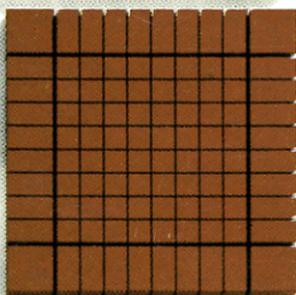
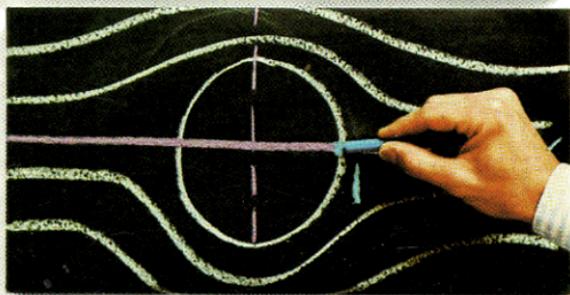
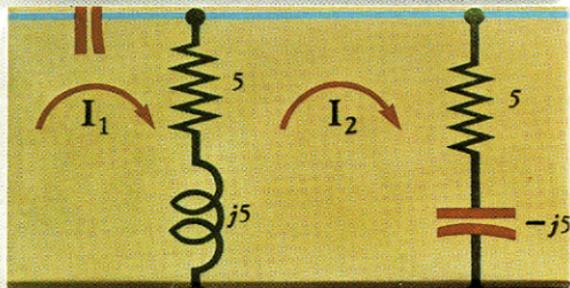
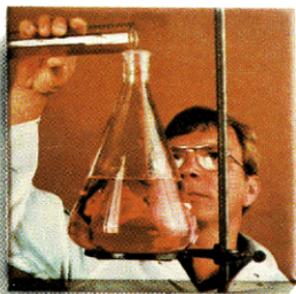
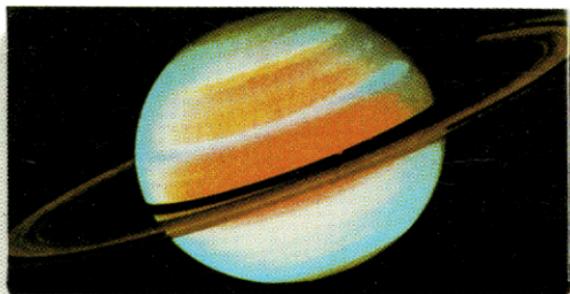


HEWLETT-PACKARD

# HP-15C

MANUAL DO PROPRIETÁRIO







**HP-15C**

**Manual do Proprietário**

**Setembro 1982**

00015-90007

# Introdução

Parabéns! Mesmo não tendo experiência anterior com calculadoras HP, ou então, sendo um usuário experimentado, você descobrirá que adquiriu uma calculadora sem similar no mercado.

Além de sua Memória Contínua e do seu baixo consumo de energia, a tecnologia de ponta da HP-15C proporciona:

- 448 bytes de memória de programação (um ou dois bytes por instrução) e uma sofisticada capacidade de programação, incluindo desvios condicionais e incondicionais, sub-rotinas, indicadores e edição.
- 4 funções matemáticas avançadas: cálculo com números complexos, com matrizes, de raízes e integração numérica.
- Armazenamento direto e indireto de até 67 registradores.
- Baterias de longa duração.

Este manual foi escrito especialmente para você, independentemente de sua experiência. A primeira parte, Conceitos Básicos da HP-15C, cobre todas as funções básicas da HP-15C e como utilizá-las. A segunda parte, Programando a HP-15C, é dividida em seções as quais são subdivididas em 3 sub-seções: A Mecânica, Exemplos e Informações Adicionais; isso facilita o acesso direto dos usuários às informações necessárias, em função de sua experiência. A terceira parte, Funções Avançadas da HP-15C, descreve seus quatro recursos matemáticos avançados.\*

Sugerimos que você adquira alguma experiência com a sua HP-15C antes de ler qualquer uma destas três partes. Para isso, examine o material introdutório denominado A Sua HP-15C: A Solução para seus Problemas, na página 11.

Nos apêndices você encontrará detalhes adicionais sobre a operação da Calculadora, bem como informações sobre Garantia e Assistência Técnica. O Resumo e Índice de Funções e o Resumo e Índice de Programação, situados no final do manual, podem ser usados para uma referência rápida a cada tecla funcional bem como para facilitar o acesso às páginas do manual que contenham informações mais detalhadas.

---

\* Se você já estiver habituado com calculadoras HP, a leitura das partes I e II é desnecessária; você poderá ir diretamente às Funções Avançadas da HP-15C à página 121. O uso de **SOLVE** e **R** exige o conhecimento prévio de como programar a HP-15C.

# Índice

<b>A Sua HP-15C: A Solução para seus Problemas</b> .....	11
Uma Rápida Análise de <b>ENTER</b> .....	11
Soluções Manuais .....	12
Soluções Programadas .....	13
<b>Parte I: Conceitos Básicos da HP-15C</b> .....	16
<b>Seção 1: Introdução ao Uso</b> .....	17
Ligando e Desligando a Calculadora .....	17
Operação pelo Teclado .....	17
Funções Primárias e Alternativas .....	17
Teclas de Prefixo .....	18
Troca de Sinais .....	18
Introduzindo Expoentes .....	18
As teclas "CLEAR" .....	19
Apagando o Visor: <b>CLx</b> e <b>←</b> .....	20
Cálculos .....	21
Funções de Um Número .....	21
Funções de Dois Números e <b>ENTER</b> .....	21
<b>Seção 2: Funções Numéricas</b> .....	24
Pi .....	24
Funções para a Alteração de Números .....	24
Funções de Um Número .....	25
Funções Gerais .....	25
Operações Trigonométricas .....	26
Conversões de Tempo e Ângulos .....	26
Conversão de Graus/Radianos .....	27
Funções Logarítmicas .....	28
Funções Hiperbólicas .....	28
Funções de Dois Números .....	29
Potenciação .....	29
Porcentagens .....	29
Conversão de Coordenadas Polares/Retangulares .....	30
<b>Seção 3: A Pilha Automática de Memória, ÚLTIMO X e o Armazenamento de Dados</b> .....	32
A Pilha Automática de Memória (Pilha Operacional) e sua Manipulação .....	32
Funções para Manipulação da Pilha Operacional .....	33
O Registrador ÚLTIMO X (LAST X) e <b>LSTx</b> .....	35

Funções da Calculadora e a Pilha Operacional .....	36
Ordem de Introdução e a Tecla <b>ENTER</b> .....	37
Cálculos em Cadeia .....	38
Cálculos Aritméticos com Constantes .....	39
Operações com Registradores de Armazenamento .....	42
Armazenando e Recuperando Números .....	43
Como Apagar os Registradores de Armazenamento de Dados .....	44
Aritmética com Registradores de Armazenamento .....	44
Ultrapassagem da Capacidade da Calculadora (Overflow e Underflow) .....	46
Problemas .....	46
<b>Seção 4: Funções Estatísticas</b> .....	48
Cálculos de Probabilidade .....	48
Gerador de Números Aleatórios .....	49
Acumulando Estatísticas .....	50
Corrigindo Estatísticas Acumuladas .....	53
Média .....	54
Desvio Padrão .....	54
Regressão Linear .....	55
Estimativa Linear e Coeficiente de Correlação .....	57
Outras Aplicações .....	58
<b>Seção 5: O Visor e a Memória Contínua</b> .....	59
Controle do Visor .....	59
Apresentação em Ponto Decimal Fixo .....	59
Apresentação em Notação Científica .....	60
Apresentação em Notação de Engenharia .....	60
Apresentação da Mantissa .....	61
Erro de Arredondamento .....	61
Apresentações Especiais .....	61
Anúncios .....	61
Separadores de Dígitos .....	62
Mensagens de Erro .....	62
Ultrapassagem da Capacidade da Calculadora (Overflow e Underflow) .....	62
Indicação de Bateria Fraca .....	63
Memória Contínua .....	63
Estados da Calculadora .....	63
Apagando a Memória Contínua .....	64

<b>Parte II: Programando a HP-15C</b> .....	65
<b>Seção 6: Princípios Básicos de Programação</b> .....	66
A Mecânica .....	66
Criando um Programa .....	66
Carregando um Programa .....	66
Interrupções Intermediárias em Programas .....	68
Executando um Programa .....	69
Como Introduzir Dados .....	70
Memória de Programação .....	70
Exemplo .....	71
Informações Adicionais .....	75
Instruções de um Programa .....	75
Codificando Instruções .....	75
Configuração de Memória .....	76
Limites de um Programa .....	78
Interrupções Inesperadas em Programas .....	79
Seqüências Abreviadas de Teclas .....	80
Modo do Usuário .....	80
Expressões Polinomiais e o Método de Horner .....	81
Funções Não Programáveis .....	82
Problemas .....	82
<b>Seção 7: Edição de Programas</b> .....	84
A Mecânica .....	84
Localização de Uma Determinada Linha da Memória de Programação .....	84
Suprimindo Linhas de um Programa .....	85
Inserindo Linhas num Programa .....	85
Exemplos .....	85
Informações Adicionais .....	88
Operações Linha à Linha .....	88
Posicionamento de Linhas .....	89
Inserções e Supressões .....	89
Inicializando o Estado da Calculadora .....	89
Problemas .....	90
<b>Seção 8: Decisões num Programa e seu Controle</b> .....	92
A Mecânica .....	92
Desvios .....	92
Testes de Condição .....	93
Indicadores .....	94
Exemplos .....	95
Exemplo de Desvios e Ciclos ("Looping") .....	95

## 6 Índice

Exemplo de Indicadores .....	97
Informações Adicionais .....	100
A Instrução Go To (Ir para) .....	100
Ciclos ("Looping") .....	101
Desvio Condicional .....	101
Indicadores .....	102
os Indicadores 8 e 9 do Sistema .....	103
<b>Seção 9: Sub-rotinas .....</b>	<b>104</b>
A Mecânica .....	104
Desvio e Retorno de uma Sub-Rotina .....	104
Limites de uma Sub-Rotina .....	105
Exemplo .....	105
Informações Adicionais .....	108
O Retorno de uma Sub-rotina .....	108
Sub-Rotinas Encadeadas .....	108
<b>Seção 10: O Registrador de Indexação e o Controle de Ciclos .....</b>	<b>109</b>
As Teclas <b>I</b> e <b>(i)</b> .....	109
O Armazenamento Direto versus o Armazenamento Indireto de Dados com o Registrador de Indexação .....	109
Controle Indireto de um Programa com o Registrador de Indexação .....	110
Controle de Ciclos num Programa .....	110
A Mecânica .....	110
Armazenamento e Recuperação com o Registrador de Indexação .....	110
Operações Aritméticas com o Registrador de Indexação .....	111
Intercâmbio com o Registrador X .....	111
Desvio Indireto com <b>I</b> .....	111
Controle Indireto de Indicadores com <b>I</b> .....	112
Controle Indireto do Formato de Apresentação com <b>I</b> .....	112
Controle de Ciclos com Contadores: <b>ISG</b> e <b>DSE</b> .....	112
Exemplos .....	114
Exemplos de Operações com Registradores .....	114
Exemplo de Controle de Ciclos com <b>DSE</b> .....	116
Exemplo de Controle do Formato de Apresentação no Visor .....	117
Informações Adicionais .....	119
Conteúdo do Registrador de Indexação .....	119
<b>ISG</b> e <b>DSE</b> .....	119
Controle Indireto do Visor .....	120

<b>Parte III: Funções Avançadas da HP-15C</b> .....	121
<b>Seção 11: Cálculos com Números Complexos</b> .....	122
A Pilha Operacional Complexa e o Modo Complexo .....	122
Criando a Pilha Operacional Complexa .....	122
Desativando o Modo Complexo .....	123
Números Complexos e a Pilha Operacional .....	123
Introduzindo Números Complexos .....	123
Movimentação da Pilha Operacional no Modo Complexo .....	126
Manipulando as Pilhas Operacionais Real e Imaginária .....	126
Trocando os Sinais .....	126
Zerando um Número Complexo .....	127
Introduzindo um Número Real .....	130
Introduzindo um Número Imaginário Puro .....	131
Armazenando e Recuperando Números Complexos .....	132
Operações com Números Complexos .....	133
Funções de Um Número .....	133
Funções de Dois Números .....	133
Funções para Manipulação da Pilha Operacional .....	134
Testes de Condição .....	134
Resultados Complexos a partir de Números Reais .....	135
Conversões de Coordenadas Polares e Retangulares .....	136
Problemas .....	138
<b>Seção 12: Calculando com Matrizes</b> .....	140
Dimensões de uma Matriz .....	142
Dimensionando uma Matriz .....	143
Apresentando as Dimensões de uma Matriz .....	144
Alterando as Dimensões de uma Matriz .....	144
Armazenando e Recuperando Elementos de uma Matriz .....	145
Armazenando e Recuperando todos os Elementos Ordenadamente .....	145
Verificando e Alterando Elementos Individuais de uma Matriz .....	147
Armazenando um Número em Todos os Elementos de uma Matriz .....	149
Operações com Matrizes .....	149
Descritores de uma Matriz .....	150
A Matriz de Resultados .....	150
Copiando uma Matriz .....	151
Operações com uma Única Matriz .....	152
Operações Escalares .....	154
Operações Aritméticas .....	155
Multiplicação de Matrizes .....	156
Resolvendo a Equação $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ .....	158
Calculando o Resíduo .....	161

## 8 Índice

Usando Matrizes na Forma $LU$ (Triangulares Inferior e Superior)	162
Calculando com Matrizes Complexas	163
Armazenando os Elementos de uma Matriz Complexa	163
As Transformações Complexas	166
Invertendo uma Matriz Complexa	167
Multiplicando Matrizes Complexas	168
Resolvendo a Equação Complexa $AX = B$	170
Outras Operações Envolvendo Matrizes	174
Usando os Elementos de uma Matriz com Operações de Registradores	174
Usando Descritores de uma Matriz com o Registrador de Indexação	175
Testes de Condição com Descritores de uma Matriz	175
Funcionamento da Pilha Operacional em Cálculos de Matrizes	176
Usando Operações Matriciais num Programa	178
Resumo das Funções de Matrizes	179
<b>Seção 13: Cálculo das Raízes de uma Equação</b>	182
Usando <b>SOLVE</b>	182
Quando nenhuma Raiz é Encontrada	188
Escolhendo Estimativas Iniciais	190
Usando <b>SOLVE</b> num Programa	193
Restrição ao Uso de <b>SOLVE</b>	194
Requisitos de Memória	194
Informações Adicionais	194
<b>Seção 14: Integração Numérica</b>	195
Usando <b>f:</b>	195
Precisão de <b>f:</b>	201
Usando <b>f:</b> num Programa	204
Requisitos de Memória	205
Informações Adicionais	205
<b>Apêndice A: Condições de Erro</b>	206
<b>Apêndice B: Movimentação da Pilha Operacional e o Registrador ÚLTIMO X (LAST X)</b>	210
Término da Introdução de Dígitos	210
Movimentação da Pilha Operacional	210
Operações de Desativação (Bloqueio)	211
Operações de Ativação	211
Operações Neutras	212
Registrador ÚLTIMO X (LAST X)	213

<b>Apêndice C: Alocação de Memória</b> .....	214
A Memória .....	214
Registradores .....	214
Estado de Memória ( <b>MEM</b> ) .....	216
Realocação de Memória .....	216
A Função <b>DIM</b> ( <i>i</i> ) .....	216
Restrições de Realocação .....	217
Memória de Programação .....	218
Realocação Automática da Memória de Programação .....	218
Instruções (de Dois Bytes) de Programas .....	219
Requisitos de Memória para as Funções Avançadas .....	220
<b>Apêndice D: Uma Visão Mais Detalhada de <b>SOLVE</b></b> .....	221
Como <b>SOLVE</b> Funciona .....	221
Precisão da Raiz .....	223
Interpretando os Resultados .....	227
Calculando Diversas Raízes .....	234
Limitando o Tempo de Estimacão .....	239
Contando Iterações .....	239
Especificando uma Tolerância .....	239
<b>Apêndice E: Uma Visão Mais Detalhada de <b>f<sub>β</sub></b></b> .....	240
Como <b>f<sub>β</sub></b> Funciona .....	240
Precisão, Incerteza e Duração do Cálculo .....	241
A Incerteza e o Formato de Apresentação no Visor .....	245
Condições que Poderiam Ocasionar Resultados Incorretos .....	249
Condições que Prolongam a Duração do Cálculo .....	253
Obtendo a Aproximação Atual de uma Integral .....	256
<b>Apêndice F: Bateria, Garantia e Informações sobre Assistência Técnica</b> .....	258
Baterias .....	258
Indicação de Bateria Fraca .....	259
Instalando Baterias Novas .....	260
Verificando a Operação Correta (Auto-Diagnóstico) .....	262
Garantia Limitada de Um Ano .....	264
O que Faremos .....	264
O que Não Está Coberto .....	264
Obrigatoriedade de Realização de Modificações .....	264
Assistência Técnica .....	264
Informações sobre a Assistência Técnica Internacional .....	265

## 10 Índice

Custo de Reparos .....	265
Garantia dos Reparos .....	265
Instruções de Remessa para Reparos .....	266
Informações Adicionais .....	266
Informações sobre Vendas e Produto .....	267
Especificações de Temperatura .....	267
<b>Resumo e Índice de Funções .....</b>	<b>268</b>
<b>ON</b> .....	268
Alteração de Números .....	268
Armazenamento .....	269
Controle do Registrador de Indexação .....	269
Controle do Visor .....	269
Conversões .....	270
Estatística .....	270
Funções Complexas .....	270
Funções Hiperbólicas .....	271
Funções Logarítmicas e Exponenciais .....	271
Funções de Matrizes .....	271
Introdução de Dígitos .....	273
Manipulação da Pilha Operacional .....	273
Matemática .....	274
Porcentagem .....	274
Probabilidades .....	274
Teclas de Prefixo .....	274
Trigonometria .....	275
<b>Resumo e Índice de Programação .....</b>	<b>275</b>
<b>Índice Remissivo .....</b>	<b>278</b>
<b>O Teclado da HP-15C e a Memória Contínua .....</b>	<b>Verso da Contra-Capa</b>

# A Sua HP-15C: A Solução para Seus Problemas

A Avançada Calculadora Científica Programável HP-15C é uma poderosa solução para os seus problemas, que você pode levar a qualquer lugar. Sua Memória Contínua retém dados e programas por tempo indeterminado, até você resolver suprimi-los. Embora sendo sofisticada, não exige experiência prévia ou o conhecimento de linguagens de programação para ser utilizada.

Um novo e importante recurso da sua HP-15C é seu extremamente baixo consumo de energia. Esta eficiência é responsável pelo projeto leve e compacto, eliminando a necessidade do recarregador. O consumo de energia da sua HP-15C é tão reduzido, que a vida média da bateria é da ordem de 6 a 12 meses, em condições normais de uso. Além disso, o indicador de bateria fraca se acende com antecedência satisfatória, para que você evite operar a calculadora até o total esgotamento das baterias.

A HP-15C ajuda você a economizar energia, desligando-se automaticamente se ficar inativa por alguns minutos. Não se preocupe com a perda de dados: toda informação contida na HP-15C é preservada pela Memória Contínua.

## Uma Rápida Análise de **ENTER**

A lógica utilizada na sua calculadora Hewlett-Packard, representada pela tecla **ENTER**, difere da lógica empregada na maioria das outras calculadoras. Você terá a oportunidade de comprovar que o uso de **ENTER** transforma os cálculos mais complicados e emaranhados em cálculos de resolução simples. Vejamos agora como **ENTER** funciona.

Examinemos, por exemplo, as funções aritméticas. Primeiramente, temos que introduzir os números na máquina. Sua calculadora já está ligada? Se ainda não estiver, pressione **ON**. O visor está zerado? Para zerar o visor, pressione **g** **CLx**, ou seja, pressione **g**, seguida de **◀**.\*

---

\* Se você nunca tiver utilizado uma calculadora HP, notará que a maioria das teclas possuem três funções. Para utilizar a função primária (a impressa em branco na própria tecla) basta pressioná-la. Para utilizar as impressas em dourado ou azul, pressione antes a tecla dourada **f** ou a tecla azul **g** conforme o caso.

Para realizar uma operação aritmética, introduza o primeiro número, pressione **ENTER** para separá-lo do segundo número e finalmente introduza o segundo número. Pressione a seguir a tecla da operação aritmética desejada, **+**, **-**, **×** ou **÷**. O resultado aparecerá imediatamente após a tecla da função numérica ser pressionada.

Todas as apresentações do visor ilustradas neste manual estarão sempre no formato **FIX** 4 (o ponto decimal é “fixado” de modo a apresentar quatro casas decimais), a menos que haja outra indicação específica. Se a sua calculadora não estiver apresentando as quatro casas decimais, pressione **f** **FIX** 4 para que a apresentação do visor coincida com a dos exemplos.

## Soluções Manuais

Execute agora os seguintes cálculos envolvendo dois números. Não é necessário zerar a calculadora entre os problemas. Se você tiver introduzido um dígito errado, pressione **←** para eliminar o engano, introduzindo os dígitos corretos a seguir.

Para Calcular	Pressione	Visor
$9 - 6 = 3$	9 <b>ENTER</b> 6 <b>-</b>	3.0000
$9 \times 6 = 54$	9 <b>ENTER</b> 6 <b>×</b>	54.0000
$9 \div 6 = 1.5$	9 <b>ENTER</b> 6 <b>÷</b>	1.5000
$9^6 = 531,441$	9 <b>ENTER</b> 6 <b>y<sup>x</sup></b>	531,441.0000

Observe que nos quatro exemplos:

- Os dois números estavam na calculadora antes de você pressionar a tecla da função.
- **ENTER** é usada apenas para separar dois números quando são introduzidos um após o outro.
- Pressionando-se uma tecla de função numérica, neste caso **+**, **-**, **×** ou **÷**, a função é executada imediatamente e o resultado é apresentado no visor.

Para percebermos a íntima relação existente entre a solução manual e a programada de um problema, vamos primeiro calcular manualmente, isto é, através do teclado, a solução de um problema-exemplo. Em seguida usaremos um programa para calcular a solução do mesmo problema com outros dados.

O tempo gasto por um objeto para chegar ao chão, em queda livre, (desprezando-se a resistência do ar) é dado pela fórmula

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

onde  $t$  = tempo em segundos,  
 $h$  = altura em metros,  
 $g$  = constante gravitacional, 9,8 m/s<sup>2</sup>.

**Exemplo:** Calcule o tempo gasto por uma pedra caindo do topo da Torre Eiffel (de 300.51 metros de altura) até o chão.



**Pressione**

300.51 **ENTER**

2 **×**

9.8 **÷**

**√**

**Visor**

300.5100

601.0200

61.3286

7.8313

Introduza  $h$ .

Calcule  $2h$ .

$(2h)/g$ .

Tempo de duração da queda, em segundos.

## Soluções Programadas

Suponha que você queira calcular tempos de duração de quedas de alturas diversar. A maneira mais fácil é a de se escrever um programa que incorpore as partes constantes do cálculo, permitindo a introdução dos dados variáveis.

**Escrevendo o Programa.** O programa é semelhante a mesma série de teclas que você usou acima. O início do programa é identificado por um rótulo e o final por uma instrução de retorno. Além disso, o programa deve comportar a introdução de novos dados.

**Carregando o Programa.** Você pode carregar um programa relativo ao problema acima, pressionando as teclas apresentadas na ordem abaixo. (O visor fornece algumas informações que, futuramente, você verificará serem bastante úteis, mas que poderão ser ignoradas, por enquanto).

Pressione	Visor	
<b>[g]</b> <b>[P/R]</b>	<b>000-</b>	Coloca a HP-15C no Modo de Programação. (O anúncio PRGM aparece).
<b>[f]</b> <b>CLEAR</b> <b>[PRGM]</b>	<b>000-</b>	Apaga a memória de programação. (Neste caso, este passo é opcional).
<b>[f]</b> <b>[LBL]</b> <b>[A]</b>	<b>001-42,21,11</b>	O rótulo "A" define o início do programa.
<b>2</b>	<b>002- 2</b>	
<b>[x]</b>	<b>003- 20</b>	Estas são as mesmas teclas que você pressionou para resolver o problema manualmente.
<b>9</b>	<b>004- 9</b>	
<b>[.]</b>	<b>005- 48</b>	
<b>8</b>	<b>006- 8</b>	
<b>[+]</b>	<b>007- 10</b>	"RTN" ( <i>ReTurN</i> = retorno) define o final do programa.
<b>[√]</b>	<b>008- 11</b>	
<b>[g]</b> <b>[RTN]</b>	<b>009- 43 32</b>	
<b>[g]</b> <b>[P/R]</b>	<b>7.8313</b>	Coloca a HP-15C no Modo de Execução (Run). (O anúncio PRGM desaparece).

**Executando o Programa.** Introduza os dados abaixo para executar o programa.

Pressione	Visor	
<b>300.51</b>	<b>300.51</b>	Altura da Torre Eiffel.
<b>[f]</b> <b>[A]</b>	<b>7.8313</b>	Duração da queda, que você já havia calculado anteriormente.
<b>1050</b> <b>[f]</b> <b>[A]</b>	<b>14.6385</b>	Tempo (em segundos) decorrido para uma pedra chegar ao solo, lançada de uma altura de 1050 m.

Com o programa carregado, você pode rapidamente calcular o tempo de queda de um objeto, para diversas alturas. Basta introduzir a altura e pressionar  $\boxed{f}\boxed{A}$ . Calcule o tempo de queda para objetos lançados das seguintes alturas: 100 m, 2 m, 275 m e 2,000 m.

As respostas são: 4.5175 s; 0.6389 s; 7.4915 s e 20.2031 s.

Este programa foi relativamente fácil. Você verá, na parte II, muitos outros aspectos e detalhes de programação. Por ora, vire a página e leia a parte I, conhecendo alguns dos importantes recursos operacionais básicos da calculadora.

**Parte I**  
**Conceitos Básicos**  
**da HP-15C**

# Introdução ao Uso

## Ligando e Desligando a Calculadora

A tecla **ON** serve para ligar e desligar a HP-15C.\* Para economizar energia, a calculadora desliga-se automaticamente depois de alguns minutos de inatividade.

## Operação pelo Teclado

### Funções Primárias e Alternativas

A maioria das teclas da sua HP-15C realizam uma função primária e duas funções alternativas (prefixadas). A função primária de qualquer tecla é indicada pelo(s) caractere(s) impressos na face da tecla. As funções alternativas são indicadas pelos caracteres impressos em dourado, acima da tecla, e em azul, na face oblíqua da tecla.

- Para executar a função primária impressa na face da tecla, basta pressioná-la. Por exemplo:  $\boxed{+}$ .
- Para executar a função alternativa impressa em dourado ou azul, pressione a tecla de prefixo da cor adequada (**f** ou **g**), seguida pela tecla da função. Por exemplo:

**f** **SOLVE**; **g**  $x \leq y$ .



Ao longo deste manual observamos certas convenções com relação às funções alternativas. As referências à *própria função* aparecerão na forma [nome da função], tal como “a função **MEM**”. As referências *ao uso da tecla* incluirão a tecla de prefixo, tal como “pressione **g** **MEM**.” As referências às quatro funções impressas em dourado sob a chave “CLEAR”, serão precedidas pela palavra “CLEAR”, tal como “a função CLEAR. **REG**” ou “pressione **f** CLEAR **PRGM**”

\* Observe que a tecla **ON** tem altura inferior à das demais teclas, reduzindo o risco de ser indevidamente utilizada.

Observe que ao pressionar uma das teclas **f** ou **g**, de prefixo, a anúncio **f** ou **g** aparece e permanece no visor até a tecla da função ser pressionada, completando a operação.



## Teclas de Prefixo

Uma tecla de prefixo é aquela que deve anteceder uma outra tecla para completar a seqüência de uma função. Certas funções exigem duas partes: uma tecla de prefixo e um dígito ou tecla. Para sua referência, as teclas de prefixo são as seguintes:

CF	ENG	FIX -	GSB	/:	MATRIX	SCI	STO
DIM	f	g	HYP	ISG	RCL	SF	TEST
DSE	F?	GTO	HYP <sup>†</sup>	LBL	RESULT	SOLVE	x <sup>2</sup>

Se você pressionar uma tecla de prefixo por engano, antes de executar uma função, pressione **f** CLEAR **PREFIX** para cancelar o erro. CLEAR **PREFIX** também é utilizada para apresentar a mantissa de um número no visor; todos os 10 dígitos do número que estiver no visor serão apresentados momentaneamente, logo após **PREFIX** ser pressionada.

## Troca de Sinais

Pressionando **CHS** (*CHange Sign = trocar o sinal*) troca-se o sinal (positivo ou negativo) de qualquer número que esteja no visor. Para introduzir um número negativo, pressione **CHS** depois de introduzir todos os dígitos do mesmo.

## Introduzindo Expoentes

**EEX** (*Enter EXponent = introduzir expoente*) é utilizada ao se introduzir um número com um expoente. Em primeiro lugar introduza a mantissa, pressione **EEX** e então introduza o expoente.

No caso de expoente negativo, pressione **CHS** após a introdução do expoente.\* Por exemplo, para introduzir a constante de Planck ( $6.6262 \times 10^{-34}$  Joule - segundos) e multiplicá-la por 50:

\* **CHS** pode também ser pressionada após **EEX** e antes do expoente, com idêntico efeito. (Na mantissa, a introdução dos dígitos deve preceder **CHS**).

Pressione	Visor	
6.6262	6.6262	
<b>EEX</b>	6.6262 00	O 00 indica que você já pode introduzir o expoente. ( $6.6262 \times 10^0$ ).
3	6.6262 03	
4	6.6262 34	( $6.6262 \times 10^{34}$ ).
<b>CHS</b>	6.6262 -34	( $6.6262 \times 10^{-34}$ ).
<b>ENTER</b>	6.6262 -34	Introduz o número.
50 <b>x</b>	3.3131 -32	Joule - segundos.

**Observação:** Os dígitos decimais da mantissa, que ocuparem as posições do campo do expoente, desaparecerão do visor quando você pressionar **EEX**, não sendo preservados internamente.

Para evitar a perda do padrão de apresentação, **EEX** não funcionará com números tendo além de 7 dígitos à esquerda da marca de raiz (que é o ponto decimal), nem com mantissas menores do que 0.000001. Para introduzir tais números, use uma forma que tenha um expoente maior (positivo ou negativo). Como exemplo,  $123456789.8 \times 10^{23}$  pode ser introduzido como  $1234567.898 \times 10^{25}$ ;  $0.00000025 \times 10^{-15}$  pode ser introduzido como  $2.5 \times 10^{-22}$ .

## A teclas "CLEAR"

*Apagar* significa substituir um número por zero. As operações de apagar da HP-15C são as seguintes (a tabela prossegue na próxima página):

Seqüência de Apagar	Efeito
<b>g</b> <b>CLx</b>	Apaga o visor (o registrador X).
<b>←</b> No modo de Execução (Run): No Modo de Programação (Program):	Apaga o último dígito <b>ou</b> o visor todo. Elimina a instrução atual.
<b>f</b> <b>CLEAR</b> <b>Σ</b>	Apaga os registradores de armazenamento estatístico, o visor e a pilha operacional (descrita na seção 3).

Seqüência de Apagar	Efeito
<b>f</b> CLEAR <b>PRGM</b> No Modo de Execução (Run): No Modo de Programação (Program):	Reposiciona a memória de programação na linha 000.  Apaga toda a memória de programação.
<b>f</b> CLEAR <b>REG</b>	Apaga todos os registradores de armazenamento de dados.
<b>f</b> CLEAR <b>PREFIX</b> *	Apaga qualquer prefixo de uma seqüência de teclas parcialmente introduzida.

\*Também apresenta, temporariamente, a mantissa.

### Apagando o Visor: **CLx** e **←**

A HP-15C possui duas operações para apagar o visor: **CLx** (*CLear X = apagar o registrador X*) e **←** (*tecla de correção*).

No Modo Run:

- **CLx** apaga o visor, zerando-o.
- **←** elimina apenas o último dígito do visor *se a introdução de dígitos não tiver sido encerrada* por **ENTER** ou por outras funções. Você pode então introduzir um novo dígito (ou novos dígitos) para substituir o(s) eliminado(s). Se a introdução de dígitos *tiver se encerrado*, **←** atuará como **CLx**.

Pressione	Visor	
12345	12,345	A introdução de dígitos ainda não foi encerrada.
<b>←</b>	1,234	Apaga apenas o último dígito.
9	12,349	
<b>√x</b>	111.1261	Encerra a introdução de dígitos.
<b>←</b>	0.0000	Apaga o visor.

### No Modo de Programação:

- **CLx** é programável: ela é *armazenda* como uma instrução programada, e não apagará a instrução que estiver sendo atualmente apresentada no visor.
- **←** não é programável, podendo ser utilizada na correção do programa. Ao se pressionar **←**, a instrução completa apresentada no visor será eliminada.

## Cálculos

### Funções de Um Número

Uma função de um número realiza uma operação utilizando apenas o conteúdo do visor. Para usar qualquer função de um número, pressione a tecla da função *após* ter introduzido o número no visor.

Pressione	Visor
45	45
<b>g</b> <b>LOG</b>	1.6532

### Funções de Dois Números e **ENTER**

Uma função de dois números exige que dois valores já estejam armazenados na calculadora, *antes* da função ser executada. Como exemplos de funções de dois números temos: **+**, **-**, **x**, e **÷**.

**Término da Introdução de Dígitos.** Ao *introduzir* dois números para a realização de uma operação, a calculadora precisa de uma indicação de que a introdução do primeiro número *se encerrou*. Isto é feito pressionando-se **ENTER** para separar os dois números. Se, por outro lado, um dos números já estiver na calculadora como resultado de uma operação anterior, você não precisa utilizar a tecla **ENTER**. Todas as funções, com exceção das próprias teclas dos dígitos\*, causam o *término da introdução de dígitos*.

Observe que o ponto decimal sempre aparece, qualquer que seja o número, determinando um conjunto de dígitos na parte decimal, quando você encerrar a introdução de dígitos (ao pressionar **ENTER**), por exemplo).

\* As teclas dos dígitos, **.**, **CHS**, **EEX**, e **←**.

**Cálculos em Cadeia.** Nos cálculos dados a seguir, observe que:

- A tecla **ENTER** é utilizada apenas para separar a introdução *seqüencial* de dois números.
- O operador somente é introduzido *após* os dois operandos estarem na calculadora.
- O resultado de qualquer operação poderá ser tratado como um operando. Todo resultado intermediário é armazenado e recuperado no esquema LIFO (*Last In, First Out = o último a entrar é o primeiro a sair*). Novos dígitos introduzidos após uma operação serão tratados como um novo número.

**Exemplo:** Calcule  $(9 + 17 - 4) \div 4$ .

Pressione	Visor	
9 <b>ENTER</b>	9.0000	A introdução de dígitos foi encerrada.
17 <b>+</b>	26.0000	$(9 + 17)$ .
4 <b>-</b>	22.0000	$(9 + 17 - 4)$ .
4 <b>÷</b>	5.5000	$(9 + 17 - 4) \div 4$ .

Mesmo problemas mais complicados são solucionados dessa mesma maneira simples: usando o armazenamento (e a recuperação) automático(a) de resultados intermediários.

**Exemplo:** Calcule  $(6 + 7) \times (9 - 3)$ .

Pressione	Visor	
6 <b>ENTER</b>	6.0000	Calcule primeiramente o resultado intermediário $(6 + 7)$ .
7 <b>+</b>	13.0000	
9 <b>ENTER</b>	9.0000	Calcule agora o resultado intermediário $(9 - 3)$ .
3 <b>-</b>	6.0000	
<b>×</b>	78.0000	A seguir, multiplique os resultados intermediários entre si (13 e 6), e obtenha a resposta final.

Tente resolver estes próximos problemas. Cada vez que você pressiona **ENTER** ou uma tecla de função num cálculo, o resultado precedente é preservado para a operação seguinte.

$$(16 \times 38) - (13 \times 11) = 465.0000$$

$$4 \times (17 - 12) \div (10 - 5) = 4.0000$$

$$23^2 - (13 \times 9) + 1/7 = 412.1429$$

$$\sqrt{[(5.4 \times 0.8) \div (12.5 - 0.7^2)]} = 0.5998$$

## Funções Numéricas

Esta Seção aborda as funções numéricas da HP-15C (com exceção das funções estatísticas e avançadas). As funções não numéricas serão vistas em separado (introdução de dígitos na seção 1, manipulação da pilha operacional na seção 3 e o controle do visor na seção 5).

Cada função numérica da HP-15C opera da mesma forma, quer seja pelo teclado ou por um programa. Algumas das funções (tal como  $\boxed{\text{ABS}}$ ) são, de fato, de interesse primário em programação.

Lembre-se de que as funções numéricas, assim como todas as funções (com exceção das funções de introdução de dígitos) encerram, automaticamente, a introdução de dígitos. Isto significa que uma função numérica não precisa ser precedida ou seguida por  $\boxed{\text{ENTER}}$ .

### Pi

Pressionando-se  $\boxed{\text{g}} \boxed{\pi}$ , o valor de  $\pi$  com 10 dígitos, é colocado na calculadora.  $\boxed{\pi}$  não precisa ser separado de outros números por  $\boxed{\text{ENTER}}$ .

### Funções para a Alteração de Números

As funções para a alteração de números atuam sobre o conteúdo do visor (ou seja, do registrador X).

**Parte Inteira.** Pressionando-se  $\boxed{\text{g}} \boxed{\text{INT}}$ , obtém-se no visor o inteiro de magnitude menor ou igual ao seu conteúdo original.

**Parte Fracionária.** Pressionando-se  $\boxed{\text{f}} \boxed{\text{FRAC}}$ , obtém-se no visor a parte decimal do seu conteúdo original (ou seja, a diferença entre o número e sua parte inteira).

**Arredondamento.** Pressionando-se  $\boxed{\text{g}} \boxed{\text{RND}}$  arredonda-se os 10 dígitos internos da mantissa do número apresentado no visor. Dessa forma obtém-se o valor determinado pelo número de dígitos especificado pelo formato de apresentação  $\boxed{\text{FIX}}$ ,  $\boxed{\text{SCI}}$ , ou  $\boxed{\text{ENG}}$  em visor.

**Valor Absoluto.** Pressionando  $\boxed{\text{g}} \boxed{\text{ABS}}$  obtém-se no visor o valor absoluto de seu conteúdo original.

**Pressione**

123.4567  $\boxed{g}$   $\boxed{INT}$   
 $\boxed{g}$   $\boxed{LSTx}$   $\boxed{CHS}$   $\boxed{g}$   $\boxed{INT}$

$\boxed{g}$   $\boxed{LSTx}$   $\boxed{f}$   $\boxed{FRAC}$

1.23456789  $\boxed{CHS}$

$\boxed{g}$   $\boxed{RND}$

$\boxed{f}$   $\boxed{CLEAR}$   $\boxed{PREFIX}$

(deixe de pressionar  
a tecla)

$\boxed{g}$   $\boxed{ABS}$

**Visor**

123.0000

-123.0000

-0.4567

-1.2346

1234600000

-1.2346

1.2346

A mudança de sinal não  
afeta os dígitos.

Todos os dígitos da  
mantissa são apresentados  
temporariamente.

## Funções de Um Número

As funções matemáticas de um número da HP-15C operam apenas sobre o conteúdo do visor (do registrador X).

### Funções Gerais

**O Inverso de um Número.** Pressionando-se  $\boxed{1/x}$  se calcula o inverso do conteúdo do visor.

**Fatorial e Gama.** Pressionando-se  $\boxed{f}$   $\boxed{x!}$  se calcula o fatorial do valor apresentado no visor, onde  $x$  é um inteiro ( $0 \leq x \leq 69$ ). Você também pode utilizar  $\boxed{x!}$  para calcular a função Gama,  $\Gamma(x)$ , que ocorre em cálculos matemáticos e estatísticos avançados. Pressionando  $\boxed{f}$   $\boxed{x!}$  calcula-se  $\Gamma(x + 1)$ , de modo que você deve subtrair 1 do seu operando inicial para obter  $\Gamma(x)$ . Para a função Gama,  $x$  não se restringe aos inteiros não negativos.

**Raiz Quadrada.** Pressionando  $\boxed{\sqrt{x}}$  calcula-se a raiz quadrada positiva do conteúdo do visor.

**Como Elevar ao Quadrado.** Pressionando  $\boxed{g}$   $\boxed{x^2}$  calcula-se o quadrado do conteúdo do visor.

**Pressione**

25  $\boxed{1/x}$

8  $\boxed{f}$   $\boxed{x!}$

3.9  $\boxed{\sqrt{x}}$

12.3  $\boxed{g}$   $\boxed{x^2}$

**Visor**

0.0400

40,320.0000

1.9748

151.2900

Calcula-se 8! ou  $\Gamma(9)$ .

## Operações Trigonométricas

**Modos Trigonométricos.** As funções trigonométricas operam no modo trigonométrico que você tiver estabelecido. A escolha de um determinado modo trigonométrico não causa a conversão de nenhum número armazenado na calculadora para esse modo. A especificação de um determinado modo trigonométrico simplesmente indica à calculadora a unidade de medida (graus, radianos ou grados) que será atribuída aos argumentos das funções trigonométricas.

Pressionando **[g] [DEG]** ativa-se o modo Graus. Nenhum anúncio aparece no visor.

Pressionando **[g] [RAD]** ativa-se o modo Radianos. O anúncio **RAD** aparece no visor. No modo Complexo, todas as funções (com exceção de **[→P]** e **[→R]**) assumem que os valores estão em radianos, independentemente do anúncio que apareça no visor.

Pressionando **[g] [GRD]** ativa-se o modo Grados. O anúncio **GRAD** aparece no visor.

A Memória Contínua preservará o último modo trigonométrico especificado. Quando a Memória Contínua é apagada ou quando ocorre a condição inicial de energia, a calculadora fica no modo Graus.

