	-686,96
0,00	**[PMT]**	0,00
4,00	**[n]**	4,00
	[PV]	610,35
	R$ 610,35	

6.3.2 – Valor Futuro da Série

Para efetuarmos o cálculo do Valor Futuro **(FV)** em série uniforme de pagamentos periódicos diferida, será necessário efetuarmos dois cálculos independentes: primeiro acha-se o Valor Futuro **(FV)** da série uniforme de pagamentos periódicos diferida, e, depois, pode-se calcular o novo Valor Futuro **(FV)**.

Sendo informados uma Taxa **(i)**, um Prazo **(n)** e uma Prestação **(PMT)**, será possível calcular o Valor Futuro **(FV)** de uma série uniforme de pagamentos periódicos diferida através da fórmula:

$$FV = PMT \cdot \left\{ \frac{\left[(1+i)^{n1} - 1 \right]}{i} \right\} \cdot (1+i)^{n2}$$

***(27) Exemplo*:** Um poupador efetuava regularmente depósitos em uma conta de poupança. Após 12 meses este poupado teve de interromper os depósitos, mas não efetuou nenhum saque, e gostaria de saber quanto terá após 6 meses, considerando-se que os valores dos depósitos eram de R$ 200,00 e que a taxa média de juros para os primeiros 12 meses era de 1% ao mês e que para os próximos 6 meses estimou-se uma taxa de 0,8% ao mês. Quanto o poupador terá após todo o período?

Dados:

PMT = R$ 200,00

i_{12} = 1% a.m.

i_6 = 0,8% a.m.

n_{12} = 12 meses

n_6 = 6 meses

FV = ?

Resolução: $FV = PMT \times \{[(1 + i)^{n1} - 1] \div i\} \times (1 + i)^{n2}$

$FV = 200,00 \times \{[(1 + 0,01)^{12} - 1] \div 0,01\} \times (1 + 0,008)^{6}$

$FV = 200,00 \times \{[(1,01)^{12} - 1] \div 0,01\} \times (1,008)^{6}$

$FV = 200,00 \times \{[1,126825030 - 1] \div 0,01\} \times 1,048970302$

$FV = 200,00 \times \{0,126825030 \div 0,01\} \times 1,048970302$

$FV = 200,00 \times 12,6825030 \times 1,048970302$

FV = R$ 2.660,71

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
200,00	**[PMT]**	200,00
12,00	**[n]**	12,00
1,00	**[i]**	1,00
	[FV]	-2.536,50
R$ 2.536,50		
	[CHS]	2.536,50
	[PV]	2.536,50
	[PV]	-686,96
0,00	**[PMT]**	0,00
0,8	**[i]**	0,80
6,00	**[n]**	6,00
	[FV]	-2.660,71
R$ 2.660,71		

6.4 – Exercícios Propostos

1. João comprou nas Lojas Almeida um sofá de três lugares por R$ 670,90. Ele dividiu a compra em 12 vezes iguais, a uma taxa de 5% ao mês. Quanto João vai pagar por mês? *(END) Resposta: R$ 75,69*

2. O Banco ESTRELA lhe emprestou R$ 7.800,00 por 7 meses, à taxa de 8% ao mês.

Quanto você vai pagar por mês de prestação? *(END) Resposta: R$ 1.498,16*

3. Seu pai lhe emprestou R$ 150,00 durante três meses. Ele acertou com você a taxa de 1% ao mês. Quanto você vai pagar por mês ao seu pai? *(END) Resposta: R$ 51,00*

4. Maria pegou emprestado no banco R$ 700,00 para comprar uma mesa de jantar. Ela dividiu o empréstimo em 5 vezes iguais, à taxa de 3% ao mês. Quanto ela vai pagar por mês? *(BEG) Resposta: R$ 148,40*

5. Paulo pegou emprestado numa financeira R$ 1.000,00 durante 7 meses, à uma taxa de 6% ao mês. Quanto Paulo vai pagar por mês de prestação? *(BEG) Resposta: R$ 169,00*

6. Augusto solicitou para um banco um financiamento de R$ 18.000,00. Ele vai pagar em 24 meses, a uma taxa de 1,5% ao mês. Quanto Augusto vai pagar por mês? *(BEG) Resposta: R$ 885,35*

7. Calcular a parcela antecipada de um financiamento de R$ 6.700,00 feito em 12 parcelas mensais iguais com taxa de mercado de 1,5% ao mês. *(BEG) Resposta: R$ 605,17*

8. Calcule a dívida assumida por uma pessoa que pagou 10 prestações mensais de R$ 500,00 a juros de 3% ao mês, com uma carência de 6 meses. *Resposta: R$ 3.572,00*

9. Que dívida pode ser amortizada com 8 prestações bimestrais de R$ 1.000,00, sendo de 7% ao bimestre a taxa de juro e devendo ser paga a primeira prestação 3 bimestres depois de realizado o empréstimo? *Resposta: R$ 5.216,00*

10. Uma dívida de R$ 20.000,00 foi amortizado com 6 prestações mensais. Qual o valor dessas prestações, sendo a taxa de juro igual a 1,5% ao mês e tendo havido uma carência de 2 meses? *Resposta: R$ 3.617,00*

7.

Sistemas de Amortização de Empréstimos e Financiamentos

Amortização é um processo de extinção de uma dívida através de pagamentos periódicos, que são realizados em função de um planejamento, de modo que cada prestação corresponde à soma do reembolso do Capital ou do pagamento dos juros do saldo devedor, podendo ser o reembolso de ambos, sendo que **Juros são sempre calculados sobre o saldo devedor**.

Em todos os sistemas de amortização, cada pagamento é a soma do valor amortizado com os juros do saldo devedor, isto é, **Pagamento = Amortização + Juros**.

7.1 – Sistema de Amortização Francês (S.A.F.)

Também chamado de Sistema Price, ou simplesmente Tabela Price, este sistema estabelece que as prestações sejam iguais e sucessivas durante todo o prazo da amortização, ou seja, este sistema consiste no pagamento de empréstimos ou financiamentos com prestações iguais e com periodicidade constante. É considerado o mais utilizado pelas instituições financeiras e pelo comércio em geral.