**Funções Trigonométricas.** Dado um  $x$  no visor (registrador X):

Pressionando	Calcula-se
<b>[SIN]</b>	seno de $x$
<b>[g] [SIN<sup>-1</sup>]</b>	arco-seno $x$
<b>[COS]</b>	cosseno de $x$
<b>[g] [COS<sup>-1</sup>]</b>	arco-cosseno de $x$
<b>[TAN]</b>	tangente de $x$
<b>[g] [TAN<sup>-1</sup>]</b>	arco-tangente de $x$

Antes de executar uma função trigonométrica, certifique-se de que a calculadora esteja no modo trigonométrico desejado (Graus, Radianos ou Grados).

## Conversões de Tempo e Ângulos

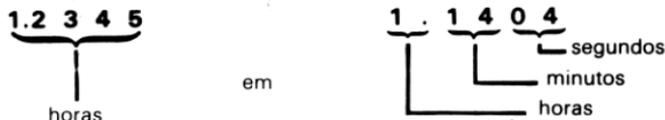
A HP-15C converte números representando tempo (horas) ou ângulos (Graus) entre o formato minutos-segundos e o formato fração decimal.

Horas. Décimos de Hora (H.h)  $\longleftrightarrow$  Horas. Minutos Segundos Décimos de Segundo (H.MMSSs)

Graus. Décimos de Graus (G.g)  $\longleftrightarrow$  Graus. Minutos Segundos Décimos de Segundo (G.MMSSs)

**Conversão para Horas (ou Graus), Minutos e Segundos.** Pressionando  $\boxed{f} \rightarrow \boxed{H.MS}$  converte-se o conteúdo do visor do formato Horas (Graus) decimais para o formato Horas (Graus) minutos, segundos e décimos de segundo.

Como exemplo, pressione  $\boxed{f} \rightarrow \boxed{H.MS}$  para converter.



Pressione  $\boxed{f} \rightarrow \boxed{\text{PREFIX}}$  para apresentar os dígitos de todas as casas decimais:

1 1 4 0 4 2 0 0 0 0  
 centésimos milésimos de segundo.

**Conversão para Horas (ou Graus) Decimais.** Pressionando  $\boxed{g} \rightarrow \boxed{H}$  converte-se o conteúdo do visor do formato horas (graus) minutos, segundos e décimos de segundo para o formato horas (graus) decimais.

### Conversão de Graus/Radianos

As funções  $\rightarrow \boxed{\text{DEG}}$  e  $\rightarrow \boxed{\text{RAD}}$  são usadas para a conversão de ângulos em graus para radianos (G.g  $\longleftrightarrow$  R.r). Os graus devem ser expressos como números decimais, e não no formato minutos-segundos.

Pressione  
 40.5  $\boxed{f} \rightarrow \boxed{\text{RAD}}$

Visor  
 0.7069

Radianos.

$\boxed{g} \rightarrow \boxed{\text{DEG}}$

40.5000

40.5 graus (fração decimal).

## Funções Logarítmicas

**Logarítmo Natural.** Pressionando  $\boxed{g}$   $\boxed{LN}$  calcula-se o logarítmo natural do valor contido no visor, ou seja, o logarítmo na base  $e$ .

**Antilogarítmo Natural.** Pressionando  $\boxed{e^x}$  calcula-se o antilogarítmo natural do valor contido no visor, ou seja, eleva-se  $e$  à potência desse valor.

**Logarítmo Comum.** Pressionando  $\boxed{g}$   $\boxed{LOG}$  calcula-se o logarítmo comum do valor contido no visor, ou seja, o logarítmo na base 10.

**Antilogarítmo Comum.** Pressionando  $\boxed{10^x}$  calcula-se o antilogarítmo comum do valor contido no visor, ou seja, eleva-se 10 à potência desse valor.

Pressione	Visor	
45 $\boxed{g}$ $\boxed{LN}$	3.8067	Log natural de 45.
3.4012 $\boxed{e^x}$	30.0001	Antilog natural de 3.4012.
12.4578 $\boxed{g}$ $\boxed{LOG}$	1.0954	Log comum de 12.4578.
3.1354 $\boxed{10^x}$	1,365.8405	Antilog comum de 3.1354.

## Funções Hiperbólicas

Dado um  $x$  no visor (registrador X):

Pressionando	Calcula-se
$\boxed{f}$ $\boxed{HYP}$ $\boxed{SIN}$	seno hiperbólico de $x$
$\boxed{g}$ $\boxed{HYP}$ $\boxed{SIN}$	arco-seno hiperbólico de $x$
$\boxed{f}$ $\boxed{HYP}$ $\boxed{COS}$	cosseno hiperbólico de $x$
$\boxed{g}$ $\boxed{HYP}$ $\boxed{COS}$	arco-cosseno hiperbólico de $x$
$\boxed{f}$ $\boxed{HYP}$ $\boxed{TAN}$	tangente hiperbólica de $x$
$\boxed{g}$ $\boxed{HYP}$ $\boxed{TAN}$	arco-tangente hiperbólica de $x$

## Funções de Dois Números

A HP-15C realiza funções matemáticas com dois números, usando dois valores introduzidos um após o outro no visor. Se você estiver *introduzindo* os dois números, não se esqueça de separá-los usando **ENTER** ou qualquer outra função que encerre a introdução de dígitos, tal como **g** **INT** ou **1/x**.

Nas funções de dois números, o primeiro valor introduzido é considerado como o valor  $y$ , pois é colocado no registrador Y da memória de armazenamento. O segundo valor introduzido é considerado como o valor  $x$ , pois é o que permanece no visor (que é o registrador X).

Os operadores aritméticos **+**, **-**, **x** e **÷** são as quatro funções básicas de dois números. As demais são dadas abaixo.

### Potenciação

Pressionando **y<sup>x</sup>** calcula-se o valor de  $y$  elevado à potência  $x$ . A base  $y$ , é introduzida antes do expoente  $x$ .

Para Calcular	Pressione	Visor
$2^{1.4}$	2 <b>ENTER</b> 1.4 <b>y<sup>x</sup></b>	<b>2.6390</b>
$2^{-1.4}$	2 <b>ENTER</b> 1.4 <b>CHS</b> <b>y<sup>x</sup></b>	<b>0.3789</b>
$(-2)^3$	2 <b>CHS</b> <b>ENTER</b> 3 <b>y<sup>x</sup></b>	<b>-8.0000</b>
$\sqrt[3]{2}$ or $2^{1/3}$	2 <b>ENTER</b> 3 <b>1/x</b> <b>y<sup>x</sup></b>	<b>1.2590</b>

### Porcentagens

As funções de porcentagem, **%** e **Δ%**, preservam o valor da base original além do resultado do cálculo da porcentagem. Como será visto no exemplo dado a seguir, isto permite que você efetue novos cálculos com a mesma base e com o resultado, sem a necessidade da reintrodução da base.

**Porcentagem.** A função **%** calcula a porcentagem especificada da base.

Como exemplo, para calcular a taxa de vendas de 3% e o custo total de um item de Cr\$ 15.76:

Pressione	Visor	
15.76 [ENTER]	15.7600	Introduz a base (o preço).
3 [g] [%]	0.4728	Calcula 3% de Cr\$ 15.76. (a taxa).
[+]	16.2328	Custo total do item (Cr\$ 15.76 + Cr\$ 0.47).

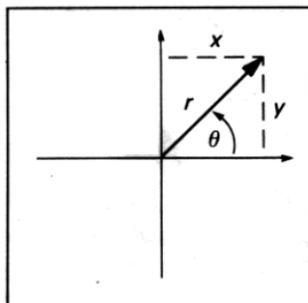
**Variação Porcentual.** A função [Δ%] calcula a *variação* porcentual entre dois números. O resultado expressa o acréscimo (se positivo) relativo ou o decréscimo (se negativo) relativo do segundo número com relação ao primeiro número introduzido.

Como exemplo, suponha que o item de Cr\$ 15.76 custava apenas Cr\$ 14.12 no ano passado. Qual foi a variação porcentual do preço do ano passado com relação ao *deste* ano?

Pressione	Visor	
15.76 [ENTER]	15.7600	Preço deste ano (nossa base).
14.12 [g] [Δ%]	-10.4061	O preço do ano passado era 10.41% <i>menor</i> do que o preço <i>deste</i> ano.

## Conversão de Coordenadas Polares/Retangulares

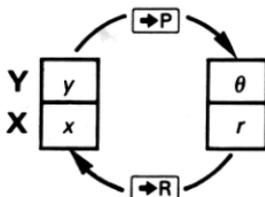
A HP-15C possui duas funções para a conversão de coordenadas polares/retangulares: [↔P] e [↔R]. Presume-se que o ângulo  $\theta$  esteja representado em graus decimais (não no formato minutos-segundos), radianos ou graus, dependendo do modo trigonométrico que tenha sido ativado. O ângulo  $\theta$  é representado como se vê na ilustração à direita.



**Conversão para Coordenadas Polares.** Pressionando [g] [↔P] (*Polar*) converte-se um par de coordenadas retangulares ( $x, y$ ) nas coordenadas

polares (magnitude  $r$ , ângulo  $\theta$ ). O valor de  $y$  deve ser introduzido em primeiro lugar, seguido do valor de  $x$ . Ao se executar  $\boxed{g} \boxed{\rightarrow P}$ , o valor de  $r$  será apresentado no visor. Pressione  $\boxed{x \rightleftharpoons y}$  (intercâmbio de  $x$  com  $y$ ) para apresentar no visor o valor de  $\theta$  que estava no registrador Y.  $\theta$  será um valor entre  $-180^\circ$  e  $180^\circ$ ,  $-\pi$  e  $\pi$  radianos ou entre  $-200$  e  $200$  graus.

**Conversão para Coordenadas Retangulares.** Pressionando  $\boxed{g} \boxed{\rightarrow R}$  (Retangular) converte-se um par de coordenadas polares (magnitude  $r$ , ângulo  $\theta$ ) nas coordenadas retangulares ( $x, y$ ).  $\theta$  deve ser introduzido em primeiro lugar, seguido de  $r$ . Ao se executar  $\boxed{g} \boxed{\rightarrow R}$ ,  $x$  será apresentado no visor; pressione  $\boxed{x \rightleftharpoons y}$  para apresentar  $y$ .

**Pressione** $\boxed{g} \boxed{DEG}$ 5  $\boxed{ENTER}$ 

10

 $\boxed{g} \boxed{\rightarrow P}$  $\boxed{x \rightleftharpoons y}$ 30  $\boxed{ENTER}$ 

12

 $\boxed{f} \boxed{\rightarrow R}$  $\boxed{x \rightleftharpoons y}$ **Visor**

5.0000

10

11.1803

26.5651

30.0000

12

10.3923

6.0000

Ativa o modo Graus (não há anúncio).

Valor de  $y$ .Valor de  $x$ . $r$ . $\theta$ ; as coordenadas retangulares foram convertidas em coordenadas polares. $\theta$ . $r$ .Valor de  $x$ .Valor de  $y$ ; as coordenadas polares foram convertidas em coordenadas retangulares.

# A Pilha Automática de Memória, ÚLTIMO X e o Armazenamento de Dados

## A Pilha Automática de Memória (Pilha Operacional) e sua Manipulação

A lógica operacional da HP é baseada numa lógica matemática conhecida como "Notação Polonesa", desenvolvida pelo lógico polonês Ian Lukasiwicz (1878-1956). A notação algébrica convencional coloca os operadores algébricos *entre* as variáveis ou números relevantes, quando as expressões algébricas precisam ser calculadas. A notação de Łukasiewicz especifica a colocação do operador *antes* das variáveis. Para otimizar a eficiência do uso da calculadora, a HP adotou a convenção de introduzir os operadores *depois* da introdução das variáveis. Assim surgiu o termo RPM (Reverse Polish Notation = notação polonesa reversa).

A HP-15C utiliza a RPN para solucionar cálculos complicados de maneira direta, sem empregar parênteses ou pontuações. Ela realiza isso retendo e recuperando resultados intermediários automaticamente. Este sistema é implementado através da pilha operacional e da tecla **ENTER**, minimizando-se o número de teclas necessárias.

### Os Registradores da Pilha Operacional

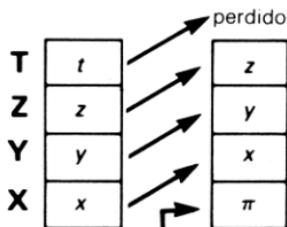
T	0.0000
Z	0.0000
Y	0.0000
X	0.0000

Sempre apresentado no visor.

Quando a HP-15C está no modo Run (ou seja, quando o anúncio **PRGM** está apagado), o número que aparece no visor é sempre o contido no registrador X.

Todo número que é introduzido (bem como todo resultado de qualquer função numérica) é colocado no registrador X e apresentado no visor. Dependendo do tipo da operação atual e da imediatamente precedente, os números já contidos na pilha operacional serão deslocados para cima, para baixo ou permanecerão estáticos nos seus registradores originais. Os números da pilha operacional são armazenados no esquema LIFO (*Last-In, First-Out = o último a entrar é o primeiro a sair*). As três pilhas operacionais ilustradas a seguir mostram os três tipos de movimentação de seu conteúdo. Suponha que  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $t$  representem números quaisquer originalmente contidos na pilha operacional.

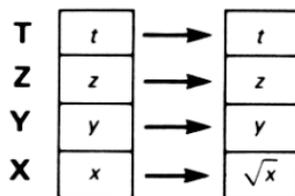
**Subida na Pilha Operacional**



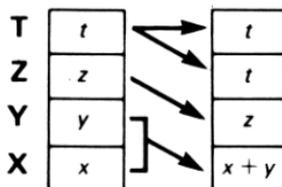
Teclas:



**O Estado da Pilha Operacional Fica Inalterado**



**Descida na Pilha Operacional**



Teclas:

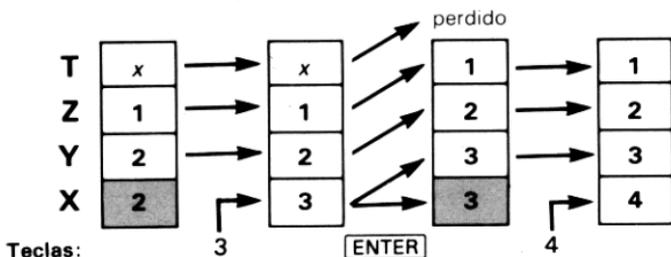
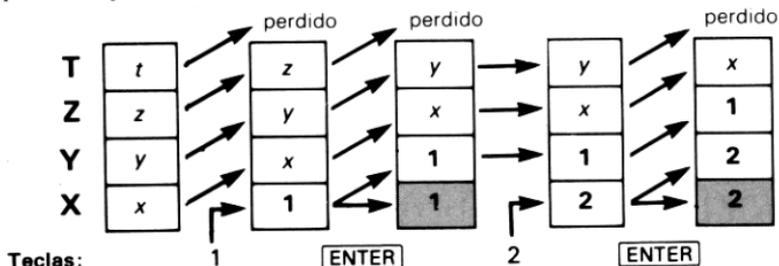


Observe que o conteúdo do registrador T lá permanece, quando o conteúdo da pilha operacional desce, permitindo que esse número seja utilizado repetidamente, como uma constante aritmética.

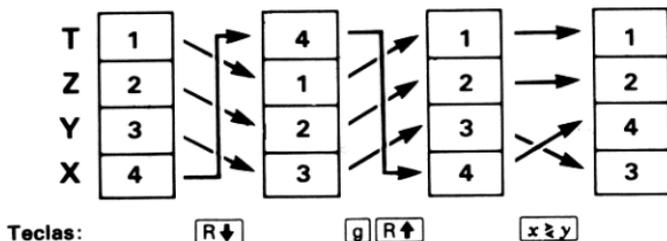
**Funções para Manipulação da Pilha Operacional**

**ENTER**. Pressionando **ENTER** separa-se dois números introduzidos um após o outro. Quando **ENTER** é pressionada, a calculadora eleva o con-

teúdo da pilha operacional, copiando o número do registrador X (apresentado no visor) no registrador Y. O próximo número que for introduzido será escrito sobre o que estava no registrador X, sem que o conteúdo da pilha operacional suba. O exemplo dado a seguir mostra o que ocorre quando a pilha operacional é preenchida com os números 1, 2, 3 e 4. (O sombreado indica que o conteúdo desse registrador será sobre-escrito quando o próximo número for introduzido ou recuperado).

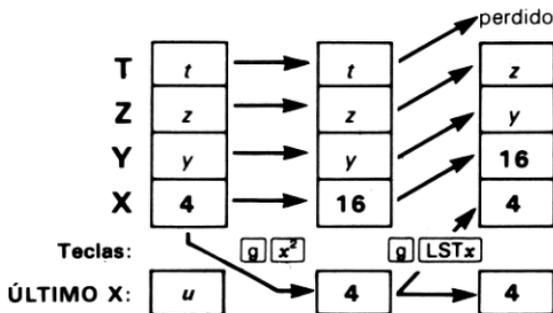


$R\downarrow$  (Roll down = girar para baixo),  $R\uparrow$  (Roll up = girar para cima) e  $x\rightleftharpoons y$  (intercâmbio entre X e Y).  $R\downarrow$  e  $R\uparrow$  fazem a rotação do conteúdo da pilha operacional de um registrador para cima ou para baixo, respectivamente (um valor se move entre os registradores X e T). Nenhum valor é perdido.  $x\rightleftharpoons y$  intercambia os conteúdos dos registradores X e Y. Se o conteúdo da pilha operacional for a seqüência 1, 2, 3, 4, ao se pressionar as teclas  $R\downarrow$ ,  $R\uparrow$  e  $x\rightleftharpoons y$ , serão obtidos os seguintes deslocamentos:



## O Registrador ÚLTIMO X (LAST X) e $\boxed{\text{LSTx}}$

Quando uma função numérica é executada, uma cópia do valor que estava no visor (no registrador X), *antes da execução da função*, é armazenada no registrador ÚLTIMO X (LAST X)\*. Pressionando-se  $\boxed{\text{g}} \boxed{\text{LSTx}}$  (LAST X = último x) recupera-se no visor (registrador X) uma cópia do conteúdo do registrador ÚLTIMO X. Por exemplo:



O recurso  $\boxed{\text{LSTx}}$  evita que você tenha que reintroduzir números que você gostaria de utilizar novamente (como veremos na página 39 em Cálculos Aritméticos com Constantes). Permite também que você se recupere de erros, tais como os cometidos ao se executar uma função errada ou ao se introduzir um número errado.

Como exemplo, suponha que você tenha introduzido, por engano, um divisor errado num cálculo em cadeia:

Pressione	Visor
287 $\boxed{\text{ENTER}}$	287.0000
12.9 $\boxed{\div}$	22.2481
$\boxed{\text{g}} \boxed{\text{LSTx}}$	12.9000

Opa! O divisor está errado.

Recupera do registrador ÚLTIMO X a última introdução no registrador X (o divisor errado) antes de  $\boxed{\div}$  ser executada.

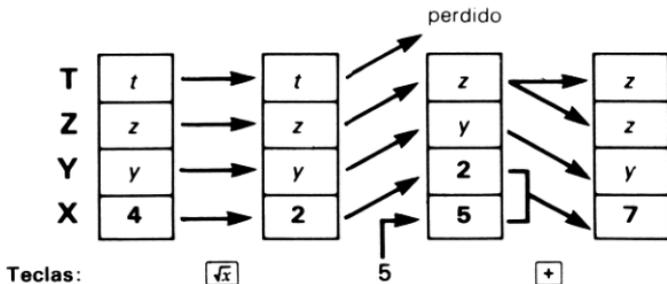
\* A menos que a operação seja  $\boxed{\text{x}}$ ,  $\boxed{\text{s}}$ , ou  $\boxed{\text{L.R.}}$ , as quais não utilizam nem preservam o valor contido no visor (registrador X), mas, ao invés disso, calculam a partir dos dados armazenados nos registradores estatísticos (R<sub>2</sub> a R<sub>7</sub>). Veja, no Apêndice B, a relação completa das operações que preservam x no registrador ÚLTIMO X.

Pressione	Visor	
$\boxed{\times}$	287.0000	Inverte o efeito da função que produziu a resposta errada.
13.9 $\boxed{+}$	20.6475	A resposta correta.

## Funções da Calculadora e a Pilha Operacional

Quando você deseja introduzir dois números em seqüência, você pressiona  $\boxed{\text{ENTER}}$  entre eles. Contudo, quando você desejar introduzir um número imediatamente após qualquer função (inclusive as de manipulação, como  $\boxed{\text{R}\downarrow}$ ), você não precisará utilizar  $\boxed{\text{ENTER}}$ . Por que? Ao se executar praticamente qualquer função da HP-15C, obtém-se dois efeitos adicionais:

- A pilha operacional fica *ativada*, ou seja, ela deslocará seu conteúdo para cima, automaticamente, quando o *próximo* número for introduzido ou recuperado.
- A introdução de dígitos é encerrada, de modo que o próximo número iniciará uma nova introdução.

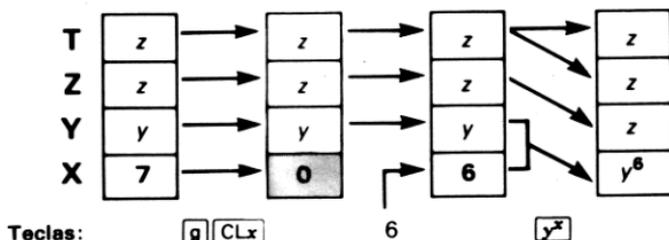


Existem 4 funções que *desativam\** a pilha operacional:  $\boxed{\text{ENTER}}$ ,  $\boxed{\text{CLx}}$ ,  $\boxed{\Sigma+}$  e  $\boxed{\Sigma-}$ . Elas *impedem* que o conteúdo da pilha operacional suba, quando o *próximo* número for introduzido ou recuperado. Após a execução de uma destas funções, ao se introduzir um novo número, este simplesmente substituirá o que estava no visor, ao invés de ocasionar a subida

\*  $\boxed{\text{ENTER}}$  também desativará a subida do conteúdo da pilha operacional *se a introdução de dígitos tiver sido encerrada*, apagando o visor da mesma forma que  $\boxed{\text{CLx}}$ . Nos demais casos,  $\boxed{\text{ENTER}}$  é neutra. Desejando maiores detalhes sobre a pilha operacional, leia o Apêndice B.

do conteúdo da pilha operacional. (Embora o conteúdo da pilha operacional suba ao se pressionar **ENTER**, ele não subirá quando o próximo número for introduzido ou recuperado. A operação de **ENTER**, ilustrada na página 34, mostra como **ENTER** desativa a movimentação do conteúdo da pilha operacional).

Na maioria dos casos, os efeitos descritos acima serão tão naturais que você nem precisará pensar sobre os mesmos.

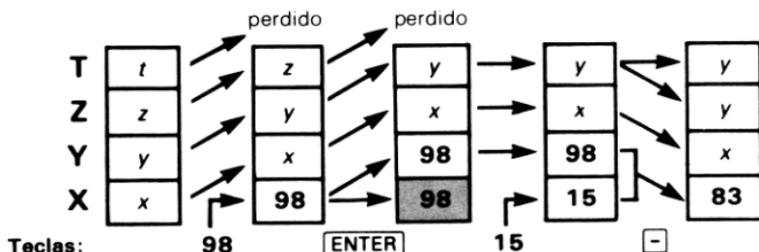


### Ordem de Introdução e a Tecla **ENTER**

Um importante aspecto das funções de dois números é o posicionamento dos mesmos na pilha operacional. Para executar uma função aritmética, os números deverão ser posicionados na pilha operacional da mesma maneira que você os escreveria verticalmente com lápis e papel. Por exemplo:

$$\begin{array}{r} 98 \\ -15 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 98 \\ +15 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 98 \\ \times 15 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 98 \\ 15 \\ \hline \end{array}$$

Como você pode ver, o primeiro número (o de cima) deveria estar no registrador Y, enquanto que o segundo (o de baixo) deveria estar no registrador X. Quando a operação matemática é executada, o conteúdo da pilha operacional desce, deixando o resultado no registrador X. Eis como a operação de subtração é executada pela calculadora:



O mesmo posicionamento dos números seria empregado para somar 15 e 98, multiplicar 98 por 15 e dividir 98 por 15.

### Cálculos em Cadeia

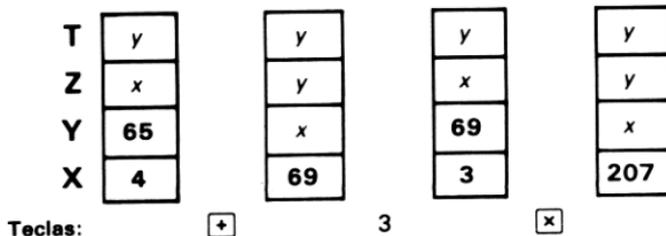
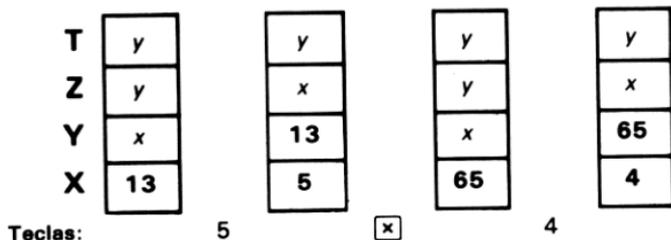
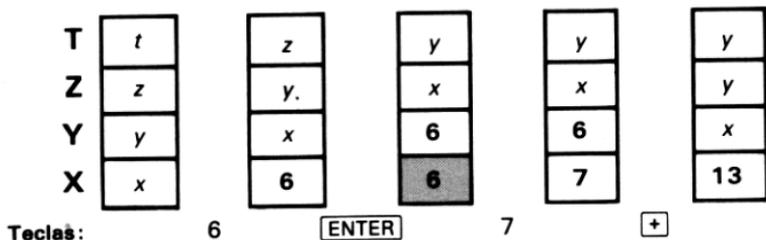
A subida e descida do conteúdo da pilha operacional possibilita a realização de cálculos em cadeia sem o uso de parênteses e sem a necessidade do armazenamento de resultados intermediários. Um cálculo em cadeia pode ser resolvido com facilidade, através de uma série de operações com um ou dois números.

Quase todo cálculo em cadeia que você vier a encontrar poderá ser efetuado apenas com os quatro registradores da pilha operacional. Em geral é melhor se iniciar o cálculo pela operação localizada no par de parênteses mais interno, trabalhando-se daí para fora (como você faria num cálculo manual). Caso contrário, você precisaria colocar um resultado intermediário num registrador de armazenamento. Como exemplo, considere o cálculo de

$$3[4 + 5(6 + 7)]:$$

Pressione	Visor	
6 <input type="text" value="ENTER"/> 7 <input type="text" value="+"/>	13.0000	Resultado intermediário de (6 + 7).
5 <input type="text" value="x"/>	65.0000	Resultado intermediário de 5(6 + 7).
4 <input type="text" value="+"/>	69.0000	Resultado intermediário de [4 + 5(6 + 7)].
3 <input type="text" value="x"/>	207.0000	Resultado final: 3[4 + 5(6 + 7)].

A seqüência dada a seguir ilustra a manipulação da pilha operacional do exemplo acima. O conteúdo da pilha operacional desce automaticamente após cada cálculo que envolver dois números, subindo quando um novo número for introduzido. (Por simplicidade, não mais apresentaremos as setas entre as pilhas operacionais).



### Cálculos Aritméticos com Constantes

Existem 3 meios (sem o emprego de um registrador de armazenamento) de manipulação da pilha operacional para realizar cálculos repetidos com uma constante:

1. Use o registrador ÚLTIMO X.
2. Carregue a pilha operacional com uma constante e opere com diferentes números. (Apague o registrador X toda vez que você desejar alterar o número a ser operado).
3. Carregue a pilha operacional com uma constante e faça os cálculos operando sobre um número que fará as vezes de acumulador. (Não altere o conteúdo do registrador X).

**ÚLTIMO X.** Use a constante que você tiver colocado no registrador X (ou seja, introduza-a duas vezes) de modo que ela sempre seja preservada no registrador ÚLTIMO X. Pressionando **[g] [LSTx]** você recuperará a constante no visor (no registrador X). Este processo pode ser repetidamente utilizado.

**Exemplo:** Duas estrelas vizinhas da Terra são Rigil Centaurus (a 4.3 anos-luz) e Sirius (a 8.7 anos-luz). Calcule em metros a distância da Terra a essas duas estrelas, sabendo-se que a velocidade  $c$  da luz é de  $3.0 \times 10^8$  metros/segundo ( $= 9.5 \times 10^{15}$  metros/ano). (Por simplicidade, os diagramas apresentam apenas uma casa decimal).



T	t	z	y	y
Z	z	y	x	x
Y	y	x	4.3	4.3
X	x	4.3	4.3	9.5 15

Teclas: 4.3 **[ENTER]** 9.5 **[EEX]** 15

ÚLTIMO X: 

u
---

T	y	y	y	x
Z	x	y	x	4.1 16
Y	4.3	x	4.1 16	8.7
X	9.5 15	4.1 16	8.7	9.5 15

Teclas: **[x]** 8.7 **[g] [LSTx]**

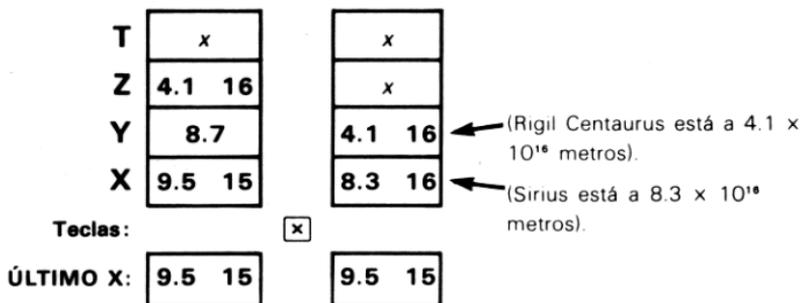
ÚLTIMO X: 

u
---

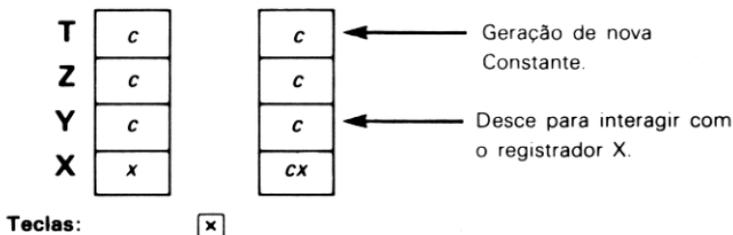
9.5 15
--------

9.5 15
--------

9.5 15
--------



**Carregando a Pilha Operacional com uma Constante.** Quando o conteúdo da pilha operacional desce, o valor contido no registrador T é duplicado, podendo ser utilizado como uma constante em operações aritméticas.



Preencha a pilha operacional com uma constante, introduzindo-a no visor e pressionando **ENTER** três vezes. Introduza seu argumento inicial e execute a operação aritmética. O conteúdo da pilha operacional descera, uma cópia da constante “cairá” para o registrador Y e uma nova cópia da constante será gerada no registrador T.

Se as variáveis mudarem, (como no exemplo anterior), certifique-se de apagar o visor antes de introduzir a nova variável. Isto desativará a pilha operacional, o resultado aritmético será escrito sobre o registrador X, e apenas a constante ocupará o restante da pilha operacional.

Se você *não* tiver argumentos distintos, ou seja, se a operação for efetuada sobre um *acumulador*, *não* apague o visor; basta repetir a operação aritmética.

**Exemplo:** Um bacteriologista testa uma certa cultura de microorganismos cuja população tem um crescimento típico de 15% ao dia (um fator de crescimento de 1.15). Se ele começar com uma amostra de cultura de tamanho 1000, qual será a população de bactérias ao final de cada dia, durante 4 dias consecutivo?



**Pressione**

1.15

1000

**Visor**

1.15

1.1500

1.000

1,150.0000

1,322.5000

1,520.8750

1,749.0063

Fator de crescimento.

A pilha operacional foi preenchida.

Tamanho inicial da cultura.

População ao final do 1º dia.

2º dia.

3º dia.

4º dia.

## Operações com Registradores de Armazenamento

Quando se armazena e recupera números, eles são copiados entre o visor (registrador X) e registradores de armazenamento de dados. Na condição inicial de energia (ou quando a Memória Contínua é apagada), a HP-15C possui 21 registradores de armazenamento diretamente acessíveis: R<sub>0</sub> a R<sub>9</sub>, R<sub>0</sub> a R<sub>9</sub> e o registrador de Indexação (R<sub>1</sub>) (veja o diagrama dos registradores no verso da contra-capas). Os cálculos estatísticos empregam 6 registradores, do R<sub>2</sub> ao R<sub>7</sub>.

O número de registradores disponíveis para o armazenamento de dados pode ser aumentado ou diminuído. A função  , que é utilizada para realocar registradores da memória da calculadora, será vista no Apêndice C, Alocação de Memória. Os registradores de menor endereço serão os últimos a serem retirados da função de armazenamento de dados, *o que sugere a estratégia de se procurar armazenar dados nos registradores de menor endereço.*

## Armazenando e Recuperando Números

**[STO]** (*STOre = armazenar*). Quando seguida por um endereço de registrador de armazenamento (0 a 9, .0 a .9\*), esta função copia o valor do visor (registrador X) no registrador de armazenamento de dados especificado. Ela irá substituir o conteúdo anterior desse registrador.

**[RCL]** (*ReCaLL = recuperar*). De maneira semelhante, você pode recuperar no visor um dado de um registrador particular, pressionando **[RCL]** seguida do endereço do registrador desejado. Isto trará ao visor uma *cópia* do dado desejado; o conteúdo do registrador de armazenamento permanecerá inalterado.

**[x↔]** (*Intercâmbio de X*). Seguida por 0 a .9\*, esta função *intercambia o conteúdo* do registrador X com o do registrador de armazenamento de dados especificado. Esta função é útil na visualização do conteúdo de registradores de armazenamento, sem afetar a movimentação da pilha operacional.

As operações acima ativam a subida do conteúdo da pilha operacional, de modo que o valor remanescente no registrador X pode ser usado em cálculos subseqüentes. Se você endereçar um registrador inexistente, o visor apresentará a mensagem **Error 3**.

**Exemplo:** A Primavera se aproxima e você deseja acompanhar o florescer de 24 mudas de crocus sativus do seu jardim. Armazene o número de flores que desabrocharam no primeiro dia e adicione a este o número de flores que desabrocharam no segundo dia.

Pressione	Visor	
3 <b>[STO]</b> 0	3.0000	Armazena em R <sub>0</sub> o número de flores que desabrocharam no primeiro dia.
Desligue a calculadora. No dia seguinte, ligue-a novamente.		
<b>[RCL]</b> 0	3.0000	Recupera o número de flores que desabrocharam ontem.
5 <b>[+]</b>	8.0000	Adiciona o número de novas flores que desabrocharam hoje, obtendo-se o total.

\* Todas as operações de armazenamento em registradores podem ser realizadas com o registrador R<sub>1</sub> (usando-se **[1]** ou **[i]**), que será visto na seção 10 (e com matrizes, na seção 12).

## Como Apagar os Registradores de Armazenamento de Dados

Pressionando **f** CLEAR **REG** (*CLEAR REGisters = apagar os registradores*) apaga-se o conteúdo de *todos* os registradores de armazenamento de dados, zerando-os. (Esta operação não afeta a pilha operacional nem o registrador ÚLTIMO X). Para apagar um único registrador de armazenamento de dados, basta armazenar um zero no mesmo. Ao se pagar a Memória Contínua, apaga-se todos os registradores de armazenamento e a pilha operacional.

## Aritmética com Registradores de Armazenamento

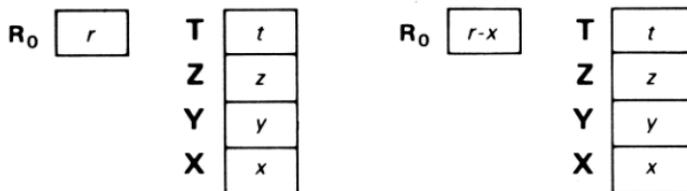
**Aritmética com Armazenamento.** Suponha que você queira não apenas armazenar um número mas também efetuar uma operação aritmética com ele e armazenar o resultado no mesmo registrador. Você pode fazer isto diretamente, sem utilizar **RCL**, com o seguinte procedimento:

1. Coloque o segundo operando no visor (o primeiro deve estar no registrador de armazenamento), como resultado de um cálculo, de uma recuperação ou de uma introdução.
2. Pressione **STO**.
3. Pressione **+**, **-**, **x** ou **÷**.
4. Introduza o endereço do registrador (0 a 9, .0 a .9) (R<sub>i</sub>, que será visto na seção 10, também pode ser utilizado).

O novo conteúdo do registrador é determinado assim:

**Para operações aritméticas com armazenamento:**

$$\text{novo conteúdo do registrador} = \text{conteúdo anterior do registrador} \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \\ \times \\ \div \end{array} \right\} \text{conteúdo do visor}$$

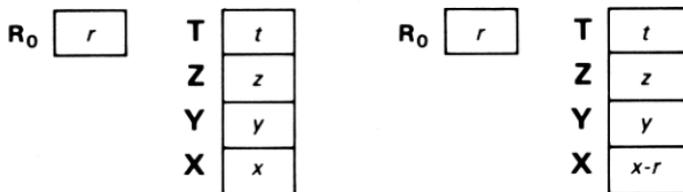


Teclas: **STO** **-** **0**

**Aritmética com Recuperação.** A aritmética com recuperação permite que você realize uma operação aritmética com o conteúdo do visor e um valor armazenado, *sem deslocar o conteúdo da pilha operacional*, ou seja, sem afetar os registradores Y, Z e T. A seqüência de teclas é a mesma da aritmética com armazenamento, usando-se **RCL** ao invés de **STO**.

Para operações aritméticas com recuperação.

$$\text{novo conteúdo do visor} = \text{conteúdo anterior do visor} \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \\ \times \\ \div \end{array} \right\} \text{conteúdo do registrador}$$



Teclas: **RCL** **-** **0**

**Exemplo:** Mantenha um controle das suas novas flores por mais dois dias.

Pressione	Visor	
8 <b>STO</b> <b>0</b>	8.0000	Coloca em R <sub>0</sub> o número total de flores do 2º dia.
4 <b>STO</b> <b>+</b> <b>0</b>	4.0000	3º dias: adiciona 4 novas flores às que já haviam desabrochado.
3 <b>STO</b> <b>+</b> <b>0</b>	3.0000	4º dia: adiciona 3 novas flores.
24 <b>RCL</b> <b>-</b> <b>0</b>	9.0000	Subtrai o número total de flores que desabrocharam, contido em R <sub>0</sub> (15), do total de plantas (24): 9 crocus sativus não desabrocharam.
<b>RCL</b> <b>0</b>	15.0000	(O conteúdo de R <sub>0</sub> não foi afetado).

## Ultrapassagem da Capacidade da Calculadora (Overflow e Underflow)

Quando a tentativa de cálculo de uma operação aritmética de armazenamento ou recuperação poderia dar um resultado que ultrapassaria a capacidade da calculadora (fenômeno este conhecido por *overflow*) o valor do registrador afetado será substituído por  $\pm 9.99999999 \times 10^{99}$  e o visor ficará piscando. Para interromper (apagar) essa condição de overflow, pressione  $\leftarrow$ , **ON** ou **g** **CF** 9.

No caso do resultado ser um número de magnitude inferior a  $1.0 \times 10^{-99}$  (underflow), o valor do registrador será substituído por zero (o visor não piscará) O overflow e o underflow serão vistos com maior detalhe na página 62.

## Problemas

1. Calcule o valor de  $x$  na seguinte equação

$$x = \sqrt{\frac{8.33(4 - 5.2) \div [(8.33 - 7.46) 0.32]}{4.3(3.15 - 2.75) - (1.71)(2.01)}}$$

Resposta: 4.5728

Uma das seqüências de teclas de uma das soluções possíveis é:

4 **ENTER** 5.2 **-** 8.33 **x** **g** **LSTx** 7.46 **-** 0.32 **x** **+** 3.15  
**ENTER** 2.75 **-** 4.3 **x** 1.71 **ENTER** 2.01 **x** **-** **+** **√x**

2. Empregando a aritmética com constantes calcule o saldo de um empréstimo de Cr\$ 1000,00 após 6 pagamentos de Cr\$ 100,00, sendo a taxa de juros de 1% (0.01) por pagamento.

Procedimento: Carregue a pilha operacional com  $(1 + i)$ , onde  $i$  = taxa de juros e introduza o saldo inicial. Use a seguinte fórmula para obter o novo saldo após cada pagamento:

$$\text{Novo Saldo} = ((\text{Saldo Anterior}) \times (1 + i)) - \text{Pagamento}$$

A primeira parte da seqüência de teclas poderia ser:

1.01 **ENTER** **ENTER** **ENTER** 1000

Execute para cada pagamento:

$$\boxed{\times} 100 \boxed{-}$$

O saldo, ao final de 6 pagamentos, será de Cr\$ 446.32.

3. Armazene 100 em  $R_5$ . A seguir:

1. Divida o conteúdo de  $R_5$  por 25.
2. Subtraia 2 do conteúdo de  $R_5$ .
3. Multiplique o conteúdo de  $R_5$  por 0.75.
4. Adicione 1.75 ao conteúdo de  $R_5$ .
5. Recupere o conteúdo de  $R_5$ .

Resposta: 3.2500

# Funções Estatísticas

O uso das funções estatísticas é baseado no entendimento da operação da pilha operacional (seção 3). Você irá constatar que a ordem de introdução é importante na maioria dos cálculos estatísticos.

## Cálculos de Probabilidade

Os dados de entrada para os cálculos de combinações e permutações são restritos aos *inteiros não negativos*. Introduza o valor de  $y$  antes do valor de  $x$ . Tais funções, assim como os operadores aritméticos, causam a descida do conteúdo da pilha operacional, sendo o resultado colocado no registrador  $X$ .

**Permutações.** Pressionando  $\boxed{f} \boxed{P_{y,x}}$  calcula-se o número de *arranjos* possíveis de  $y$  itens distintos, em grupos de  $x$  itens a cada vez. Nenhum item ocorre mais do que uma vez no mesmo arranjo e as diferenças de ordem dos mesmos  $x$  itens num arranjo *são* contadas separadamente. A fórmula é:

$$P_{y,x} = \frac{y!}{(y-x)!}$$

**Combinações.** Pressionando  $\boxed{g} \boxed{C_{y,x}}$  calcula-se o número de possíveis *conjuntos* de  $y$  itens distintos, tomados em grupos de  $x$  itens a cada vez. Nenhum item ocorre mais do que uma vez num conjunto e as diferenças de ordem dos mesmos  $x$  itens num conjunto *não* são contadas separadamente. A fórmula é

$$C_{y,x} = \frac{y!}{x!(y-x)!}$$

**Exemplo:** Qual o número de arranjos distintos que se pode obter com cinco quadros, pendurando-os na parede em grupos de 3 a cada vez?

**Pressione**

5  $\boxed{\text{ENTER}}$  3

**Visor**

3

Cinco ( $y$ ) quadros pendurados em grupos de três ( $x$ ) a cada vez.

$\boxed{f} \boxed{P_{y,x}}$

60.0000

São possíveis 60 arranjos distintos.

Quantas mãos distintas de quatro cartas podem ser obtidas com um baralho de 52 cartas?

Pressione	Visor	
52 <b>ENTER</b> 4	4	Das cinquenta e duas cartas ( $y$ ), retira-se quatro ( $x$ ) a cada vez.
<b>g</b> <b>C<sub>y,x</sub></b>	270,725.0000	Número de mãos distintas possíveis.

O tempo para a execução destas funções poderá ser da ordem de vários segundos, dependendo da magnitude de  $x$  e  $y$ . A palavra *running* (em execução) será apresentada no visor durante os cálculos. O maior valor de  $x$  ou  $y$  é 9,999,999,999.

## Gerador de Números Aleatórios

Pressionando **f** **RAN#** (*R*andom *N*umber = número aleatório) gera-se um número aleatório  $r$  (um elemento de uma seqüência pseudo-aleatória com distribuição uniforme) no intervalo  $0 \leq r < 1$ .\*

Na condição inicial de energia (inclusive quando a Memória Contínua for apagada), o gerador de números aleatórios da HP-15C utilizará o número zero como termo inicial (“semente”) da seqüência aleatória. Toda vez que você gerar um número aleatório, tal valor passará a ser a semente do número aleatório seguinte. Você pode iniciar uma seqüência aleatória distinta se armazenar uma nova semente no gerador. (A repetição da semente produzirá a repetição da seqüência de números aleatórios).

**STO** **f** **RAN#** armazena o conteúdo do registrador X ( $0 \leq r < 1$ ) como uma nova semente do gerador de números aleatórios. (Um valor de  $r$  fora desse intervalo será convertido num outro dentro desse intervalo).

**RCL** **f** **RAN#** recupera no visor a atual semente do gerador.

\* Passa no Teste Espectral (D. Knuth, *Seminumerical Algorithms* vol. 2, 1969).

Pressione	Visor	
5764	0.5764	Armazena 0.5764 como semente do gerador.
$\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{f}$ $\boxed{\text{RAN\#}}$	0.5764	(A tecla $\boxed{f}$ poderia ter sido omitida).
$\boxed{f}$ $\boxed{\text{RAN\#}}$	0.3422	A seqüência de números aleatórios foi iniciada pela semente dada acima.
$\boxed{f}$ $\boxed{\text{RAN\#}}$	0.2809	
$\boxed{\leftarrow}$	0.0000	Recupera no visor o último número aleatório gerado (a semente atual). $\boxed{f}$ poderia ter sido omitida.
$\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{f}$ $\boxed{\text{RAN\#}}$	0.2809	

## Acumulando Estatísticas

A HP-15C realiza cálculos estatísticos com uma ou duas variáveis. Inicialmente os dados são introduzidos nos registradores X e Y. A seguir, a função  $\boxed{\Sigma+}$  calcula estatísticas dos dados e automaticamente as armazena nos registradores  $R_2$  a  $R_7$ . Tais registradores serão doravante denominados *registradores estatísticos*.

Antes de iniciar o acúmulo de estatísticas para novos conjuntos de dados, pressione  $\boxed{f}$   $\boxed{\text{CLEAR}}$   $\boxed{\Sigma}$  para apagar os registradores estatísticos e a pilha operacional. (Se você tiver realocado registradores da memória e algum dos registradores estatísticos não mais existir, a mensagem **Error 3** será apresentada no visor quando você tentar executar  $\boxed{\Sigma}$ ,  $\boxed{\Sigma+}$ , ou  $\boxed{\Sigma-}$ . O apêndice C explica como realocar a memória).

Em cálculos estatísticos com uma única variável, introduza cada dado (valor de  $x$ ) no visor e pressione  $\boxed{\Sigma+}$ .

Em cálculos estatísticos com duas variáveis, introduza cada par de dados (valores de  $x$  e  $y$ ) da seguinte maneira:

1. Introduza  $y$  no visor.
2. Pressione  $\boxed{\text{ENTER}}$ . O valor apresentado no visor é copiado no registrador Y.
3. Introduza  $x$  no visor.

4. Pressione  $\boxed{\Sigma+}$ . O número  $n$  de pares de dados acumulados é apresentado no visor. O valor de  $x$  é preservado no registrador ÚLTIMO X e  $y$  permanece no registrador Y.  $\boxed{\Sigma+}$  desativa a subida do conteúdo da pilha operacional, de modo que seu conteúdo não subirá quando o próximo número for introduzido.

Em alguns casos, os valores de  $x$  e  $y$  podem diferir por uma diferença tão pequena que a calculadora não conseguirá calcular  $r$ , a regressão linear ou  $y$  (o visor apresentará a mensagem **Error 2**). Para evitar esse problema, basta que você normalize os dados introduzindo apenas a diferença entre cada valor e a média (ou a média aproximada) dos valores. Esta diferença deverá ser somada aos resultados dos cálculos de  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  e com a intersecção da reta da regressão linear ( $\boxed{L.R.}$ ) com o eixo  $y$ . Como exemplo, se os seus valores de  $x$  fossem 665999,666000 e 666001, você deveria introduzir os dados como -1, 0 e 1; quando os resultados relevantes fossem obtidos, bastaria se somar 666000 aos mesmos.

As estatísticas dos dados são compiladas assim:

Registrador	Conteúdo	
R <sub>2</sub>	$n$	Número de pares de dados acumulados ( $n$ também é apresentado no visor).
R <sub>3</sub>	$\Sigma x$	Somatório dos valores de $x$ .
R <sub>4</sub>	$\Sigma x^2$	Somatório dos valores de $x^2$ .
R <sub>5</sub>	$\Sigma y$	Somatório dos valores de $y$ .
R <sub>6</sub>	$\Sigma y^2$	Somatório dos valores de $y^2$ .
R <sub>7</sub>	$\Sigma xy$	Somatório dos produtos dos valores de $x$ e $y$ .

Você pode recuperar no visor qualquer uma das estatísticas acumuladas, pressionando  $\boxed{RCL}$  e o índice do registrador de armazenamento de dados que contenha a estatística desejada. Se você pressionar  $\boxed{RCL} \boxed{\Sigma+}$ ,  $\Sigma x$  e  $\Sigma y$  serão copiados simultaneamente de R<sub>3</sub> e R<sub>5</sub> nos registradores X e Y, respectivamente. (A seqüência  $\boxed{RCL} \boxed{\Sigma+}$  eleva o conteúdo da pilha operacional 2 vezes, se a movimentação estiver ativada, e uma só vez, no caso contrário; ao final da operação, a movimentação fica ativada).

**Exemplo:** Um agrônomo desenvolveu uma nova variedade de arroz de alto rendimento, e mediu a taxa de crescimento de uma muda em função da fertilização. Use a função  $\Sigma+$  para acumular os dados abaixo e determinar os valores de  $\Sigma x$ ,  $\Sigma x^2$ ,  $\Sigma y$ ,  $\Sigma y^2$  e  $\Sigma xy$  na aplicação de nitrogênio fertilizante ( $x$ ) versus o rendimento do grão ( $y$ ).



<b>X</b>	NITROGÊNIO APLICADO (Kg por hectare*), ( $x$ )	0.00	20.00	40.00	60.00	80.00
<b>Y</b>	RENDIMENTO DO GRÃO (Toneladas métricas por hectare), ( $y$ )	4.63	4.78	6.61	7.21	7.78
*Um hectare = 2.47 acres						

**Pressione****Visor**f CLEAR  $\Sigma$ 

0.0000

Apaga os registradores estatísticos de armazenamento ( $R_2$  a  $R_7$ ) e a pilha operacional.

f FIX 2

0.00

Reduz o formato para a apresentação de 2 casas decimais, como são os dados.

4.63 ENTER

4.63

0  $\Sigma+$ 

1.00

Primeiro par de dados.

4.78 ENTER

4.78

20  $\Sigma+$ 

2.00

Segundo par de dados.

6.61 ENTER

6.61

40  $\Sigma+$ 

3.00

Terceiro par de dados.

7.21 ENTER

7.21

60  $\Sigma+$ 

4.00

Quarto par de dados.

7.78 ENTER

7.78

80  $\Sigma+$ 

5.00

Quinto par de dados.

Pressione	Visor	
$\boxed{\text{RCL}}$ 3	200.00	$\Sigma x$ = somatório dos valores de $x$ (Kg de nitrogênio).
$\boxed{\text{RCL}}$ 4	12,000.00	$\Sigma x^2$ = somatório dos valores de $x^2$ .
$\boxed{\text{RCL}}$ 5	31.01	$\Sigma y$ = somatório dos valores de $y$ (rendimento do grão).
$\boxed{\text{RCL}}$ 6	200.49	$\Sigma y^2$ = somatório dos valores de $y^2$ .
$\boxed{\text{RCL}}$ 7	1,415.00	$\Sigma xy$ = somatório dos produtos dos valores de $x$ e $y$ .

### Corrigindo Estatísticas Acumuladas

Se você descobrir que introduziu dados incorretos, as estatísticas acumuladas podem ser facilmente corrigidas. Mesmo que só um dos valores do par  $(x, y)$  esteja errado, você deverá eliminar e reintroduzir os *dois* valores.

1. Introduza o par de dados *incorreto*, nos registrador Y e X.
2. Pressione  $\boxed{\text{g}} \boxed{\Sigma^-}$  para eliminar os dados incorretos.
3. Introduza os valores corretos de  $x$  e  $y$ .
4. Pressione  $\boxed{\Sigma^+}$ .

Se o par incorreto de dados tiver acabado de ser introduzido e você já tiver pressionado  $\boxed{\Sigma^+}$ , pode-se removê-los pressionando-se  $\boxed{\text{g}} \boxed{\text{LSTx}} \boxed{\text{g}} \boxed{\Sigma^-}$  \*.

**Exemplo:** Após a introdução dos dados precedentes, o agrônomo percebeu ter cometido um engano ao transportar os dados de seu caderno de anotações para a calculadora. O 2º valor de  $y$  era 5.78 e não 4.78. Corrija essa introdução.

---

\* Observe que tais métodos de supressão de dados não eliminarão eventuais erros de arredondamento que tenham sido propagados nos registradores estatísticos. Esta diferença não terá consequências sérias, a menos que a magnitude do par errado seja muito maior que a do par correto; nesse caso, talvez seja melhor recomeçar tudo!

Pressione	Visor	
4.78 <b>ENTER</b>	4.78	Introduza o par de dados que desejamos substituir e elimine-o.
20 <b>g</b> <b>Σ-</b>	4.00	O valor de $n$ fica reduzido a 4.
5.78 <b>ENTER</b>	5.78	Introduza e acumule o par de dados correto.
20 <b>Σ+</b>	5.00	O valor de $n$ volta a ser 5.

Nós utilizaremos estas estatísticas nos demais exemplos desta seção.

## Média

A função  **$\bar{x}$**  calcula a média aritmética das estatísticas de  $x$  e  $y$  usando as fórmulas apresentadas no Apêndice A e as estatísticas acumuladas nos registradores relevantes. Quando você pressiona  **$\bar{x}$** , o conteúdo da pilha operacional sobe (dois registradores se a movimentação estiver ativada, e um registrador, no caso contrário); a média de  $x$  ( $\bar{x}$ ) é copiada no registrador X e, simultaneamente, a média de  $y$  ( $\bar{y}$ ) é copiada no registrador Y. Pressione  **$x \leftrightarrow y$**  para apresentar  $y$  no visor.

**Exemplo:** A partir dos dados estatísticos que já introduzimos, acumulamos e corrigimos, calcule a média de aplicação de fertilizante,  $\bar{x}$ , e a média do rendimento do grão,  $\bar{y}$ , para todas as observações.

Pressione	Visor	
<b><math>\bar{x}</math></b>	40.00	Média de aplicação de nitrogênio, $\bar{x}$ , em kg (média de todos os casos)
<b><math>x \leftrightarrow y</math></b>	6.40	Média do rendimento de grãos, $\bar{y}$ , em toneladas (média de todos os casos).

## Desvio Padrão

Pressionando  **$s$**  calcula-se o *desvio padrão* dos dados estatísticos acumulados. As fórmulas utilizadas para o cálculo de  $s_x$  (o desvio padrão dos valores acumulados de  $x$ ) e de  $s_y$  (o desvio padrão dos valores acumulados de  $y$ ) são dadas no Apêndice A.

Esta função dá uma estimativa do desvio padrão da população, a partir dos dados da amostra, sendo por isso denominada desvio padrão *da amostra\**. Quando você pressiona  $\boxed{g} \boxed{s}$ , o conteúdo dos registradores da pilha operacional sobe (duas vezes se a movimentação estava ativada, e uma vez, no caso contrário);  $s_x$  é colocado no registrador X e  $s_y$  é colocado no registrador Y. Pressione  $\boxed{x} \boxed{z} \boxed{y}$  para apresentar  $s_y$  no visor.

**Exemplo:** Calcule o desvio padrão da média calculada acima.

Pressione	Visor	
$\boxed{g} \boxed{s}$	31.62	Desvio padrão da média ( $\bar{x}$ ) da aplicação de nitrogênio.
$\boxed{x} \boxed{z} \boxed{y}$	1.24	Desvio padrão da média ( $\bar{y}$ ), do rendimento do grão.

## Regressão Linear

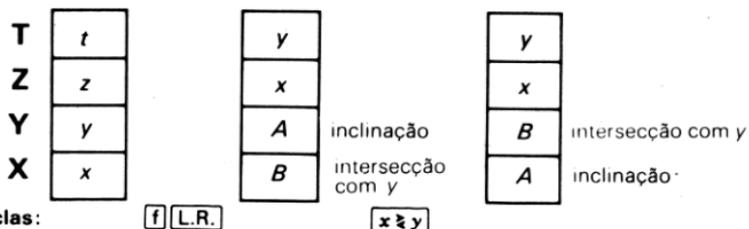
A regressão linear é um método estatístico de cálculo da reta que melhor se ajusta a um conjunto de dois ou mais pares de dados, fornecendo uma relação entre duas variáveis.  $\boxed{f} \boxed{L.R.}$  calcula, pelo método dos mínimos quadrados, a inclinação  $A$  e a intersecção  $B$  com o eixo  $y$  da reta determinada pela equação linear:

$$y = Ax + B$$

1. Acumule as estatísticas dos seus dados usando a tecla  $\boxed{\Sigma+}$ .
2. Pressione  $\boxed{f} \boxed{L.R.}$ . A intersecção  $B$  com o eixo  $y$  será apresentada no visor (registrador X). A inclinação  $A$  é copiada simultaneamente no registrador Y.
3. Pressione  $\boxed{x} \boxed{z} \boxed{y}$  para apresentar  $A$  no visor. (Assim como  $\boxed{\bar{x}}$  e  $\boxed{s}$ ,  $\boxed{L.R.}$  desloca o conteúdo da pilha operacional para cima de dois registradores, se a movimentação estava ativada, e de um registrador, no caso contrário).

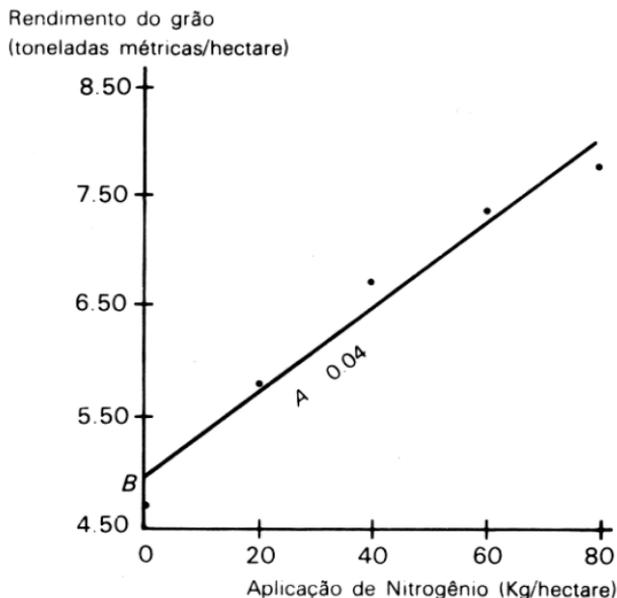
---

\* Quando seus dados constituem não apenas uma amostra da população, mas a população *toda*, o desvio padrão dos dados é realmente o desvio padrão da população (denotado por  $\sigma$ ). A fórmula para o cálculo de  $\sigma$  difere da fórmula utilizada para o cálculo de  $s$  por um fator de  $\sqrt{(n-1)/n}$ . A diferença entre os resultados é pequena para grandes valores de  $n$ , e pode até mesmo ser ignorada na maioria das aplicações. Mas se você quiser calcular o valor exato do desvio padrão da população, para a população toda, poderá fazê-lo facilmente; basta adicionar aos dados (usando  $\boxed{\Sigma+}$ ), a média  $\bar{x}$  dos mesmos e a seguir pressionar  $\boxed{g} \boxed{s}$ . O resultado será o desvio padrão da população. (Se você posteriormente vier a corrigir algum dos seus valores acumulados, não se esqueça de eliminar o primeiro valor médio e adicionar a média correta).



A inclinação e a intersecção da reta dos mínimos quadrados com o eixo  $y$  são calculadas de acordo com as equações constantes no Apêndice A.

**Exemplo:** Calcule a intersecção com o eixo  $y$  e a inclinação da aproximação linear dos dados e compare-as com os dados traçados no gráfico abaixo..



Pressione

f L.R.

Visor

**4.86**Intersecção da reta com o eixo  $y$ .x  $\hat{z}$  y**0.04**

Inclinação da reta.

## Estimativa Linear e Coeficiente de Correlação

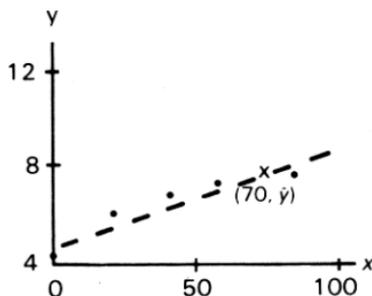
Quando você pressiona  $\boxed{f} \boxed{\hat{y}, r}$ , a *estimativa linear*,  $\hat{y}$ , é colocada no registrador X e o *coeficiente de correlação*,  $r$ , é colocado no registrador Y. Para apresentar  $r$ , pressione  $\boxed{x \rightleftharpoons y}$ .

**Estimativa Linear.** Estando acumuladas as estatísticas, um valor estimado  $\hat{y}$ , denotado por  $\hat{y}$ , pode ser calculado introduzindo-se um valor proposto de  $x$  e pressionando-se  $\boxed{f} \boxed{\hat{y}, r}$ .

**Coeficiente de Correlação.** Tanto a regressão linear como a estimação linear presumem que a relação entre os dados  $x$  e  $y$  pode ser aproximada por uma função linear. O coeficiente de correlação,  $r$ , determina o grau com que seus dados se ajustam a uma reta.  $r$  pode variar no intervalo  $[-1, 1]$ ;  $r = -1$  representa a correlação perfeitamente negativa;  $r = +1$  representa a correlação perfeitamente positiva.

Observe que se você não introduzir um valor de  $x$  antes de executar  $\boxed{f} \boxed{\hat{y}, r}$ , o conteúdo anterior do registrador X será empregado (obtendo-se, em geral, um  $\hat{y}$  sem significado).

**Exemplo:** O que ocorreria se fossem aplicadas 70 toneladas de nitrogênio fertilizante no arrozal? Faça a previsão do rendimento baseando-se nos dados estatísticos acumulados do agrônomo. Como o coeficiente de correlação é automaticamente calculado, você pode observar com que precisão os dados se ajustam a uma reta, bastando pressionar  $\boxed{x \rightleftharpoons y}$  depois de  $\hat{y}$  ser apresentada no visor.



Pressione	Visor	
70 $\boxed{f}$ $\boxed{\hat{y}_r}$	7.56	Estimativa do rendimento, em toneladas por hectare.
$\boxed{x \hat{z} y}$	0.99	A distribuição dos dados se aproxima bastante de uma reta.

## Outras Aplicações

**Interpolação.** A interpolação linear de valores tabulados, tais como os que ocorrem em tabelas termodinâmicas e estatísticas, pode ser obtida de maneira simples, através da função  $\boxed{\hat{y}_r}$  da sua HP-15C. Isto se deve ao fato da interpolação linear *ser* uma estimação linear; dois valores tabulares consecutivos são considerados como dois pontos de uma reta, presumindo-se que o valor intermediário (desconhecido) pertença à mesma reta.

**Aritmética Vetorial.** As funções de estatísticas acumuladas podem ser utilizadas para a realização de adição e subtração vetorial. Pode-se converter coordenadas vetoriais polares em coordenadas retangulares usando-se  $\theta$ ,  $\boxed{\text{ENTER}}$ ,  $r$ ,  $\boxed{\rightarrow R}$ ,  $\boxed{\Sigma+}$ . Os resultados são recuperados de  $R_3(\Sigma x)$  e  $R_3(\Sigma y)$  empregando-se  $\boxed{\text{RCL}}$   $\boxed{\Sigma+}$  e reconvertidos em coordenadas polares, se necessário.

Para o segundo vetor introduzido, a seqüência final de teclas pode ser  $\boxed{\Sigma+}$  ou  $\boxed{\Sigma-}$ , dependendo dos dois vetores estarem sendo somados ou subtraídos.

# O Visor e a Memória Contínua

## Controle do Visor

A HP-15C possui três funções, **FIX**, **SCI** e **ENG** que usam uma constante (de 0 a 9) para especificar o formato de apresentação no visor. A ilustração abaixo mostra como o número 123,456 poderia ser apresentado com quatro dígitos decimais, em cada um dos três modos.

<b>f</b> <b>FIX</b>	4	:	123.456.0000
<b>f</b> <b>SCI</b>	4	:	1.2346 05
<b>f</b> <b>ENG</b>	4	:	123.46 03

Grças a Memória Contínua, qualquer alteração que você promover no formato de apresentação será preservada (até que a Memória Contínua seja apagada).

O formato de apresentação em vigor se manifesta assim que a introdução de dígitos é encerrada; até então, todos os dígitos (até 10) que você introduzir serão apresentados.

## Apresentação em Ponto Decimal Fixo

**FIX** (*FIXed decimal = decimal fixo*) apresenta números com tantas casas decimais quantas você tiver especificado (até 9, dependendo do tamanho da parte inteira). Se o número for demasiadamente grande (ou pequeno) para o visor, ele será apresentado com expoentes. Na condição inicial de energia, a HP-15C fica no formato **FIX** 4. A seqüência de teclas é **f** **FIX** *n*.

### Pressione

123.4567895

**f** **FIX** 4**f** **FIX** 6

### Visor

123.4567895

123.4568

123.456790

O valor é arredondado de modo a apresentar seis dígitos decimais no visor. (Internamente são mantidos os dez dígitos).

**f** **FIX** 4

123.4568

Apresentação usual em **FIX** 4.

## Apresentação em Notação Científica

**[SCI]** (*SCientific = científica*) apresenta números em notação científica. A seqüência **[f]** **[SCI]** *n* especifica o número de casas decimais a serem apresentadas. Pode-se apresentar até 6 casas decimais, pois o expoente ocupa 3 casas. O número no visor será arredondado segundo o número de casas decimais que for especificado; no entanto, se você especificar mais do que os 6 dígitos que o visor pode apresentar (ou seja, **[SCI]** 7,8 ou 9), o arredondamento será deslocado para os dígitos internos (7<sup>o</sup>, 8<sup>o</sup> ou 9<sup>o</sup>, que *não* aparecem no visor)\*.

Ainda com o número anterior no visor:

Pressione	Visor	
<b>[f]</b> <b>[SCI]</b> 6	1.234568	02 Arredonda e apresenta 6 casas decimais.
<b>[f]</b> <b>[SCI]</b> 8	1.234567	02 O arredondamento ocorre na 8 <sup>a</sup> casa decimal, mas o visor só apresenta seis.

## Apresentação em Notação de Engenharia

**[ENG]** (*ENGineering = Engenharia*) apresenta os números em notação de Engenharia, que é semelhante à **[SCI]**, com as seguintes exceções:

- Na notação de Engenharia, o primeiro dígito significativo é sempre apresentado no visor. O número que você introduz após **[f]** **[ENG]** especifica o número de dígitos *adicionais* para os quais você deseja arredondar o conteúdo do visor.
- Na notação de Engenharia, todos os expoentes de 10 são múltiplos de 3.

Pressione	Visor	
.012345	0.012345	
<b>[f]</b> <b>[ENG]</b> 1	12. -03	É arredondado o 1 <sup>o</sup> dígito após o mais significativo.

\* Além disso, o visor não apresenta distinção entre **[SCI]** 7,8 e 9 a menos que o valor a ser arredondado seja 9, provocando a propagação do arredondamento na casa decimal vizinha de ordem mais alta.

Pressione	Visor	
$\boxed{f}$ $\boxed{ENG}$ 3	12.35	-03
10 $\boxed{x}$	123.5	-03
		O ponto decimal se desloca, para manter o expoente múltiplo de três.
$\boxed{f}$ $\boxed{FIX}$ 4	0.1235	Notação $\boxed{FIX}$ 4 usual.

## Apresentação da Mantissa

Independentemente do formato de apresentação, a HP-15C sempre mantém internamente os números com uma mantissa de 10 dígitos e com um expoente de dois dígitos da base 10. Por exemplo,  $\pi$  é sempre representado internamente como  $3.141592654 \times 10^{00}$ , independentemente do que estiver no visor.

Quando você desejar apresentar toda a mantissa de um valor contido no registrador X, pressione  $\boxed{f}$  CLEAR.  $\boxed{PREFIX}$ . Para conservar a mantissa no visor, mantenha a tecla  $\boxed{PREFIX}$  pressionada.

Pressione	Visor
$\boxed{g}$ $\boxed{\pi}$	3.1416
$\boxed{f}$ CLEAR $\boxed{PREFIX}$	
(mantenha-a pressionada)	3141592654

## Erro de Arredondamento

Como você já viu anteriormente, a HP-15C mantém internamente todos os números com 10 dígitos. O resultado final de toda operação é arredondado no 10º dígito. Como a calculadora consegue apresentar apenas uma aproximação finita de números tais como  $\pi$  ou  $2/3$  (0.666...), pode ocorrer um pequeno erro de arredondamento. Este erro pode aumentar em cálculos mais longos, mas em geral é insignificante. O estudo acurado dos efeitos de erros de arredondamento, para um dado cálculo, exige o uso de Análise Numérica, o que foge ao escopo deste manual!

## Apresentações Especiais

### Anúncios

O visor da sua HP-15C possui oito “anúncios” ou palavras-chave que relatam o estado da calculadora em várias operações. O significado (e o uso) desses anúncios será visto nas próximas páginas.

*	Indicação de Bateria Fraca, página 63.
<b>USER</b>	Modo do Usuário, páginas 80 e 146.
<b>f e g</b>	Funções Prefixadas e Alternativas, página 17 - 18.
<b>RAD e GRAD</b>	Modos Trigonométricos, página 26.
<b>C</b>	Modo Complexo, página 123.
<b>PRGM</b>	Modo de Programação, página 66.

## Separadores de Dígitos

Na condição inicial de energia, a HP-15C separa as partes inteira e fracionária com o ponto decimal, além de separar os grupos de três dígitos da parte inteira com a vírgula. Você pode inverter este padrão para ficar de acordo com a convenção válida no Brasil e em muitos outros países. Para isso, desligue a calculadora. Pressione a tecla **ON** (e mantenha-a pressionada), pressione a tecla  $\square$  (e mantenha-a pressionada), solte a tecla **ON** e então solte a tecla  $\square$ . Esta operação será doravante mencionada como **ON**/ $\square$ . Se essa seqüência for repetida, a convenção anterior voltará a vigorar.

Pressione	Visor
12345.67	12,345.67
<b>ON</b> / $\square$	12.345,6700
<b>ON</b> / $\square$	12.345.6700

## Mensagens de Erro

Se você tentar realizar uma operação imprópria, tal como uma divisão por zero, o visor apresentará uma mensagem de erro (a palavra **Error** seguida por um dígito). No Apêndice A você encontrará a relação completa das mensagens de erro e suas causas.

Para eliminar a mensagem de erro e restaurar a condição anterior da calculadora, pressione uma tecla qualquer; recomeça a operar a calculadora normalmente.

## Ultrapassagem da Capacidade da Calculadora (Overflow e Underflow)

**Overflow.** Quando o resultado de um cálculo em *qualquer* registrador for um número de magnitude superior a  $9.99999999 \times 10^{99}$ , o registrador afetado

receberá o número  $\pm 9.999999999 \times 10^{99}$  e o indicador de overflow (o indicador 9) será ativado\*. O indicador 9 faz com que o visor fique piscando. Quando o overflow ocorrer durante a execução de um programa, este prosseguirá até o fim e somente então o visor piscará.

Pressionando-se  $\left[ \leftarrow \right]$ ,  $\left[ \text{ON} \right]$  ou  $\left[ \text{g} \right] \left[ \text{CF} \right]$  9 o visor deixará de piscar e o indicador 9 será apagado.

**Underflow.** Se o resultado de um cálculo em qualquer registrador for um número de magnitude inferior a  $1.000000000 \times 10^{-99}$ , este será substituído por zero. O underflow não tem nenhum outro efeito.

### Indicação de Bateria Fraca

A condição de bateria fraca é denunciada por um asterisco que se acende na margem esquerda do visor, não devendo ser motivo de pânico. Você ainda poderá executar um programa continuamente por mais 10 minutos ou executar cálculos manuais por mais uma hora. No Apêndice F você encontrará informações sobre como trocar as baterias (página 260).



0.0000  
\*

## Memória Contínua

### Estados da Calculadora

O recurso de Memória Contínua da HP-15C, mesmo estando desligada, preserva os seguintes dados:

- Todos os dados numéricos armazenados na calculadora.
- Todos os programas armazenados na calculadora.
- A posição da calculadora na memória de programação.
- O modo de apresentação e o número de dígitos a serem apresentados no visor.
- O Modo Trigonométrico (Graus, Radianos ou Grados).

---

\* Não se esqueça de que o visor não apresentará os três últimos dígitos da mantissa.

- Todos os retornos pendentes de sub-rotinas.
- A definição dos indicadores (com exceção do indicador 9, que é desativado quando a calculadora é desligada *manualmente*).
- A definição do Modo do Usuário.
- A definição do Modo Complexo.

Quando a HP-15C é ligada, ela sempre “acorda” no Modo de Execução (RUN). Se a calculadora for desligada e as baterias forem removidas, a Memória Contínua será preservada por um curto espaço de tempo. Os dados e programas serão preservados por um tempo maior do que os demais dados da calculadora. No Apêndice F você encontrará instruções sobre a troca das baterias (página 260).

## Apagando a Memória Contínua

Se num dado instante você desejar apagar a Memória Contínua (zerar todas posições de memória) da HP-15C, faça o seguinte:

1. Desligue a calculadora.
2. Pressione a tecla  (mantenha-a pressionada) e pressione a tecla  (mantenha-a pressionada).
3. Solte a tecla  e então solte a tecla .

Esta operação será doravante mencionada como /.

Quando a Memória Contínua é apagada, a mensagem **PrError** (*Power ERROR = falha de energia*) será apresentada. Pressione uma tecla qualquer para apagar o visor.

**OBSERVAÇÃO:** A Memória Contínua pode ser inadvertidamente interrompida (o que pode apagar a memória) se a calculadora sofrer uma queda ou qualquer outro tipo de dano.

## **Parte II**

# **Programando a HP-15C**

# Princípios Básicos de Programação

As próximas cinco seções têm por objetivo esclarecer aspectos ligados à programação da HP-15C. Cada uma dessas cinco seções enfoca as técnicas básicas de programação (A Mecânica), dando exemplos da implementação dessas técnicas (Exemplos) e finalmente abordando maiores detalhes do seu funcionamento (Informações Adicionais). Procure ler as seções até o nível de detalhe compatível com o uso que você fará da sua HP-15C.

## A Mecânica

### Criando um Programa

Programar a HP-15C é fácil; basta gravar a mesma seqüência de teclas necessárias para se efetuar o cálculo manualmente (Esta seqüência é chamada de “seqüência de programação”). Para se criar um programa a partir de uma série de passos envolvendo cálculos, exigem-se duas providências adicionais: decidir o ponto e a maneira de introduzir os dados; e como carregar e armazenar o programa. Além disso, os programas devem ser instruídos sobre como tomar decisões e realizar iterações (isso é feito com as instruções de desvio condicional e incondicional).

À medida que avançarmos sobre os fundamentos de programação, iremos rever o programa do objeto em queda livre, que foi visto na página 13.

### Carregando um Programa

**Modo de Programação.** Pressione  $\boxed{g}$   $\boxed{P/R}$  (*Program/Run = programação/execução*) para posicionar a calculadora no Modo de Programação (o anúncio PRGM aparecerá n visor). No Modo de Programação, as funções são apenas incluídas, não sendo executadas.

**Pressione**

$\boxed{g}$   $\boxed{P/R}$

**Visor**

000-

Comuta para o Modo de Programação; o visor apresenta o número da linha 000 e o anúncio PRGM.

**Localização na Memória de Programação.** A memória de programação e a posição da calculadora na mesma são demarcadas por números de linhas. A linha 000 identifica o início da memória de programação e não pode ser utilizada para o armazenamento de uma instrução. A primeira linha que pode conter uma instrução é a linha 001. Com exceção da linha 000, as demais linhas da memória de programação só passarão a existir quando você gravar instruções nelas.

Você *pode* definir o início de um programa numa linha *nnn* qualquer da memória de programação, mas é mais simples e seguro se começar um programa independente (o oposto de uma sub-rotina) no início da memória de programação. À medida que você for introduzindo o programa, as linhas já existentes serão preservadas e “empurradas” (“bumped”) para dentro da memória de programação.

Pressione **GTO** **CHS** 000 (no Modo de Programação ou Execução) para ir à linha 000 sem gravar a instrução **GTO**. No *Modo de Execução*, **f** - CLEAR **PRGM** também reposicionará a calculadora na linha 000, sem apagar a memória de programação.

Alternativamente você pode apagar a memória de programação, o que causará a supressão de todos os programas da memória e posicionará a calculadora na linha 000. Para isso, pressione **f** CLEAR **PRGM** no *Modo de Programação*.

**Início do Programa.** O início de um programa ou sub-rotina é definido por um rótulo ( **f** **LBL** ) seguido por uma letra (de **A** a **E**) ou por um número (de 0 a 9 ou .0 a .9). O uso de rótulos permite que você rapidamente seleccione e execute um programa ou rotina dentre todos os situados na memória de programação.

**Pressione**

**f** CLEAR **PRGM**

**Visor**

000-

Apaga a memória de programação e posiciona a calculadora na linha 000 (no início da memória de programação).

**f** **LBL** **A**

001-42,21,11

**Gravando um Programa.** No Modo de Programação, qualquer tecla (de operador ou constante) que seja pressionada, será gravada na memória como uma instrução programada\*.

Pressione	Visor	
2	002-	2
$\times$	003-	20
9	004-	9
$\cdot$	005-	48
8	006-	8
+	007-	10
$\sqrt{x}$	008-	11

} Dado  $h$  no registrador X, as linhas 002 a 008 calculam

$$\sqrt{\frac{2h}{9.8}}$$

**Fim do Programa.** Existem 3 possibilidades de se encerrar um programa:

- $\boxed{g}$   $\boxed{RTN}$  (*ReTurN = retorno*) encerra um programa, retorna à linha 000 e pára.
- $\boxed{R/S}$  encerra um programa *sem* desviar para a linha 000.
- O fim da memória de programação contém um  $\boxed{RTN}$  automático.

Pressione	Visor	
$\boxed{g}$ $\boxed{RTN}$	009-	43 32

Esta instrução é opcional se for a última da memória de programação.

### Interrupções Intermediárias em Programas

Use  $\boxed{f}$   $\boxed{PSE}$  (*PauSE = pausa*) como instrução de um programa para causar uma interrupção *momentânea* e apresentar no visor um resultado intermediário. (Use mais de uma  $\boxed{PSE}$  para alongar a pausa).

Use uma instrução  $\boxed{R/S}$  (*Run/Stop = executar/parar*) para interromper a execução indefinidamente. O programa ficará posicionado nessa linha. Você pode reiniciar a execução do programa (a partir dessa linha), bastando pressionar  $\boxed{R/S}$  no Modo de Execução, ou seja, pelo teclado.

\* Com exceção das funções não programáveis, relacionadas na página 82.

## Executando um Programa

**Modo de Execução.** Pressione  $\boxed{g}$   $\boxed{P/R}$  quando você tiver terminado de programar, comutando de volta ao Modo de Execução. Um programa somente poderá ser executado no Modo Run (de Execução).

**Pressione**

**Visor**

$\boxed{g}$   $\boxed{P/R}$

Modo de Execução: o anúncio **PRGM** não é apresentado. (O conteúdo do visor dependerá de resultados anteriores).

O posicionamento da calculadora na memória de programação não é afetado pela comutação entre os modos. Quando desligada, a calculadora sempre “acordará” no Modo de Execução.

**Executando um Programa.** No *Modo de Execução*, pressione  $\boxed{f}$  seguida pela *letra do rótulo* ou  $\boxed{GSB}$  seguida pelo *dígito* (ou letra) do *rótulo*. Com isso você estará endereçando um programa e dando início à sua execução. O visor apresentará a palavra **running** (em execução).

**Pressione**

**Visor**

300.51

**300.51**

Introduza um valor de *h* no visor.

$\boxed{f}$   $\boxed{A}$

**7.8313**

Resultado da execução do programa “A”, (número de segundos que leva para um objeto chegar ao chão quando lançado de uma altura de 300.51 metros).

**Recomeçando a Execução de um Programa.** Pressione  $\boxed{R/S}$  para recomeçar a execução de um programa que tenha sido interrompido pela própria instrução  $\boxed{R/S}$ .

**Modo do Usuário.** O Modo do Usuário é uma condição opcional na qual as seqüências de teclas são preservadas ao se executar programas *cujo nome seja uma letra*. Pressionando  $\boxed{f}$   $\boxed{USER}$  as teclas prefixadas com  $\boxed{f}$  são intercambiadas com as funções primárias das teclas  $\boxed{A}$  a  $\boxed{E}$ . Você pode então executar um programa usando apenas uma tecla (omitindo as teclas  $\boxed{f}$  ou  $\boxed{GSB}$ ).

## Como Introduzir Dados

Todo programa deve ser elaborado levando-se em conta a maneira e o momento de introdução dos dados. Isto pode ser feito no Modo de Execução antes do programa ser executado ou durante uma interrupção do mesmo.

1. **Preferência na Introdução.** Se o valor de uma variável for utilizado na primeira linha do programa, introduza-o no visor antes de executar o programa. Se ele for utilizado mais adiante, você pode armazená-lo (com **STO**) num registrador de armazenamento e então recuperá-lo (com um **RCL** programado) dentro do programa.

Este é o método que foi usado acima, onde *h* foi colocado no registrador X antes do programa ser executado. A instrução **ENTER** não é necessária porque a execução do programa (que neste caso é **f A**) além de encerrar a introdução de dígitos também ativa a movimentação da pilha operacional. O programa então multiplicará o conteúdo do registrador X (*h*) por 2.

A existência da pilha operacional possibilita a carga de mais de uma variável antes da execução do programa. Tendo em mente como o conteúdo da pilha operacional é movimentado com os cálculos posteriores e como ela pode ser manipulada (com **x<sub>k</sub>y**), por exemplo) é possível se escrever programas que usem variáveis que tenham sido introduzidas nos registradores X, Y, Z e T.

2. **Introdução Direta.** Neste método, a introdução dos dados é feita no meio da execução do programa. Coloque uma instrução **R/S** (*Run/Stop = executar/parar*) no ponto do programa onde você desejar interromper a execução e introduzir o dado. Introduza o dado e pressione **R/S** para reiniciar a execução do programa.

Não introduza dados variáveis no corpo do programa. Quaisquer valores que variem deverão ser fornecidos a cada execução do programa.

## Memória de Programação

Na condição inicial de energia (ou quando a Memória Contínua é apagada), a HP-15C oferece 322 bytes de memória de programação e 21 registradores de armazenamento. A maioria dos passos (instruções de um programa) ocupam um byte, mas alguns ocupam dois bytes. A distribuição da capacidade de memória pode ser alterada, como está explicado no

Apêndice C. A alocação máxima de memória de programação é de 448 bytes (os registradores  $R_1$ ,  $R_0$  e  $R_1$  não são utilizados); o número máximo de registradores de armazenamento é de 67 (ficando sem memória de programação).