É importante notar que, à medida que as Prestações **(PMT)** são realizadas, o saldo devedor é diminuído implicando, desta forma, uma concomitante diminuição dos Juros **(J)** apurados para o Período **(n)** em análise. Porém, em função de manter-se a uniformidade em relação ao valor da prestação, a amortização aumenta de forma a compensar a diminuição dos juros.

PELA HP-12C

A amortização consiste na liquidação ou pagamento de uma dívida mediante prestações fixas, sucessivas e iguais. A HP-12C permite que você calcule as partes dos seus pagamentos referentes ao principal e aos juros, além do saldo devedor do seu empréstimo. O cálculo, pelo **Sistema Price de Amortização** (**Sistema de Amortização Francês**), considera as prestações fixas, iguais e sucessivas.

Vejamos a seguir, como construir uma tabela de amortização, com base nos resultados encontrados na HP-12C. Antes, vamos entender o cálculo de amortização:

1.	Digite a taxa de juros e pressione **[i]**.
2.	Digite o valor presente e pressione **[PV]**.
3.	Digite a parcela e pressione **[CHS] [PMT]**.
4.	Pressione **[g] [BEG]** ou **[g] [END]** para estabelecer a modalidade de pagamento.
5.	Digite o número de pagamentos a ser amortizado.
6.	Pressione **[f] [AMORT]** para apresentar a parte do pagamento referente aos juros.
7.	Pressione **[x <> y]** para apresentar a parte do pagamento referente ao principal.
8.	Para apresentar o número do pagamento amortizado (introduzido no item 6), pressione **[R↓] [R↓]**.
9.	Para apresentar o saldo devedor, pressione **[RCL] [PV]**.
10.	Para apresentar o número total de pagamentos amortizados, pressione **[RCL] [n]**
11.	Repita os passos 5, 6, 7, 8, 9 e 10 para amortizar os demais pagamentos.

Isto posto, as principais características deste sistema são:

- A Prestação **(PMT)** é constante durante todo o período do financiamento;
- A parcela de amortização aumenta a cada Período **(n)**; e
- Os Juros **(J)** diminuem a cada Período **(n)**.

Assim teremos:

$$\mathbf{PMT = PV \cdot \left\{ \frac{\left[(1+i)^n \cdot i \right]}{\left[(1+i)^n - 1 \right]} \right\}}$$

$$\mathbf{J = PV \cdot i \cdot n}$$

$$\mathbf{PA_n = PMT - J}$$

$$\mathbf{SD_n = SD_{ANTERIOR} - PA_n}$$

Onde:

PA = parcela de amortização; e

SD = saldo devedor.

Observe que a fórmula de **PMT** é a mesma utilizada em séries uniformes de pagamentos periódicos postecipadas.

***(28) Exemplo*:** Um banco empresta o valor de R$ 10.000,00, com a taxa de 10% ao mês, para ser pago em 5 pagamentos iguais, sem prazo de carência, calculado pelo Sistema de Amortização Francês (S.A.F.).

Pede-se elaborar a planilha de financiamento.

Dados:

PV = R$ 10.000,00

n = 5 meses

i = 10% a.m.

PMT = ?

J = ?

PA = ?

SD = ?

Resolução PMT:

$PMT = PV \times \{[(1 + i)^n \times i] \div [(1 + i)^n - 1]\}$

$PMT = 10.000,00 \times \{[(1 + 0,10)^5 \times 0,10] \div [(1 + 0,10)^5 - 1]\}$

$PMT = 10.000,00 \times \{[(1,10)^5 \times 0,10] \div [(1,10)^5 - 1]\}$

$PMT = 10.000,00 \times \{[1,610510 \times 0,10] \div [1,610510 - 1]\}$

$PMT = 10.000,00 \times \{0,1610510 \div 0,610510\}$

$PMT = 10.000,00 \times 0,2637974808$

PMT = R$ 2.637,97

Resolução J, PA e SD:

$J = PV \times i \times n$

$PA_n = PMT - J$

$SD_n = SD_{ANTERIOR} - PA_n$

Para 1º Período

J_1 = 10.000,00 x 0,10 x 1 = R$ 1.000,00

PA_1 = PMT - J_1 = 2.637,97 - 1.000,00 = R$ 1.637,97

SD_1 = 10.000,00 - 1.637,97 = R$ 8.362,03

Para 2º Período

$J_2 = SD_1 \times i \times n$ = 8.362,03 x 0,10 x 1 = R$ 836,20

PA_2 = PMT – J_2 = 2.637,97 - 836,20 = R$ 1.801,77

SD_2 = 8.362,03 - 1.801,77 = R$ 6.560,26

Para 3º Período

$J_3 = SD_2 \times i \times n$ = 6.560,26 x 0,10 x 1 = R$ 656,03

PA_3 = PMT – J_3 = 2.637,97 - 656,03 = R$ 1.981,94

SD_3 = 6.560,26 - 1.981,94 = R$ 4.578,32

Para 4º Período

$J_4 = SD_3 \times i \times n$ = 4.578,32 x 0,10 x 1 = R$ 457,83

PA_4 = PMT – J_4 = 2.637,97 - 457,83 = R$ 2.180,14

SD_4 = 4.578,32 - 2.180,14 = R$ 2.398,18

Para 5º Período

$J_5 = SD_4 \times i \times n$ = 2.398,18 x 0,10 x 1 = R$ 239,82

PA_5 = PMT – J_5 = 2.637,97 - 239,82 = R$ 2.398,15

SD_5 = 2.398,18 - 2.398,15 = R$ 0,03

A diferença de **R$ 0,03** é devido ao arredondamento.

Assim teremos nossa planilha de financiamento:

n	SD	PA	J	PMT
0	10.000,00	0,00	0,00	0,00
1	8.362,03	1.637,97	1.000,00	2.637,97
2	6.560,26	1.801,77	836,20	2.637,97
3	4.578,32	1.981,94	656,03	2.637,97
4	2.398,18	2.180,14	457,83	2.637,97
5	0,03	2.398,15	239,82	2.637,97
	Σ	**9.999,97**	**3.189,88**	**13.189,85**

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor	
	[f] CLEAR [REG]	0,00	
	[g] [END]	0,00	
10.000,00	**[CHS]**	-10.000,00	
	[PV]	-10.000,00	
10,00	**[i]**	10,00	
5,00	**[n]**	5,00	
	[PMT]	2.637,97	
1	**[f] [AMORT]**	1.000,00	Juros
	[X <> Y]	1.637,97	Amortizacão
	[RCL]	1.637,97	
	[PV]	-8362,03	Saldo Devedor
1	**[f] [AMORT]**	836,20	
	[X <> Y]	1.801,77	
	[RCL]	1.801,77	
	[PV]	-6.560,26	
1	**[f] [AMORT]**	656,03	
	[X <> Y]	1.981,94	
	[RCL]	1.981,94	
	[PV]	-4.578,32	
1	**[f] [AMORT]**	457,83	
	[X <> Y]	2.180,14	
	[RCL]	2.180,14	
	[PV]	-2.398,18	
1	**[f] [AMORT]**	239,82	
	[X <> Y]	2.398,15	
	[RCL]	2.398,15	
	[PV]	-0,03	

7.1.1 – Sistema de Amortização Francês com carência e juros compensatórios

Neste caso, não haverá a parcela de amortização durante o período de carência, apenas o pagamento dos juros compensatórios.

***(29) Exemplo*:** Um banco empresta o valor de R$ 10.000,00, com a taxa de 10% ao mês, para ser pago em 5 pagamentos iguais, com carência de 2 meses, calculado pelo Sistema de Amortização Francês (S.A.F.). Pede-se elaborar a planilha de financiamento.

Dados:

PV = R$ 10.000,00

n = 5 meses

i = 10% a.m.

c = 2 meses

PMT = ?

J = ?

PA = ?

SD = ?

Resolução

J = PV x i x n

Para 1º Período

J_1 = 10.000,00 x 0,10 x 1 = R$ 1.000,00

Para 2º Período

J_2 = 10.000,00 x 0,10 x 1 = R$ 1.000,00

Os demais valores serão exatamente iguais ao exemplo anterior.

n	SD	PA	J	PMT
0	10.000,00	0,00	0,00	0,00
1	10.000,00	0,00	1.000,00	1.000,00
2	10.000,00	0,00	1.000,00	1.000,00
3	8.362,03	1.637,97	1.000,00	2.637,97
4	6.560,26	1.801,77	836,20	2.637,97
5	4.578,32	1.981,94	656,03	2.637,97
6	2.398,18	2.180,14	457,83	2.637,97
7	0,03	2.398,15	239,82	2.637,97
Σ		**9.999,97**	**5.189,88**	**15.189,85**

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor	
	[f] CLEAR [REG]	0,00	
	[g] [END]	0,00	
10.000,00	[ENTER]	10.000,00	n = 1
	[%]	1.000,00	
	[X <> Y]	10.000,00	n = 2
10	[%]	1.000,00	
10.000,00	[CHS]	-10.000,00	
	[PV]	-10.000,00	
10,00	[i]	10,00	
5,00	[n]	5,00	
	[PMT]	2.637,97	
1	[f] [AMORT]	1.000,00	Juros
	[X <> Y]	1.637,97	Amortizacão
	[RCL]	1.637,97	
	[PV]	-8362,03	Saldo Devedor
1	[f] [AMORT]	836,20	
	[X <> Y]	1.801,77	
	[RCL]	1.801,77	
	[PV]	-6.560,26	
1	[f] [AMORT]	656,03	
	[X <> Y]	1.981,94	
	[RCL]	1.981,94	
	[PV]	-4.578,32	
1	[f] [AMORT]	457,83	
	[X <> Y]	2.180,14	
	[RCL]	2.180,14	
	[PV]	-2.398,18	
1	[f] [AMORT]	239,82	
	[X <> Y]	2.398,15	
	[RCL]	2.398,15	
	[PV]	-0,03	

7.1.2 – Sistema de Amortização Francês com carência e saldo devedor corrigido

Neste caso, não se paga os juros compensatórios, na verdade os juros serão acrescidos ao saldo devedor com base no regime de capitalizado composta, e, na seqüência, calcula-se a prestação com base no conceito de uma série uniforme de pagamentos periódicos postecipadas.

***(30) Exemplo*:** Um banco empresta o valor de R$ 10.000,00, com a taxa de 10% ao mês, para ser pago em 5 pagamentos iguais, com carência de 2 meses; porém, não haverá o respectivo pagamento de juros durante o período de carência, devendo, portanto, ser incorporado ao saldo devedor, calculado pelo Sistema de Amortização Francês (S.A.F.). Pede-se elaborar a planilha de financiamento.

Dados:

PV = R$ 10.000,00

n = 5 meses

i = 10% a.m.

c = 2 meses

PMT = ?

J = ?

PA = ?

SD = ?

Resolução SD:

$SD_n = SD_{ANTERIOR} - PA_n = SD_{ANTERIOR} \times (i + 1)$

Para 1º Período

$SD_1 = 10.000,00 \times 1,10 = R\$ \ 11.000,00$

Para 2º Período

$SD_2 = 11.000,00 \times 1,10 = R\$ \ 12.100,00$

Os demais valores serão exatamente iguais aos exemplos anteriores.

Resolução PMT:

$PMT = PV \times \{[(1 + i)^n \times i] \div [(1 + i)^n - 1]\}$

$PMT = 12.100,00 \times \{[(1 + 0,10)^5 \times 0,10] \div [(1 + 0,10)^5 - 1]\}$

$PMT = 12.100,00 \times 0,2637974808$

PMT = R$ 3.191,95

n	SD	PA	J	PMT
0	10.000,00	0,00	0,00	0,00
1	11.000,00	0,00	0,00	0,00
2	12.100,00	0,00	0,00	0,00
3	10.118,05	1.981,95	1.210,00	3.191,95
4	7.937,91	2.180,14	1.011,81	3.191,95
5	5.539,75	2.398,15	793,79	3.191,95
6	2.901,78	2.637,97	553,98	3.191,95
7	0,01	2.901,77	290,18	3.191,95
	Σ	**12.099,99**	**3.859,76**	**15.959,75**