## Exemplo

A Lataria Universal, uma fabricante de embalagens metálicas para a indústria alimentícia, deseja embalar três tipos de molhos de macarronada em latas cilíndricas distintas: uma para molho de tomate, outra para molho de queijo e uma terceira para molho de carne. A Universal precisa calcular as áreas da base e os volumes das 3 latas. A Universal também gostaria de registrar, para cada lata, a área total das bases, a área superficial e o volume.



O programa que irá calcular essas informações usa 3 fórmulas e 3 dados:

$$\text{área da base} = \pi r^2.$$

$$\text{volume} = \text{área da base} \times \text{altura} = \pi r^2 h.$$

$$\text{área superficial} = 2 (\text{área da base}) + \text{área lateral} = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Raio (r)	Altura (h)	Área da Base	Volume	Área Superficial
2.5 cm	8.0 cm	?	?	?
4.0	10.5	?	?	?
4.5	4.	?	?	?
<b>TOTAIS</b>		?	?	?

### Método

1. Introduza um valor de  $r$  na calculadora e preserve-o para outros cálculos. Calcule a área da base ( $\pi r^2$ ), armazene-a para uso posterior e adicione a área da base ao registrador que acumulará a soma de todas as áreas das bases.
2. Introduza  $h$  e calcule o volume ( $\pi r^2 h$ ). Adicione-o ao registrador que acumulará a soma de todos os volumes.

3. Recupere  $r$ . Divida o volume por  $r$  e multiplique por 2 para obter a área superficial. Acumule as áreas superficiais num registrador.

Não introduza os dados atuais ao escrever o programa, apenas *providencie* recursos para a sua introdução. Tais valores variarão e deverão ser introduzidos antes e/ou durante a execução do programa.

Introduza o programa dado a seguir para resolver o problema acima. O visor apresenta os números das linhas e os códigos das teclas (a linha e a coluna de localização da tecla), que serão explicados nas Informações Adicionais.

Pressione	Visor	
<b>g</b> <b>P/R</b>	000-	Coloca a calculadora no Modo de Programação (o anúncio <b>PRGM</b> aparece no visor).
<b>f</b> <b>CLEAR</b> <b>PRGM</b>	000-	Apaga a memória de programação. Inicia na linha 000.
<b>f</b> <b>LBL</b> <b>A</b>	001-42,21,11	Atribui o rótulo "A" ao programa.
<b>STO</b> <b>0</b>	002- 44 0	Armazena o conteúdo do registrador X em $R_0$ . $r$ deve estar no visor antes do programa ser executado.
<b>g</b> <b>x<sup>2</sup></b>	003- 43 11	Eleva ao quadrado o conteúdo do registrador X (que deverá ser $r$ ).
<b>g</b> <b><math>\pi</math></b>	004- 43 26	
<b>x</b>	005- 20	$\pi r^2$ , a ÁREA da BASE de uma lata.
<b>STO</b> <b>4</b>	006- 44 4	Armazena a ÁREA da BASE em $R_4$ .
<b>STO</b> <b>+</b> <b>1</b>	007-44,40, 1	Mantém a soma de todas as ÁREAS da BASE em $R_1$ .
<b>R/S</b>	008- 31	Pára e apresenta a ÁREA da BASE no visor, permitindo a introdução do valor $h$ .

Pressione	Visor	
<b>x</b>	009-	20 Multiplica $h$ pela ÁREA da BASE calculando o VOLUME.
<b>f</b> <b>PSE</b>	010-	42 31 Faz uma breve pausa para apresentar o VOLUME no visor.
<b>STO</b> <b>+</b> 2	011-44,40,	2 Mantém a soma de todos os VOLUMES das latas em $R_2$ .
<b>RCL</b> 0	012-	45 0 Recupera $r$ , que será armazenado em $R_0$ antes do programa ser executado.
<b>+</b>	013-	10 Divide o VOLUME pro $r$ .
2	014-	2
<b>x</b>	015-	20 $2\pi rh$ , a ÁREA LATERAL de uma lata.
<b>RCL</b> 4	016-	45 4 Recupera a ÁREA da BASE da lata.
2	017-	2
<b>x</b>	018-	20
<b>+</b>	019-	40 } Multiplica a área da base por 2 (para as bases superior e inferior). ÁREA LATERAL + ÁREA da BASE = ÁREA SUPERFICIAL
<b>STO</b> <b>+</b> 3	020-44,40,	3 Mantém a soma de todas as ÁREAS SUPERFICIAIS em $R_3$ .
<b>g</b> <b>RTN</b>	021-	43 32 Finaliza o programa e retorna à linha 000 da memória de programação.

Vamos agora executar o programa:

Pressione	Visor
<b>g</b> <b>P/R</b>	Coloca a calculadora no Modo de Execução (o anúncio <b>PRGM</b> desaparece).
<b>f</b> <b>CLEAR</b> <b>REG</b>	Apaga <i>todos</i> os registradores de armazenamento. O visor não é afetado.

<b>Pressione</b>	<b>Visor</b>	
2.5	2.5	Introduz no visor o $r$ da primeira lata.
f [A]	19.6350	Inicia a execução do programa A.
(ou: GSB [A])		Valor da <b>ÁREA</b> da <b>BASE</b> da primeira lata. A palavra <b>running</b> (em execução) fica piscando no visor.
8	8	Introduz no visor a altura $h$ da primeira lata. A seguir reinicia a execução.
R/S	157.0796	VOLUME da primeira lata.
	164.9336	ÁREA SUPERFICIAL da primeira lata.
4	4	Introduz no visor o $r$ da segunda lata.
R/S	50.2655	ÁREA da <b>BASE</b> da segunda lata.
10.5	10.5	Introduz no visor o $h$ da segunda lata.
R/S	527.7876	VOLUME da segunda lata.
	364.4247	ÁREA SUPERFICIAL DA segunda lata.
4.5	4.5	Introduz no visor o $r$ da terceira lata.
R/S	63.6173	ÁREA da <b>BASE</b> da terceira lata.
4	4	Introduz no visor o $h$ da terceira lata.
R/S	254.4690	VOLUME da terceira lata.
	240.3318	ÁREA SUPERFICIAL da terceira lata.
RCL 1	133.5177	Soma das <b>ÁREAS</b> das <b>BASES</b> .

Pressione	Visor	
<b>RCL</b> 2	<b>939.3362</b>	Soma dos VOLUMES.
<b>RCL</b> 3	<b>769.6902</b>	Soma das ÁREAS SUPERFICIAIS.

Este último programa ilustra as técnicas básicas de programação. Ele também mostra como os dados podem ser manipulados nos modos de Programação e Execução, a introdução, armazenamento e recuperação de dados (entrada e saída) usando **ENTER**, **STO**, **RCL**, a aritmética com registradores de armazenamento e as interrupções programadas.

## Informações Adicionais

### Instruções de um Programa

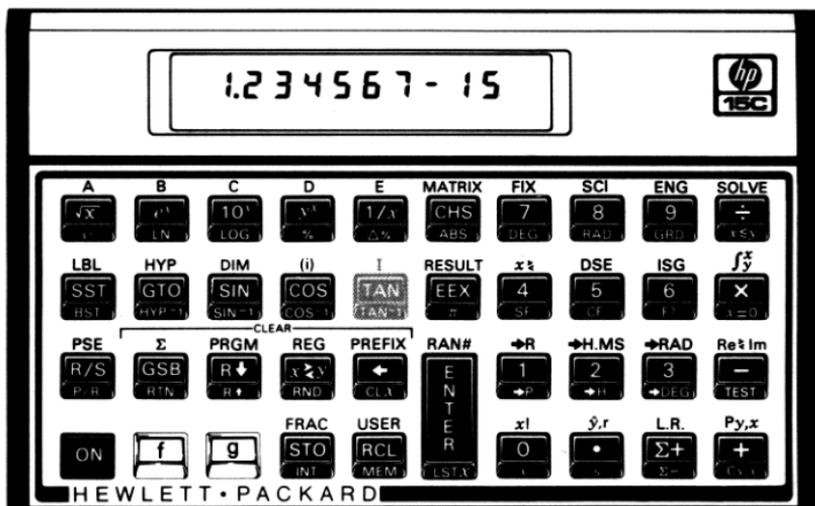
Cada dígito, ponto decimal, ou tecla de função é considerado uma *instrução*, sendo armazenada numa *linha* da memória de programação. Uma instrução pode incluir prefixos (tais como **f**, **STO**, **GTO** e **LBL**) e mesmo assim ocupar uma única linha. A maioria das instruções ocupa um *byte* de memória de programação; no entanto, algumas instruções exigem duas linhas. O Apêndice C apresenta a relação completa das instruções de dois bytes.

### Codificando Instruções

Cada tecla do teclado da HP-15C (com exceção das teclas dos dígitos 0 a 9) é identificada no Modo de Programação por um “código de tecla” de dois dígitos, que corresponde à posição da tecla no teclado.

Instrução	Código	
<b>STO</b> <b>+</b> 1	<b>006-44,40</b> , 1	6ª linha de programação.
<b>f</b> <b>DSE</b> <b>I</b>	<b>XXX-42</b> , 5.25	<b>DSE</b> é apenas “5”.

O primeiro dígito de um código de tecla se refere à linha (de 1 a 4, de cima para baixo) e o segundo dígito se refere à coluna (1, 2, ... 9, 0, da esquerda para a direita). Exceção: os códigos das teclas referentes aos dígitos são os próprios dígitos.



Código de tecla 25: segunda linha, 5ª tecla

## Configuração de Memória

O entendimento da configuração de memória não é essencial para o uso da HP-15C. No entanto, é essencial para se obter o máximo rendimento no uso da memória e em programação. Quanto mais você programar, maior será o seu conhecimento. O Apêndice C, Alocação de Memória, explica minuciosamente como a memória é alocada e configurada.

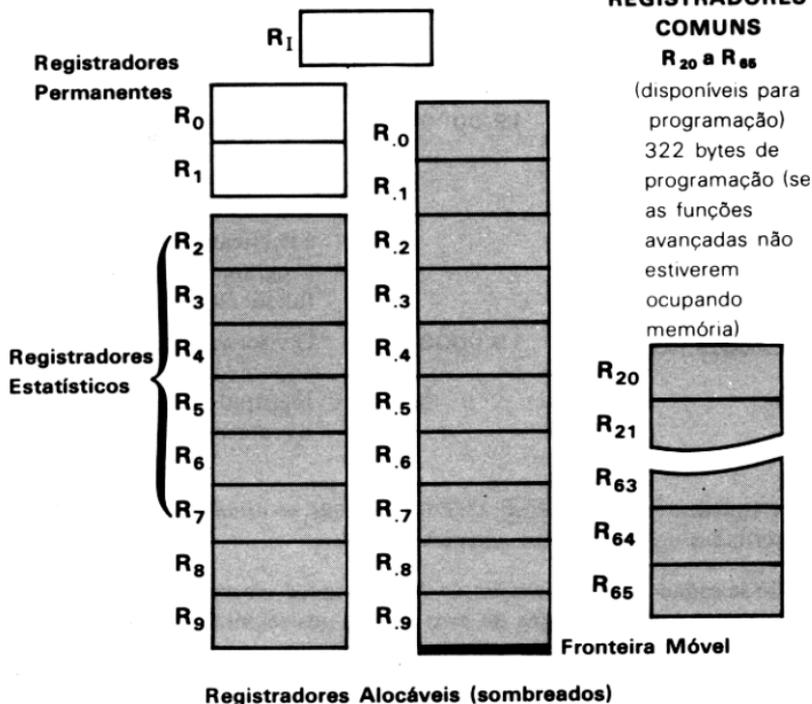
A mensagem Error 10 indicará que você tentou ultrapassar os limites da memória da HP-15C. Sabendo como realocar a memória, você poderá incrementar sua habilidade no armazenamento de informações na HP-15C.

A memória da HP-15C é composta de 67 registradores ( $R_0$  a  $R_{65}$  e o Registrador de Indexação,  $R_1$ ) e divide-se entre o armazenamento de dados de programação/funções avançadas. A configuração inicial é a seguinte:

- 46 registradores tanto para programação como para as funções avançadas ( **SOLVE**,  $f_i$ , a pilha operacional imaginária, e as funções **MATRIX** ). Cada registrador ocupa 7 bytes de memória; desse modo os 46 registradores comportam 322 bytes de programação se as funções avançadas não estiverem ocupando memória.
- 21 registradores para o armazenamento de dados ( $R_0$  a  $R_9$ ,  $R_{0a}$  a  $R_{9e}$  e  $R_1$ ).

## Configuração Inicial de Memória

REGISTRADORES DE ARMAZENAMENTO:  $R_1$ ,  $R_0$  a  $R_9$



Para se realocar a memória basta se informar à calculadora qual o registrador de armazenamento de dados de maior endereço; todos os demais serão alocados para programação e para as funções avançadas.

**Pressione**

**Visor**

60  $\boxed{f}$   $\boxed{DIM}$   $\boxed{(i)}$  \*

60.0000

Os registradores até o  $R_{60}$  são alocados para o armazenamento de dados; os cinco restantes ( $R_{61}$  a  $R_{65}$ ) ficam para programação.

\* A omissão opcional da tecla  $\boxed{f}$ , após uma primeira tecla de prefixo, é explicada na página 80 (em Sequências Abreviadas de Teclas).

Pressione	Visor	
1 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">f</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">DIM</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">(i)</span>	1.0000	R <sub>1</sub> e R <sub>0</sub> estão alocados para o armazenamento de dados; R <sub>2</sub> a R <sub>65</sub> ficam disponíveis para programação e para as funções avançadas.
19 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">f</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">DIM</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">(i)</span>	19.0000	Alocação original: R <sub>19</sub> (R. <sub>9</sub> ) e os de endereço menor ficam alocados para o armazenamento de dados; R <sub>20</sub> a R <sub>65</sub> ficam alocados para programação e para as funções avançadas*.
<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">RCL</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">DIM</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">(i)</span>	19.0000	O visor apresenta o endereço do último dos registradores alocados para o armazenamento de dados.

As funções DIM e MEM (*MEMory status = estado da memória*) são abordadas em detalhe no Apêndice C.

Não se esqueça de que, em *função da configuração de memória* acima, poderão ocorrer as mensagens de erro abaixo nos seguintes casos:

1. **Error 3**, se você tentar especificar um endereço acima de 19, referenciando o registrador de armazenamento de dados de maior endereço (R.<sub>9</sub>), na configuração inicial de memória.
2. **Error 4**, se você já tiver ocupado 322 bytes de programação e tentar carregar linhas adicionais.
3. **Error 10**, se você tentar executar uma função avançada e não houver memória disponível.

## Limites de um Programa

**End.** Nem todo programa precisa ser encerrado com uma instrução RTN ou R/S. Se você estiver no final da memória de programação, obterá uma instrução RTN automática, não sendo necessário

---

\* Para o endereçamento indireto e para a alocação de memória, os registradores R<sub>0</sub> a R<sub>9</sub> são referidos como R<sub>10</sub> a R<sub>19</sub>.



**Interrupções por Erros.** A execução de um programa é imediatamente interrompida quando o programa tenta executar uma operação imprópria (a mensagem **Error** aparece no visor).

Para se observar a linha e o código de teclas da instrução que causou o erro (ou seja, a linha na qual o programa parou), pressione uma tecla qualquer para eliminar a mensagem de erro e então comute para o Modo de Programação.

Se o conteúdo do visor ficar piscando quando o programa for interrompido, isto indicará que existe uma condição de overflow (veja à página 62). Pressione  $\leftarrow$ , **ON**, ou  $\left[ \text{g} \right] \left[ \text{CF} \right] 9$  para que o conteúdo do visor deixe de piscar.

## Seqüências Abreviadas de Teclas

Em certos casos, a tecla de prefixo  $\left[ f \right]$  (que você esperaria incluir numa seqüência de teclas) não é necessária. A regra para o uso de uma *seqüência abreviada de teclas* é a seguinte: a tecla de prefixo  $\left[ f \right]$  é desnecessária após outras seis teclas de prefixo. (A página 18 apresenta a relação completa das teclas de prefixo).

Por exemplo,  $\left[ f \right] \left[ \text{LBL} \right] \left[ f \right] \left[ \text{A} \right]$  torna-se  $\left[ f \right] \left[ \text{LBL} \right] \left[ \text{A} \right]$ ;  $\left[ f \right] \left[ \text{DIM} \right] \left[ f \right] \left[ (i) \right]$  torna-se  $\left[ f \right] \left[ \text{DIM} \right] \left[ (i) \right]$ ;  $\left[ \text{STO} \right] \left[ f \right] \left[ \text{RAN} \# \right]$  torna-se  $\left[ \text{STO} \right] \left[ \text{RAN} \# \right]$ . A retirada de  $\left[ f \right]$  não é ambígua porque a função prefixada por  $\left[ f \right]$  é a única que tem lógica nesses casos. Os códigos de teclas para tais instruções não incluirão o código da tecla  $\left[ f \right]$  que for eventualmente introduzida.

## Modo do Usuário

O Modo do Usuário é conveniente para se preservar seqüências de teclas ao se executar (chamar) um programa. Pressionando  $\left[ f \right] \left[ \text{USER} \right]$  se intercambia função primária e a função prefixada por  $\left[ f \right]$  (apenas das teclas  $\left[ \text{A} \right]$  a  $\left[ \text{E} \right]$ ). No Modo do Usuário (o anúncio **USER** aparecer no visor):

Prefixo $\left[ f \right]$		A	B	C	D	E
Primária		$\sqrt{x}$	$e^x$	$10^x$	$y^x$	$1/x$
Prefixo $\left[ \text{g} \right]$		$x^2$	LN	LOG	%	$\Delta\%$

Pressione  $\left[ f \right] \left[ \text{USER} \right]$  novamente para desativar o Modo do Usuário.

## Expressões Polinomiais e o Método de Horner

Algumas expressões, tais como os polinômios, utilizam várias vezes a mesma variável, até chegar à solução. Por exemplo, a expressão.

$$f(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

usa a variável  $x$  em quatro ocasiões diferentes. Um programa que solucionasse tal equação deveria recuperar repetidamente uma cópia de  $x$ , obtida de um registrador de armazenamento. Um método de programação mais condensado, no entanto, poderia usar a pilha operacional preenchida com a constante (veja, na página 41, Carregando a Pilha Operacional com uma Constante).

O Método de Horner é um meio útil de se rearranjar expressões polinomiais, reduzindo os passos e o tempo de cálculo. Ele é particularmente rápido em **SOLVE** e **(/)**, duas funções de cálculo demorado que usam sub-rotinas.

Este método envolve a reescrita da expressão polinomial, a qual fica numa forma parentética, eliminando-se os expoentes maiores do que 1:

$$\begin{aligned} & Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E \\ & (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)x + E \\ & ((Ax^2 + Bx + C)x + D)x + E \\ & (((Ax + B)x + C)x + D)x + E \end{aligned}$$

**Exemplo:** Escreva um programa para  $5x^4 + 2x^3$  na forma  $(((5x + 2)x)x)x$ , e então calcule-a para  $x = 7$ .

**Pressione**

**g** **P/R**

**Visor**

**000-**

Presume-se que a calculadora esteja posicionada na linha 000 da memória; caso contrário, a memória de programação será apagada.

**f** **LBL** **B**

**001-42,21,12**

**5**

**002- 5**

**x**

**003- 20 5x**

## Pressione

## Visor

2	004-	2	
$\boxed{+}$	005-	40	$5x + 2$
$\boxed{\times}$	006-	20	$(5x + 2)x$
$\boxed{\times}$	007-	20	$(5x + 2)x^2$
$\boxed{\times}$	008-	20	$(5x + 2)x^3$
$\boxed{g}$ $\boxed{RTN}$	009-	43 32	
$\boxed{g}$ $\boxed{P/R}$			

Retorna ao Modo de Execução.  
O conteúdo anterior do visor é rerepresentado.

7  $\boxed{ENTER}$   $\boxed{ENTER}$   
 $\boxed{ENTER}$

7.0000

Carrega a pilha operacional  
(os registradores X, Y, Z e T)  
com 7.

 $\boxed{f}$   $\boxed{B}$ 

12,691.0000

## Funções Não Programáveis

Quando a calculadora está no Modo de Programação, quase todas as funções do teclado podem ser gravadas como instruções na memória de programação. As funções dadas a seguir *não* podem ser armazenadas como instruções na memória de programação:

$\boxed{f}$  CLEAR  $\boxed{PREFIX}$   
 $\boxed{f}$  CLEAR  $\boxed{PRGM}$   
 $\boxed{f}$   $\boxed{(i)}$   
 $\boxed{f}$   $\boxed{USER}$

$\boxed{g}$   $\boxed{BST}$   
 $\boxed{g}$   $\boxed{MEM}$   
 $\boxed{g}$   $\boxed{P/R}$   
 $\boxed{GTO}$   $\boxed{CHS}$  *nnn*

$\boxed{SST}$   
 $\boxed{\leftarrow}$   
 $\boxed{ON}$  /  $\boxed{\cdot}$   
 $\boxed{ON}$  /  $\boxed{-}$

## Problemas

- O distrito de Barão Geraldo instalou um relógio com carrilhão no campanário da igreja. O nível do som, na porta da igreja, a 3.2 metros do campanário, é de 138 decibéis. Escreva um programa para calcular o nível do som para diversas distâncias do campanário.

Use a equação  $L = L_0 - 20 \log(r/r_0)$ , onde:

$L_0$  é o nível conhecido (138 db) do som num ponto próximo à fonte.

$r_0$  é a distância desse ponto à fonte (3.2 m),

$L$  é o nível do som (a incógnita) num segundo ponto e

$r$  é a distância, em metros, do segundo ponto à fonte.

Qual é o nível do som a 3 km da fonte ( $r = 3$  km?)

Uma possível seqüência seria a seguinte:

$\boxed{\text{g}}$   $\boxed{\text{P/R}}$   $\boxed{\text{f}}$   $\boxed{\text{LBL}}$   $\boxed{\text{C}}$  3.2  $\boxed{\div}$   $\boxed{\text{g}}$   $\boxed{\text{LOG}}$  20  $\boxed{\times}$   $\boxed{\text{CHS}}$  138  $\boxed{+}$   
 $\boxed{\text{g}}$   $\boxed{\text{RTN}}$   $\boxed{\text{g}}$   $\boxed{\text{P/R}}$ ; o programa ficará com 15 linhas, ocupando 15 bytes de memória. Este problema também poderá ser resolvido de uma maneira mais genérica, recuperando-se os valores de  $L_0$ , e  $r_0$  de registradores de armazenamento ou carregando-se  $L_0, r$  e  $r_0$  na pilha operacional, antes da execução:  $L_0$   $\boxed{\text{ENTER}}$   $r$   $\boxed{\text{ENTER}}$   $r_0$ .

(Resposta: para  $r = 3$  km,  $L = 78.5606$  db)

2. Um tomate “tipicamente” grande pesa 200 gramas, das quais a água representa cerca de 188 g (94%) do total. Um geneticista está tentando obter tomates com um menor teor de água. Escreva um programa que calcule a variação porcentual do teor de água de um dado tomate em função de um tomate típico. Use uma interrupção programada para introduzir a massa de água de um novo tomate.

Qual é a variação porcentual do teor de água de um tomate de 230 g, das quais 205 g correspondem à massa de água?

Uma possível seqüência de teclas é a seguinte:

$\boxed{\text{f}}$   $\boxed{\text{LBL}}$   $\boxed{\text{D}}$  .94  $\boxed{\text{ENTER}}$   $\boxed{\text{R/S}}$  (introduza a massa de água do tomate novo)  $\boxed{\text{ENTER}}$   $\boxed{\text{R/S}}$  (introduza a massa do tomate novo)  
 $\boxed{+}$   $\boxed{\text{g}}$   $\boxed{\Delta\%}$   $\boxed{\text{g}}$   $\boxed{\text{RTN}}$ ; o programa ficará com 11 linhas, ocupando 11 bytes de memória.

(Resposta: para o tomate de 230 g mencionado acima, a variação porcentual com relação a massa de água é de -5.1804%).

## Edição de Programas

Existem várias razões para se modificar um programa depois de você tê-lo introduzido: você pode desejar acrescentar ou eliminar alguma instrução (como **STO**, **PSE** ou **R/S**) ou desejar encontrar algum erro! A HP-15C é equipada com vários recursos de edição, facilitando este processo ao máximo.

### A Mecânica

Para se fazer uma alteração de qualquer espécie num programa, deve-se enfrentar dois passos: ir à linha adequada (ao local onde a modificação se faz necessária) e promover o acréscimo e/ou supressão de instruções.

#### Localização de uma Determinada Linha da Memória de Programação

**A Instrução **GTO**** (*Go TO = ir para*). A seqüência **GTO** **CHS** *nnn* promove o desvio à linha *nnn* da memória de programação, tanto no Modo de Execução como no Modo de Programação (com o anúncio **PRGM** aceso). Esta seqüência *não* é programável; ela serve para se determinar *manualmente* uma posição específica da memória de programação. O número da linha deve ter três dígitos e satisfazer a condição  $000 \leq nnn \leq 448$ .

**A Instrução **SST**** (*Single STep = linha à linha*). Para se percorrer a memória de programação linha à linha, pressione **SST**. Esta função *não* é programável.

*No Modo de Programação:* **SST** posiciona a calculadora na linha seguinte, apresentando a instrução dessa linha no visor. A instrução dessa linha *não* é executada. Se você mantiver a tecla **SST** pressionada, a calculadora apresentará, continuamente, as próximas linhas da memória de programação.

*No Modo de Execução:* **SST**, mantida pressionada, apresenta a linha atual da memória de programação; quando é solta, a instrução atual é executada, o resultado é apresentado e a calculadora passa para a próxima linha da memória de programação a ser executada.

A Instrução **[BST]** (*Back Step = linha anterior*). Para se posicionar a calculadora na linha *anterior* da memória de programação, pressione **[BST]** no Modo de Programação ou no Modo de Execução. Esta função não é programável. **[BST]**, se mantida pressionada no Modo de Programação, apresentará continuamente as linhas anteriores. As instruções programadas *não* são executadas.

## Suprimindo Linhas de um Programa

A supressão de instruções de um programa é feita por **[←]** (*tecla de correção*) no *Modo de Programação*. Posicione a calculadora na linha que você deseja eliminar e então pressione **[←]**. As eventuais linhas seguintes serão renumeradas, mantendo a seqüência.

Ao se pressionar **[←]** no *Modo de Execução* não se afeta a memória de programação; somente o visor é afetado (veja maiores detalhes na página 20).

## Inserindo Linhas num Programa

Para se inserir linhas num programa deve-se primeiramente posicionar a calculadora na linha *anterior* ao ponto de inserção. Toda linha que você introduzir será acrescentada *após* a que estiver no visor. Para alterar uma instrução, primeiramente elimine-a e então acrescente a nova versão.

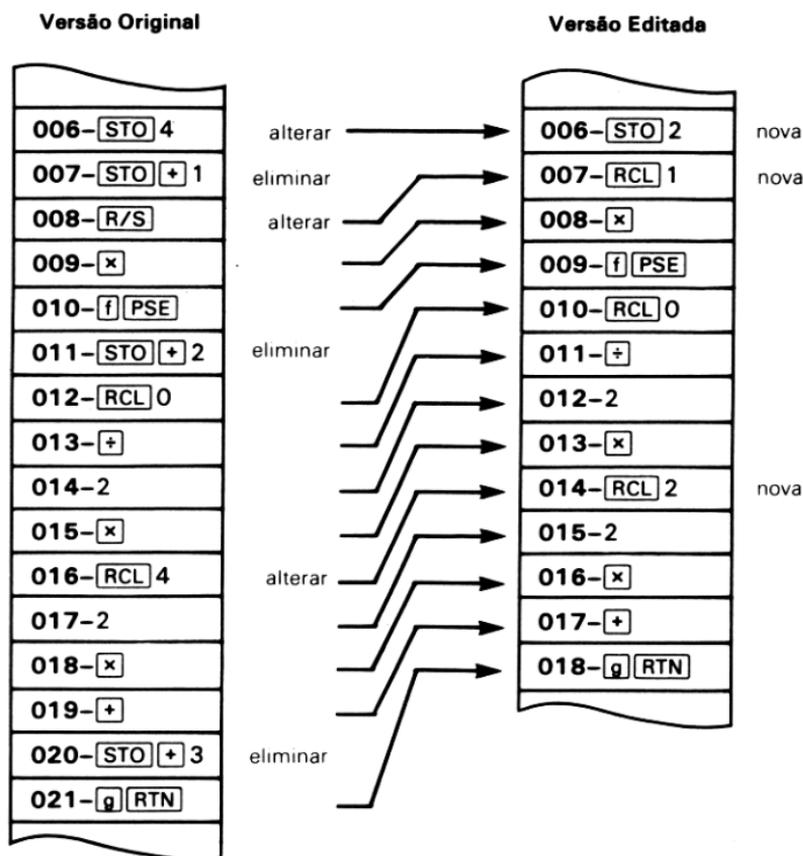
## Exemplos

Vejamos novamente o programa da seção 6 (página 72) do volume da lata e implementemos umas poucas alterações nas instruções. (Supõe-se que o programa da lata, listado abaixo, esteja na memória a partir da linha 001).

**Supressões:** Se não desejássemos somar a área da base, o volume e a área superficial, poderíamos eliminar as linhas 007, 011 e 020 que realizam as adições com o registrador de armazenamento.

**Alterações:** para eliminar a necessidade de interromper o programa para introduzir o valor da altura ( $h$ ), troque a instrução **[R/S]** pela instrução **[RCL]** 1 (pois em função das supressões acima o registrador  $R_1$  não está sendo utilizado) e armazene  $h$  em  $R_1$  antes de executar o programa. Para acertar o programa, vamos também trocar o **[STO]** 4 (da linha 006) por **[STO]** 2 e o **[RCL]** 4 (da antiga linha 016) por **[RCL]** 2, pois não estamos mais usando  $R_2$  e  $R_3$ .

O processo de edição está diagramado na próxima página.



Vamos começar pelo fim do programa e trabalhar em direção ao início do mesmo. Assim procedendo, as supressões não irão alterar os números das linhas anteriores do programa.

**Pressione****g** **P/R****GTO** **CHS** 020(ou então use **SST** )**Visor**

000-

020-44,40, 3

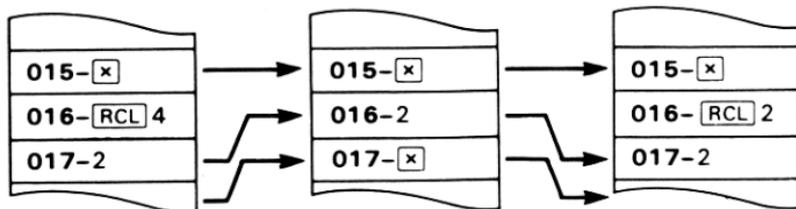
Modo de Programação.  
(Supõe-se que a calculadora  
esteja posicionada na  
linha 000).

Posiciona a calculadora  
na linha 020 (instrução  
**STO** **+** 3).

**Pressione**
**Visor**

<p>←</p> <p>g BST (mantenha-a pressionada)</p> <p>←</p> <p>RCL 2</p> <p>GTO CHS 011 (ou então mantenha BST pressionada)</p> <p>←</p> <p>g BST (mantenha-a pressionada)</p> <p>←</p> <p>RCL 1</p> <p>g BST</p> <p>←</p> <p>←</p> <p>STO 2</p>	<p>019- 40 Elimina a linha 020.</p> <p>016- 45 4 A próxima linha a ser editada é a 016 ( RCL 4).</p> <p>015- 20 Elimina a linha 016.</p> <p>016- 45 2 A linha 016 passou a ser RCL 2.</p> <p>011-44,40, 2 Move para a linha 011 ( STO + 2).</p> <p>010- 42 31 Elimina a linha 011.</p> <p>008- 31 Pare! (O retrocesso linha à linha chegou a 008: R/S).</p> <p>007-44,40, 1 Elimina R/S).</p> <p>008- 45 1 A linha 008 passou a ser RCL 1.</p> <p>007-44,40, 1 Retrocesso à linha 007.</p> <p>006- 44 4 Elimina a linha 007. ( STO + 1).</p> <p>005- 20 Elimina a linha 006 ( STO 4).</p> <p>006- 44 2 A linha 006 passou a ser STO 2.</p>
--	--

O processo de substituição de uma linha é assim:



## Informações Adicionais

### Operações Linha à Linha

**Execução de um Programa Linha à Linha.** Se você desejar verificar o conteúdo de um programa ou a localização de uma instrução, você pode percorrer o programa linha à linha, no *Modo de Programação*. Se, por outro lado, a execução do programa produzir um erro ou você suspeitar que uma parte do programa está falha, você poderá verificar o programa *executando-o* linha à linha. Basta pressionar **SST** no *Modo de Execução*.

Pressione	Visor	
<b>g</b> P/R		Modo de Execução.
<b>f</b> CLEAR <b>REG</b>		Apaga os registradores de armazenamento.
<b>GTO</b> <b>A</b>		Move para a 1ª linha do programa A.
8 <b>STO</b> 1	8.0000	Armazena a altura de uma lata.
2.5	2.5	Introduz o raio de uma lata.
<b>SST</b> (mantenha-a pressionada)	001-42,21,11	Código de tecla da instrução da linha 001 (o rótulo).
(solte-a)	2.5000	Resultado da execução da linha 001.
<b>SST</b>	002- 44 0	<b>STO</b> 0.
	2.5000	Resultado.
<b>SST</b>	003- 43 11	<b>g</b> $x^2$ .
	6.2500	Resultado.
<b>SST</b>	004- 43 26	<b>g</b> $\pi$ .
	3.1416	Resultado.
<b>SST</b>	005- 20	<b>x</b> .
	19.6350	Resultado: a área da base da lata.

**Definição da Memória.** **[SST]** não posiciona a calculadora em “território” não ocupado pela memória de programação. Ao invés disso, a calculadora “circula” de volta à linha 000. No Modo de Execução, **[SST]** efetuará quaisquer das instruções do final da memória, tais como **[RTN]**, **[GTO]** ou **[GSB]**).

## Posicionamento de Linhas

Não se esqueça de que o posicionamento da calculadora na memória de programação não é alterado mesmo quando desligada, ou pela passagem entre os modos de Execução/Programação. Mesmo voltando ao Modo de Programação, o posicionamento da calculadora permanecerá na linha em que você o deixou. (Se você tivesse executado um final de programa com **[RTN]**, o posicionamento se daria na linha 000). Além disso, se a calculadora for deixada ligada e desligar-se automaticamente, você precisará apenas ligá-la e comutar para o Modo de Programação (pois a calculadora sempre “acorda” no Modo de Execução) para voltar ao ponto onde você estava.

## Inserções e Supressões

Após uma inserção, o visor apresentará a instrução que você acabou de acrescentar. Após uma supressão, o visor apresentará a linha que precedia a que foi eliminada.

Se a memória estiver totalmente preenchida, a calculadora não aceitará mais nenhuma inserção de instrução, apresentando a mensagem **Error 4** no visor.

## Inicializando o Estado da Calculadora

O conteúdo dos registradores de armazenamento e as definições do estado da calculadora afetarão o programa, se o mesmo utilizar tais registradores ou depender de uma determinada definição de estado. Se o estado atual não for o correto para o programa que estiver sendo executado, você irá obter resultados incorretos. Além disso, convém apagar os registradores e estabelecer os modos relevantes antes de se executar ou confeccionar um programa. Um programa que se auto-inicialize é menos sujeito a erros, embora fique com mais linhas.

As funções de inicialização da calculadora são: **[f] CLEAR [Σ]**, **[f] CLEAR [PRGM]**, **[f] CLEAR [REG]**, **[g] [DEG]**, **[g] [RAD]**, **[g] [GRD]**, **[g] [SF]** e **[g] [CF]**.

## Problemas

Uma boa técnica de programação consiste em se evitar o uso de rótulos idênticos num programa. (Isso é fácil, pois a HP-15C possibilita a definição de 25 rótulos diferentes). Para garantir a duplicação de rótulos, apague a memória de programação antes de introduzir o programa.

- O programa dado a seguir é utilizado pelo gerente de uma instituição financeira para calcular o valor futuro de contas de poupança de acordo com a fórmula  $VF = VP(1+i)^n$ , onde  $VF$  é o valor futuro,  $VP$  é o valor presente,  $i$  é a taxa periódica de juros e  $n$  é o número de períodos. Introduza primeiramente  $VP$  (no registrador Y) e  $n$  em seguida (no registrador X), antes de executar o programa. A taxa de juros é de 7.5% (ou seja,  $i = 0.075$ ).

Pressione	Visor	
f LBL 1	001-42,21, .1	
f FIX 2	002-42, 7, 2	
1	003-	1
.	004-	48
0	005-	0
7	006-	7
5	007-	5
x ÷ y	008-	34
y <sup>x</sup>	009-	14 (1 + i) <sup>n</sup> .
x	010-	20 VP (1 + i) <sup>n</sup> .
g RTN	011-	43 32

Taxa de juros.

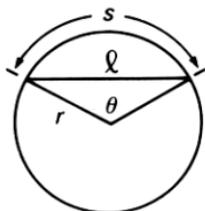
Carregue o programa e calcule o valor futuro de Cr\$ 1.000,00 investidos por 5 anos; de Cr\$ 2.300,00 investidos por 4 anos. Lembre-se de usar [GSB] para executar o programa (pois seu rótulo é um dígito). Respostas: Cr\$ 1.435,63; Cr\$ 3.071,58.

Altere o programa de forma que a nova taxa de juros seja de 8.0%.

Usando o programa editado, calcule o valor futuro de Cr\$ 500,00 investidos por 4 anos; de Cr\$ 2.000,00 investidos por 10 anos. Respostas: Cr\$ 680,24; Cr\$ 4.317,85.

2. Faça um programa que calcule o comprimento de uma corda  $\ell$  definida por um ângulo  $\theta$  (em graus) num círculo de raio  $r$ , segundo a equação:

$$\ell = 2r \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}.$$



Calcule  $\ell$  para  $\theta = 30^\circ$  e  $r = 25$ .

Resposta: 12.9410. Um programa possível seria: `f` `LBL` `A` `g` `DEG` `f` `FIX` `4` `2` `x` `x↔y` `2` `+` `SIN` `x` `g` `RTN`). Esta solução presume que  $\theta$  está no registrador Y e  $r$  no registrador X, antes do programa ser executado.

Faça as alterações necessárias para que o programa também calcule e apresente o comprimento  $s$  do arco circular definido por  $\theta$  (em radianos), segundo a equação:

$$s = r \theta.$$

Complete a seguinte tabela:

$\theta$	$r$	$\ell$	$s$
$45^\circ$	50	?	?
$90^\circ$	100	?	?
$270^\circ$	100	?	?

(Respostas: 38.2683 e 39.2699; 141.4214 e 157.0796; 141.4214 e 471.2389. Um programa possível seria:

`f` `LBL` `A` `g` `DEG` `f` `FIX` `4` `STO` `0` `2` `x` `x↔y` `STO` `1` `2` `+` `SIN` `x` `f` `PSE` `f` `PSE` `RCL` `0` `RCL` `1` `f` `↔RAD` `x` `g` `RTN`).

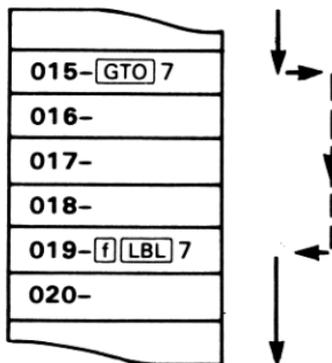
# Decisões num Programa e seu Controle

Embora as instruções de um programa normalmente sejam executadas sequencialmente, é comum a necessidade de se desejar transferir a execução para um outro trecho do programa (e não para a *próxima linha*). O desvio na HP-15C pode ser *simples* ou depender de uma certa *condição*. Pelo desvio a uma linha anterior pode-se executar um certo trecho de um programa mais do que uma vez: este processo é chamado de *ciclagem* (looping).

## A Mecânica

### Desvios

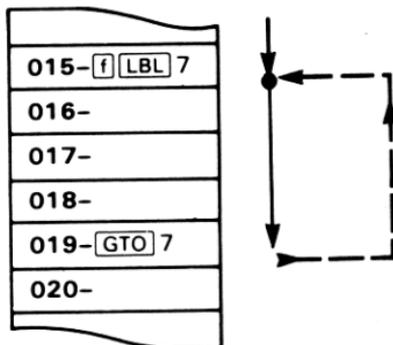
A **Instrução** (**GTO**) (*Go TO = ir para*). O desvio simples, isto é, o desvio incondicional, é efetivado pela instrução **GTO** *rótulo*. **GTO** transfere a execução de um programa para o próximo programa ou rotina identificado pelo rótulo (e *não* para um *número* de linha) designado.



A calculadora pesquisa a memória de programação, do ponto do desvio para baixo, voltando para a instrução 000 se necessário, e reiniciando a execução na primeira linha que contiver o rótulo designado.

**Ciclos.** Se uma instrução **GTO** especificar o rótulo de uma linha anterior (de numeração inferior), a série de instruções entre o **GTO** e o rótulo serão executadas repetidamente (pode até acontecer que a execução seja

executada indefinidamente). O prosseguimento deste ciclo pode ser controlado por um desvio condicional, por uma instrução **R/S** (interna ao ciclo) ou simplesmente pressionando-se uma tecla qualquer durante a execução (causando a interrupção do programa).