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor	
	[f] CLEAR [REG]	0,00	
	[g] [END]	0,00	
10.000,00	[ENTER]	10.000,00	
1,10	[x]	11.000,00	n = 1
1,10	[x]	12.100,00	n = 2
	[CHS]	-12.100,00	
	[PV]	-12.100,00	
10,00	[i]	10,00	
5,00	[n]	5,00	
	[PMT]	2.637,97	
1	[f] [AMORT]	1.000,00	Juros
	[X <> Y]	1.637,97	Amortizacão
	[RCL]	1.637,97	
	[PV]	-8362,03	Saldo Devedor
1	[f] [AMORT]	836,20	
	[X <> Y]	1.801,77	
	[RCL]	1.801,77	
	[PV]	-6.560,26	
1	[f] [AMORT]	656,03	
	[X <> Y]	1.981,94	
	[RCL]	1.981,94	
	[PV]	-4.578,32	
1	[f] [AMORT]	457,83	
	[X <> Y]	2.180,14	
	[RCL]	2.180,14	
	[PV]	-2.398,18	
1	[f] [AMORT]	239,82	
	[X <> Y]	2.398,15	
	[RCL]	2.398,15	
	[PV]	-0,03	

7.2 – Sistema de Amortização Constante (S.A.C.)

Pelo Sistema de Amortização Constante, o principal é reembolsado em quotas de amortização iguais, ou seja, o valor da amortização é constante para todos os períodos. Dessa maneira e diferentemente do Sistema de Amortização Francês (Sistema Price), em que as prestações são iguais, no S.A.C. as prestações são decrescentes, já que os juros diminuem a cada prestação. Isso somente será possível de o saldo devedor inicial for dividido pelo número de Períodos **(n)** envolvidos no financiamento.

Isto posto, as principais características deste sistema são:

- A Prestação **(PMT)** é decrescente durante o Período **(n)** do financiamento;
- A parcela de amortização é constante durante o Período **(n)**; e
- Os Juros **(J)** diminuem a cada Período **(n)**.

Assim teremos:

$$\mathbf{PA = \left\{ \frac{SD_0}{n} \right\}}$$

$$\mathbf{J = SD \,.\, i \,.\, n}$$

$$\mathbf{SD_{ATUAL} = SD_{ANTERIOR} - PA}$$

$$\mathbf{PMT = PA + J_{ATUAL}}$$

Onde:

PA = parcela de amortização;

SD = saldo devedor; e

SD_0 = saldo devedor inicial (valor financiado).

***(31) Exemplo*:** Um banco empresta o valor de R$ 10.000,00, com a taxa de 10% ao mês, para ser pago em 5 pagamentos iguais, sem prazo de carência, calculado pelo Sistema de Amortização Constante (S.A.C.). Pede-se elaborar a planilha de financiamento.

Dados:

PV = R$ 10.000,00

n = 5 meses

i = 10% a.m.

PA = ?

J = ?

PMT = ?

SD = ?

Resolução PA:

$$PA = \left\{ \frac{SD_0}{n} \right\}$$

$$PA = \left\{ \frac{10.000,00}{5} \right\}$$

PA = R$ 2.000,00

Resolução J, PMT e SD:

$J = SD \cdot i \cdot n$

$PMT = PA + J_{ATUAL}$

$SD_{ATUAL} = SD_{ANTERIOR} - PA$

Para 1º Período

J = 10.000,00 x 0,10 x 1 = R$ 1.000,00

PMT = 2.000,00 + 1.000,00 = R$ 3.000,00

SD_{ATUAL} = 10.000,00 – 2.000,00 = R$ 8.000,00

Para 2º Período

J = 8.000,00 x 0,10 x 1 = R$ 800,00

PMT = 2.000,00 + 800,00 = R$ 2.800,00

SD_{ATUAL} = 8.000,00 – 2.000,00 = R$ 6.000,00

Para 3º Período

J = 6.000,00 x 0,10 x 1 = R$ 600,00

PMT = 2.000,00 + 600,00 = R$ 2.600,00

SD_{ATUAL} = 6.000,00 – 2.000,00 = R$ 4.000,00

Para 4º Período

J = 4.000,00 x 0,10 x 1 = R$ 400,00

PMT = 2.000,00 + 400,00 = R$ 2.400,00

SD_{ATUAL} = 4.000,00 – 2.000,00 = R$ 2.000,00

Para 5º Período

J = 2.000,00 x 0,10 x 1 = R$ 200,00

PMT = 2.000,00 + 200,00 = R$ 2.200,00

SD_{ATUAL} = 2.000,00 – 2.000,00 = R$ 0,00

Assim teremos nossa planilha de financiamento:

n	SD	PA	J	PMT
0	10.000,00	0,00	0,00	0,00
1	8.000,00	2.000,00	1.000,00	3.000,00
2	6.000,00	2.000,00	800,00	2.800,00
3	4.000,00	2.000,00	600,00	2.600,00
4	2.000,00	2.000,00	400,00	2.400,00
5	0,00	2.000,00	200,00	2.200,00
	Σ	**10.000,00**	**3.000,00**	**13.000,00**

7.3 – Outros Sistemas de Amortizações

Existem vários outros sistemas de amortizações, tais como, **Sistema de Amortização Misto (S.A.M.)**, **Sistema de Amortização Crescente (SACRE)**,

Sistema de Amortização Alemão e **Sistema de Amortização Americano (S.A.A.)**.

Porém como nosso objetivo neste curso é o dinamismo do estudo da Matemática Financeiro com o uso da calculadora HP-12C, tais sistemas não serão abordados neste momento.