## Testes de Condição

Outra maneira de se alterar a seqüência da execução de um programa é através do *teste condicional*, um teste com 2 alternativas (verdadeiro/falso), que compara o conteúdo do registrador X com zero ou com o conteúdo do registrador Y. A HP-15C possui 12 testes diferentes, dois explícitos no teclado e os 10 restantes acessíveis usando-se **g** **TEST** *n*\*

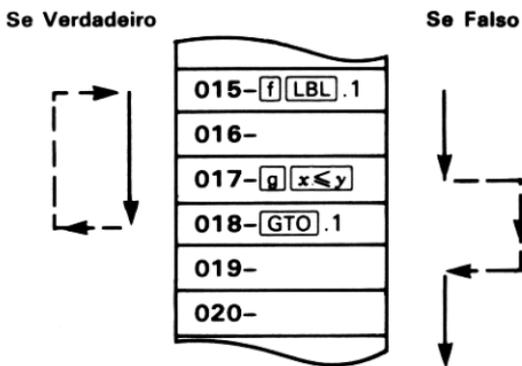
1. Direto: **g**  $x \leq y$  e **g**  $x = 0$ .
2. Indireto: **g** **TEST** *n*

<i>n</i>	Teste	<i>n</i>	Teste
0	$x \neq 0$	5	$x = y$
1	$x > 0$	6	$x \neq y$
2	$x < 0$	7	$x > y$
3	$x \geq 0$	8	$x < y$
4	$x \leq 0$	9	$x \geq y$

\* Quatro dos teste condicionais também podem ser utilizados com valores complexos, como vemos na página 134 da seção 11.

Na execução de um teste condicional, o programa segue a regra “Faça se Verdadeiro”: se a condição testada for verdadeira, a execução prossegue seqüencialmente; *se a condição testada for falsa, a execução salta a instrução seguinte*. Em geral costuma-se colocar a instrução **GTO** logo após o teste condicional, promovendo o *desvio condicional*, ou seja, o desvio **GTO** somente é executado se a condição testada for verdadeira.

#### Execução do Programa Após o Teste



### Indicadores

Um outro tipo de teste condicional em programação é o teste de um *indicador* (flag). Um indicador é um designador de estado que pode ser *ativado* (verdadeiro) ou *desativado* (falso). Mais uma vez, a execução segue a regra Faça se Verdadeiro: o fluxo segue seqüencialmente se o indicador estiver ativado e salta uma linha se o indicador estiver desativado.

A HP-15C possui oito indicadores do *usuário*, numerados de 0 a 7, e dois indicadores do *sistema*, de números 8 (Modo Complexo) e 9 (Condição de Overflow). Os indicadores do sistema serão vistos mais adiante, ainda nesta seção. Todos os indicadores podem ser ativados, desativados e testados da seguinte maneira:

- **q SF** *n* *ativará* o indicador *n* (0 a 9).
- **q CF** *n* *desativará* o indicador *n*.
- **q F?** *n* *verificará* se o indicador *n* está ativado.

Um indicador *n* que tenha sido ativado permanecerá nesse estado até ser desativado por uma instrução **CF** *n* ou quando a Memória Contínua for apagada.

## Exemplos

### Exemplo de Desvios e Ciclos ("Looping")

Um laboratório de radiobiologia deseja prever a queda de radioatividade de uma amostra de  $^{131}\text{I}$ , um radioisótopo. Escreva um programa para ajudá-lo a monitorar o decaimento da radioatividade em intervalos de 3 dias, até chegar a um limite. A fórmula de  $N_t$ , que é a quantidade de radioisótopo restante após  $t$  dias é a seguinte:

$$N_t = N_0 (2^{-t/k}),$$

onde  $k = 8$  dias (a vida média do  $^{131}\text{I}$ ) e  $N_0$  a quantidade inicial de radioisótopo.

O programa dado a seguir usa um ciclo para calcular o número de milicuries (mci) do isótopo que teoricamente deverá restar após um intervalo de decaimento de 3 dias. O programa também possui um teste condicional para verificar o resultado ao final do programa, quando a radioatividade cair para um valor limite.

O programa presume que o primeiro dia de medida ( $t_1$ ) está armazenado em  $R_0$ , que a quantidade inicial do isótopo ( $N_0$ ) está armazenada em  $R_1$  e que o valor limite da radioatividade está armazenado em  $R_2$ .



Pressione	Visor	
$\boxed{g}$ P/R	000-	Modo de Programação.
$\boxed{f}$ CLEAR $\boxed{PRGM}$	000-	(Opcional).
$\boxed{f}$ LBL $\boxed{A}$	001-42,21,11	Cada iteração do ciclo provoca o retorno a esta linha.
$\boxed{RCL}$ 0	002- 45 0	Recupera o valor atual de, o qual varia a cada iteração.
$\boxed{f}$ PSE	003- 42 31	Pausa para apresentar $t$ .
8	004- 8	$k$ .

Pressione	Visor	
$\div$	005-	10
CHS	006-	16 $-t/k$ .
2	007-	2
$x \div y$	008-	34
$y^x$	009-	14 $2^{-t/k}$
RCL $\times$ 1	010-45,20, 1	Recupera e multiplica pelo conteúdo de $R_1$ ( $N_0$ ) obtendo $N_t$ , a quantidade de $^{131}\text{I}$ em mci após $t$ dias.
f PSE	011-	42 31 Pausa para apresentar $N_t$ .
RCL 2	012-	45 2 Recupera o valor limite no registrador X.
g TEST 9	013-43,30, 9	$x \geq y$ ? Testa se o valor limite (contido em X) é maior ou igual a $N_t$ (contido em Y).
g RTN	014-	43 32 Se a condição for verdadeira, a execução é encerrada.
3	015-	3 Caso contrário, o programa prossegue.
STO + 0	016-44,40, 0	Acrescenta 3 dias ao $t$ de $R_0$ .
GTO A	017-	22 11 Desvia para "A" e repete a execução, calculando um novo $N_t$ a partir de um novo $t$ .

Observe que sem as linhas 012 a 014, o ciclo seria indefinidamente executado (até ser interrompido pelo teclado).

Vamos executar o programa, usando  $t_1 = 2$  dias,  $N_0 = 100$  mci e um valor limite igual à metade de  $N_0$  (50 mci).

Pressione	Visor	Modo de Execução (o conteúdo do visor poderá variar).
<b>g</b> <b>P/R</b>		
2 <b>STO</b> 0	2.0000	$t_1$ .
100 <b>STO</b> 1	100.0000	$N_0$ .
50 <b>STO</b> 2	50.0000	Valor limite de $N_t$
<b>f</b> <b>A</b>	2.0000	$t_1$ .
	84.0896	$N_1$ .
	5.0000	$t_2$ .
	64.8420	$N_2$ .
	8.0000	$t_3$ .
	50.0000	$N_3$ .
	50.0000	$N_t$ limite; o programa termina.

### Exemplo de Indicadores

Os débitos ou investimento podem ser calculados de duas maneiras: para pagamentos antecipados (no início de um dado período) ou para pagamentos postergados (no final de um dado período). Se você escrever um programa para calcular o valor ("valor presente") de um débito ou investimento com juros periódicos e com pagamentos periódicos, poderá utilizar um indicador como um sensor de estado que diga ao programa se os pagamentos devem ser antecipados ou postergados.

Suponha que você esteja planejando a forma de pagamento das anuidades futuras dos estudos universitários do seu filho. Você estima que o custo seja de Cr\$3.000,00/ano (Cr\$250,00 ao mês). Se você amortizar os pagamentos mensais usando os fundos de uma conta bancária que rende 6% ao ano, compostos mensalmente (0.5% ao mês), quanto você deveria depositar no início do curso para cobrir as mensalidades durante 4 anos?

A fórmula é:

$$V = -P \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i)$$

Se os pagamentos forem feitos no início de cada mês.

ou

$$V = -P \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

Se os pagamentos forem feitos ao final de cada mês.

$V$  é o valor total do depósito feito no banco;

$P$  é o valor do pagamento periódico que você irá retirar da conta bancária,

$i$  é a taxa de juros periódica (neste caso entenda-se “periódico” por mensal, pois os juros estão sendo compostos mensalmente) e

$n$  é o número de períodos de composição (número de meses).

O programa dado a seguir permite qualquer uma das duas modalidades de pagamento. Ele assume que, antes de ser executado,  $P$  estará no registrador  $Z$ ,  $n$  estará no registrador  $Y$  e que  $i$  estará no registrador  $X$ .

#### Pressione

#### Visor

<input type="button" value="g"/> <input type="button" value="P/R"/>	000-	Modo de Programação.
<input type="button" value="f"/> <input type="button" value="LBL"/> <input type="button" value="B"/>	001-42,21,12	Início em “B”, se os pagamentos forem feitos no início dos períodos.
<input type="button" value="g"/> <input type="button" value="CF"/> 0	002-43, 5, 0	O indicador 0 é desativado, indicando que os pagamentos serão feitos no início dos períodos.
<input type="button" value="GTO"/> 1	003- 22 1	Desvio para a rotina principal.
<input type="button" value="f"/> <input type="button" value="LBL"/> <input type="button" value="E"/>	004-42,21,15	Início em “E”, se os pagamentos forem feitos ao final dos períodos.

## Pressione

## Visor

<b>g</b> <b>SF</b> 0	<b>005-43, 4, 0</b>	O indicador 0 é ativado, indicando que os pagamentos serão feitos ao final dos períodos.
<b>f</b> <b>LBL</b> 1	<b>006-42,21, 1</b>	Rotina 1 (rotina principal).
<b>STO</b> 1	<b>007- 44 1</b>	Armazena $i$ (do visor) em $R_1$ .
1	<b>008- 1</b>	
<b>+</b>	<b>009- 40</b>	$(1 + i)$ .
<b>x<math>\rightarrow</math>y</b>	<b>010- 34</b>	Coloca $n$ em $X$ ; $(1 + i)$ em $Y$ .
<b>CHS</b>	<b>011- 16</b>	$-n$
<b>y<math>^x</math></b>	<b>012- 14</b>	$(1 + i)^{-n}$ .
<b>CHS</b>	<b>013- 16</b>	$-(1 + i)^{-n}$ .
1	<b>014- 1</b>	
<b>+</b>	<b>015- 40</b>	$1 - (1 + i)^{-n}$ .
<b>RCL</b> <b>+</b> 1	<b>016-45,10, 1</b>	Recupera a divisão por $R_1$ ( $i$ ) para obter $[1 - (1 + i)^{-n}] / i$ .
<b>x</b>	<b>017- 20</b>	Multiplica por $P$ .
<b>g</b> <b>F7</b> 0	<b>018-43, 6, 0</b>	O indicador 0 está ativado?
<b>g</b> <b>RTN</b>	<b>019- 43 32</b>	Fim do cálculo se o indicador 0 estiver ativado (para pagamentos no final dos períodos).
<b>RCL</b> 1	<b>020- 45 1</b>	Recupera $i$ .
1	<b>021- 1</b>	
<b>+</b>	<b>022- 40</b>	$(1 + i)$
<b>x</b>	<b>023- 20</b>	Multiplica pelo termo final.
<b>g</b> <b>RTN</b>	<b>024- 43 32</b>	Fim do cálculo se o indicador 0 estiver desativado.

Execute o programa para calcular o montante necessário numa conta bancária para saldar mensalidades de Cr\$250,00 por 48 meses. Introduza a

taxa de juros periódica como uma fração decimal, ou seja, 0.005 por mês. Primeiramente calcule o montante necessário para pagamentos a serem feitos no início do mês (pagamentos antecipados), e então calcule o montante necessário para pagamentos a serem feitos no final do mês (pagamentos postergados).

Pressione	Visor	
<input type="button" value="g"/> <input type="button" value="P/R"/>		Posiciona no Modo de Execução.
250 <input type="button" value="ENTER"/>	250.0000	Pagamento mensal.
48 <input type="button" value="ENTER"/>	48.0000	Nº de períodos de pagamento (4 anos × 12 meses).
.005	0.005	Taxa mensal de juros (fração decimal)
<input type="button" value="f"/> <input type="button" value="B"/>	10.698.3049	Depósito necessário para cobrir pagamentos no início dos meses.

(Repita a introdução dos dados na pilha operacional)

<input type="button" value="f"/> <input type="button" value="E"/>	10.645.0795	Depósito necessário para cobrir pagamentos no final dos meses (A diferença entre este depósito e o custo da anuidade (Cr\$12,000.00) representa os juros ganhos com o depósito!)
---	-------------	--

## Informações Adicionais

### A Instrução Go To (Ir para)

Contrastando com a seqüência não programável   *nnn*, a seqüência programável  *rótulo* não pode ser usada para promover o desvio a um número de linha, mas apenas a um rótulo de programa (uma linha contendo   *rótulo*)\*. A execução prossegue a partir do ponto

\* O desvio para um determinado número de linha, através do controle de um programa, somente é possível com o endereçamento indireto que será visto na seção 10.

do novo rótulo e não retorna ao ponto de chamada, a não ser por outra instrução **GTO** que você tenha programado.

**GTO** rótulo também pode ser utilizada no Modo de Execução (ou seja, pelo teclado) para desviar a uma posição rotulada da memória de programação. Nesse caso, nada é executado.

## Ciclos (“Looping”)

Os ciclos constituem uma aplicação da instrução de desvio **GTO**, permitindo a repetição de uma parcela do programa. Um ciclo pode prosseguir indefinidamente, ou então ser condicional. É muito comum o uso de um ciclo para repetir um mesmo cálculo com variáveis distintas. Ao mesmo tempo, pode-se incluir um contador que seja incrementado a cada execução do ciclo, o qual poderá ser usado para controle do número de iterações. Este contador pode ser verificado com um teste condicional, para se determinar quando sair do ciclo. (A página 116 apresenta um exemplo desta aplicação).

## Desvio Condicional

Há duas aplicações gerais para o desvio condicional. Uma é o controle de ciclos, como já vimos acima; um teste condicional pode verificar se um determinado valor já foi calculado ou verificar o valor do contador de ciclos.

Outra aplicação importante é o teste de alternativas e a adoção de uma delas. Como exemplo, se um vendedor ganha uma comissão que varia em função do montante de vendas, você pode escrever um programa que aceita o total das vendas, compara-o com um valor de teste e então calcula uma comissão específica, em função da venda ter sido maior ou menor do que o valor de teste.

**Testes.** Um teste condicional compara o conteúdo do registrador X (“x”) com zero (tal como  $x=0$ ) ou com “y”, ou seja com o conteúdo do registrador Y (tal como  $x \leq y$ ). Para uma comparação entre x e y, no entanto, é necessário que os dois valores ocupem os registradores correspondentes. Isto obriga você a armazenar um valor de teste e então recuperá-lo (trazendo-o ao registrador X). No entanto, se o valor estiver na pilha operacional, ele deverá ser movido com o auxílio de  $x \rightleftharpoons y$ , **R↓**, ou **R↑**.

**Testes com Números Complexos e com Descritores de Matrizes.** Quatro dos testes condicionais também podem ser utilizados com números complexos e com descritores de matrizes:  $x=0$ , **TEST** 0 ( $x \neq 0$ ), **TEST** 5 ( $x = y$ ), **TEST** 6 ( $x \neq y$ ). Se você desejar maiores detalhes, consulte as seções 11 e 12.

## Indicadores

Da mesma maneira que um teste condicional pode ser usado num programa para a adoção de uma alternativa em função de uma comparação entre dois números, um indicador pode ser usado externamente na adoção da alternativa. Em geral, um indicador é ativado ou desativado antes do programa ser executado, permitindo a escolha entre dois pontos distintos de início da execução do mesmo (usando-se rótulos diferentes), em função da condição que você estabelecer (veja o exemplo da página 97).

Dessa forma, um programa pode aceitar dois diferentes modos de entrada, tais como graus ou radianos, e fazer o cálculo correto em função do modo escolhido. Você pode ativar um indicador, se houver necessidade de se fazer uma conversão, por exemplo, ou desativá-lo, se a conversão não for necessária.

Suponha que você tenha uma equação que exija a introdução da temperatura em graus Kelvin, embora os seus dados estejam, algumas vezes, em graus Celsius. Você poderia usar um programa com um indicador, que permitisse a introdução de dados tanto em graus Kelvin como em graus Celsius. Uma parte do programa deveria ser a seguinte:

<b>f</b> <b>LBL</b> <b>C</b>	Início do programa em "C", para graus Celsius.
<b>g</b> <b>CF</b> 7	O indicador 7 é desativado (falso).
<b>GTO</b> 1	
<b>f</b> <b>LBL</b> <b>D</b>	Início do programa em "D", para graus Kelvin.
<b>g</b> <b>SF</b> 7	O indicador 7 é ativado (verdadeiro).
<b>f</b> <b>LBL</b> 1	(Presume que a temperatura esteja no registrador X).
<b>g</b> <b>F?</b> 7	Verifica o indicador 7 (se a introdução está em graus Celsius ou Kelvin).
<b>GTO</b> 2	Se ativado (entrada em Kelvin), vai para uma rotina posterior, saltando as poucas instruções seguintes.
2	Se desativado (entrada em Celsius), adiciona 273
7	ao conteúdo do registrador X, pois $^{\circ}\text{K} = ^{\circ}\text{C} + 273$ .
3	
<b>+</b>	
<b>f</b> <b>LBL</b> 2	O cálculo prossegue para os dois modos.
.	
.	
.	

## Os Indicadores 8 e 9 do Sistema

**Indicador 8.** Ao se ativar o indicador 8, ativa-se o Modo Complexo (descrito na seção 11), e o anúncio C ficará aceso no visor. Se for empregado um outro método para a ativação do Modo Complexo, o indicador 8 será automaticamente ativado. O Modo Complexo somente pode ser desativado se o indicador 8 o for; o indicador 8 é desativado da mesma maneira que os demais indicadores.

**Indicador 9.** O indicador 9 é automaticamente ativado ao ocorrer uma condição de overflow (descrita na página 62). O indicador 9 faz com que o conteúdo do visor fique piscando; se o overflow ocorrer durante a execução de um programa, o conteúdo do visor somente piscará ao término da execução.

O indicador 9 pode ser desativado de três maneiras:

- Pressione  $\boxed{g}$   $\boxed{CF}$  9 (que é o procedimento comum para se desativar qualquer indicador).
- Pressione  $\boxed{\leftarrow}$ . Isto apenas desativará o indicador 9, impedindo o visor de piscar; o conteúdo do visor não será apagado.
- Desligue a calculadora. (O indicador 9 não será desativado se a calculadora desligar-se automaticamente).

Se você ativar manualmente o indicador 9 (  $\boxed{SF}$  9), o conteúdo do visor ficará piscando, independentemente do estado de overflow da calculadora. Como sempre, a execução de um programa irá até o fim antes do visor começar a piscar. Dessa forma, o indicador 9 pode ser usado como uma ferramenta de programação, permitindo uma sinalização visual para a condição que você tiver estipulado.

## Sub-rotinas

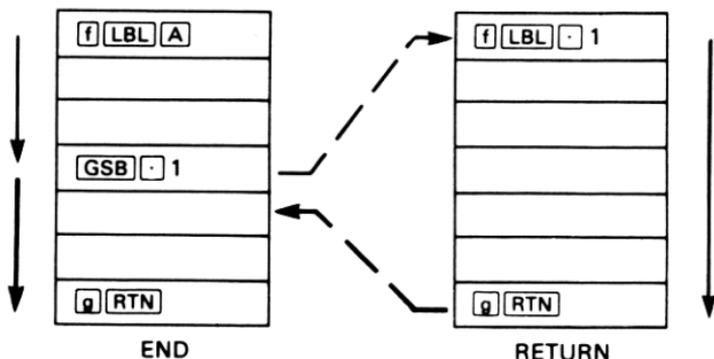
Quando um mesmo conjunto de instruções precisa ser usado mais do que uma vez num programa, pode-se economizar espaço de memória se tais instruções forem armazenadas como uma sub-rotina.

### A Mecânica

#### Desvio e Retorno de uma Sub-rotina

A instrução **GSB** (*Go to SuBroutine = desviar para uma sub-rotina*) é executada da mesma maneira que o desvio **GTO**, com uma importante diferença: ele estabelece uma condição de *retorno pendente*. **GSB** rótulo (assim como **GTO** rótulo\*) transfere a execução do programa à linha de rótulo correspondente ( **A** a **E** , 0 a 9 ou .0 a .9). No-entanto, a execução prosseguirá até a próxima instrução **RTN** que for encontrada; nesse ponto, a execução será transferida de volta à instrução imediatamente seguinte à instrução **GSB** que provocou o desvio, prosseguindo desse ponto em diante.

Execução de uma Sub-rotina



END

A execução é transferida à linha 000 e pára.

RETURN

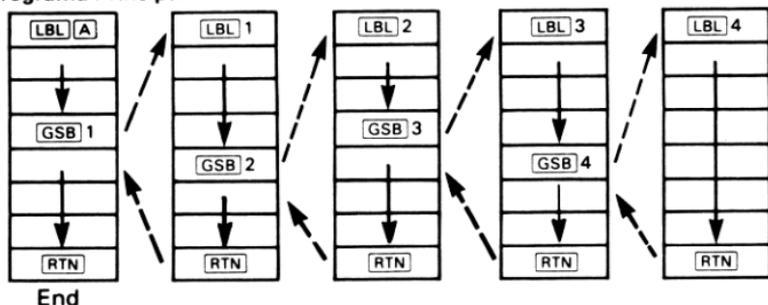
A execução é transferida de volta à rotina original, após **GSB** 1.

\* Uma instrução **GSB** ou **GTO**, seguida por um rótulo formado por uma letra, é uma seqüência abreviada de teclas ( **f** não é necessária), como foi explicado na página 80.

## Limites de uma Sub-rotina

Uma sub-rotina pode chamar uma outra sub-rotina, e esta pode chamar ainda uma outra. Este “encadeamento de sub-rotinas” (a execução de uma sub-rotina dentro de uma sub-rotina) é limitado por uma pilha de sub-rotinas com capacidade para 7 níveis de encadeamento (sem contar a primeira chamada, a nível do programa principal). A operação de sub-rotinas encadeadas pode ser esquematizada assim:

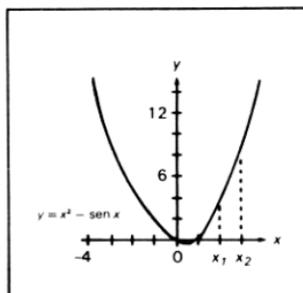
### Programa Principal



## Exemplos

**Exemplo:** Escreva um programa que calcule a inclinação da secante que une os pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , no gráfico ao lado, onde  $y = x^2 - \text{sen } x$  ( $x$  sendo dado em radianos).

A inclinação da secante é



$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ ou } \frac{(x_2^2 - \text{sen } x_2) - (x_1^2 - \text{sen } x_1)}{x_2 - x_1}$$

A solução requerer que a equação em  $y$  seja calculada duas vezes: uma para  $y_1$  e outra para  $y_2$ , sendo dados  $x_1$  e  $x_2$ . Como o mesmo cálculo deve ser realizado com valores distintos, poderemos economizar espaço de memória de programação se for feita a chamada de uma sub-rotina para o cálculo de  $y$ .

O programa a seguir assume que  $x_1$  tenha sido introduzido no registrador Y e  $x_2$  no registrador X.

## Pressione

<b>g</b> <b>P/R</b>	(Não programável)
<b>f</b> <b>CLEAR</b> <b>PRGM</b>	
<b>000-</b>	
<b>001-</b> <b>f</b> <b>LBL</b> <b>9</b>	Inicia o programa principal.
<b>002-</b> <b>g</b> <b>RAD</b>	Modo radianos.
<b>003-</b> <b>STO</b> <b>0</b>	Armazena $x_2$ em $R_0$ .
<b>004-</b> <b>x<sub>2</sub> y</b>	Traz $x_1$ a X e $x_2$ a Y.
<b>005-</b> <b>STO</b> <b>-</b> <b>0</b>	$(x_2 - x_1)$ em $R_0$ .
<b>006-</b> <b>GSB</b> <b>.3</b>	Transfere à sub-rotina ".3" com $x_1$ .
	Retorna da sub-rotina ".3".
<b>007-</b> <b>CHS</b>	$-y_1$ .
<b>008-</b> <b>x<sub>2</sub> y</b>	Traz $x_2$ ao registrador X.
<b>009-</b> <b>GSB</b> <b>.3</b>	Transfere à sub-rotina com $x_2$ .
	Retorna da sub-rotina ".3".
<b>010-</b> <b>+</b>	$y_2 - y_1$ .
<b>011-</b> <b>RCL</b> <b>÷</b> <b>0</b>	Recupera $(x_2 - x_1)$ de $R_0$ e calcula $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ .
<b>012-</b> <b>g</b> <b>RTN</b>	Fim do programa (retorna à linha 000).
SUB-ROTINA	
<b>013-</b> <b>f</b> <b>LBL</b> <b>.3</b>	Inicia a sub-rotina .3.
<b>014-</b> <b>g</b> <b>x<sup>2</sup></b>	$x^2$ .
<b>015-</b> <b>g</b> <b>LSTx</b>	Recupera $x$ .
<b>016-</b> <b>SIN</b>	Senô de $x$ .
<b>017-</b> <b>-</b>	$x^2 - \text{sen}(x)$ , que iguala $y$ .
<b>018-</b> <b>g</b> <b>RTN</b>	Retorna à origem no programa principal.

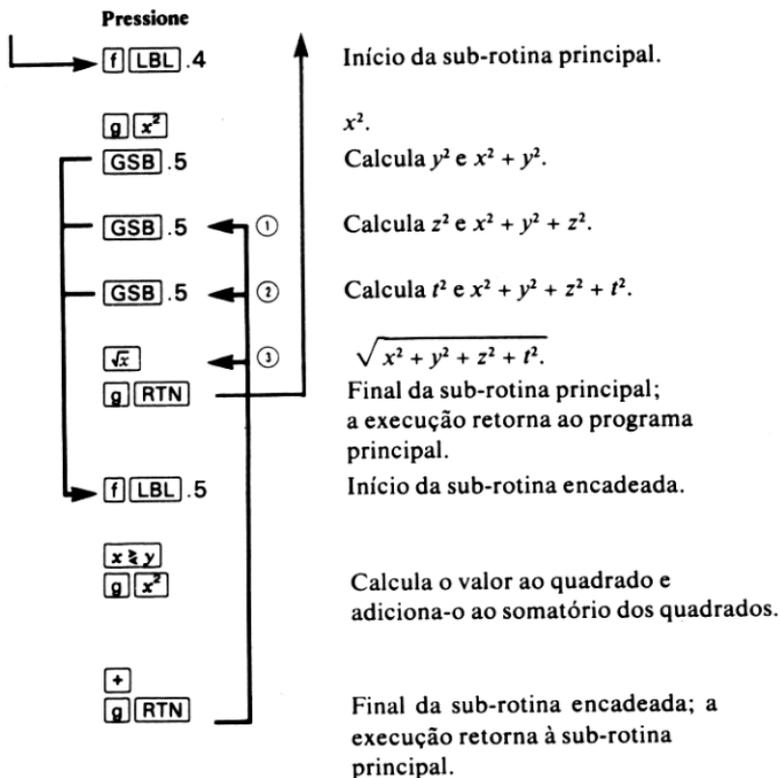
Calcule as inclinações para os seguintes valores de  $x_1$  e  $x_2$ : 0.52, 1.25; -1, 1; 0.81, 0.98. Não se esqueça de usar **GSB** 9 (ao invés de **f** 9) ao endereçar uma sub-rotina de rótulo numérico.

Respostas: 1.1507; -0.8415; 1.1652.

**Exemplo: Encadeamento.** A sub-rotina dada a seguir, rotulada de ".4", calcula o valor da expressão  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}$  como parte de um cálculo mais extenso de um programa maior.

A sub-rotina chama uma *outra* sub-rotina (o que caracteriza o encadeamento) cujo rótulo é “.5”, que faz a potenciação repetitiva.

O programa é executado depois que as variáveis  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $t$  estão nos registradores respectivos.



Se você executar apenas a sub-rotina (com sua sub-rotina encadeada), usando  $x = 4.3$ ,  $y = 7.9$ ,  $z = 1.3$  e  $t = 8.0$ , a resposta que você irá obter, ao pressionar [GSB]4, será 12.1074.

## Informações Adicionais

### O Retorno de uma Sub-rotina

A condição de *retorno pendente* faz com que a próxima instrução `RTN` seguinte à instrução `GSB` provoque o retorno à linha que seguir `GSB`, ao invés de provocar o retorno à linha 000. É isto que torna a sub-rotina útil e reutilizável em diferentes partes de um programa: ela sempre faz com que a execução retorne ao ponto que promoveu o desvio, mesmo que os pontos de chamada variem. A única diferença entre `GSB` e `GTO` é a transferência que ocorre *após* um `RTN`.

### Sub-rotinas Encadeadas

Se você tentar chamar uma sub-rotina que esteja além do 7º nível de encadeamento, a calculadora irá parar, apresentando a mensagem **Error 5** no visor.

Observe que não há restrição (a não ser a capacidade da memória) com relação ao número de sub-rotinas não encadeadas ou de *conjuntos* de sub-rotinas encadeadas que você queira utilizar.

# O Registrador de Indexação e o Controle de Ciclos

O Registrador de Indexação  $R_1$  é uma poderosa ferramenta para a programação avançada da HP-15C. Além de permitir o armazenamento e recuperação de dados, o Registrador de Indexação permite o uso de um índice para:

- Contagem e Controle de ciclos.
- Endereçamento indireto de registradores de armazenamento, inclusive os de endereço inferior a  $R_9$  ( $R_{19}$ ).
- Desvios indiretos a *números* de linhas, bem como a *rótulos*.
- Controle indireto do formato de apresentação.
- Controle indireto de operações com indicadores.

## As Teclas $\boxed{I}$ e $\boxed{(i)}$

### O Armazenamento Direto versus o Armazenamento Indireto de Dados com o Registrador de Indexação

O Registrador de Indexação é um registrador de armazenamento de dados que pode ser utilizado diretamente, com  $\boxed{I}$ , ou indiretamente, com  $\boxed{(i)}$ \*. É muito importante observar a diferença:

$\boxed{I}$

A função  $\boxed{I}$  usa o *próprio conteúdo* de  $R_1$ .

$\boxed{(i)}$

A função  $\boxed{(i)}$  usa o valor absoluto da parte inteira do conteúdo de  $R_1$  para endereçar outro registrador de armazenamento de dados. Isso é chamado de *endereçamento indireto*.

---

\* Observe que as funções de matrizes e as funções complexas também usam as teclas  $\boxed{I}$  e  $\boxed{(i)}$ , mas com outro propósito. As seções 11 e 12 dão os detalhes necessários para estes casos.

## Controle Indireto de um Programa com o Registrador de Indexação

A tecla **I** pode ser utilizada para qualquer tipo de controle *que não seja* o endereçamento indireto de um registrador. **I** (e não **(i)**) é utilizada por desvios indiretos de programas, controle indireto do formato de apresentação no visor, e no controle indireto de indicadores.

## Controle de Ciclos num Programa

O controle e a contagem de ciclos de um programa pode ser efetuado por *qualquer registrador de armazenamento* da HP-15C: R<sub>0</sub> a R<sub>9</sub>, R.<sub>0</sub> a R.<sub>9</sub> ou pelo Registrador de Indexação (**I**). O controle de ciclos também pode ser efetuado *indiretamente* por **(i)**.

## A Mecânica

Tanto **I** como **(i)** podem ser utilizados em seqüências abreviadas de teclas, omitindo-se a tecla **f** de prefixo (como já vimos na página 80).

## Armazenamento e Recuperação com o Registrador de Indexação

**Direto.** **STO I** e **RCL I**. O armazenamento e a recuperação entre o registrador X e o Registrador de Indexação operam da mesma maneira que entre os demais registradores de armazenamento (página 43).

**Indireto.** **STO (i)** (ou **RCL (i)**) **(i)** armazena (ou recupera) no (do) registrador de armazenamento de dados endereçado pela parte inteira do conteúdo (de 0 a 65) de R<sub>I</sub>. Veja a tabela abaixo e a da página seguinte.

Endereçamento Indireto

Se R <sub>I</sub> contém:	<b>(i)</b> endereçará:	<b>GTO I</b> ou <b>GSB I</b> transferirão para:*
± 0	R <sub>0</sub>	<b>f LBL 0</b>
⋮	⋮	⋮
9	R <sub>9</sub>	<b>f LBL 9</b>
10	R. <sub>0</sub>	" " 0
11	R. <sub>1</sub>	" " 1
⋮	⋮	⋮

\* Somente para R<sub>I</sub> ≥ 0.

(Continua na página seguinte).

## Endereçamento Indireto

Se $R_1$ contém:	(i) endereçará:	$\boxed{\text{GTO}} \boxed{\text{I}}$ ou $\boxed{\text{GSB}} \boxed{\text{I}}$ transferência para:*
19	$R_9$	$\boxed{\text{f}} \boxed{\text{LBL}} :9$
20	$R_{20}$	" " $\boxed{\text{A}}$
21	$R_{21}$	" " $\boxed{\text{B}}$
22	$R_{22}$	" " $\boxed{\text{C}}$
23	$R_{23}$	" " $\boxed{\text{D}}$
24	$R_{24}$	" " $\boxed{\text{E}}$
⋮	⋮	—
65	$R_{65}$	—

\* Somente para  $R_1 \geq 0$ .

## Operações Aritméticas com o Registrador de Indexação

**Direto.**  $\boxed{\text{STO}}$  ou  $\boxed{\text{RCL}} \{ \boxed{+}, \boxed{-}, \boxed{\times}, \boxed{\div} \} \boxed{\text{I}}$  A aritmética de armazenamento ou recuperação com  $R_1$  opera da mesma maneira que com outros registradores de armazenamento de dados (página 43).

**Indireto.**  $\boxed{\text{STO}}$  ou  $\boxed{\text{RCL}} \{ \boxed{+}, \boxed{-}, \boxed{\times}, \boxed{\div} \} \boxed{\text{(i)}}$  produzem a aritmética de armazenamento ou recuperação com o registrador de armazenamento de dados endereçado pela parte inteira do conteúdo (de 0 a 65) de  $R_1$ . Veja a tabela acima.

## Intercâmbio com o Registrador X

**Direto.**  $\boxed{\text{f}} \boxed{\text{x} \rightleftharpoons} \boxed{\text{I}}$  intercambia os conteúdos dos registradores X e  $R_1$ . (Funciona da mesma maneira que  $\boxed{\text{x} \rightleftharpoons} n$  opera com os registradores 0 a .9).

**Indireto.**  $\boxed{\text{f}} \boxed{\text{x} \rightleftharpoons} \boxed{\text{(i)}}$  intercambia o conteúdo do registrador X com o do registrador de armazenamento de dados endereçado pelo conteúdo (de 0 a 65) de  $R_1$ . Veja a tabela acima.

Desvio Indireto com  $\boxed{\text{I}}$ 

A tecla  $\boxed{\text{I}}$  (mas não a tecla  $\boxed{\text{(i)}}$ ) pode ser empregada em desvios indiretos (  $\boxed{\text{GTO}} \boxed{\text{I}}$  ) e nas chamadas de sub-rotinas (  $\boxed{\text{GSB}} \boxed{\text{I}}$  ). Somente é utilizada a parte inteira do conteúdo de  $R_1$ .  $\boxed{\text{(i)}}$  somente pode ser usada para o endereçamento indireto de registradores de armazenamento.

**Desvio Indireto a Rótulos.** Se o conteúdo de  $R_1$  for *positivo*,  $\boxed{\text{GTO}} \boxed{\text{I}}$  e  $\boxed{\text{GSB}} \boxed{\text{I}}$  transferirão a execução para o *rótulo* que corresponda ao número contido em  $R_1$  (veja a tabela acima).

Por exemplo, se  $R_1$  contiver 20.00500, uma instrução  $\boxed{\text{GTO}} \boxed{\text{I}}$  transferiria a execução do programa para  $\boxed{\text{f}} \boxed{\text{LBL}} \boxed{\text{A}}$ . Veja a tabela da página 111.

**Desvio Indireto a Linhas Numeradas.** Se o conteúdo de  $R_1$  for *negativo*,  $\boxed{\text{GTO}} \boxed{\text{I}}$  e  $\boxed{\text{GSB}} \boxed{\text{I}}$  transferirão a execução para a *linha* cujo número seja a parte inteira do valor absoluto do conteúdo de  $R_1$ .

Por exemplo, se  $R_1$  contiver -20.00500, uma instrução  $\boxed{\text{GTO}} \boxed{\text{I}}$  transferiria a execução para a linha 020 do programa.

### Controle Indireto de Indicadores com $\boxed{\text{I}}$

$\boxed{\text{SF}} \boxed{\text{I}}$ ,  $\boxed{\text{CF}} \boxed{\text{I}}$  ou  $\boxed{\text{F7}} \boxed{\text{I}}$  ativarão, desativarão ou testarão o indicador (0 a 9) especificado em  $R_1$  (pela magnitude da parte inteira).

### Controle Indireto do Formato de Apresentação com $\boxed{\text{I}}$

$\boxed{\text{f}} \boxed{\text{FIX}} \boxed{\text{I}}$ ,  $\boxed{\text{f}} \boxed{\text{SCI}} \boxed{\text{I}}$ , e  $\boxed{\text{f}} \boxed{\text{ENG}} \boxed{\text{I}}$  formatam o visor da maneira usual (veja as páginas 59-60, usando o conteúdo  $n$  de  $R_1$  (apenas a parte inteira), que deverá ser de 0 a 9.\*

### Controle de Ciclos com Contadores: $\boxed{\text{ISG}}$ e $\boxed{\text{DSE}}$

As funções  $\boxed{\text{ISG}}$  (*Increment and Skip if Greater than = incrementar e saltar se for maior*) e  $\boxed{\text{DSE}}$  (*Decrement and Skip if less than or Equal to = decrementar e saltar se for menor ou igual*) controlam a execução de um ciclo pela referência e alteração de um *valor de controle do ciclo*, contido num dado registrador. A execução do programa (saltando uma linha ou não) dependerá desse valor.

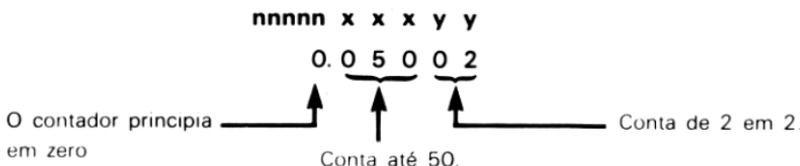
A seqüência de teclas é  $\boxed{\text{f}} \{ \boxed{\text{ISG}}, \boxed{\text{DSE}} \}$  número do registrador. Este número pode ser de 0 a 9, .0 a .9,  $\boxed{\text{I}}$  ou  $\boxed{\text{(i)}}$ .

\* Exceto ao se utilizar  $\boxed{\text{f}}$  (seção 14).

**O Valor de Controle do Ciclo.** O formato do valor de controle do ciclo é o seguinte:

**nnnnn.xxxyy**, onde  $\pm nnnnn$  é o valor atual do contador,  
**xxx** é o valor de teste (objetivo) e  
**yy** é o valor do incremento ou decremento.

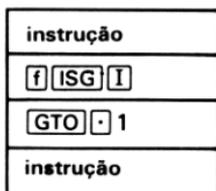
Por exemplo, o valor 0.05002, contido num registrador de armazenamento, representa:



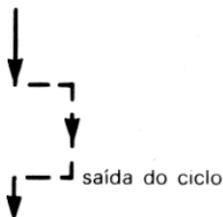
**Operação de [ISG] e [DSE].** Cada vez que um programa encontra [ISG] ou [DSE], ele incrementa ou decrementa **nnnnn** (a parte inteira do valor de controle do ciclo), fazendo dessa forma a contagem do número de iterações do ciclo. A seguir ele compara **nnnnn** com **xxx** (o valor de teste estipulado) e sai do ciclo saltando a próxima linha se o contador de ciclos (**nnnnn**) for maior ([ISG]) ou menor ou igual ([DSE]) do que o valor de teste (**xxx**). O fator de acréscimo ou decréscimo de **nnnnn** é especificado por **yy**.

Para estas funções (de maneira oposta a dos demais testes condicionais) a regra é “Salta se Verdadeiro”.

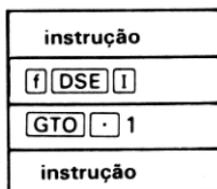
**Falso ( $nnnnn \leq xxx$ )**



**Verdadeiro ( $nnnnn > xxx$ )**



Para [ISG]: dado **nnnnn.xxxyy**, **nnnnn** passa a ser (**nnnnn + yy**), o novo valor é comparado com **xxx** e a próxima linha do programa é saltada se o novo valor satisfizer a condição **nnnnn > xxx**. Isto permite que você saia de um ciclo nesse ponto quando **nnnnn** ficar maior do que **xxx**.

Falso ( $nnnnn > xxx$ )Verdadeiro ( $nnnnn \leq xxx$ )

Para **DSE**: dado  $nnnnn.xxyy$ ,  $nnnnn$  passa a ser ( $nnnnn - yy$ ), o novo valor é comparado com  $xxx$  e a próxima linha do programa é saltada se o novo valor satisfaz a condição  $nnnnn \leq xxx$ . Isto permite que você saia de um ciclo nesse ponto quando  $nnnnn$  ficar menor ou igual a  $xxx$ .

Por exemplo, as iterações de um ciclo alterarão os valores de controle como se segue:

Iterações

Operação	0	1	2	3	4
<b>ISG</b>	0.00602	2.00602	4.00602	6.00602	8.00602 (salta a próxima linha)
<b>DSE</b>	6.00002	4.00002	2.00002	0.00002 (salta a próxima linha).	

## Exemplos

### Exemplos de Operações com Registradores

#### Armazenando e Recuperando

Pressione

Visor

f CLEAR REG

Apaga todos os registradores de armazenamento.

12.3456

12.3456

STO I

12.3456

Armazena em  $R_1$ .

Pressione	Visor	
7 $\sqrt{x}$	2.6458	
STO (i)	2.6458	Armazena em R <sub>2</sub> devido ao endereçamento indireto (R <sub>1</sub> = 12.3456).
RCL I	12.3456	Recupera o conteúdo de R <sub>1</sub> .
RCL (i)	2.6458	Recuperação indireta do conteúdo de R <sub>2</sub> .
f $x \frac{1}{x}$ .2	2.6458	Verificação: mesmo conteúdo, recuperado pelo endereçamento direto de R <sub>2</sub> .

### Intercâmbio com o Registrador X

Pressione	Visor	
f $x \frac{1}{x}$ I	12.3456	Intercambia os conteúdos dos registradores X e R <sub>1</sub> .
RCL I	2.6458	Apresenta o conteúdo de R <sub>1</sub> .
f $x \frac{1}{x}$ (i)	0.0000	Intercambia o conteúdo de R <sub>2</sub> (que é zero) com X.
RCL (i)	2.6458	
f $x \frac{1}{x}$ 2	2.6458	Verificação: endereçamento direto de R <sub>2</sub> .

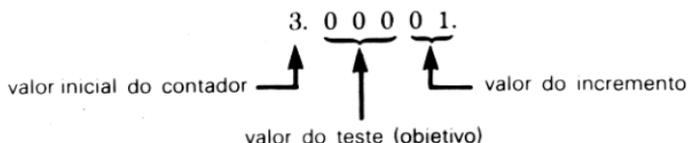
### Aritmética com Registradores de Armazenamento

Pressione	Visor	
10 STO + I	10.0000	Acrescenta 10 a R <sub>1</sub> .
RCL I	12.6458	Novo conteúdo de R <sub>1</sub> (= anterior + 10).
g $\pi$ STO + (i)	3.1416	Divide o conteúdo de R <sub>2</sub> por $\pi$ .
RCL (i)	0.8422	Novo conteúdo de R <sub>2</sub> .
f $x \frac{1}{x}$ .2	0.8422	Verificação: endereçamento direto de R <sub>2</sub> .

**Exemplo de Controle de Ciclos com DSE**

Você se recorda do programa da seção 8 que usava um ciclo para calcular o decaimento radioativo? (Veja à página 95). Esse programa usava um teste condicional ( $x \geq y?$ ) para sair do ciclo quando o resultado calculado superava um limite dado (50). Como vimos nesta seção, há outra maneira de se controlar a execução de um ciclo: através do armazenamento de um contador de ciclos monitorado pela função ISG ou DSE.

Eis uma revisão do programa original do decaimento do radiosítopo. Desta vez, iremos reduzir a 3 o número de execuções do ciclo, ao invés de especificar um determinado valor. Este exemplo usa DSE e o conteúdo de R<sub>2</sub> (3.00001) para controlar o número de iterações.



Faça as seguintes alterações no programa (assumindo-se que ele esteja na memória). Um contador de ciclos será armazenado em R<sub>2</sub> e um número de linha no registrador R<sub>1</sub>.

Pressione	Visor	
<b>g</b> P/R	000-	Modo de Programação.
<b>GTO</b> <b>CHS</b> 013	013-43,30, 9	A segunda das duas linhas de teste condicional do ciclo.
<b>←</b> <b>←</b>	011- 42 31	Elimina as linhas 013 e 012.
<b>f</b> <b>DSE</b> 2	012-42, 5, 2	Acrescenta a sua função de contagem de ciclos (o contador é armazenado em R <sub>2</sub> ).
<b>GTO</b> <b>I</b>	013- 22 25	Desvia para a linha dada (015).

Quando o contador de ciclos (armazenado em R<sub>2</sub>) chegar a zero, ele saltará a linha 013, irá para a linha 014 (a instrução RTN), encerrando o programa. Se o contador de ciclos ainda não tiver chegado a zero, a execução

prosseguirá com a linha 013. Será feito o desvio à linha 015 e o programa prosseguirá com o ciclo.

Para executar o programa, coloque  $t_1$  (dia 1) em  $R_0$ ,  $N_0$  (a quantidade inicial do isótopo) em  $R_1$ , o contador de ciclos em  $R_2$  e coloque em  $R_1$  o número da linha para a qual deverá ser feito o desvio.

Pressione	Visor	Modo de Execução
<b>g</b> <b>P/R</b>		$t_1$ .
<b>2</b> <b>STO</b> <b>0</b>	<b>2.0000</b>	$N_0$
<b>100</b> <b>STO</b> <b>1</b>	<b>100.0000</b>	Contador de ciclos. (Esta instrução também poderia ter sido programada).
<b>3.00001</b> <b>STO</b> <b>2</b>	<b>3.0000</b>	
<b>15</b> <b>CHS</b> <b>STO</b> <b>I</b>	<b>-15.0000</b>	Número da linha para a qual deverá ser feito o desvio.
<b>f</b> <b>A</b>	<b>2.0000</b>	Execução do programa: contador de ciclos = 3.
	<b>84.0896</b>	
	<b>5.0000</b>	Contador de ciclos = 2.
	<b>64.8420</b>	
	<b>8.0000</b>	Contador de ciclos = 1.
	<b>50.0000</b>	
	<b>50.0000</b>	Contador de ciclos = 0; fim do programa.

### Exemplo de Controle do Formato de Apresentação no Visor

O programa dado a seguir faz uma pausa e apresenta um exemplo do formato de apresentação **FIX** para cada casa decimal possível. Ele utiliza um ciclo contendo uma instrução **DSE** para alterar automaticamente o número de casas decimais.

#### Pressione

**g** **P/R**

**f** **CLEAR** **PRGM**

**f** **LBL** **B**

**Pressione**

9

**nnnnn** = 9. Além disso, **xxx** = 0 e, por definição, **yy** = 1 (**yy** não pode ser zero.).

[STO] I

f [LBL] 0

f [FIX] I

[RCL] I

f [PSE]

f [DSE] I

Apresenta o valor atual de **nnnnn**.

O conteúdo de **R<sub>1</sub>** é decrementado e testado. Salta uma linha se **nnnnn** ≤ valor de teste.

[GTO] 0

Prossegue no ciclo se **nnnnn** > valor de teste (0).

g [TEST] 1

[GTO] 0

Verifica se o conteúdo do visor é maior do que zero, de modo que o ciclo prosseguirá até **nnnnn** chegar a 0 (mesmo assim, o visor somente apresentará 1.0).

g [RTN]

Para apresentar, em notação de ponto fixo, todas as casas decimais possíveis da HP-15C:

**Pressione**

g [P/R]

f [B]

**Visor**

Modo de Execução.

9.000000000

8.000000000

7.000000000

6.0000000

5.0000000

4.0000000

3.0000000

2.0000000

1.0000000

0.0000000

0.0000000

Apresentação quando  
f [PSE] é executada.

Apresentação quando o  
programa pára.

## Informações Adicionais

### Conteúdo do Registrador de Indexação

Qualquer valor armazenado no registrador  $R_1$  pode ser referenciado de três maneiras distintas:

- Usando-se  $\boxed{I}$  como qualquer outro registrador de armazenamento. O valor em  $R_1$  pode ser armazenado, recuperado, intercambiado, somado, etc.
- Usando-se  $\boxed{I}$  como um valor de controle. O valor absoluto da parte inteira do conteúdo de  $R_1$  é uma entidade independente da parte fracionária. Somente essa entidade de  $\boxed{I}$  será empregada nas operações de desvio indireto, controle de indicadores e no controle do formato de apresentação (desde que essas três funções utilizem  $\boxed{I}$ ). No controle de ciclos, a parte fracionária, é também utilizada, mas isoladamente da parte inteira.\*
- Usando-se  $\boxed{(I)}$  como uma referência ao conteúdo de outro registrador de armazenamento. A tecla  $\boxed{(I)}$  utiliza o sistema de endereçamento indireto apresentado nas tabelas das páginas 110 e 111. (O conteúdo do segundo registrador poderá ser utilizado como um valor de controle de ciclos, da maneira descrita acima).

$\boxed{ISG}$  e  $\boxed{DSE}$

Para o controle de ciclos, a parte inteira (o valor do contador) do valor de controle armazenado pode ter até 5 dígitos ( $nnnnn.xxxyy$ ). O valor do contador ( $nnnnn$ ), se não for especificado, será adotado como nulo.

$xxx$ , a parte decimal do valor de controle, *deve* ser especificada como um número de 3 dígitos (por exemplo, "5" deveria ser especificado como "005"). Se não for especificado,  $xxx$  será adotado como nulo. Toda vez que  $\boxed{ISG}$  ou  $\boxed{DSE}$  forem encontradas,  $nnnnn$  será comparado internamente com  $xxx$ , e nesse momento será processada a operação de acréscimo ou decréscimo.

$yy$  *deve* ser especificado como um número de 2 dígitos.  $yy$  *não pode ser nulo*, de modo que se ocorrer o fato de  $yy$  ser especificado como tal,  $yy$  *assumirá o valor 1 pré-definido* ("default"). O valor de  $nnnnn$  é alterado de  $yy$  a cada

---

\* Também é verdade para o valor de *qualquer* registrador de armazenamento utilizado no controle indireto de ciclos.

iteração que execute [ISG] ou [DSE]. Tanto **yy** como **xxx** são valores de referência, que *não* são afetados pela execução do ciclo.

## Controle Indireto do Visor

Embora você possa utilizar o registrador R<sub>1</sub> para formatar a apresentação do visor manualmente (ou seja, pelo teclado), esta função é mais comumente utilizada em programação. Este recurso é particularmente útil para a função [F], cuja precisão pode ser estipulada através da especificação do número de dígitos a serem apresentados no visor (maiores detalhes serão dados na seção 14).

Existem, como sempre, certas restrições do visor que devem ser lembradas. Não se esqueça de que qualquer função que afeta o formato de apresentação no visor simplesmente altera o número de casas decimais para as quais o valor apresentado será arredondado. Na memória da calculadora o número é sempre mantido na notação científica, como uma mantissa de 10 dígitos e um expoente de dois dígitos.

A parte inteira do conteúdo de R<sub>1</sub> especifica o número de casas decimais para as quais o número será arredondado no visor. Se for negativo, ele será adotado como nulo (com zero casas decimais no formato [FIX]); se for maior do que 9, será adotado como 9 (com 9 casas decimais no formato [FIX]).\*

Uma exceção é o caso de [F], onde o conteúdo de R<sub>1</sub> pode variar de -6 a +9. (Na página 247 do Apêndice E são dados maiores detalhes). Um valor menor do que zero não afetará o formato de apresentação, mas afetará a precisão dessa função.

---

\* Observe que nos modos de apresentação [SCI] e [ENG], o maior número que pode ser apresentado é uma mantissa de 7 dígitos com um expoente de 2 dígitos. No entanto, a especificação de um formato acima de 6 (e menor ou igual a 9) afetará a casa decimal na qual ocorrerá o arredondamento (Veja maiores detalhes nas páginas 59 e 60).

# Parte III

## Funções Avançadas da HP-15C



## Cálculos com Números Complexos

A HP-15C permite que você calcule com números complexos, ou seja, com números da forma

$$a + ib,$$

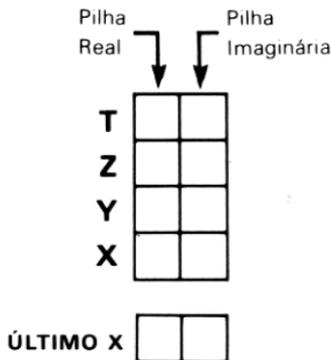
onde  $a$  é a parte real do número complexo,  
 $b$  é a parte imaginária do número complexo e

$$i = \sqrt{-1}.$$

Como você verá, a beleza de se calcular com a HP-15C no Modo Complexo pode ser evidenciada pelo fato de que após sua introdução, os números complexos podem ser tratados da mesma maneira que os números reais.

### A Pilha Operacional Complexa e o Modo Complexo

Os cálculos com números complexos são realizados através de uma pilha operacional complexa, composta de *duas* pilhas paralelas, com quatro registradores cada (e dois registradores ÚLTIMO X). Uma dessas pilhas operacionais paralelas, que doravante será denominado *pilha real*, contém as partes reais dos números complexos usados nos cálculos. (É a mesma pilha operacional utilizada nos cálculos comuns). A outra pilha operacional, que doravante será denominada *pilha imaginária*, contém as partes imaginárias dos números complexos usados nos cálculos.



#### Criando a Pilha Operacional Complexa

A pilha imaginária é criada pela conversão de 5 registradores de armazenamento (como será visto no Apêndice C) quando você ativa o Modo Complexo; ela não existe quando a calculadora não está no Modo Complexo.

## O Modo Complexo é ativado

- 1) automaticamente, ao se executar  $\boxed{f} \boxed{I}$  ou  $\boxed{f} \boxed{\text{Re}\Im}$ ; ou
- 2) ativando-se o indicador 8 (o indicador do Modo Complexo).

Quando a calculadora está no Modo Complexo, o anúncio C fica aceso no visor. Por seu intermédio você fica sabendo que o indicador 8 está ativado e que a pilha operacional complexa existe. Dentro ou fora do Modo Complexo, o que aparecer no visor será o conteúdo do registrador X real.

**Observação:** No Modo Complexo (denunciado pelo anúncio C do visor), a HP-15C realiza todas as funções trigonométricas em *radianos*. O anúncio do modo trigonométrico (**RAD**, **GRAD**, ou em branco para *Graus*) se aplica somente a duas funções:  $\boxed{\rightarrow R}$  e  $\boxed{\rightarrow P}$  (como veremos mais adiante, ainda nesta seção).

## Desativando o Modo Complexo

Desde que o Modo Complexo requer a alocação de 5 registradores da memória, você disporá de mais memória para programação e para as funções avançadas se desativar o Modo Complexo quando estiver trabalhando somente com números reais.

Para desativar o Modo Complexo, apague o indicador 8 (seqüência de teclas:  $\boxed{g} \boxed{CF} \boxed{8}$ ). O anúncio C desaparecerá.

O Modo Complexo também é desativado quando a Memória Contínua é apagada (como já vimos na página 64). Neste caso, ao se desativar o Modo Complexo, dissolve-se a pilha imaginária e todos os números imaginários são perdidos.

# Números Complexos e a Pilha Operacional

## Introduzindo Números Complexos

Para introduzir um número que tenha partes real e imaginária:

1. Introduza no visor a parte real do número.
2. Pressione  $\boxed{\text{ENTER}}$ .
3. Introduza no visor a parte imaginária do número.
4. Pressione  $\boxed{f} \boxed{I}$ . (Se você ainda não tiver ativado o Modo Complexo, esta seqüência de teclas criará a pilha imaginária, apresentando o anúncio C no visor).

**Exemplo:** Some  $2 + 3i$  e  $4 + 5i$ . (As operações estão ilustradas nos diagramas das pilhas que seguem a listagem das instruções).

Pressione	Visor	
<b>f</b> <b>FIX</b> 4		
2 <b>ENTER</b>	2.0000	Introduz a parte real do primeiro número no registrador (real) Y.
3	3	Introduz a parte imaginária do primeiro número no registrador (real) X.
<b>f</b> <b>I</b>	2.0000	Cria a pilha imaginária; move 3 para o registrador imaginário X e desce o 2 para o registrador real X.
4 <b>ENTER</b>	4.0000	Introduz a parte real do segundo número no registrador (real) Y.
5	5	Introduz a parte imaginária do segundo número no registrador (real) X.
<b>f</b> <b>I</b>	4.0000	Copia o 5 do registrador real X no registrador imaginário X, copia o 4 do registrador real Y no registrador real X e desce o conteúdo da pilha operacional.
<b>+</b>	6.0000	Parte real da soma.
<b>f</b> <b>(i)</b> (mantenha-a pressionada)	8.0000	Apresenta a parte imaginária da soma enquanto a tecla <b>(i)</b> for mantida pressionada. (Esta operação também encerra a introdução de dígitos).
(solte-a)	6.0000	

A operação das pilhas real e imaginária durante esse processo é ilustrada abaixo. (Assuma que os registradores da pilha já tenham sido carregados com os resultados dos cálculos anteriores). Observe que a pilha

imaginária, que é apresentada a seguir, à direita da pilha real, não é criada até **f I** serem pressionadas. (Observe também que os registradores sombreados da pilha indicam que seu conteúdo será sobre-escrito quanto o próximo número for introduzido ou recuperado).

	Re	Im								
T	9		8		7		7		7	0
Z	8		7		6		6		7	0
Y	7		6		2		2		6	0
X	6		2		2		3		2	3

Teclas:

2

**ENTER**

3

**f I**

A execução de **f I** faz com que todo o conteúdo da pilha operacional desça, o conteúdo de T seja duplicado e que o conteúdo de X real se mova para o registrador X imaginário.

Quando o segundo número complexo é introduzido, a pilha operacional opera da maneira apresentada abaixo. Observe que **ENTER** eleva o conteúdo de *ambas* as pilhas.

	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im
T	7	0	7	0	6	0	6	0
Z	7	0	6	0	2	3	2	3
Y	6	0	2	3	4	0	4	0
X	2	3	4	0	4	0	5	0

Teclas:

4

**ENTER**

5

	Re	Im	Re	Im	Re	Im
T	6	0	6	0	6	0
Z	2	3	6	0	6	0
Y	4	0	2	3	6	0
X	5	0	4	5	6	8

Teclas:

**f I****+**

Um segundo método de introdução de números complexos é introduzir a parte imaginária em 1º lugar e então usar  $\boxed{\text{Re}\Im}$  e  $\boxed{\leftarrow}$ . Este método está ilustrado na página 129 sob o título Introduzindo Números Complexos com  $\boxed{\leftarrow}$ .

## Movimentação da Pilha Operacional no Modo Complexo

A manipulação da pilha operacional opera a pilha imaginária da mesma forma que a pilha real (a pilha real se comporta de maneira idêntica, esteja o Modo Complexo em vigor ou não). *As mesmas funções que ativam, desativam ou são neutras com relação à subida do conteúdo da pilha operacional real se comportam de maneira idêntica com relação à pilha imaginária.* (Estes processos são explicados em detalhe na seção 3 e no Apêndice B).

Além disso, *toda função não neutra (exceto  $\boxed{\leftarrow}$  e  $\boxed{\text{CLx}}$ ) apagará o conteúdo do registrador X imaginário, quando o próximo número for introduzido.* Ou seja, tais funções colocam um zero no registrador X imaginário *quando o próximo número é introduzido ou recuperado.* Este caso é ilustrado nos diagramas acima. Este recurso permite que você execute as operações da calculadora com as mesmas seqüências de teclas que você emprega fora do Modo Complexo.\*

## Manipulando as Pilhas Operacionais Real e Imaginária

$\boxed{\text{Re}\Im}$  (REal exchAnge IMaginary = intercâmbio entre o X real e o X imaginário) Pressionando  $\boxed{f}$   $\boxed{\text{Re}\Im}$  se intercambia os conteúdos dos registrador X real e imaginário, convertendo dessa forma, a parte imaginária do número na parte real e vice-versa. Os registradores Y, Z e T não são afetados. Pressione  $\boxed{f}$   $\boxed{\text{Re}\Im}$  duas vezes para restaurar a forma original de um dado número.

$\boxed{\text{Re}\Im}$  também ativa o Modo Complexo, se este não estiver em vigor.

**Apresentação Temporária do Registrador X Imaginário.** Pressione  $\boxed{f}$   $\boxed{(i)}$  para apresentar *momentaneamente* no visor a parte imaginária do valor contido no registrador X *sem intercambiar as partes real e imaginária.* Mantenha a tecla pressionada enquanto desejar apresentar o número.

## Trocando os Sinais

No Modo Complexo, a função  $\boxed{\text{CHS}}$  afeta apenas o conteúdo do registrador X real; o conteúdo do registrador X imaginário não é afetado.

\* Exceto para as funções  $\boxed{\Phi}$  e  $\boxed{\Psi}$ , como já vimos nesta seção (na página 136).

Isto permite que você troque o sinal das partes real ou imaginária sem afetar ambas ao mesmo tempo. Para introduzir a parte real (ou imaginária) negativa, troque o sinal dessa parte ao introduzi-la.

Se você desejar calcular a aditiva inversa de um número complexo que *ainda esteja no registrador X*, basta pressionar **[CHS]**, como você faria se não estivesse no Modo Complexo. Outra possibilidade seria a seguinte:

- Multiplique por -1.
- Se você não desejar afetar o restante da pilha, pressione **[CHS]**  
**f [Re]Im [CHS] f [Re]Im**.

Para trocar o sinal de apenas uma parte de um número complexo, no registrador X:

- Pressione **[CHS]** para trocar somente o sinal *da parte real*.
- Pressione **f [Re]Im [CHS] f [Re]Im** para trocar *somente o sinal da parte imaginária*, formando o complexo conjugado.

## Zerando um Número Complexo

É inevitável que surja a necessidade de se zerar um número complexo. Você pode zerar apenas uma parte de cada vez, mas deverá então escrever sobre ambas as partes (pois **[←]** e **[CLx]** desativam a pilha).

**Zerando o Registrador X Real.** Pressionando **[←]** (ou **g [CLx]**) no Modo Complexo, apaga-se apenas o conteúdo do registrador X real; esse processo *não* apaga o conteúdo do registrador X imaginário.

**Exemplo:** Altere  $6 + 8i$  para  $7 + 8i$  e subtraia o resultado da introdução anterior. (Use **f [Re]Im** ou **f [i]** para visualizar a parte imaginária em X). Assuma que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  representam partes de números complexos.

	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im
T	a	b	a	b	a	b	a	b
Z	c	d	c	d	c	d	a	b
Y	6	0	6	0	6	0	c	d
X	6	8	0	8	7	8	-1	-8

Teclas:



7



(ou outra  
operação  
qualquer)

Como a operação de apagar desativa a pilha operacional (como vimos acima) o próximo número que você introduzir substituirá o valor zerado. Se você desejar substituir a parte real por zero, após apagar, use **ENTER** ou qualquer outra função, para encerrar a introdução de dígitos (caso contrário, o próximo número que você introduzir será escrito sobre o zero); a parte imaginária permanecerá inalterada. Você pode então prosseguir com qualquer função da calculadora.

**Zerando o Registrador X Imaginário.** Para apagar o conteúdo do registrador X imaginário, pressione **f** **ReIm**, e então pressione **←**. Pressione **f** **ReIm** mais uma vez, para zerar ou introduza um novo número no registrador X imaginário

**Exemplo:** Substitua  $-1 - 8i$  por  $-1 + 5i$

	Re	Im								
<b>T</b>	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
<b>Z</b>	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d
<b>Y</b>	e	f	e	f	e	f	e	f	e	f
<b>X</b>	-1	-8	-8	-1	0	-1	5	-1	-1	5

Teclas:      **ReIm**      **←**      5      **ReIm**

(prossiga com  
uma operação  
qualquer)

**Zerando os Registradores X Real e Imaginário.** Se você desejar apagar ou substituir *ambas* as partes real e imaginária do conteúdo do registrador X, basta pressionar **←** (desativando a pilha operacional) e introduza o seu novo número. (Introduza zeros se você desejar zerar o registrador X). Se o novo número for um real puro (inclusive  $0 + 0i$ ), uma maneira rápida de se apagar ou substituir o conteúdo complexo anterior é pressionar **R↓** seguida por zero ou pelo novo número real.

**Exemplo:** Substitua  $-1 + 5i$  por  $4 + 7i$

	Re	Im								
T	a	b	a	b	c	d	c	d	c	d
Z	c	d	c	d	e	f	e	f	c	d
Y	e	f	e	f	4	5	4	5	e	f
X	-1	5	0	5	4	5	7	0	4	7

Teclas:      ◀      4    **ENTER**      7      **f** **I**  
 (prossiga com uma operação qualquer)

**Introduzindo Números Complexos com** ◀ . As funções ◀ e **CLx**, normalmente usadas para apagar, também podem ser empregadas com **ReIm** como uma alternativa para se introduzir (e apagar) números complexos. Com este método, você pode introduzir um número complexo usando apenas o registrador X, sem afetar o restante da pilha operacional. (Isto é possível porque ◀ e **CLx** desativam a subida do conteúdo da pilha operacional). Ao se executar **ReIm** também se estará criando a pilha imaginária, se ela ainda não existir.

**Exemplo:** Introduza  $9 + 8i$  sem mover o conteúdo da pilha operacional e então calcule seu quadrado.

Pressione	Visor	
<b>(◀)</b>	<b>(0.0000)</b>	Evita que o conteúdo da pilha operacional suba quando o próximo dígito (8) for introduzido. Omite este passo se você desejar preservar o que estava em X e perder o que estava em T.
8	8	Primeiramente introduza a parte imaginária.
<b>f</b> <b>ReIm</b>	<b>7.0000</b>	Apresenta a parte real; o Modo Complexo é ativado.
<b>◀</b>	<b>0.0000</b>	Desativa a pilha operacional. (Caso contrário, o conteúdo subiria depois de <b>ReIm</b> ).

**Pressione****Visor**

9

9

Introduz a parte real (a introdução de dígitos não é encerrada).

 $\boxed{g} \boxed{x^2}$ 

17.0000

Parte real.

$\boxed{f} \boxed{(i)}$  (mantenha-a pressionada)  
(solte-a)

144.0000

Parte imaginária.

17.0000

	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im
T	a	b	a	b	a	b	a	b
Z	c	d	c	d	c	d	c	d
Y	e	f	e	f	e	f	e	f
X	4	7	0	7	8	7	7	8

Teclas:

 $\boxed{\leftarrow}$ 

8

 $\boxed{f} \boxed{\text{Re} \Im}$ 

	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im
T	a	b	a	b	a	b	a	b
Z	c	d	c	d	c	d	c	d
Y	e	f	e	f	e	f	e	f
X	7	8	0	8	9	8	17	144

Teclas:

 $\boxed{\leftarrow}$ 

9

 $\boxed{g} \boxed{x^2}$ 

## Introduzindo um Número Real

Você já viu duas maneiras de introduzir um número complexo. Há uma maneira mais rápida de se introduzir um número real: basta introduzi-lo (ou recuperá-lo) no visor, como você faria se a calculadora não estivesse no Modo Complexo. Como você já viu, será colocado um zero no registrador X imaginário (desde que a operação anterior não tenha sido  $\boxed{\leftarrow}$  nem  $\boxed{\text{CLx}}$ , como foi explicado à página 126).

A operação das pilhas real e imaginária, durante o processo, é ilustrada abaixo. (O exemplo presume que a última tecla pressionada não tenha sido ◀ nem **CLx** e que o conteúdo é o remanescente do exemplo anterior).

	Re	Im
<b>T</b>	<i>a</i>	<i>b</i>
<b>Z</b>	<i>c</i>	<i>d</i>
<b>Y</b>	<i>e</i>	<i>f</i>
<b>X</b>	17	144

	Re	Im
	<i>c</i>	<i>d</i>
	<i>e</i>	<i>f</i>
	17	144
	4	0

	Re	Im
	<i>e</i>	<i>f</i>
	17	144
	4	0
	4	0

Teclas:

4

**ENTER**

(Seguida por um outro número).

### Introduzindo Um Número Imaginário Puro

Existe uma maneira mais abreviada para a introdução de um número imaginário puro no registrador X, quando você ainda está no Modo Complexo: introduza o número (imaginário) e pressione **f** **Re $\rightarrow$ Im**.

**Exemplo:** Introduza  $0 + 10i$  (presumindo-se que a última função executada não tenha sido ◀ nem **CLx**).

**Pressione****Visor**

10

10

Introduz 10 no registrador X real, apresentado no visor, e zero no registrador X imaginário.

**f** **Re $\rightarrow$ Im**

0.0000

Intercambia os conteúdos dos registradores X real e imaginário. O visor novamente mostra o conteúdo do registrador X real é zero (como deveria ser para um número imaginário puro).

A operação das pilhas real e imaginária durante este processo é ilustrada abaixo. (Presume que os registradores da pilha operacional contém os números remanescentes do exemplos anteriores).

	Re	Im
T	<i>e</i>	<i>f</i>
Z	17	144
Y	4	0
X	4	0

	Re	Im
T	<i>e</i>	<i>f</i>
Z	17	144
Y	4	0
X	10	0

	Re	Im
T	<i>e</i>	<i>f</i>
Z	17	144
Y	4	0
X	0	10

**Teclas:** 10 f Re $\leftrightarrow$ Im (Pressiga com uma operação qualquer).

Observe que pressionando f Re $\leftrightarrow$ Im simplesmente se intercambia os valores dos *registradores X* real e imaginário, e *não* os demais registradores das pilhas.

### Armazenando e Recuperando Números Complexos

As funções STO e RCL agem *somente no registrador X real*; dessa forma, a parte imaginária de um número complexo deve ser armazenada ou recuperada separadamente. As seqüências de teclas para tanto podem ser introduzidas como parte de um programa e executadas automaticamente\*.

Para armazenar em  $R_1$  e  $R_2$  o conteúdo  $a + ib$  do registrador  $X$  complexo, use a seqüência

STO 1 f Re $\leftrightarrow$ Im STO 2

Você pode analisar esta operação, usando f Re $\leftrightarrow$ Im para devolver a pilha à sua condição original (se você desejar). Para recuperar  $a = ib$  de  $R_1$  e  $R_2$ , você pode usar a seqüência

RCL 1 RCL 2 f I

Se você não quiser afetar os demais registradores da pilha operacional, recupere o número com a seqüência

RCL 2 f Re $\leftrightarrow$ Im ← RCL 1.

(No Modo de Programação, use g CLx ao invés de ←).

\* Você pode utilizar as funções de matrizes da HP-15C, que serão vistas na seção 12, para armazenar e recuperar números complexos de maneira mais conveniente. Ao dimensionar uma matriz  $n \times 2$ ,  $n$  números complexos podem ser armazenados como linhas da matriz.

## Operações com Números Complexos

A maioria das funções que podem ser aplicadas aos *números reais* darão a mesma resposta quando aplicadas no Modo Complexo ou fora deste\*, *presumindo-se que o resultado também seja real*. Em outras palavras, o Modo Complexo não restringe sua habilidade de cálculo com números reais.

Toda função que não for mencionada a seguir ou no restante desta seção (Cálculos com Números Complexos) ignora a pilha complexa.

### Funções de Um Número

As funções relacionadas a seguir operam tanto com a parte real como com a parte imaginária do valor contido no registrador X, colocando as partes real e imaginária da resposta de volta a esses registradores.

$\sqrt{x}$   $x^2$  LN LOG  $1/x$   $10^x$   $e^x$  ABS  $\rightarrow P$   $\rightarrow R$

Todas as funções trigonométricas, hiperbólicas e suas inversas também fazem parte desse grupo .

A função  $\boxed{\text{ABS}}$  dá a magnitude do conteúdo dos registradores X (a raiz quadrada da soma dos quadrados das partes real e imaginária); a parte imaginária da magnitude é zero.

$\boxed{\rightarrow P}$  converte à forma polar e  $\boxed{\rightarrow R}$  converte à forma retangular, como será descrito um pouco mais adiante, ainda nesta seção (página 136).

Para as funções trigonométricas, a calculadora considera os valores dos registradores X real e imaginário expressos em *radianos*, independentemente do Modo Trigonométrico em vigor. Para calcular as funções trigonométricas para valores em graus, use  $\boxed{\rightarrow \text{RAD}}$  para convertê-los a radianos antes de executar a função trigonométrica.

### Funções de Dois Números

As funções relacionadas a seguir operam tanto com a parte real como com a parte imaginária dos valores contidos nos registradores X e Y, colocando as partes real e imaginária da resposta nos registradores X. O conteúdo das duas pilhas descerá, da mesma maneira que na pilha operacional comum, quando é executada uma função de dois números *fora* do Modo Complexo.

\* As exceções são  $\boxed{\rightarrow P}$  e  $\boxed{\rightarrow R}$  , que operam de maneira diferente no Modo Complexo, para facilitar a conversão de números complexos à forma polar (página 136).



## Funções para Manipulação da Pilha Operacional

Quando a calculadora está no Modo Complexo, as funções relacionadas a seguir manipulam simultaneamente as pilhas real e imaginária, da mesma maneira que a pilha operacional comum, quando a calculadora não está no Modo Complexo.

Por exemplo, a função  $\boxed{x \rightleftharpoons y}$  intercambiará as *duas* partes reais e imaginárias dos valores contidos nos registradores X e Y.



## Testes de Condição

Em programação, os quatro testes condicionais relacionados abaixo funcionarão de acordo com o senso complexo:  $\boxed{x=0}$  e  $\boxed{\text{TEST} 0}$  comparam o valor *complexo* contido nos registradores (real e imaginário) X com  $0 + 0i$ , enquanto que  $\boxed{\text{TEST} 5}$  e  $\boxed{\text{TEST} 6}$  comparam os valores *complexos* contidos nos registradores (real e imaginário) X e Y. Todos os demais testes condicionais, com exceção dos seguintes, ignoram a pilha operacional:

$$\boxed{x=0} \quad \boxed{\text{TEST} 0} (x \neq 0) \quad \boxed{\text{TEST} 5} (x = y) \quad \boxed{\text{TEST} 6} (x \neq y)$$

**Exemplo: Aritmética com Números Complexos.** A impedância característica de uma rede em escada é dada por uma equação do tipo

$$Z_0 = \sqrt{\frac{A}{B}},$$

onde  $A$  e  $B$  são números complexos. Calcule  $Z_0$  para os valores hipotéticos de  $A = 1.2 + 4.7i$  e  $B = 2.7 + 3.2i$

Pressione

Visor

1.2  $\boxed{\text{ENTER}}$  4.7  $\boxed{f}$   $\boxed{I}$

1.2000

Introduz  $A$  nos registradores X (real e imaginário).

<b>Pressione</b>	<b>Visor</b>	
2.7 <b>ENTER</b> 3.2 <b>f</b> <b>I</b>	<b>2.7000</b>	Introduz $B$ nos registradores $X$ (real e imaginário), movendo $A$ para os registradores $Y$ (real e imaginário).
<b>÷</b>	<b>1.0428</b>	Calcula $A/B$ .
<b>√x</b>	<b>1.0491</b>	Calcula $Z_0$ e apresenta a parte real.
<b>f</b> <b>(i)</b> (mantenha-a pressionada)	<b>0.2406</b>	Apresenta a parte imaginária de $Z_0$ , enquanto <b>(i)</b> for mantida pressionada.
(solte-a)	<b>1.0491</b>	Volta a apresentar a parte real de $Z_0$ .

## Resultados Complexos a Partir de Números Reais

Nos exemplos precedentes, a introdução de números complexos asseguravam a ativação (automática) do Modo Complexo. Poderão ocorrer situações, no entanto, em que você precisará do Modo Complexo para realizar certas operações sobre números reais, tal como  $\sqrt{-5}$ . (sem o Modo Complexo, tal função resultaria na mensagem **Error 0**, em decorrência da tentativa da realização de uma operação matemática imprópria). Para ativar o Modo Complexo a qualquer instante e sem afetar o conteúdo da pilha operacional, ative o indicador 8 antes de executar a função em questão\*.

**Exemplo:** O arco-seno ( $\text{sen}^{-1}$ ) de 2.404 normalmente resultaria na mensagem **Error 0**. Presumindo que 2.404 esteja no registrador  $X$ , o valor complexo do arco-seno de 2.404 pode ser calculado assim:

<b>Pressione</b>	<b>Visor</b>	
<b>g</b> <b>SF</b> 8		Ativa o Modo Complexo.
<b>g</b> <b>SIN<sup>-1</sup></b>	<b>1.5708</b>	Parte real do arco-seno de 2.404.

\* Pressionando **f** **ReIm** 2 vezes se obterá o mesmo resultado. A seqüência **f** **I** não é usada porque poderia combinar eventuais valores contidos nos registradores  $X$  e  $Y$  reais formando um único número complexo.

Pressione

Visor

f (i) (mantenha-a  
pressionada)

-1.5239

Parte imaginária do  
arco-seno de 2.404.

(solte-a)

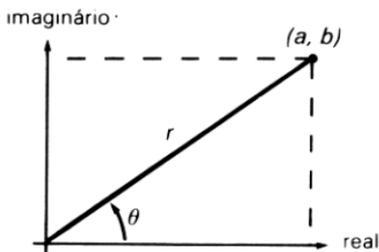
1.5708

Apresenta novamente a  
parte real quando (i) é  
solta.

## Conversões de Coordenadas Polares e Retangulares

Em muitas aplicações, costuma-se representar números complexos na forma polar, usando-se algumas vezes a notação fasorial. No entanto, a HP-15C assume que qualquer número complexo esteja na forma *retangular*. É por isso que os números nas formas polar ou fasorial devem ser convertidos à forma retangular para que possam ser tratados no Modo Complexo.

$$a + ib = \begin{cases} r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = re^{i\theta} & \text{(polar)} \\ r \angle \theta & \text{(fasorial)} \end{cases}$$



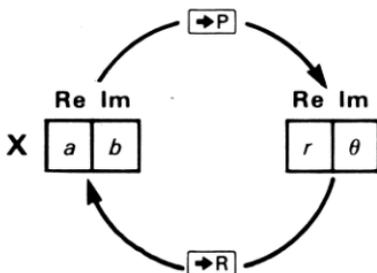
$\boxed{\rightarrow R}$  e  $\boxed{\rightarrow P}$  podem ser usados para se converter um número complexo da forma polar na forma retangular (e vice-versa). No *Modo Complexo*, eles operam assim:

 $\boxed{f \rightarrow R}$ 

converte a forma polar (ou fasorial) de um número complexo à sua forma retangular, substituindo a magnitude  $r$  do registrador X real por  $a$ , e substituindo o ângulo  $\theta$  do registrador X imaginário por  $b$ .



converte as coordenadas retangulares de um número complexo à forma polar (ou fasorial), substituindo a parte real  $a$  contida no registrador X real por  $r$ , e substituindo a parte imaginária  $b$  do registrador X imaginário por  $\theta$ .



Estas são as únicas funções do Modo Complexo que são afetadas pelo Modo Trigonométrico em vigor. Ou seja, as unidades angulares de  $\theta$  devem corresponder ao Modo Trigonométrico indicado pelo anúncio (ou pela ausência do anúncio).

**Exemplo:** Calcule a soma  $2(\cos 65^\circ + i \sin 65^\circ) + 3(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$  e expresse o resultado na forma polar. (Na notação fasorial calcule  $2 \angle 65^\circ + 3 \angle 40^\circ$ ).

**Pressione**

**Visor**

**[g] DEG**

Ativa o Modo Graus para qualquer conversão polar-retangular.

2 **[ENTER]**

2.0000

65 **[f] I**

2.0000

O anúncio C é apresentado no visor; O Modo Complexo está ativado.

**[f] →R**

0.8452

Converte de polar a retangular; a parte real ( $a$ ) é apresentada.

3 **[ENTER]**

3.0000

40 **[f] I**

3.0000

**[f] →R**

2.2981

Converte de polar a retangular; a parte real ( $a$ ) é apresentada.

## Pressione

$\boxed{+}$   
 $\boxed{g} \rightarrow \boxed{P}$

$\boxed{f} \boxed{(i)}$  (mantenha-a  
 pressionada)  
 (solte-a)

## Visor

**3.1434**  
**4.8863**

Converte de retangular a  
 polar;  $r$  é apresentado.

**49.9612**  
**4.8863**

$\theta$  (em graus).

## Problemas

Ao resolver os problemas dados a seguir, você verá que o cálculo com números complexos na HP-15C é tão fácil quanto o cálculo com números reais. De fato, assim que seus números forem introduzidos, a maioria das operações matemáticas empregarão exatamente a mesma seqüência de teclas. Tente e comprove!

1. Calcule

$$\frac{2i(-8 + 6i)^3}{(4 - 2\sqrt{5}i)(2 - 4\sqrt{5}i)}$$

## Pressione

2  $\boxed{f} \boxed{\text{Re} \boxed{I} \boxed{m}}$

8  $\boxed{\text{CHS}} \boxed{\text{ENTER}}$

6  $\boxed{f} \boxed{I}$

3  $\boxed{y^x}$

$\boxed{\times}$

4  $\boxed{\text{ENTER}}$

5  $\boxed{\sqrt{x}}$

2  $\boxed{\text{CHS}} \boxed{\times}$

$\boxed{f} \boxed{I}$

$\boxed{+}$

2  $\boxed{\text{ENTER}}$  5  $\boxed{\sqrt{x}}$

4  $\boxed{\text{CHS}} \boxed{\times}$

$\boxed{f} \boxed{I}$

$\boxed{+}$

$\boxed{f} \boxed{(i)}$

## Visor

**0.0000**

**-8.0000**

**-8.0000**

**352.0000**

**-1,872.0000**

**4.0000**

**2.2361**

**-4.4721**

**4.0000**

**-295.4551**

**2.2361**

**-8.9443**

**2.0000**

**9.3982**

**-35.1344**  
**9.3982**

2i. O visor apresenta a  
 parte real.

$-8 + 6i$ .

$(-8 + 6i)^3$ .

$2i(-8 + 6i)^3$ .

$-2\sqrt{5}$ .

$4 - 2\sqrt{5}i$ .

$\frac{2i(-8 + 6i)^3}{4 - 2\sqrt{5}i}$ .

$2 - 4\sqrt{5}i$ .

Parte real do resultado

Resposta:  $9.3982 - 35.1344i$ .

2. Escreva um programa para calcular a função  $\omega = \frac{2z + 1}{5z + 3}$  para diferen-

76s valores de  $z$ . ( $\omega$  representa uma transformação fracionária linear, um tipo de transformação conforme). Calcule  $\omega$  para  $z = 1 + 2i$ .

(Resposta:  $0.3902 + 0.0122i$ . Uma possível seqüência de teclas é:

**f** **LBL** **A** **ENTER** **ENTER** **2** **x** **1** **+** **x** **z** **y** **5** **x** **3** **+** **÷** **R/S**  
**f** **ReIm** **g** **RTN**.)

3. Tente resolver um polinômio complexo e refaça o exemplo da página 81. Você pode utilizar o mesmo programa para calcular  $P(z) = 5z^4 + 2z^3$  onde  $z$  é um número complexo qualquer.

Carregue a pilha operacional com  $z = 7 + 0i$  e veja se você obtém o mesmo resultado do exemplo da página 81.

(Resposta:  $12,691.0000 + 0.0000i$ ).