7.4 – Exercícios Propostos

1. João comprou um sofá por R$ 670,90. Ele dividiu a compra em 3 vezes iguais de R$ 246,36, a uma taxa de juros de 5% ao mês. Construa a tabela de amortização da dívida de João, com base no Sistema Francês de Amortização.
2. O Banco ESTRELA lhe emprestou R$ 7.800,00 por 3 meses, à taxa de 8% ao mês. Você vai pagar por mês uma prestação de R$ 3.026,66. Construa a tabela de amortização da dívida, com base no Sistema Francês de Amortização.
3. Seu pai lhe emprestou R$ 150,00 durante três meses. Ele acertou com você a taxa de 1% ao mês. Você vai pagar por mês R$ 51,00. Construa a tabela de amortização da dívida, com base no Sistema Francês de Amortização.
4. Uma empresa contrai um empréstimo de R$ 500.000,00 a 12% ao ano para ser pago em cinco anos. Qual o saldo devedor no quarto ano? Qual a soma de todos os juros até o quarto ano? Faça a planilha, com base no Sistema Francês de Amortização.
5. Uma empresa contrai um empréstimo de R$ 400.000,00 a 20% ao ano para ser pago durante seis anos. Calcule: a soma dos juros até o quinto ano; a soma das amortizações até o terceiro ano; faça a planilha, com base no Sistema Francês de Amortização.
6. Uma empresa contrai um empréstimo de R$ 200.000,00 junto a um banco. Deverá pagar este empréstimo em oito anos à taxa de 12% ao ano. Calcule: a soma das amortizações até o sétimo ano; a soma dos juros até o sexto ano; monte a planilha, com base no Sistema Francês de Amortização.
7. Elabore uma planilha de amortização, com base no Sistema Francês de Amortização, correspondente a um empréstimo de R$ 100.000,00, à taxa de 30% ao ano, a ser liquidado em 6 prestações anuais, havendo carência de 3 anos com o pagamento dos juros devidos.
8. Elabore uma planilha de amortização, com base no Sistema Francês de Amortização, correspondente a um empréstimo de R$ 100.000,00, à taxa de 30% ao ano, a ser liquidado em 6 prestações anuais, havendo carência de 3 anos com capitalização dos juros no saldo devedor.

8.

Análise de Projetos e Decisões de Investimentos

Em todo processo de análise de projetos e de decisões de investimentos, a matemática financeira possui um papel fundamental, pois, com a aplicação das técnicas certas, é possível avaliar com maior clareza e segurança os riscos inerentes a esses processos.

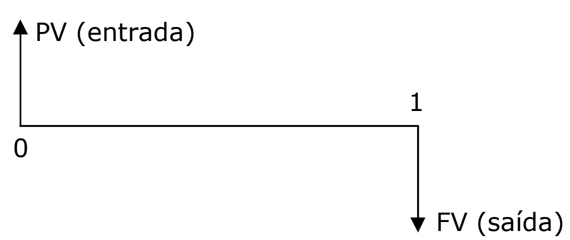
8.1 – Fluxos de Caixa

Toda ação feita no âmbito financeiro implica, necessariamente, na busca da otimização do fluxo de caixa gerado através dessa ação, ou seja, fluxos de receitas (entradas) e despesas (saídas).

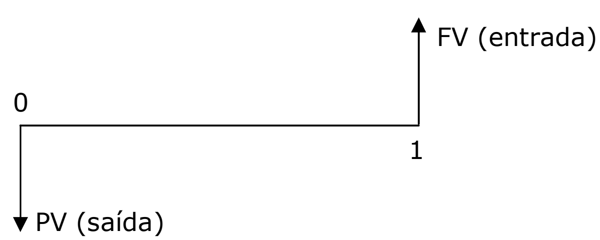
Assim apresenta-se três tipos se fluxo de caixa usados:

a) Fluxo de Caixa Simples

- Do ponto de vista do tomador:

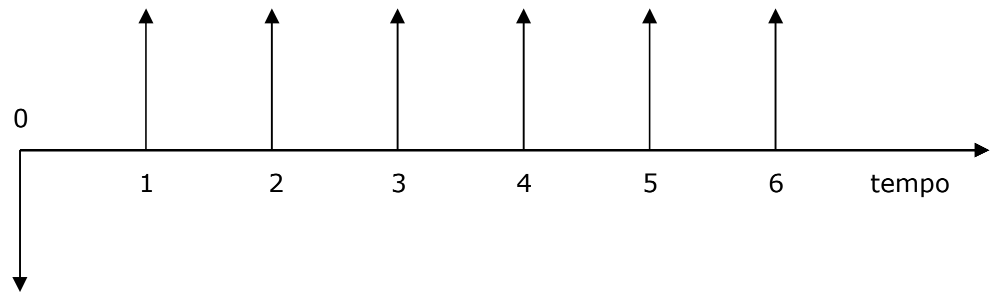


- Do ponto de vista do investidor:

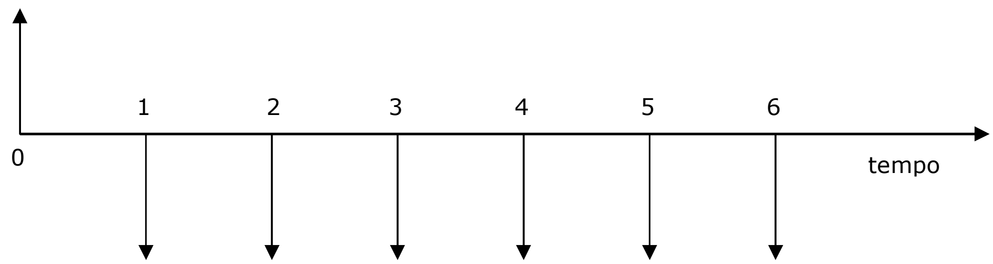


b) Fluxo de Caixa Convencional

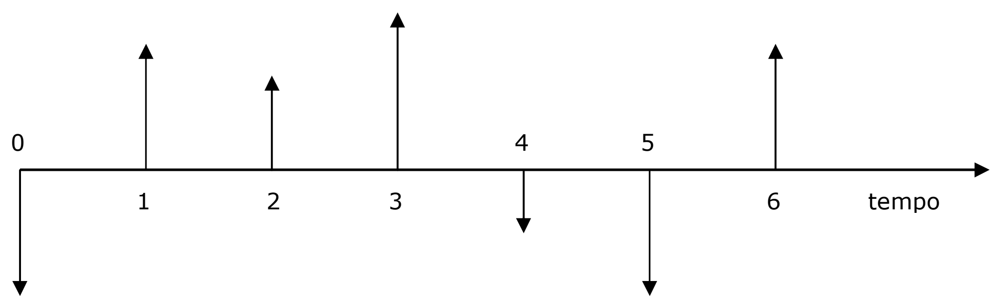
- Com saída inicial:



- Com entrada inicial:



c) Fluxo de Caixa Não Convencional



8.2 – Técnicas para Análise de Investimentos

Nas operações financeiras de investimento ou financiamento, existem várias variáveis que interferem nossa decisão sobre qual dentre várias alternativas é a mais lucrativa e rentável. Existem dois importantes métodos matemáticos que são utilizados na análise de operações financeiras de investimento ou financiamento: o **VPL** (Valor Presente Líquido) e a **TIR** (Taxa Interna de Retorno).

A HP-12C possui funções exclusivas para os dois métodos de análise (**VPL** e **TIR**). Essas funções permitem a análise de problemas financeiros que envolvem fluxos de caixa (dinheiro recebido ou pago) que ocorrem em intervalos de tempo regulares. Esses intervalos podem ser em qualquer período de tempo, além de seus valores não precisarem ser idênticos.

8.2.1 – VPL (Valor Presente Líquido)

O Valor Presente Líquido **(VPL)** é obtido calculando-se o Valor Presente **(PV)** de uma série de fluxos de caixa (pagamentos ou recebimentos) com base em uma taxa de custo de oportunidade conhecida ou estimada, e subtraindo-se o investimento inicial, ou seja, o **VPL** indica se o fluxo de caixa antecipado fornecerá a taxa de retorno desejada. Se o **VPL** for negativo, a taxa real de retorno será menor do que a desejada. Se o **VPL** for igual à zero, a taxa real de retorno é igual à desejada. Se o **VPL** for positivo, a taxa real de retorno será maior do que a desejada.

VPL	Taxa Real de Retorno
Negativo	Menor que a taxa desejada (o projeto deve ser recusado).
Igual a Zero	Igual a taxa desejada (o projeto não oferece ganho ou prejuízo).
Positivo	Maior que a taxa desejada (o projeto deve ser aceito).

Assim teremos:

$$\mathbf{VPL = \sum_{j=1}^{n} [FC_n \div (1 + i)^n] - PV_0}$$

Onde:

FC_n = fluxo de caixa para n períodos; e

PV_0 = valor do investimento inicial.

PELA HP-12C

A calculadora HP-12C comporta até 20 fluxos de caixa consecutivos diferentes, além é claro do investimento inicial **(FC_0)**[10]. Se dois ou mais fluxos de caixa forem iguais, você poderá armazenar na máquina mais do que 20 fluxos. Se todos os fluxos de caixa forem iguais, você poderá registrar até 99 fluxos, utilizando a tecla **N_j**[11]. Observe abaixo como calcular o VPL na HP-12C:

1.	Pressione **[f] CLEAR [FIN]** para limpar o registrador financeiro.
2.	Introduza o investimento inicial, pressione **[CHS] [g] [CF_0]**. Se não houver investimento inicial, pressione 0 **[g] [CF_0]**.
3.	Introduza o próximo fluxo de caixa, pressione **[CHS]** se o fluxo for negativo (prejuízo), depois **[g] [CFj]**[12]. Se não houver fluxo de caixa no próximo período, pressione **0 [g] [CFj]**.
4.	Repita o passo 3 para todos os fluxos de caixa.
5.	Introduza a taxa de juros (custo de oportunidade), e aperte **[i]**.
6.	Pressione **[f] [NPV]**[13].

---

10 **[g] [CF_0]**: *Cash Flow$_0$* = fluxo de caixa inicial.

11 **[g] [N_J]**: *Number j* = número de fluxo de caixa iguais consecutivos.

12 **[g] [CF_J]**: *Cash Flow$_J$* = JÉSIMO fluxo de caixa inicial.

13 **[f] [NPV]**: *Net Present Value* = valor presente líquido.

***(31) Exemplo*:** Um investimento de R$ 1.200,00 gera 3 entradas de caixa consecutivos de R$ 650,00, R$ 250,00 e R$ 450,00. Considerando uma taxa de 5% ao ano, determinar o valor presente líquido.

Dados:

Investimento Inicial (PV_0) = R$ 1.200,00

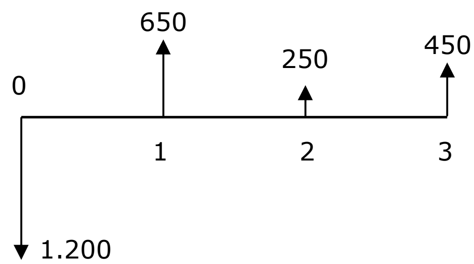
Entradas de caixa (FC_n) = R$ 650,00, R$ 250,00 e R$ 450,00

Prazo (n) = 3 anos

Custo de oportunidade (i) = 5% a.a.

VPL = ?

Resolução:



$VPL = \sum^{n}_{j=1} [FC_n \div (1 + i)^n] - PV_0$

$VPL = \sum\{[650{,}00 \div (1 + 0{,}05)^1] + [250{,}00 \div (1 + 0{,}05)^2] + [450{,}00 \div (1 + 0{,}05)^3]\} - 1.200{,}00$

$VPL = \sum\{[650{,}00 \div (1{,}05)^1] + [250{,}00 \div (1{,}05)^2] + [450{,}00 \div (1{,}05)^3]\} - 1.200{,}00$

$VPL = \sum\{[650{,}00 \div 1{,}05] + [250{,}00 \div 1{,}1025] + [450{,}00 \div 1{,}157625]\} - 1.200{,}00$

$VPL = \sum\{619{,}05 + 226{,}76 + 388{,}73\} - 1.200{,}00$

$VPL = 1.234{,}54 - 1.200{,}00$

VPL = R$ 34,54

Como o VPL foi positivo (VPL > 0), **<u>o projeto pode ser aceito</u>**.

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
1.200,00	**[CHS]**	-1.200,00
	[g]	-1.200,00
	[CF_0]	-1.200,00
650,00	**[g]**	650,00

	[CF_j]	650,00
250,00	**[g]**	250,00
	[CF_j]	250,00
450,00	**[g]**	450,00
	[CF_j]	450,00
5	**[i]**	5,00
	[f]	5,00
	[NPV]	34,53
R$ 34,53		

8.2.2 – TIR (Taxa Interna de Retorno)

A Taxa Interna de Retorno **(TIR)** pode ser definida como a taxa de desconto que iguala os fluxos de caixa ao investimento inicial. Em outras palavras, é atxa que faz com que o VPL seja igual a “0“ (zero), ou seja, satisfaz a equação VPL = 0.