Execute o programa agora para  $z = 1 + i$ .

(Resposta:  $-24.0000 + 4.0000i$ ).

## Calculando com Matrizes

A HP-15C permite que você faça cálculos com matrizes, facilitando a manipulação de problemas avançados. A calculadora pode trabalhar com até 5 matrizes (com seus nomes variando de **A** a **E**) sendo acessadas pelas teclas **[A]** a **[E]**. A HP-15C permite que você especifique o tamanho de cada matriz, armazene e recupere seus elementos e realize cálculos matriciais, tanto com números reais como com números complexos. (No final desta seção você encontrará um resumo das funções de matrizes).

Uma aplicação comum de cálculo matricial é a resolução de um sistema de equações lineares. Por exemplo, considere as equações.

$$3.8x_1 + 7.2x_2 = 16.5$$

$$1.3x_1 - 0.9x_2 = -22.1$$

para as quais se queira determinar os valores de  $x_1$  e  $x_2$ .

Estas equações podem ser expressas na forma matricial  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ , onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3.8 & 7.2 \\ 1.3 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \text{e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 16.5 \\ -22.1 \end{bmatrix}.$$

A seqüência de teclas dada a seguir mostra como você pode resolver este problema matricial com facilidade, através da sua HP-15C. (As operações matriciais apresentadas neste exemplo serão explicadas em detalhe mais adiante, ainda nesta seção).

Primeiramente, dimensione as duas matrizes conhecidas **A** e **B** e introduza os valores de seus elementos, da esquerda para a direita, ao longo das linhas, da primeira à última linha. Além disso, designe a matriz **C** como a que você usará para armazenar o resultado de seu cálculo matricial ( $\mathbf{C} = \mathbf{X}$ ).

Pressione	Visor	
<b>g</b> <b>CF</b> <b>8</b>		Desativa o Modo Complexo.
<b>2</b> <b>ENTER</b> <b>f</b> <b>DIM</b> <b>A</b>	<b>2.0000</b>	Dimensiona a matriz <b>A</b> como sendo $2 \times 2$ .
<b>f</b> <b>MATRIX</b> <b>1</b>	<b>2.0000</b>	Prepara a introdução automática dos elementos da matriz no Modo do Usuário.
<b>f</b> <b>USER</b>	<b>2.0000</b>	(O anúncio <b>USER</b> se acende).
<b>3.8</b> <b>STO</b> <b>A</b>	<b>A 1,1</b>	Denota o elemento da matriz <b>A</b> situado na linha 1 e na coluna 1. (Cada vez que um elemento é introduzido, é feita uma apresentação desse tipo, enquanto você mantiver a tecla alfabética pressionada).
	<b>3.8000</b>	Armazena $a_{11}$ .
<b>7.2</b> <b>STO</b> <b>A</b>	<b>7.2000</b>	Armazena $a_{12}$ .
<b>1.3</b> <b>STO</b> <b>A</b>	<b>1.3000</b>	Armazena $a_{21}$ .
<b>.9</b> <b>CHS</b> <b>STO</b> <b>A</b>	<b>-0.9000</b>	Armazena $a_{22}$ .
<b>2</b> <b>ENTER</b> <b>1</b> <b>f</b> <b>DIM</b> <b>B</b>	<b>1.0000</b>	Dimensiona a matriz <b>B</b> como sendo $2 \times 1$ .
<b>16.5</b> <b>STO</b> <b>B</b>	<b>16.5000</b>	Armazena $b_{11}$ .
<b>22.1</b> <b>CHS</b> <b>STO</b> <b>B</b>	<b>-22.1000</b>	Armazena $b_{21}$ .
<b>f</b> <b>RESULT</b> <b>C</b>	<b>-22.1000</b>	Especifica a matriz <b>C</b> para armazenar o resultado.

Utilizando a notação de matrizes, a solução da equação matricial  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$  é

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

onde  $\mathbf{A}^{-1}$  é a inversa da matriz **A**. Você pode realizar esta operação introduzindo os “descritores” das matrizes **B** e **A** nos registradores **Y** e **X** e pressionar  $\div$ . (Um descritor mostra o nome e as dimensões de uma ma-

triz). Observe que se **A** e **B** fossem números, você poderia calcular a resposta de maneira semelhante.

Pressione	Visor		
<b>RCL</b> <b>MATRIX</b> <b>B</b>	<b>b</b>	<b>2</b>	<b>1</b> Introduz o descritor da matriz <b>B</b> ( $2 \times 1$ ) das constantes.
<b>RCL</b> <b>MATRIX</b> <b>A</b>	<b>A</b>	<b>2</b>	<b>2</b> Introduz no registrador X o descritor da matriz <b>A</b> ( $2 \times 2$ ) dos coeficientes, deslocando o descritor de <b>B</b> para o registrador Y.
<b>+</b>	<b>running</b>		Apresentação temporária enquanto $A^{-1}B$ está sendo calculada e armazenada na matriz <b>C</b> .
	<b>C</b>	<b>2</b>	<b>1</b> Descritor da matriz <b>C</b> ( $2 \times 1$ ) dos resultados.

Recupere agora os elementos da matriz **C** (a matriz solução da equação matricial). Além disso, retire a calculadora do Modo do Usuário e apague todas as matrizes.

Pressione	Visor	
<b>RCL</b> <b>C</b>	<b>C</b>	<b>1,1</b> Denota a linha 1 e a coluna 1 da matriz <b>C</b> .
	<b>-11.2887</b>	Valor de $c_{11}$ ( $x_1$ ).
<b>RCL</b> <b>C</b>	<b>8.2496</b>	Valor de $c_{21}$ ( $x_2$ ).
<b>f</b> <b>USER</b>	<b>8.2496</b>	Desativa o Modo do Usuário.
<b>f</b> <b>MATRIX</b> <b>0</b>	<b>8.2496</b>	Apaga todas as matrizes.

A solução do sistema de equações é  $x_1 = -11.2887$  e  $x_2 = 8.2496$ .

**Observação:** A descrição dos cálculos matriciais desta seção presume que você tem familiaridade com teoria e Álgebra Matricial.

## Dimensões de uma Matriz

A memória comporta o armazenamento de até 64 elementos de matrizes. Você pode utilizar todos os 64 elementos numa única matriz ou distribuí-

los entre até 5 matrizes. A inversão de matrizes, por exemplo, pode ser realizada com uma matriz  $8 \times 8$ , com elementos reais (ou com uma matriz  $4 \times 4$  com elementos complexos, como veremos mais adiante\*).

Para economizar memória, todas as matrizes são inicialmente dimensionadas como  $0 \times 0$ . Quando uma matriz é dimensionada ou redimensionada, o número adequado de registradores é automaticamente alocado na memória. Você pode ter que incrementar o número de registradores alocados para comportar matrizes na memória antes de dimensionar uma matriz ou antes de realizar certas operações matriciais. O Apêndice C descreve como a memória é organizada, como determinar o número de registradores correntemente disponíveis para o armazenamento de elementos de matrizes e como aumentar ou diminuir tal número.

## Dimensionando uma Matriz

Para dimensionar uma matriz de  $y$  linhas e  $x$  colunas, coloque tais números nos registradores Y e X, respectivamente, e então execute  $\boxed{f}$   $\boxed{DIM}$  seguidas da tecla alfabética que especifique a matriz:

1. Introduza o número de linhas ( $y$ ) no visor e então pressione  $\boxed{ENTER}$  para colocá-lo no registrador Y.
2. Introduza o número de colunas ( $x$ ) no registrador X.
3. Pressione  $\boxed{f}$   $\boxed{DIM}$  seguidas de uma tecla alfabética  $\boxed{A}$  a  $\boxed{E}$  especificando o nome da matriz.†

<b>Y</b>	número de linhas
<b>X</b>	número de colunas

\* As funções matriciais, descritas nesta seção, operam apenas sobre matrizes reais. (No Modo Complexo, a pilha imaginária é ignorada durante as operações matriciais). No entanto, a HP-15C possui 4 funções matriciais que permitem que você calcule usando representações reais de matrizes complexas, como veremos nas páginas 163 a 166.

† Você não precisa pressionar  $\boxed{f}$  antes da tecla alfabética. (Veja maiores detalhes em Sequências Abreviadas de Teclas, na página 80).

**Exemplo:** Dimensione a matriz **A** de modo que ela seja  $2 \times 3$ .

Pressione	Visor	
2 <b>ENTER</b>	2.0000	Introduz o número de linhas no registrador Y.
3	3	Introduz o número de colunas no registrador X.
<b>f</b> <b>DIM</b> <b>A</b>	3.0000	Dimensiona a matriz <b>A</b> como sendo $2 \times 3$ .

## Apresentando as Dimensões de Uma Matriz

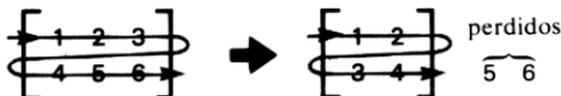
Há duas maneiras de você apresentar as dimensões de uma matriz:

- Pressione **RCL** **MATRIX** seguidas pela tecla alfabética que a especifique. A calculadora apresentará nome da matriz à esquerda e os números de linhas e colunas à direita.
- Pressione **RCL** **DIM** seguidas pela tecla alfabética que especifique a matriz. A calculadora colocará o número de linhas no registrador Y e o número de colunas no registrador X.

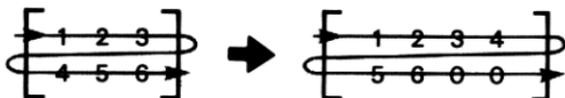
Pressione	Visor	
<b>RCL</b> <b>MATRIX</b> <b>B</b>	b      0    0	A matriz <b>B</b> tem 0 linhas e 0 colunas, pois não foi dimensionada.
<b>RCL</b> <b>DIM</b> <b>A</b>	3.0000	Número de colunas de <b>A</b> .
<b>x</b> <b>z</b> <b>y</b>	2.0000	Número de linhas de <b>A</b> .

## Alterando as Dimensões de Uma Matriz

Os valores dos elementos de uma matriz são armazenados na memória da esquerda para a direita, ao longo de cada linha, da primeira à última linha. Se você redimensionar uma matriz para que fique menor, os valores serão redistribuídos de acordo com as novas dimensões e os valores extra serão perdidos. Como exemplo, se a matriz  $2 \times 3$  apresentada abaixo, à esquerda, for redimensionada para ficar  $2 \times 2$ , acontecerá o seguinte:



Se você redimensionar uma matriz para que fique maior, serão adicionados elementos nulos ao seu final, segundo os requisitos das novas dimensões. Por exemplo, se a mesma matriz  $2 \times 3$  for redimensionada para  $2 \times 4$ , então:



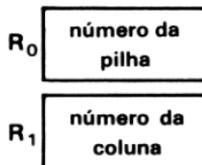
Quando você terminar seus cálculos com matrizes, provavelmente desejará reduzir todas as 5 matrizes às dimensões  $0 \times 0$ , liberando registradores para uso como linhas de programas ou para uso das funções avançadas. Você pode redimensionar todas as 5 matrizes a  $0 \times 0$  ao mesmo tempo, pressionando  $\boxed{f}$   $\boxed{\text{MATRIX}}$   $\boxed{0}$ . (Você pode dimensionar uma única matriz  $0 \times 0$  pressionando  $\boxed{0}$   $\boxed{f}$   $\boxed{\text{DIM}}$   $\boxed{\{A\}}$  a  $\boxed{E}$ ).

## Armazenando e Recuperando Elementos de Uma Matriz

A HP-15C dispõe de 2 meios para se armazenar e recuperar os elementos de matrizes. O primeiro método permite que você percorra todos os elementos em ordem. O segundo método permite que os elementos sejam acessados individualmente.

### Armazenando e Recuperando Todos os Elementos Ordenadamente

Normalmente, a HP-15C usa os registradores de armazenamento  $R_0$  e  $R_1$  para indicar os números da linha e coluna do elemento de uma matriz. Se a calculadora estiver no Modo do Usuário, esses números serão incrementados *automaticamente*, à medida que você armazenar ou recuperar cada elemento da matriz, da esquerda para a direita, ao longo de cada linha, da primeira à última.



Para definir os números da linha e coluna ( $R_0$  e  $R_1$ ), de modo a indicar a linha 1 e a coluna 1, pressione  $\boxed{f}$   $\boxed{\text{MATRIX}}$   $\boxed{1}$ .

Para armazenar ou recuperar seqüencialmente os elementos de uma matriz:

1. Certifique-se de que a matriz esteja adequadamente dimensionada.
2. Pressione  $\boxed{f}$   $\boxed{\text{MATRIX}}$  1. Com isto você estará armazenando o número 1 em  $R_0$  e  $R_1$ , para que os elementos sejam acessados a partir da linha 1 e da coluna 1.
3. Ative o Modo do Usuário, pressionando  $\boxed{f}$   $\boxed{\text{USER}}$ . Nesse modo, depois que cada elemento é armazenado ou recuperado, o número da linha em  $R_0$  ou o número da coluna em  $R_1$  é automaticamente incrementado de uma unidade, como veremos no próximo exemplo.
4. Se você estiver armazenando, introduza o elemento a ser armazenado na linha 1, coluna 1.
5. Pressione  $\boxed{\text{STO}}$  ou  $\boxed{\text{RCL}}$  seguida da tecla alfabética especificando a matriz.
6. Repita os passos 4 e 5 para todos os elementos da matriz. O número da linha ou coluna será incrementado de acordo com as dimensões da matriz que você tiver especificado.

Enquanto a tecla alfabética do nome da matriz for mantida pressionada após  $\boxed{\text{STO}}$  ou  $\boxed{\text{RCL}}$ , a calculadora apresentará o nome da matriz seguido dos números da linha e coluna correspondentes ao valor que estiver sendo armazenado ou recuperado. Se a tecla alfabética for mantida pressionada por mais do que 3 segundos, o visor apresentará a palavra **null**, não armazenando nem recuperando o elemento especificado; além disso, não incrementará o número da linha ou coluna; (os registradores da pilha operacional também não serão afetados).

Depois que o último elemento da matriz tiver sido acessado, os números da linha e coluna voltarão a 1.

**Exemplo:** Armazene os valores apresentados a seguir nos elementos da matriz **A** dimensionada acima. (Certifique-se de que a matriz **A** tenha sido dimensionada como  $2 \times 3$ ).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

**Pressione**

f MATRIX 1

f USER

1 STO A

2 STO A

3 STO A

4 STO A

5 STO A

6 STO A

RCL A

RCL A

RCL A

RCL A

RCL A

RCL A

f USER

**Visor**

A 1,1

1.0000

2.0000

3.0000

4.0000

5.0000

6.0000

A 1,1

1.0000

2.0000

3.0000

4.0000

5.0000

6.0000

6.0000

Inicializa os números da linha e coluna, contidos em  $R_0$  e  $R_1$ , como sendo iguais a 1. (O visor apresenta o resultado anterior).

Ativa o Modo do Usuário.

Linha 1, coluna 1 de A. (Apresentação momentânea, enquanto A for mantida pressionada).

Valor de  $a_{11}$ .

Valor de  $a_{12}$ .

Valor de  $a_{13}$ .

Valor de  $a_{21}$ .

Valor de  $a_{22}$ .

Valor de  $a_{23}$ .

Recupera o elemento da linha 1 e coluna 1. ( $R_0$  e  $R_1$  foram redefinidos no passo anterior).

Valor de  $a_{11}$ .

Valor de  $a_{12}$ .

Valor de  $a_{13}$ .

Valor de  $a_{21}$ .

Valor de  $a_{22}$ .

Valor de  $a_{23}$ .

Desativa o Modo do Usuário.

### Verificando e Alterando Elementos Individuais de uma Matriz

A calculadora dispõe de 2 meios para se verificar (recuperar) e alterar (armazenar) o valor de um particular elemento de uma matriz. O primeiro método usa os registradores de armazenamento  $R_0$  e  $R_1$  da mesma maneira descrita acima, exceto pelo fato dos números da linha e coluna não se-

rem automaticamente alterados quando o Modo do Usuário está desativado. O segundo método usa a pilha operacional para definir os números da linha e coluna.

**Usando  $R_0$  e  $R_1$ .** Para acessar um particular elemento de uma matriz, armazene o número da linha em  $R_0$  e o número da coluna em  $R_1$ . Tais números não serão alterados automaticamente (a menos que a calculadora esteja no Modo do Usuário).

- Para recuperar o valor do elemento (depois de armazenar os números da linha e coluna), pressione  $\boxed{\text{RCL}}$  seguida pela tecla alfabética especificando a matriz.
- Para armazenar um valor nesse elemento (depois de armazenar os números da linha e coluna), coloque o valor no registrador X e pressione  $\boxed{\text{STO}}$  seguida pela tecla alfabética especificando a matriz.

**Exemplo:** Armazene o valor 9 como o elemento da linha 2 e coluna 3 da matriz **A** do exemplo anterior.

Pressione	Visor	
2 $\boxed{\text{STO}}$ 0	2.0000	Armazena o número da linha em $R_0$ .
3 $\boxed{\text{STO}}$ 1	3.0000	Armazena o número da coluna em $R_1$ .
9	9	Introduz o valor do novo elemento no registrador X.
$\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$	<b>A</b> 2,3 9.0000	Linha 2, coluna 3 de <b>A</b> . Valor de $a_{23}$ .

**Usando a Pilha Operacional.** Você pode usar os registradores da pilha operacional para especificar um particular elemento de uma matriz. Isto elimina a necessidade de se alterar os conteúdos de  $R_0$  e  $R_1$ .

- Para recuperar o valor de um elemento, introduza na pilha operacional o número da linha e o número da coluna (nessa ordem). A seguir pressione  $\boxed{\text{RCL}}$   $\boxed{\text{g}}$  seguidas pela tecla alfabética especificando a matriz. O valor do elemento será colocado no registrador X. (Os números da linha e coluna, contidos na pilha operacional), serão perdidos).

- Para armazenar o valor de um elemento, primeiramente introduza na pilha operacional o número da linha e o número da coluna. A seguir pressione  $\boxed{\text{STO}} \boxed{g}$  seguidas pela tecla alfabética especificando a matriz. (Os números da linha e coluna, contidos na pilha operacional, serão perdidos; o valor do elemento retornará ao registrador X).

Observe que estas são as únicas operações nas quais a tecla azul  $\boxed{g}$  precede uma tecla dourada.

**Exemplo:** Recupere o elemento da linha 2 e da coluna 1 da matriz A do exemplo anterior. Use os registradores da pilha operacional.

Pressione	Visor	
2 $\boxed{\text{ENTER}}$ 1	1	Introduz o número da linha no registrador Y e o número da coluna no registrador X.
$\boxed{\text{RCL}} \boxed{g} \boxed{A}$	4.0000	Valor de $a_{21}$ .

## Armazenando um Número em Todos os Elementos de uma Matriz

Para armazenar um número em todos os elementos de uma matriz, basta colocar esse número no visor e então pressionar  $\boxed{\text{STO}} \boxed{\text{MATRIX}}$  seguidas pela tecla alfabética especificando a matriz.

## Operações com Matrizes

Sob muitos aspectos, as operações com matrizes são como as operações numéricas. Os cálculos numéricos exigem que você especifique os números a serem utilizados; freqüentemente você também define um registrador para armazenar um resultado. De maneira semelhante, os cálculos com matrizes exigem que você especifique uma ou duas matrizes a serem utilizadas. Uma matriz é especificada através de seu *descriptor*. Em muitos cálculos, você também deve especificar uma matriz para armazenar os resultados. Essa é a *matriz de resultados*.

Como as operações com matrizes em geral exigem muitos cálculos individuais, a calculadora apresentará a mensagem **running** (em execução) durante a maioria de operações que as envolverem.

## Descritores de uma Matriz

No início desta seção, você viu que ao pressionar **[RCL] [MATRIX]**, seguidas por uma tecla alfabética especificando uma matriz, o nome da matriz aparece à esquerda do visor e o número de linhas e colunas aparecia à direita. O nome de uma matriz é chamado de *descriptor* da matriz. Os descritores de matrizes podem ser deslocados entre a pilha operacional e os registradores de armazenamento de dados da mesma maneira que um número, ou seja, usando **[STO]**, **[RCL]**, **[ENTER]**, etc. Sempre que um descriptor de matriz for apresentado no registrador X, as dimensões *atuais* dessa matriz serão apresentadas com ela.

Você usa descritores de matrizes para indicar quais as matrizes que serão usadas em cada operação matricial. As operações com matrizes, que serão vistas até o final desta seção, operam com matrizes cujos descritores são colocados no registrador X e (em algumas operações) no registrador Y.

O cálculo de um determinante e a resolução da equação matricial  $AX = B$  são duas operações matriciais que envolvem o cálculo da decomposição *LU* (também conhecida como fatoração *LU*; *L* = matriz triangular inferior; *U* = matriz triangular superior) da matriz especificada no registrador X\*. Uma matriz que esteja na forma *LU* é indicada por dois traços em seguida ao nome da matriz, ao ser apresentado seu descriptor. (Veja na página 162 o uso de matrizes na forma *LU*).

## A Matriz de Resultados

Para muitas das operações abordadas nesta seção, você precisa definir a matriz que deverá comportar os resultados da operação. Essa matriz é chamada *matriz de resultados*.

Outras operações *não* usam nem afetam a matriz de resultados. (Esse fato será relatado na descrição dessas operações). Tal operação substitui a matriz original pelo resultado da operação (se o resultado for uma matriz, tal como uma transposta) ou retorna um número no registrador X (se o resultado for um número, tal como a norma de uma linha).

Antes de realizar uma operação que use a matriz de resultados, você deve designar tal matriz. Faça isto pressionando **[f] [RESULT]** seguidas pela tecla alfabética especificando tal matriz. (Se o descriptor da matriz de resul-

---

\* A decomposição *LU* de uma matriz *A* é uma outra matriz na qual se encontra uma matriz triangular inferior *L*, e uma matriz triangular superior *U*, cujo produto *LU* é idêntico à matriz *A* (provavelmente com algumas linhas trocadas).

tados desejada ainda estiver no registrador X, você poderá, alternativamente, pressionar **[STO]** **[RESULT]** ). A matriz designada continua sendo a matriz de resultados, até que uma outra seja especificada\*. Para apresentar no visor o descritor da matriz de resultados, pressione **[RCL]** **[RESULT]** .

Quando você realiza uma operação que afeta a matriz de resultados, a matriz é automaticamente redimensionada ao tamanho adequado. Se esse redimensionamento exigir mais elementos que os disponíveis na memória de armazenamento de matrizes, (no máximo 64 elementos para todas as 5 matrizes), a operação não poderá ser realizada.

Esta restrição pode freqüentemente ser levantada designando-se a matriz de resultados como uma das matrizes sendo operada. (No entanto, existem certas operações para as quais a matriz de resultados *não* pode ser uma das matrizes envolvidas na operação; tal fato será mencionado na descrição de tais operações).

Se a tecla utilizada por qualquer operação matricial que armazene um resultado na matriz de resultados for mantida pressionada, o descritor dessa matriz será apresentado no visor. Se a tecla for solta antes do decurso de 3 segundos, a operação será realizada, e o descritor da matriz de resultados será colocado no registrador X. Se a tecla for mantida pressionada por mais de 3 segundos, a operação não será realizada e o visor apresentará a palavra **null** .

## Copiando uma Matriz

Para copiar os elementos de uma matriz nos elementos correspondentes de outra matriz, use a seqüência **[STO]** **[MATRIX]** :

1. Pressione **[RCL]** **[MATRIX]** seguidas pela tecla alfabética especificando a matriz a ser copiada. Isto trará o descritor da matriz ao visor.
2. Pressione **[STO]** **[MATRIX]** seguidas pela tecla alfabética especificando a matriz que comportará a cópia.

se a matriz especificada após **[RCL]** não tiver as mesmas dimensões da matriz especificada após **[STO]** , a segunda matriz será redimensionada para ficar conforme a primeira. A matriz especificada após **[STO]** não precisa ser dimensionada anteriormente.

---

\* A matriz A é automaticamente designada como a matriz de resultados sempre que a Memória Contínua é apagada.

**Exemplo:** Copie a matriz A do exemplo anterior na matriz B.

**Pressione**

**Visor**

**RCL** **MATRIX** **A**

**A**    **2**    **3**    Apresenta o descritor da matriz a ser copiada.

**STO** **MATRIX** **B**

**A**    **2**    **3**    Redimensiona a matriz B e copia A em B.

**RCL** **MATRIX** **B**

**b**    **2**    **3**    Apresenta o descritor da nova matriz B.

## Operações com uma Única Matriz

A tabela dada a seguir apresenta as funções que operam somente sobre a matriz especificada no registrador X. Operações envolvendo uma única matriz e mais um número num outro registrador da pilha operacional são descritas sob o título Operações Escalares (página 154).

Seqüência de Teclas	Resultado no Registrador X	Efeito na Matriz Especificada no Registrador X	Efeito na Matriz de Resultados
<b>CHS</b>	Não é afetado.	Troca o sinal de todos os elementos.	Nenhum. †
<b>1/x</b>	Descritor da matriz de resultados.	Nenhum. †	Inversa da matriz especificada.
<b>f</b> <b>MATRIX</b> <b>4</b>	Descritor da transposta.	Substituída pela transposta.	Nenhum. †
<b>f</b> <b>MATRIX</b> <b>7</b>	Norma de linha da matriz especificada.*	Nenhum.	Nenhum.

\* A norma de linha é o maior somatório dos valores absolutos dos elementos de cada linha da matriz especificada.

† A menos que a matriz de resultados seja a mesma especificada no registrador X.

§ Se a matriz especificada for *singular* (ou seja, não tiver inversa) a HP-15C modificará a forma *LU* por um valor geralmente pequeno se comparado ao erro de arredondamento. Para **1/x** a inversa calculada é a inversa de uma matriz próxima da matriz singular original.

Seqüência de Teclas	Resultado no Registrador X	Efeito na Matriz Especificada no Registrador X	Efeito na Matriz de Resultados
$\boxed{f}$ $\boxed{\text{MATRIX}}$ $\boxed{8}$	Norma Euclidiana ou de Frobenius da matriz especificada. †	Nenhum.	Nenhum.
$\boxed{f}$ $\boxed{\text{MATRIX}}$ $\boxed{9}$	Determinante da matriz especificada.	Nenhum. ‡	Decomposição $LU$ da matriz especificada. §
<p>† A norma Euclidiana ou de Frobenius é a raiz quadrada do somatório dos quadrados de todos os elementos da matriz especificada.</p> <p>‡ A menos que a matriz de resultados seja a mesma especificada no registrador X.</p> <p>§ Se a matriz especificada for <i>singular</i> (ou seja, não tiver inversa) a HP-15C modificará a forma <math>LU</math> por um valor geralmente pequeno se comparado ao erro de arredondamento. Para <math>\boxed{1/x}</math> a inversa calculada é a inversa de uma matriz próxima da matriz singular original.</p>			

**Exemplo:** Calcule a transposta da matriz **B**. A matriz **B** foi definida no exemplo anterior:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

**Pressione**

$\boxed{\text{RCL}}$   $\boxed{\text{MATRIX}}$   $\boxed{\text{B}}$

**Visor**

**b**     **2 3**     Apresenta o descritor da matriz **B**  $2 \times 3$ .

$\boxed{f}$   $\boxed{\text{MATRIX}}$   $\boxed{4}$

**b**     **3 2**     Descritor da matriz transposta  $3 \times 2$ .

A matriz **B** (que você pode ver usando  $\boxed{\text{RCL}}$   $\boxed{\text{B}}$  no Modo do Usuário) é agora

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

## Operações Escalares

As operações escalares realizam operações aritméticas entre um escalar (ou seja, um número) e cada elemento de uma matriz. O escalar e o descritor da matriz devem ser colocados nos registradores X e Y, em qualquer ordem. (Observe que a posição do registrador afetará o resultado das funções  $\boxed{-}$  e  $\boxed{+}$ ). Os valores resultantes serão armazenados nos elementos correspondentes da matriz de resultados.

As operações possíveis são apresentadas na próxima tabela.

Operação	Elementos da Matriz de Resultados*	
	Matriz no Registrador Y Escalar no Registrador X	Escalar no Registrador Y Matriz no Registrador X
$\boxed{+}$	Adiciona o valor escalar a cada elemento da matriz.	
$\boxed{\times}$	Multiplica cada elemento da matriz pelo valor escalar.	
$\boxed{-}$	Subtrai o valor escalar de cada elemento da matriz.	Subtrai cada elemento da matriz do valor escalar.
$\boxed{\div}$	Divide cada elemento da matriz pelo valor escalar	Calcula a inversa da matriz e multiplica cada elemento da matriz pelo valor escalar.

\*A matriz de resultados pode ser a matriz especificada.

**Exemplo:** Calcule a matriz  $B = 2A$  e então subtraia 1 de todos os elementos de  $B$ . Use a matriz  $A$  já definida:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

**Pressione**

$\boxed{f}$   $\boxed{\text{RESULT}}$   $\boxed{B}$

**Visor**

Designa a matriz  $B$  como a matriz de resultados.

$\boxed{\text{RCL}}$   $\boxed{\text{MATRIX}}$   $\boxed{A}$

$A$       2      3

Apresenta o descritor da matriz  $A$ .

**Pressione**2  $\boxed{\times}$ **Visor**

b      2   3

Redimensiona a matriz **B** para que fique com as mesmas dimensões de **A**, multiplica os elementos de **A** por 2, armazena tais valores nos elementos correspondentes de **B** e apresenta o descritor da matriz de resultados.

1  $\boxed{-}$ 

b      2   3

Subtrai 1 de todos os elementos da matriz **B** e armazena esses valores nos mesmos elementos de **B**.

O resultado (que você pode ver usando  $\boxed{\text{RCL}} \boxed{\text{B}}$  no Modo do Usuário) é o seguinte:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 17 \end{bmatrix}.$$

## Operações Aritméticas

Se os registradores **X** e **Y** contiverem descritores de matrizes, pressionando-se  $\boxed{+}$  ou  $\boxed{-}$  calcula-se a soma ou a diferença dessas matrizes.

Pressionando	Calcula-se
$\boxed{+}$	$\mathbf{Y} + \mathbf{X}$
$\boxed{-}$	$\mathbf{Y} - \mathbf{X}$
* O resultado é armazenado na matriz de resultados. A matriz de resultados pode ser <b>X</b> ou <b>Y</b> .	

**Exemplo:** Calcule  $\mathbf{C} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ , onde **A** e **B** são as definidas no exemplo anterior.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 17 \end{bmatrix}.$$

**Pressione****Visor**

f RESULT C

Designa **C** como a matriz de resultados.

RCL MATRIX B

b      2    3

Recupera o descritor da matriz **B**. (Este passo pode ser omitido se o descritor já estiver no registrador X).

RCL MATRIX A

A      2    3

Recupera o descritor da matriz **A** no registrador X, deslocando o descritor da matriz **B** para o registrador Y.

-

C      2    3

Calcula  $B - A$  e armazena os valores na matriz **C** de resultados (redimensionada).

O resultado é

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

**Multiplicação de Matrizes**

Se os registradores X e Y contiverem descritores de matrizes, você poderá calcular três diferentes produtos de matrizes. A tabela abaixo mostra os resultados das três funções para uma matriz X especificada no registrador X e uma matriz Y especificada no registrador Y. A matriz  $X^{-1}$  é a inversa de X, e a matriz  $Y^T$  é a transposta de Y.

Pressionando	Calcula-se*
$\times$	$Y X$
f MATRIX 5	$Y^T X$
$\div$	$X^{-1} Y$
* O resultado é armazenado na matriz de resultados. Para $\div$ a matriz de resultados pode ser Y mas não X. Para as demais funções, a matriz de resultados não pode ser X nem Y.	

**Observação:** Quando você usa a função  $\boxed{+}$  para calcular a expressão  $A^{-1}B$ , você deve introduzir os descritores das matrizes na ordem **B, A**, ao invés de fazê-lo na ordem de sua ocorrência na expressão.\*

O valor armazenado em cada elemento da matriz de resultados é determinado de acordo com as regras usuais de multiplicação de matrizes.

Para  $\boxed{\text{MATRIX}}$  5, a matriz especificada no registrador Y não é afetada por esta operação, mesmo que a sua transposta seja utilizada. O resultado é idêntico ao obtido usando-se  $\boxed{\text{MATRIX}}$  4 (transposta) e  $\boxed{\times}$ .

Para  $\boxed{+}$ , a matriz especificada no registrador X é substituída pela sua decomposição LU. A função  $\boxed{+}$  calcula  $X^{-1}Y$  usando um método mais direto do que  $\boxed{1/x}$  e  $\boxed{\times}$ , obtendo um resultado com maior rapidez e precisão.

**Exemplo:** Usando as matrizes **A** e **B** do exemplo anterior, calcule  $C = A^T B$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 17 \end{bmatrix}$$

Pressione	Visor			
$\boxed{\text{RCL}} \boxed{\text{MATRIX}} \boxed{\text{A}}$	<b>A</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	Recupera o descritor da matriz <b>A</b> .
$\boxed{\text{RCL}} \boxed{\text{MATRIX}} \boxed{\text{B}}$	<b>b</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	Recupera o descritor da matriz <b>B</b> no registrador X, deslocando o descritor da matriz <b>A</b> para o registrador Y.
$\boxed{\text{f}} \boxed{\text{RESULT}} \boxed{\text{C}}$	<b>b</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	Especifica a matriz <b>C</b> como a matriz de resultados.
$\boxed{\text{f}} \boxed{\text{MATRIX}} \boxed{5}$	<b>C</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	Calcula $A^T B$ e armazena o resultado na matriz <b>C</b> , que é redimensionada para $3 \times 3$ .

\* Esta é a mesma ordem que você usaria se estivesse introduzindo  $b$  e  $a$  para calcular  $a^{-1}b = b/a$ .

A matriz **C** de resultados é a seguinte:

$$C = \begin{bmatrix} 29 & 39 & 73 \\ 37 & 51 & 95 \\ 66 & 90 & 168 \end{bmatrix}$$

### Resolvendo a Equação $AX = B$

A função  $\boxed{+}$  é útil para a solução de equações matriciais da forma  $AX = B$ , onde **A** é a matriz dos coeficientes, **B** é a matriz dos termos constantes e **X** é a matriz solução. O descriptor da matriz das constantes, **B**, deve ser introduzido no registrador **Y** e o descriptor da matriz dos coeficientes, **A**, deve ser introduzido no registrador **X**. Pressionando  $\boxed{+}$  a seguir, calcula-se a solução  $X = A^{-1}B^*$ .



Lembre-se de que a função  $\boxed{+}$  substitui a matriz dos coeficientes pela sua decomposição  $LU$  e que essa matriz não deve ser especificada como a matriz de resultados. Além disso, usando-se  $\boxed{+}$  ao invés de  $\boxed{1/x}$  e  $\boxed{x}$ , obteremos uma solução com maior rapidez e precisão.

No início desta seção, você encontrou a solução de um sistema de equações lineares no qual a matriz dos termos constantes e a matriz solução tinham uma única coluna. O exemplo dado a seguir ilustra como você pode usar a HP-15C para encontrar soluções para mais de um conjunto de constantes, isto é, para uma matriz de termos constantes e uma matriz solução, ambas com mais de uma coluna.

---

\* Se **A** é uma matriz *singular* (ou seja, não possui inversa) a HP-15C modifica a forma  $LU$  de **A** por um valor geralmente pequeno se comparado ao erro de arredondamento. A solução calculada corresponde à matriz não singular dos coeficientes próximos da matriz singular original.

**Exemplo:** Após a venda das três últimas partidas de repolho e brócoli, um horticultor fez o seguinte resumo dos seus rendimentos:



	Semana		
	1	2	3
Peso Total (kg)	274	233	331
Valor Total	Cr\$ 120,32	Cr\$ 112,96	Cr\$ 151,36

O horticultor sabe que recebeu Cr\$ 0,24 por quilo de repolho e Cr\$ 0,86 por quilo de brócoli. Use as operações matriciais para determinar os pesos de repolho e brócoli que vendeu em cada semana.

**Solução:** A venda de cada semana pode ser representada por duas equações lineares (uma para o peso e outra para o valor) com duas incógnitas (os pesos de repolho e brócoli). Todas as 3 semanas podem ser simultaneamente manipuladas usando-se a equação matricial.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.24 & 0.86 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 274 & 233 & 331 \\ 120.32 & 112.96 & 151.36 \end{bmatrix}$$

ou

$$AD = B$$

onde a 1ª linha da matriz **D** são os pesos de repolho nas 3 semanas e a 2ª linha são os pesos de brócoli.

**Pressione**

2

**Visor**

2.0000

Dimensiona **A** como uma matriz  $2 \times 2$ .

1

2.0000

Define os números de linhas e colunas em  $R_0$  e  $R_1$  como sendo 1.

Pressione	Visor	
<b>f</b> USER	2.0000	Ativa o Modo do Usuário.
1 STO A	1.0000	Armazena $a_{11}$ .
STO A	1.0000	Armazena $a_{12}$ .
24 STO A	0.2400	Armazena $a_{21}$ .
86 STO A	0.8600	Armazena $a_{22}$ .
2 ENTER 3 f DIM B	3.0000	Dimensiona <b>B</b> como uma matriz $2 \times 3$ .
274 STO B	274.0000	Armazena $b_{11}$ *
233 STO B	233.0000	Armazena $b_{12}$ .
331 STO B	331.0000	Armazena $b_{13}$ .
120.32 STO B	120.3200	Armazena $b_{21}$ .
112.96 STO B	112.9600	Armazena $b_{22}$ .
151.36 STO B	151.3600	Armazena $b_{23}$ .
f RESULT D	151.3600	Especifica a matriz <b>D</b> como matriz de resultados.
RCL MATRIX B	b 2 3	Recupera o descritor da matriz dos termos constantes.
RCL MATRIX A	A 2 2	Recupera no registrador X o descritor da matriz <b>A</b> dos coeficientes, deslocando o descritor da matriz <b>B</b> para o registrador Y.
÷	d 2 3	Calcula $A^{-1} B$ e armazena o resultado na matriz <b>D</b> .
RCL D	186.0000	Recupera $d_{11}$ , o peso de repolho da 1ª semana.

\* Observe que você não precisa pressionar **f** MATRIX 1 antes de iniciar o armazenamento dos elementos da matriz **B**, pois quando você armazenou o último elemento da matriz **A**, os conteúdos de  $R_0$  e  $R_1$  (os números da linha e coluna, respectivamente) foram automaticamente inicializados com o número 1.

Pressione	Visor	
<b>RCL</b> <b>D</b>	<b>141.0000</b>	Recupera $d_{12}$ , o peso do repolho da 2ª semana.
<b>RCL</b> <b>D</b>	<b>215.0000</b>	Recupera $d_{13}$ .
<b>RCL</b> <b>D</b>	<b>88.0000</b>	Recupera $d_{21}$ .
<b>RCL</b> <b>D</b>	<b>92.0000</b>	Recupera $d_{22}$ .
<b>RCL</b> <b>D</b>	<b>116.0000</b>	Recupera $d_{23}$ .
<b>f</b> <b>USER</b>	<b>116.0000</b>	Desativa o Modo do Usuário.

As vendas do horticultor foram as seguintes:

	Semana		
	1	2	3
Repolho (kg)	186	141	215
Brócoli (kg)	88	92	116

### Calculando o Resíduo

A HP-15C permite que você calcule o resíduo, ou seja, a matriz

$$\text{Resíduo} = \mathbf{R} - \mathbf{YX}$$

onde  $\mathbf{R}$  é a matriz de resultados e  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  as matrizes especificadas nos registradores  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ .

Este recurso é útil, por exemplo, para se calcular um refinamento iterativo da solução de um sistema de equações e em problemas de regressão linear. Como exemplo, se  $\mathbf{C}$  é uma solução possível de  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ , então  $\mathbf{B} - \mathbf{AC}$  indica quão bem esta solução satisfaz a equação.

A função que calcula o resíduo ( **MATRIX** 6), usa o conteúdo atual da matriz de resultados e as matrizes especificadas nos registradores  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  para calcular o resíduo definido acima. O resíduo é armazenado na matriz de resultados, substituindo a matriz de resultados original. A matriz de resultados não pode ser nenhuma das matrizes especificadas nos registradores  $\mathbf{X}$  ou  $\mathbf{Y}$ .

Usando **MATRIX** 6, ao invés de  $\times$  e  $-$ , se obtém um resultado bem mais preciso, particularmente se o resíduo for pequeno com relação às matrizes que estiverem sendo subtraídas.

Para calcular o resíduo:

1. Introduza no registrador Y o descritor da matriz Y.
2. Introduza no registrador X o descritor da matriz X.
3. Especifique R como a matriz de resultados.
4. Pressione  $\boxed{f}$  **MATRIX** 6. O resíduo substitui o resultado da matriz R original. O descritor da matriz de resultados é colocado no registrador X.

### Usando Matrizes na Forma LU (Triangulares Inferior e Superior)

Como já foi visto anteriormente, a decomposição LU de uma matriz especificada no registrador X, pode ser criada através de duas operações matriciais: pelo cálculo de um determinante e pela resolução de uma equação matricial  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ . O descritor de tal matriz é identificado pela presença de dois traços em seguida ao nome da matriz. Os elementos da matriz LU diferem dos elementos da matriz original.

No entanto, o descritor de uma matriz na forma LU pode ser utilizado no lugar do descritor da matriz original, em operações que envolvam a inversa da matriz e em operações de cálculo do determinante. Ou seja, tanto a matriz na sua forma original como em sua decomposição LU podem ser usadas para estas operações:

$\boxed{1/x}$

$\boxed{+}$  pela matriz designada no registrador X

**MATRIX** 9

Para tais funções, o uso da matriz na forma LU, para ser invertida, dará resultado idêntico ao que seria obtido usando-se a matriz na forma original.

Como exemplo, se você resolvesse a equação matricial  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ , a matriz A passaria à forma LU. Se você então desejasse alterar a matriz B e resolver a equação novamente, poderia fazê-lo *sem* alterar a matriz A; a matriz LU proporcionaria a solução correta.