A **TIR** é o percentual (%) de retorno obtido sobre o investimento, ou seja, é a taxa real de juros da operação financeira. Se a **TIR** for negativa, o investimento não é atrativo. Se a **TIR** for igual à zero, investimento indiferente. Se a **TIR** for positiva, o investimento apresenta-se atrativo. Entre vários investimentos, o melhor será aquele que tiver a maior Taxa Interna de Retorno.

TIR	Taxa Real de Retorno
Negativo	Menor que o custo de oportunidade (o projeto deve ser recusado).
Igual a Zero	Igual ao custo de oportunidade (o projeto é indiferente).
Positivo	Maior que o custo de oportunidade (o projeto deve ser aceito).

Para acharmos a TIR, pelo método algébrico, deve-se recorrer ao processo de tentativa e erro. Deste modo, apresentaremos somente a resolução através da HP-12C, tendo em vista que oi cálculo pelo método algébrico é muito complexo.

PELA HP-12C

1.	Pressione **[f] CLEAR [FIN]** para limpar o registrador financeiro.
2.	Introduza os fluxos de caixa utilizando as instruções do tópico anterior “VPL – Valor Presente Líquido (NPV - *Net Present Value*)”.
3.	Pressione **[f] [IRR]**[14].

***(32) Exemplo*:** Um projeto está sendo oferecido nas seguintes condições: um

[14] **[f] [IRR]**: *Internal Rate of Retorn* = taxa interna de retorno.

investimento inicial de R$ 1.000,00, com entradas de caixas mensais de R$ 300,00, R$ 500,00 e R$ 400,00 consecutivas, sabendo-se que um custo de oportunidade aceitável é de 10% ao mês. O Projeto deve ser aceito?

Dados:

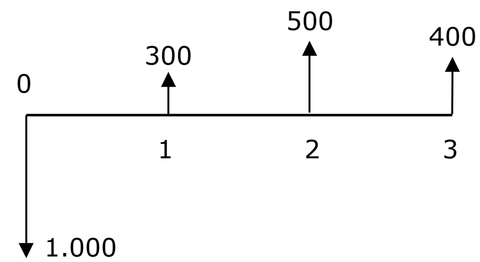
Investimento Inicial (CF_0) = R$ 1.000,00

Entradas de caixa (FC_j) = R$ 300,00, R$ 500,00 e R$ 400,00

Custo de oportunidade (i) = 10% a.m.

TIR = ?

Resolução:



PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
1.000,00	**[CHS]**	-1.000,00
	[g]	-1.000,00
	[CF_0]	-1.000,00
300,00	**[g]**	650,00
	[CF_j]	650,00
500,00	**[g]**	500,00
	[CF_j]	500,00
400,00	**[g]**	400,00
	[CF_j]	400,00
	[f]	400,00
	[IRR]	9,26
9,26%		

TIR < custo de oportunidade (10%), o projeto não deve ser aceito.

8.3 – Operações de Leasing

O ***Leasing***, também denominado Arrendamento Mercantil, é uma operação em que o possuidor (arrendador, empresa de arrendamento mercantil) de um bem móvel ou imóvel cede a terceiro (arrendatário, cliente, "comprador") o uso desse bem por um prazo determinado, recebendo em troca uma contraprestação. O arrendador adquire o bem indicado pela arrendatário. Esta operação se assemelha, no sentido financeiro, a um financiamento que utilize o bem como garantia e que pode ser amortizado num determinado número de "alugueis" (prestações) periódicas, acrescidos do valor residual garantido e do valor devido pela opção de compra. Ao final do contrato de arrendamento, o arrendatário tem as seguintes opções:

- Comprar o bem por valor previamente contratado;
- Renovar o contrato por um novo prazo, tendo como principal o valor residual; ou
- Devolver o bem ao arrendador.

Não é aplicável ao contrato de *leasing* a faculdade de o cliente quitar e adquirir o bem antecipadamente. No entanto, é admitida, desde que previsto no contrato, a transferência dos direitos e obrigações a terceiros, mediante acordo com a empresa arrendadora.

Maiores informações, consulte o site do Banco Central do Brasil: www.bcb.gov.br.

O cálculo das prestações de *leasing* **(PMT_L)** com valor residual pode ser facilmente calculado através da seguinte fórmula:

$$PMT_L = \{PV_0 - [(PV_0 \,.\, i_R) \div (1 + i)^n]\} \,.\, \{[(1 + i)^n \,.\, i] \div [(1 + i)^n - 1]\}$$

Onde:

PV_0 = valor do bem;

i_R = taxa do valor residual;

i = taxa de financiamento; e

n = prazo da operação.

PELA HP-12C

1.	Pressione **[f] CLEAR [REG]** para limpar os registradores.
2.	Digite o valor do bem e pressione **[CHS] [PV] [ENTER]**.
3.	Digite a taxa do valor residual e pressione **[%] [CHS] [FV]**.
4.	Digite a taxa de financiamento e pressione **[i]**.
5.	Digite o prazo da operação e pressione **[n] [PMT] (contraprestação SEM valor residual).**
6.	Digite 0 (zero) e pressione **[FV] [PMT] (contraprestação COM valor residual)**.

***(33) Exemplo*:** Um automóvel no valor de R$ 18.500,00 está sendo adquirido através de uma operação de *leasing*, com taxa de 2% ao mês, durante um período de 36 meses. O valor residual definido no ato da contratação será de 5% sobre o valor do automóvel, para ser pago com a prestação nº 36. Calcular o valor da prestação com e sem o valor residual.

Dados:

PV_0 = R$ 18.500,00

$i_R = 5\%$

$i = 2\%$ a.m.

$n = 36$ meses

$PMT = ?$

$PMT_L = ?$

Resolução PMT:

$PMT = PV \times \{[(1 + i)^n \times i] \div [(1 + i)^n - 1]\}$

$PMT = 18.500,00 \times \{[(1 + 0,02)^{36} \times 0,02] \div [(1 + 0,02)^{36} - 1]\}$

$PMT = 18.500,00 \times \{[(1,02)^{36} \times 0,02] \div [(1,02)^{36} - 1]\}$

$PMT = 18.500,00 \times \{[2,039887344 \times 0,02] \div [2,039887344 - 1]\}$

$PMT = 18.500,00 \times \{0,040797747 \div 1,039887344\}$

$PMT = 18.500,00 \times 0,039232853$

$PMT =$ R$ 725,81

Resolução PMT_L:

$PMT_L = \{PV_0 - [(PV_0 \times i_R) \div (1 + i)^n]\} \times \{[(1 + i)^n \times i] \div [(1 + i)^n - 1]\}$

$PMT_L = \{18.500,00 - [(18.500,00 \times 0,05) \div (1 + 0,02)^{36}]\} \times \{[(1 + 0,02)^{36} \times 0,02] \div [(1 + 0,02)^{36} - 1]\}$

$PMT_L = \{18.500,00 - [925,00 \div (1,02)^{36}]\} \times \{[(1,02)^{36} \times 0,02] \div [(1,02)^{36} - 1]\}$

$PMT_L = \{18.500,00 - [925,00 \div 2,039887344]\} \times \{[2,039887344 \times 0,02] \div [2,039887344 - 1]\}$

$PMT_L = \{18.500,00 - 453,46\} \times \{0,040797747 \div 1,039887344\}$

$PMT_L = 18.046,54 \times 0,039232853$

$PMT_L =$ R$ 708,02

PELA HP-12C

Digite	Pressione	Visor
	[f] CLEAR [REG]	0,00
18.500,00	[CHS]	-18.500,00
	[PV]	-18.500,00
	[ENTER]	-18.500,00
5	[%]	-925,00

	[CHS]	925,00
	[FV]	925,00
2,00	**[i]**	2,00
36,00	**[n]**	36,00
	[PMT]	708,02
R$ 708,02 (sem valor residual)		
0,00	**[FV]**	0,00
	[PMT]	725,81
R$ 725,81 (com valor residual)		

8.4 – Exercícios Propostos

1. Um investidor tem duas possibilidades para aplicar seu capital. A primeira ele resgata integralmente o principal acrescidos de 80% de juros após 3 anos, enquanto a segunda ele resgata metade do principal no final de cada ano durante os próximos 3 anos. Supondo-se uma taxa mínima de atratividade de 20% ao ano, qual a melhor alternativa? *Resposta: A segunda alternativa*

2. Um equipamento é vendido à vista ou em 6 pagamentos mensais sem entrada seno os 3 primeiros de valor correspondente a 30% do valor à vista e os 3 últimos correspondentes a metade das 3 primeiras. Qual a taxa de juros do financiamento. Qual a melhor alternativa para o comprador, sabendo-se que ele pode aplicar seu dinheiro no mercado financeiro à razão de 4% ao mês? *Resposta: i = 11% a.m. – é melhor comprar à vista*

3. A diretoria de uma multinacional está estudando a compra de uma máquina nova para o setor de usinagem. O custo de aquisição é a ordem de R$ 80.000,00, acrescidos 10% a título de despesas com importação e treinamento de pessoal. Sabendo-se que o investimento trará um aumento no faturamento na ordem de R$ 30.000,00 anuais para os próximos 8 anos e que a taxa mínima de atratividade para a empresa é de 20% ao ano, verifique se existe viabilidade econômica para o projeto. *Resposta: O projeto é viável (TIR = 29,9% a.a.)*

4. Para abrir uma lanchonete, João vai precisar investir R$ 85.000,00. Ele espera ter um retorno mínimo de 12% ao ano. Será que esse negócio é viável? Encontre o VPL e a TIR. Considere o seguinte Fluxo de Caixa: Ano 1 – R$ 18.000 / Ano 2 – R$ 33.500 / Ano 3 – R$ 52.200. *Resposta: VPL = - R$ 5.067,65 / TIR = 9,01% (Investimento não-atrativo).*

5. Um investidor resolveu investir R$ 350.000 em uma indústria de sorvete. Ele espera ter um retorno de 19% ao ano. Será que esse negócio é rentável? Encontre o VPL e a TIR. Considere o seguinte Fluxo de Caixa: Ano 1 – R$ 156.000 / Ano 2 – R$ 298.000 / Ano 3 – R$ 223.000 / Ano 4 – R$ 223.000 / Ano 5 – R$ 340.000. *Resposta: VPL = R$ 377.541,20 / TIR = 57,04% (Investimento atrativo).*

6. Três amigos querem investir R$ 60.000 em uma loja de roupas. Eles esperam ter um retorno de 25,34% ao ano. Será que o negócio é viável? Encontre o VPL e a TIR. Considere o seguinte Fluxo de Caixa: Ano 1 – R$ 25.000 / Ano 2 – R$ 35.000 / Ano 3 – R$ 35.000. *Resposta: VPL = -R$ 1,05 / TIR = 25,34% (Investimento indiferente).*

Referência Bibliográfica

ASSAF NETO, Alexandre. ***Matemática financeira e suas aplicações***. 6 edição. São Paulo: Atlas, 2001.

ASSAF NETO, Alexandre. Lima, Fabiano Guasti. ***Investimentos no Mercado Financeiro usando a Calculadora HP-12C – Programas Financeiros Aplicados ao Mercado de Capitais***. Ribeirão Preto: Inside Books, 2007.

BRANCO, Anísio C. C.. ***Matemática Financeira Aplicada – Método Algébrico, HP-12C, Microsoft Excel***©. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

FARIA, Rogério Gomes de. ***Matemática comercial e financeira***. 5 edição. São Paulo: McGraw-Hill, 2000.

GIMENES, Cristiano Marchi. ***Matemática Financeira com HP 12C e Excel – Uma Abordagem Descomplicada***. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

HEWLETT-PACKARD. ***HP-12C – Manual do Proprietário e Guia para a Solução de Problemas***. Brasil: Hewlett-Packard, 1981.

Samanez, Carlos Patrício. ***Matemática Financeira: aplicações à análise de investimentos***. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

TEIXEIRA, James; NETTO, Scipione Di P. ***Matemática Financeira***. São Paulo: Pearson Makron Books, 1998.

ZENTGRAF, Walter. ***Calculadora Financeira HP-12C***. São Paulo: Atlas, 1995.