Para todas as demais operações matriciais, a matriz na decomposição LU não é reconhecida como representante da matriz original. Ao invés disso, os elementos de LU são utilizados como estão na memória de matrizes, e o resultado não é o que você iria obter utilizando a matriz original.

## Calculando com Matrizes Complexas

A HP-15C permite que você realize a multiplicação e a inversão de matrizes complexas (ou seja, matrizes cujos elementos são números complexos), bem como a resolução de sistemas de equações complexas (ou seja, equações cujos coeficientes e variáveis são complexos).

No entanto, a HP-15C somente opera e armazena matrizes reais. A capacidade de realização de cálculos com matrizes complexas é completamente independente da capacidade de realização de cálculos com números complexos, já descrita na seção anterior. *Você não precisa ativar o Modo Complexo para realizar cálculos com matrizes complexas.*

Ao invés disso, os cálculos com matrizes complexas são realizados com matrizes reais, derivadas das matrizes complexas originais, da maneira descrita abaixo, e realizadas certas transformações além das operações matriciais regulares. Tais transformações são executadas por quatro funções da calculadora. Esta seção descreverá como fazer tais cálculos.

### Armazenando os Elementos de uma Matriz Complexa

Considere uma matriz  $m \times n$  complexa  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$ , onde  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  são matrizes reais  $m \times n$ .  $\mathbf{Z}$  pode ser representada na calculadora como uma matriz "particionada",  $2m \times n$ :

$$\mathbf{Z}^P = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{Parte Real} \\ \text{Parte Imaginária} \end{array} \right.$$

O índice  $P$  indica que a matriz complexa está sendo representada por uma matriz particionada.

Todos os elementos de  $\mathbf{Z}^P$  são números reais; os situados na metade superior representam os elementos da parte real (matriz  $\mathbf{X}$ ) e os situados na metade inferior representam os elementos da parte imaginária (matriz  $\mathbf{Y}$ ). Os elementos de  $\mathbf{Z}^P$  são armazenados numa das cinco matrizes, ( $\mathbf{A}$ , por exemplo) da maneira usual, como já vimos nesta seção. Por exemplo, se  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$ , onde

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix},$$



**Exemplo:** Armazene a matriz complexa

$$Z = \begin{bmatrix} 4 + 3i & 7 - 2i \\ 1 + 5i & 3 + 8i \end{bmatrix}$$

na forma de  $Z^C$ , pois ela já está numa forma que mostra  $Z^C$ . A seguir transforme  $Z^C$  para a forma de  $Z^P$ .

Você pode fazer isso armazenando os elementos de  $Z^C$  numa matriz **A** e então utilizar a função  $P_{y,x}$ , onde

$$A = Z^C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 & -2 \\ 1 & 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

**Pressione**

**Visor**

$\boxed{f} \boxed{\text{MATRIX}} \boxed{0}$

Apaga todas as matrizes.

$\boxed{2} \boxed{\text{ENTER}} \boxed{4} \boxed{f} \boxed{\text{DIM}} \boxed{A}$  4.0000

Dimensiona a matriz **A**  $2 \times 4$ .

$\boxed{f} \boxed{\text{MATRIX}} \boxed{1}$  4.0000

Inicializa com o valor 1 os números da linha e coluna em  $R_0$  e  $R_1$ .

$\boxed{f} \boxed{\text{USER}}$  4.0000

Ativa o Modo do Usuário.

$\boxed{4} \boxed{\text{STO}} \boxed{A}$  4.0000

Armazena  $a_{11}$ .

$\boxed{3} \boxed{\text{STO}} \boxed{A}$  3.0000

Armazena  $a_{12}$ .

$\boxed{7} \boxed{\text{STO}} \boxed{A}$  7.0000

Armazena  $a_{13}$ .

$\boxed{2} \boxed{\text{CHS}} \boxed{\text{STO}} \boxed{A}$  -2.0000

Armazena  $a_{14}$ .

$\boxed{1} \boxed{\text{STO}} \boxed{A}$  1.0000

Armazena  $a_{21}$ .

$\boxed{5} \boxed{\text{STO}} \boxed{A}$  5.0000

Armazena  $a_{22}$ .

$\boxed{3} \boxed{\text{STO}} \boxed{A}$  3.0000

Armazena  $a_{23}$ .

$\boxed{8} \boxed{\text{STO}} \boxed{A}$  8.0000

Armazena  $a_{24}$ .

$\boxed{f} \boxed{\text{USER}}$  8.0000

Desativa o Modo do Usuário.

$\boxed{\text{RCL}} \boxed{\text{MATRIX}} \boxed{A}$  A 2 4

Apresenta o descritor da matriz **A**.

$\boxed{f} \boxed{P_{y,x}}$  A 4 2

Transforma  $Z^C$  em  $Z^P$ , redimensionando a matriz **A**.

A matriz  $A$  agora representa a matriz complexa  $Z$  na forma  $Z^P$ :

$$A = Z^P = \left[ \begin{array}{cc|cc} 4 & 7 & & \\ 1 & 3 & & \\ \hline 3 & -2 & & \\ 5 & 8 & & \end{array} \right] \cdot \left. \begin{array}{l} \} \text{Parte Real} \\ \} \text{Parte Imaginária} \end{array} \right.$$

### As Transformações Complexas

Quando você desejar calcular o produto de duas matrizes complexas, será necessária uma transformação adicional, e ainda uma outra, ao se calcular a inversa de uma matriz complexa. Tais transformações convertem a representação  $Z^P$  de uma matriz  $m \times n$  complexa numa matriz  $2m \times 2n$ , particionada, da seguinte forma:

$$\tilde{Z} = \left[ \begin{array}{cc|cc} X & -Y & & \\ Y & X & & \end{array} \right]$$

A matriz  $\tilde{Z}$ , criada pela transformação [MATRIX] 2, tem o dobro dos elementos de  $Z^P$ .

Como exemplo, as matrizes abaixo mostram a relação entre  $\tilde{Z}$  e  $Z^P$ .

$$Z^P = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & -6 & & \\ \hline -4 & 5 & & \end{array} \right] \leftrightarrow \tilde{Z} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & -6 & 4 & -5 \\ \hline -4 & 5 & 1 & -6 \end{array} \right]$$

As transformações que convertem a representação de uma matriz complexa de  $Z^P$  em  $\tilde{Z}$ , são apresentadas na seguinte tabela:

Pressionando	Transforma-se	Em
[f] [MATRIX] 2	$Z^P$	$\tilde{Z}$
[f] [MATRIX] 3	$\tilde{Z}$	$Z^P$

Para realizar qualquer uma destas transformações, recupere no visor o descritor de  $Z^P$  ou  $\tilde{Z}$ , e então pressione as teclas apresentadas acima. A transformação é feita na própria matriz especificada; a matriz de resultados não é afetada.

## Invertendo uma Matriz Complexa

Você pode calcular a inversa de uma matriz complexa utilizando o fato de que  $(\tilde{\mathbf{Z}})^{-1} = (\tilde{\mathbf{Z}}^{-1})$ .

Para calcular a inversa  $\mathbf{Z}^{-1}$  de uma matriz  $\mathbf{Z}$  complexa:

1. Armazene na memória os elementos de  $\mathbf{Z}$ , na forma de  $\mathbf{Z}^P$  ou de  $\mathbf{Z}^C$ .
2. Recupere no visor o descritor da matriz que represente  $\mathbf{Z}$ .
3. Se os elementos de  $\mathbf{Z}$  forem introduzidos na forma de  $\mathbf{Z}^C$ , pressione  $\boxed{f} \boxed{Py,x}$  para transformar  $\mathbf{Z}^C$  em  $\mathbf{Z}^P$ .
4. Pressione  $\boxed{f} \boxed{MATRIX} 2$  para transformar  $\mathbf{Z}^P$  em  $\tilde{\mathbf{Z}}$ .
5. Defina a matriz de resultados. Ela poderá ser a matriz que acomoda  $\tilde{\mathbf{Z}}$ .
6. Pressione  $\boxed{1/x}$ . Dessa forma é calculada  $(\tilde{\mathbf{Z}})^{-1}$ , que é igual a  $(\mathbf{Z}^{-1})$ . Os valores dos elementos dessa matriz são armazenados na matriz de resultados e o descritor da matriz de resultados é colocado no registrador X.
7. Pressione  $\boxed{f} \boxed{MATRIX} 3$  para transformar  $(\tilde{\mathbf{Z}})^{-1}$  em  $(\mathbf{Z}^{-1})^P$ .
8. Se você desejar uma inversa na forma de  $(\mathbf{Z}^{-1})^C$ , pressione  $\boxed{g} \boxed{Cy,x}$ .

Você pode derivar os elementos complexos de  $\mathbf{Z}^{-1}$  recuperando os elementos de  $\mathbf{Z}^P$  ou  $\mathbf{Z}^C$  e então combiná-los como já foi anteriormente descrito.

**Exemplo:** Calcule a inversa da matriz  $\mathbf{Z}$  complexa do exemplo anterior,

$$\mathbf{A} = \mathbf{Z}^P = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \\ 3 & -2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Pressione

$\boxed{RCL} \boxed{MATRIX} \boxed{A}$

Visor

**A**    **4**    **2**    Recupera o descritor da matriz A.

$\boxed{f} \boxed{MATRIX} 2$

**A**    **4**    **4**    Transforma  $\mathbf{Z}^P$  em  $\tilde{\mathbf{Z}}$ ; A é redimensionada.

$\boxed{f} \boxed{RESULT} \boxed{B}$

**A**    **4**    **4**    Define **B** como a matriz de resultados.

- 1/x**                      **b**      **4**    **4**      Calcula  $(Z)^{-1} = (\tilde{Z}^{-1})$  e coloca o resultado na matriz **B**.
- f** **MATRIX** **3**                      **b**      **4**    **2**      Transforma  $(\tilde{Z}^{-1})$  em  $(Z^{-1})^P$ .

A representação de  $Z^{-1}$ , na forma particionada, fica contida na matriz **B**.

$$B = \begin{bmatrix} -0.0254 & 0.2420 \\ -0.0122 & -0.1017 \\ \hline -0.2829 & -0.0022 \\ 0.1691 & -0.1315 \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \} \text{Parte Real} \\ \} \text{Parte Imaginária} \end{array} \right\}$$

## Multiplicando Matrizes Complexas

O produto de duas matrizes complexas pode ser calculado usando-se o fato de que  $(YX)^P = \tilde{Y}X^P$ .

Para calcular  $YX$ , onde  $Y$  e  $X$  são matrizes complexas:

1. Armazene os elementos de  $Y$  e  $X$  na memória, na forma de  $Z^P$  ou de  $Z^C$ .
2. Recupere no visor o descritor da matriz que represente  $Y$ .
3. Se os elementos de  $Y$  forem introduzidos na forma de  $Y^C$ , pressione **f** **[Py,x]** para transformar  $Y^C$  em  $Y^P$ .
4. Pressione **f** **MATRIX** **2** para transformar  $Y^P$  em  $\tilde{Y}$ .
5. Recupere no visor o descritor da matriz que represente  $X$ .
6. Se os elementos de  $X$  forem introduzidos na forma de  $X^C$ , pressione **f** **[Py,x]** para transformar  $X^C$  em  $X^P$ .
7. Defina a matriz de resultados; ela não poderá ser nenhuma das duas envolvidas nos cálculos.
8. Pressione **x** para calcular  $\tilde{Y}X^P = (YX)^P$ . Os valores de tais elementos serão colocados na matriz de resultados, e o descritor desta será colocado no registrador  $X$ .
9. Se você desejar o produto na forma  $(YX)^C$ , pressione **g** **[Cy,x]**.

Observe que você não transformou  $X^P$  em  $\tilde{X}$ .

Você pode derivar os elementos complexos da matriz produto  $YX$  recuperando os elementos de  $(YX)^P$  ou  $(YX)^C$  e combiná-los de acordo com as convenções descritas anteriormente.

**Exemplo:** Calcule o produto  $\mathbf{ZZ}^{-1}$  onde  $\mathbf{Z}$  é a matriz complexa dada no exemplo anterior.

Como os elementos que representam as duas matrizes ainda estão armazenados ( $\tilde{\mathbf{Z}}$  em **A** e  $(\mathbf{Z}^{-1})^P$  em **B**), salte os passos 1, 3, 4 e 6.

Pressione	Visor	
<b>RCL</b> <b>MATRIX</b> <b>A</b>	<b>A</b>	<b>4 4</b> Apresenta o descritor da matriz <b>A</b> .
<b>RCL</b> <b>MATRIX</b> <b>B</b>	<b>b</b>	<b>4 2</b> Apresenta o descritor da matriz <b>B</b> .
<b>f</b> <b>RESULT</b> <b>C</b>	<b>b</b>	<b>4 2</b> Define a matriz <b>C</b> como a de resultados.
<b>x</b>	<b>C</b>	<b>4 2</b> Calcula $\tilde{\mathbf{Z}} (\mathbf{Z}^{-1})^P = (\mathbf{ZZ}^{-1})^P$ .
<b>f</b> <b>USER</b>	<b>C</b>	<b>4 2</b> Ativa o Modo do Usuário.
<b>RCL</b> <b>C</b>	<b>C</b>	<b>1,1</b> Matriz <b>C</b> , linha 1, coluna 1.  (Apresentação momentânea, enquanto for mantida pressionada).
	<b>1.0000</b>	Valor de $c_{11}$ .
<b>RCL</b> <b>C</b>	<b>-2.8500 -10</b>	Valor de $c_{12}$ .
<b>RCL</b> <b>C</b>	<b>-4.0000 -11</b>	Valor de $c_{21}$ .
<b>RCL</b> <b>C</b>	<b>1.0000</b>	Valor de $c_{22}$ .
<b>RCL</b> <b>C</b>	<b>1.0000 -11</b>	Valor de $c_{31}$ .
<b>RCL</b> <b>C</b>	<b>3.8000 -10</b>	Valor de $c_{32}$ .
<b>RCL</b> <b>C</b>	<b>1.0000 -11</b>	Valor de $c_{41}$ .
<b>RCL</b> <b>C</b>	<b>-1.0500 -10</b>	Valor de $c_{42}$ .
<b>f</b> <b>USER</b>	<b>-1.0500 -10</b>	Desativa o Modo do Usuário.

Os elementos de **C** são os seguintes:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -2.8500 \times 10^{-10} \\ -4.0000 \times 10^{-11} & 1.0000 \\ 1.0000 \times 10^{-11} & 3.8000 \times 10^{-10} \\ 1.0000 \times 10^{-11} & -1.0500 \times 10^{-10} \end{bmatrix} = (\mathbf{ZZ}^{-1})^P,$$

onde a metade superior da matriz  $\mathbf{C}$  é a parte real de  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^{-1}$  e a metade inferior é a parte imaginária. Por inspeção da matriz  $\mathbf{C}$ ,

$$\mathbf{Z}\mathbf{Z}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -2.8500 \times 10^{-10} \\ -4.0000 \times 10^{-11} & 1.0000 \end{bmatrix} \\ + i \begin{bmatrix} 1.0000 \times 10^{-11} & 3.8000 \times 10^{-11} \\ 1.0000 \times 10^{-11} & -1.0500 \times 10^{-10} \end{bmatrix}$$

Como era esperado,

$$\mathbf{Z}\mathbf{Z}^{-1} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### Resolvendo a Equação Complexa $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$

Você pode resolver a equação matricial complexa  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$  pelo cálculo de  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ . Faça isso calculando  $\mathbf{X}^P = (\tilde{\mathbf{A}})^{-1}\mathbf{B}^P$ .

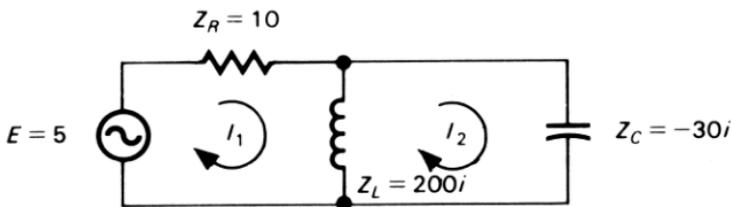
Para a resolução da equação  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ , onde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{B}$  são matrizes complexas:

1. Armazene os elementos de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  na memória, tanto na forma de  $\mathbf{Z}^P$  como na forma de  $\mathbf{Z}^C$ .
2. Recupere no visor o descritor da matriz que represente  $\mathbf{B}$ .
3. Se os elementos de  $\mathbf{B}$  forem introduzidos na forma de  $\mathbf{B}^C$ , pressione  $\boxed{\text{f}}$   $\boxed{\text{Py,x}}$  para transformar  $\mathbf{B}^C$  em  $\mathbf{B}^P$ .
4. Recupere no visor o descritor da matriz que represente  $\mathbf{A}$ .
5. Se os elementos de  $\mathbf{A}$  forem introduzidos na forma de  $\mathbf{A}^C$ , pressione  $\boxed{\text{f}}$   $\boxed{\text{Py,x}}$  para transformar  $\mathbf{A}^C$  em  $\mathbf{A}^P$ .
6. Pressione  $\boxed{\text{f}}$   $\boxed{\text{MATRIX}}$  2 para transformar  $\mathbf{A}^P$  em  $\tilde{\mathbf{A}}$ .
7. Designe a matriz de resultados; ela não poderá ser a que represente  $\mathbf{A}$ .
8. Pressione  $\boxed{+}$  para calcular  $\mathbf{X}^P$ . Os valores dos elementos desta matriz serão colocados na matriz de resultados, e o descritor desta será colocado no registrador X.
9. Se você desejar a solução na forma de  $\mathbf{X}^C$ , pressione  $\boxed{\text{g}}$   $\boxed{\text{Cy,x}}$ .

Observe que você não precisa transformar  $\mathbf{B}^P$  em  $\tilde{\mathbf{B}}$ .

Você pode derivar os elementos complexos da solução  $\mathbf{X}$  recuperando os elementos de  $\mathbf{X}^P$  ou  $\mathbf{X}^C$  e combiná-los de acordo com as convenções descritas anteriormente.

**Exemplo:** Um estudante de Engenharia deseja analisar o circuito elétrico apresentado a seguir. As impedâncias dos componentes estão indicadas na forma complexa. Determine a representação complexa das correntes  $I_1$  e  $I_2$ .



Este sistema pode ser representado pela equação matricial complexa

$$\begin{bmatrix} 10 + 200i & -200i \\ -200i & (200 - 30i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}.$$

Na forma particionada,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \\ 200 & -200 \\ -200 & 170 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde os elementos nulos correspondem às partes reais e imaginárias nulas.

**Pressione**

4 [ENTER] 2 [f] [DIM] [A] 2.0000

[f] [MATRIX] 1 2.0000

**Visor**

Dimensiona a matriz  $\mathbf{A}$   
 $4 \times 2$ .

Define os números iniciais  
da linha e coluna  
(em  $R_0$  e  $R_1$ ) como sendo  
iguais a 1.

Pressione	Visor	
<b>f</b> <b>USER</b>	2.0000	Ativa o Modo do Usuário.
10 <b>STO</b> <b>A</b>	10.0000	Armazena $a_{11}$ .
0 <b>STO</b> <b>A</b>	0.0000	Armazena $a_{12}$ .
<b>STO</b> <b>A</b>	0.0000	Armazena $a_{21}$ .
<b>STO</b> <b>A</b>	0.0000	Armazena $a_{22}$ .
200 <b>STO</b> <b>A</b>	200.0000	Armazena $a_{31}$ .
<b>CHS</b> <b>STO</b> <b>A</b>	-200.0000	Armazena $a_{32}$ .
<b>STO</b> <b>A</b>	-200.0000	Armazena $a_{41}$ .
170 <b>STO</b> <b>A</b>	170.0000	Armazena $a_{42}$ .
4 <b>ENTER</b> 1 <b>f</b> <b>DIM</b> <b>B</b>	1.0000	Dimensiona a matriz <b>B</b> $4 \times 1$ .
0 <b>STO</b> <b>MATRIX</b> <b>B</b>	0.0000	Armazena o valor zero em todos os elementos de <b>B</b> .
5 <b>ENTER</b> 1 <b>ENTER</b>	1.0000	Especifica o valor 5 para a linha 1, coluna 1.
<b>STO</b> <b>g</b> <b>B</b>	5.0000	Armazena o valor 5 em <b>B</b> <sub>11</sub> .
<b>RCL</b> <b>MATRIX</b> <b>B</b>	b 4 1	Recupera o descritor da matriz <b>B</b> .
<b>RCL</b> <b>MATRIX</b> <b>A</b>	A 4 2	Coloca no registrador <b>X</b> o descritor da matriz <b>A</b> , deslocando o descritor da matriz <b>B</b> para o registrador <b>Y</b> .
<b>f</b> <b>MATRIX</b> 2	A 4 4	Transforma $A^P$ em $\tilde{A}$
<b>f</b> <b>RESULT</b> <b>C</b>	A 4 4	Define a matriz <b>C</b> como de resultados.
<b>÷</b>	C 4 1	Calcula $X^P$ e armazena em <b>C</b> .
<b>g</b> <b>C<sub>y,x</sub></b>	C 2 2	Transforma $X^P$ em $X^C$ .
<b>RCL</b> <b>C</b>	0.0372	Recupera $c_{11}$ .
<b>RCL</b> <b>C</b>	0.1311	Recupera $c_{12}$ .
<b>RCL</b> <b>C</b>	0.0437	Recupera $c_{21}$ .

Pressione	Visor	
<b>RCL</b> <b>C</b>	<b>0.1543</b>	Recupera $c_{22}$ .
<b>f</b> <b>USER</b>	<b>0.1543</b>	Desativa o Modo do Usuário
<b>f</b> <b>MATRIX</b> <b>0</b>	<b>0.1543</b>	Redimensiona todas as matrizes para $0 \times 0$ .

As correntes, representadas pela matriz  $X$  complexa, podem ser derivadas de  $C$ :

$$X = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0372 + 0.1311i \\ 0.0437 + 0.1543i \end{bmatrix}.$$

A resolução da equação matricial do exemplo precedente usou 24 registradores da memória de matrizes, 16 para a matriz  $A$   $4 \times 4$  (que foi originalmente introduzida como uma matriz  $4 \times 2$  representando uma matriz complexa  $2 \times 2$ ) e 4 registradores para cada uma das matrizes  $B$  e  $C$  (cada qual representando uma matriz complexa  $2 \times 1$ ). (No entanto, você poderia ter utilizado 4 registradores a menos que a matriz de resultados fosse  $B$ ). Observe que como  $X$  e  $B$  não se restringem a vetores (ou seja, à matrizes com uma única coluna),  $X$  e  $B$  poderiam ter exigido mais memória.

A HP-15C possui memória suficiente para resolver, pelo método descrito acima, uma equação matricial complexa  $AX = B$  com  $X$  e  $B$  tendo 6 colunas se  $A$  for  $2 \times 2$  (ou tendo até 2 colunas, se  $A$  for  $3 \times 3$ )\*.

(O número permitido de colunas poderá dobrar se a matriz constante  $B$  for utilizada como matriz de resultados). Se  $X$  e  $B$  tiverem mais colunas, ou se  $A$  for  $4 \times 4$ , você poderá resolver a equação usando o método alternativo dado a seguir.

Este método difere do anterior por envolver operações de inversão e multiplicação separadas, além de um menor número de registradores.

1. Armazene os elementos de  $A$  na memória, na forma de  $A^P$  ou de  $A^C$ .
2. Recupere no visor o descritor da matriz que represente  $A$ .
3. Se os elementos de  $A$  forem introduzidos na forma de  $A^C$ , pressione **f** **[Py,x]** para transformar  $A^C$  em  $A^P$ .

\* Se a memória disponível for dimensionada para o segmento comum (**[MEM]**: 1 64 0-0). Veja maiores detalhes no Apêndice C, Alocação de Memória.

4. Pressione  $\boxed{f}$   $\boxed{\text{MATRIX}}$  2 para transformar  $A^P$  em  $\tilde{A}$ .
5. Pressione  $\boxed{\text{STO}}$   $\boxed{\text{RESULT}}$  para definir a matriz que represente A como de resultados.
6. Pressione  $\boxed{1/x}$  para calcular  $(\tilde{A})^{-1}$ .
7. Redimensione A para que fique com a metade do número de linhas indicado pelo seu descritor no visor, ao final do passo precedente.
8. Armazene os elementos de B na memória, na forma de  $B^P$  ou de  $B^C$ .
9. Recupere no visor o descritor da matriz que represente A.
10. Recupere no visor o descritor da matriz que represente B.
11. Se os elementos de B forem introduzidos na forma de  $B^C$ , pressione  $\boxed{f}$   $\boxed{\text{Py,x}}$  para transformar  $B^C$  em  $B^P$ .
12. Pressione  $\boxed{f}$   $\boxed{\text{MATRIX}}$  2 para transformar  $B^P$  em  $\tilde{B}$ .
13. Defina a matriz de resultados; ela não poderá ser nenhuma das outras duas matrizes envolvidas nos cálculos.
14. Pressione  $\boxed{x}$ .
15. Pressione  $\boxed{f}$   $\boxed{\text{MATRIX}}$  4 para obter a transposta da matriz de resultados.
16. Pressione  $\boxed{f}$   $\boxed{\text{MATRIX}}$  2.
17. Redimensione a matriz de resultados para que fique com a metade do número de linhas indicado pelo seu descritor no visor, ao final do passo precedente.
18. Pressione  $\boxed{\text{RCL}}$   $\boxed{\text{RESULT}}$  para recuperar o descritor da matriz de resultados.
19. Pressione  $\boxed{f}$   $\boxed{\text{MATRIX}}$  4 para calcular  $X^P$ .
20. Se você desejar a solução na forma de  $X^C$ , pressione  $\boxed{g}$   $\boxed{\text{Cy,x}}$ .

## Outras Operações Envolvendo Matrizes

### Usando os Elementos de uma Matriz com Operações de Registradores

Se uma tecla alfabética (especificando uma matriz) for pressionada, após qualquer uma das seguintes teclas de função, a operação será realizada com o elemento situado na linha e coluna determinadas por  $R_0$  e  $R_1$ , de maneira idêntica a que ocorreria com um registrador de armazenamento de dados.

<b>STO</b> *	<b>RCL</b> *
<b>STO</b> { <b>+</b> , <b>-</b> , <b>x</b> , <b>÷</b> }	<b>RCL</b> { <b>+</b> , <b>-</b> , <b>x</b> , <b>÷</b> }
<b>DSE</b>	<b>ISG</b>
<b>x</b> $\leftarrow$	

## Usando Descritores de uma Matriz com o Registrador de Indexação

Em certas aplicações, você pode desejar confeccionar um programa contendo seqüências de operações envolvendo qualquer das matrizes  $A$  a  $E$ . Neste caso, as operações matriciais podem fazer referência a qualquer descritor de matriz contido em  $R_1$ .

Se o registrador de indexação  $R_1$  contiver um descritor de matriz:

- Pressionando **(i)** após qualquer uma das funções relacionadas acima, a operação será realizada com o elemento determinado por  $R_0$  e  $R_1$  da matriz especificada em  $R_1$ .
- Pressionando **(i)** após **STO** **g** ou **RCL** **g**, será realizada a operação com o elemento determinado pelos registradores  $Y$  (linha) e  $X$  (coluna) da matriz especificada em  $R_1$ .
- Pressionando **f** **DIM** **I** se dimensiona a matriz especificada em  $R_1$  de acordo com as dimensões contidas nos registradores  $X$  e  $Y$ .
- Pressionando **RCL** **DIM** **I** se recupera nos registradores  $X$  e  $Y$  as dimensões da matriz especificada em  $R_1$ .
- Pressionando **GSB** **I** ou **GTO** **I** se obtém o mesmo resultado que seria obtido com **GSB** ou **GTO** seguida da letra correspondente à matriz especificada em  $R_1$ . (Esta não é, na verdade, uma operação matricial: apenas é utilizada a letra do descritor da matriz).

## Testes de Condição com Descritores de uma Matriz

Os quatro testes de condição: **x=0**, **TEST** 0 ( $x \neq 0$ ), **TEST** 5 ( $x = y$ ) e **TEST** 6 ( $x \neq y$ ) podem ser efetuados com os descritores de matrizes contidos nos registradores  $X$  e  $Y$ . Os testes condicionais podem ser usados para controlar a execução de um programa, como já vimos na seção 8.

Se o registrador  $X$  contiver o descritor de uma matriz, o resultado de **x=0** será falso e o resultado de **TEST** 0 será verdadeiro (independentemente dos valores dos elementos da matriz).

\* Além disso, no Modo do Usuário, os números da linha e coluna contidos em  $R_0$  e  $R_1$ , respectivamente, são incrementados de acordo com as dimensões da matriz especificada.

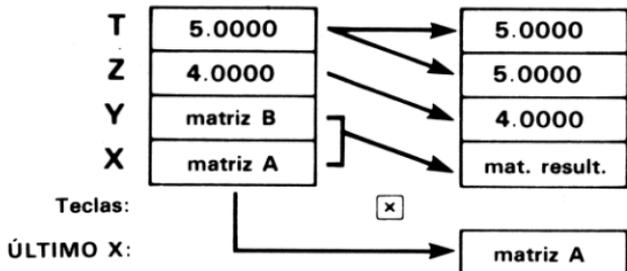
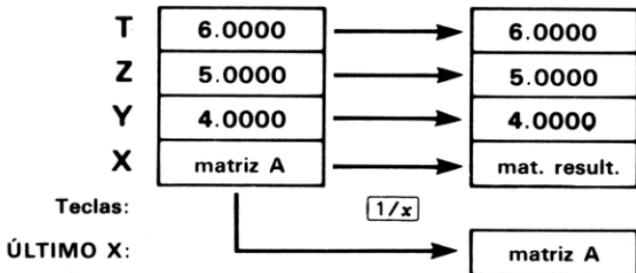
Se os registradores X e Y contiverem descritores de matrizes, quando **TEST** 5 ou **TEST** 6 forem executados, x e y serão iguais se houver coincidência dos descritores contidos em X e Y, e não serão iguais caso contrário. A comparação é feita *tão somente entre os descritores e não entre os elementos* das matrizes especificadas.

Os demais testes condicionais não podem ser utilizados com descritores de matrizes.

## Funcionamento da Pilha Operacional em Cálculos de Matrizes

Durante os cálculos de matrizes, o conteúdo dos registradores da pilha operacional se desloca de maneira semelhante a que ocorre nos cálculos numéricos.

Em alguns cálculos de matrizes, o resultado é armazenado na matriz de resultados. Os argumentos (um ou dois descritores ou os valores contidos nos registradores X e Y) são combinados pela operação, e o descritor da matriz de resultados é colocado no registrador X. (O argumento do registrador X é preservado pelo registrador ÚLTIMO X).



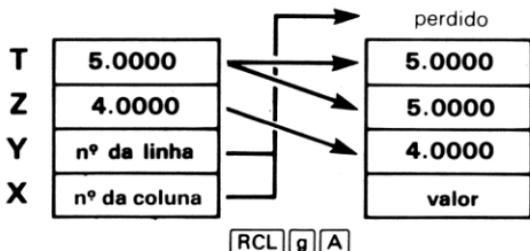
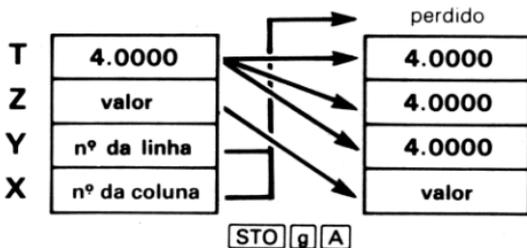
Muitas das funções de matrizes operam somente sobre a matriz especificada no registrador X, armazenando o resultado na mesma matriz. Para tais operações, o conteúdo da pilha operacional (inclusive o do registrador ÚLTIMO X) não são deslocados, embora o visor se altere para mostrar as novas dimensões, se necessário.

Para as funções **MATRIX** 7, **MATRIX** 8 e **MATRIX** 9, o descritor de matriz especificado no registrador X é colocado no registrador ÚLTIMO X e a norma ou (para **MATRIX** 9) o determinante é colocada(o) no registrador X. Os registradores Y, Z e T não são afetados.

Quando você recupera, no registrador X (estando ativada a movimentação da pilha operacional), descritores ou elementos de matrizes, os descritores e números anteriormente contidos na pilha operacional serão deslocados para cima, perdendo-se o conteúdo do registrador T. (O registrador ÚLTIMO X não é afetado).

Quando você armazena descritores, ou elementos de matrizes, o conteúdo da pilha operacional (e do registrador ÚLTIMO X) não é afetado.

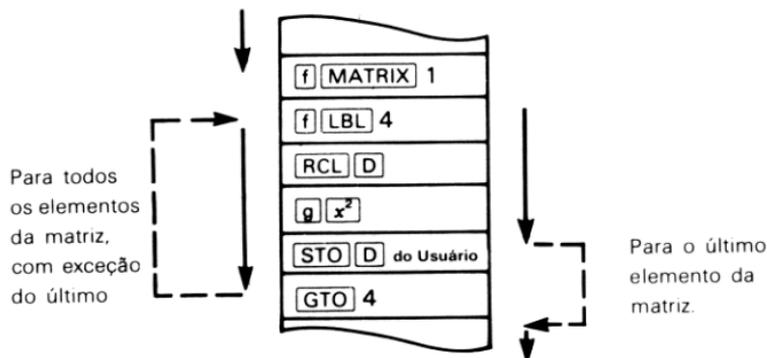
Em contraste com a operação descrita acima, as funções **STO** **g** e **RCL** **g** não afetam o registrador ÚLTIMO X e operam da maneira exposta abaixo.



## Usando Operações Matriciais num Programa

Se a calculadora estiver no Modo do Usuário durante a confecção de um programa e você quiser introduzir uma instrução **[STO]** ou **[RCL]** { **[A]** a **[E]**, **[i]** } para armazenar ou recuperar um elemento de matriz, a letra **u** substituirá o traço que normalmente aparece após o número da linha. Quando esta linha for executada por um programa, ela operará como se a calculadora estivesse o Modo do Usuário. Ou seja, os números da linha e coluna em **R<sub>0</sub>** e **R<sub>1</sub>** serão automaticamente incrementados de acordo com as dimensões da matriz especificada. Isto permite que você acesse os elementos seqüencialmente. (O anúncio **USER** não afeta a execução do programa).

Além disso, quando o último elemento é acessado pela instrução **[STO]** ou **[RCL]** do “usuário” (quando **R<sub>0</sub>** e **R<sub>1</sub>** voltam a ser 1) a execução do programa salta a próxima linha. Isto é útil num ciclo de um programa que armazene ou recupere cada elemento da matriz, prosseguindo então na execução do programa quando todos os elementos forem processados. Por exemplo, a seqüência dada a seguir eleva ao quadrado todos os elementos da matriz **D**:



As funções **[MATRIX]** 7 (norma de linha) e **[MATRIX]** 8 (norma de Frobenius) também operam como instruções de desvio condicional de um programa. Se o registrador **X** contiver um descritor de matriz, tais funções calcularão a norma da maneira usual e a execução prosseguirá com a próxima linha do programa. Se o registrador **X** contiver um número, a execução do programa saltará a próxima linha. Em ambos os casos, os conteúdos originais do registrador **X** são armazenados no registrador **ÚLTIMO X**. Isto é útil para se testar a presença de um descritor de matriz no registrador **X**, durante a execução de um programa.

## Resumo das Funções de Matrizes

### Sequências de Teclas

**g** **C<sub>y,x</sub>**

**CHS**

**f** **DIM** { **A**  
a **E**, **I** }

**f** **MATRIX** 0

**f** **MATRIX** 1

**f** **MATRIX** 2

**f** **MATRIX** 3

**f** **MATRIX** 4

**f** **MATRIX** 5

**f** **MATRIX** 6

**f** **MATRIX** 7

**f** **MATRIX** 8

**f** **MATRIX** 9

**f** **P<sub>y,x</sub>**

**RCL** { **A**  
a **E**, **(i)** }

**RCL** **g** { **A**  
a **E**, **(i)** }

**RCL** **DIM** { **A**  
a **E**, **I** }

### Resultados

Transforma  $\mathbf{z}^P$  em  $\mathbf{z}^C$

Troca o sinal de todos os elementos da matriz especificada no registrador X.

Dimensiona a matriz especificada.

Dimensiona todas as matrizes como  $0 \times 0$ .

Define os números de linha (em  $R_0$ ) e coluna (em  $R_1$ ) como sendo 1.

Transforma  $\mathbf{z}^P$  em  $\mathbf{z}$ .

Transforma  $\mathbf{z}$  em  $\mathbf{z}^P$ .

Calcula a transposta da matriz especificada no registrador X.

Multiplica a transposta da matriz especificada no registrador Y pela matriz especificada no registrador X. Armazena a resposta na matriz de resultados.

Calcula o resíduo na matriz de resultados.

Calcula a norma de linha da matriz especificada no registrador X.

Calcula a norma Euclidiana ou de Frobenius da matriz especificada no registrador X.

Calcula o determinante da matriz especificada no registrador X. Coloca  $LU$  na matriz de resultados.

Transforma  $\mathbf{z}^C$  em  $\mathbf{z}^P$

Recupera um elemento da matriz especificada, em função dos números da linha e coluna contidos em  $R_0$  e  $R_1$ , respectivamente.

Recupera um elemento da matriz especificada, em função dos números da linha e coluna contidos nos registradores Y e X, respectivamente.

Recupera as dimensões da matriz especificada nos registradores X e Y.

### Sequências de Teclas

### Resultados

<b>RCL</b> <b>MATRIX</b> { <b>A</b> a <b>E</b> }	Apresenta no visor o descritor da matriz especificada.
<b>RCL</b> <b>RESULT</b>	Apresenta no visor o descritor da matriz de resultados.
<b>f</b> <b>RESULT</b> { <b>A</b> a <b>E</b> }	Designa como matriz de resultados a matriz especificada.
<b>STO</b> { <b>A</b> a <b>E</b> , <b>(i)</b> }	Armazena o conteúdo do visor no elemento determinado pelo conteúdo de $R_0$ (linha) e $R_1$ (coluna) da matriz especificada.
<b>STO</b> <b>Q</b> { <b>A</b> a <b>E</b> , <b>(i)</b> }	Armazena o conteúdo do registrador <b>Z</b> no elemento determinado pelos conteúdos dos registradores <b>Y</b> (linha) e <b>X</b> (coluna) da matriz especificada.
<b>STO</b> <b>MATRIX</b> { <b>A</b> a <b>E</b> }	Se o visor contiver um descritor de matriz, todos os elementos dessa matriz serão copiados nos elementos da matriz especificada. Se o conteúdo do visor for um número, este será armazenado em todos os elementos da matriz especificada.
<b>STO</b> <b>RESULT</b>	Designa a matriz especificada no registrador <b>X</b> como a matriz de resultados.
<b>f</b> <b>USER</b>	Os números da linha (em $R_0$ ) e da coluna (em $R_1$ ) são automaticamente incrementados cada vez que <b>STO</b> ou <b>RCL</b> { <b>A</b> a <b>E</b> , <b>(i)</b> } são pressionadas.
<b>1/x</b>	Inverte a matriz especificada no registrador <b>X</b> . Armazena a resposta na matriz de resultados.
<b>+</b> , <b>-</b>	Se o conteúdo dos registradores <b>X</b> e <b>Y</b> forem (ambos) descritores de matrizes, os elementos das matrizes especificadas serão somados ou subtraídos. Se apenas um dos dois registradores <b>X</b> ou <b>Y</b> contiver um descritor de matriz, será feita a soma ou subtração de todos os elementos da matriz especificada com o escalar especificado no outro registrador. A resposta é armazenada na matriz de resultados.
<b>x</b>	Se os conteúdos dos registradores <b>X</b> e <b>Y</b> forem (ambos) descritores de matrizes, será calculado o produto <b>YX</b> das matrizes especificadas. Se apenas um dos dois registradores <b>X</b> ou <b>Y</b> contiver um descritor de matriz, será feita a

**Seqüências de Teclas****Resultados**

multiplicação de todos os elementos da matriz especificada pelo escalar especificado no outro registrador. A resposta é armazenada na matriz de resultados.



Se os conteúdos dos registradores X e Y forem (ambos) descritores, será efetuada a multiplicação da inversa da matriz especificada no registrador X pela matriz especificada no registrador Y. Se apenas o conteúdo de Y for um descritor, todos os elementos da matriz especificada em Y serão divididos pelo escalar contido no outro registrador.

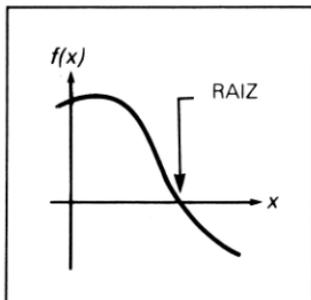
Se apenas o conteúdo de X for um descritor, todos os elementos da matriz especificada em X serão multiplicados pelo inverso do escalar contido no outro registrador. A resposta é armazenada na matriz de resultados.

## Cálculo das Raízes de uma Equação

Em muitas aplicações é necessária a resolução de equações do tipo

$$f(x) = 0.*$$

Isto significa que o que se deseja é calcular os valores de  $x$  que satisfazem a equação. Cada um desses valores de  $x$  é denominado *raiz* da equação  $f(x) = 0$  e um zero da função  $f(x)$ . Tais raízes (ou zeros), quando são reais, denominam-se *raízes reais* (ou zeros reais). Em muitos casos, as raízes de uma equação podem ser determinadas por métodos analíticos, por manipulação algébrica; em muitos outros casos, isso não é possível. São empregados métodos numéricos para se estimar as raízes quando os analíticos não são adequados. Ao utilizar a tecla **SOLVE** da sua HP-15C, você estará empregando uma técnica numérica avançada que permite o cálculo das *raízes reais* de uma enorme variedade de equações†, de maneira conveniente e realmente efetiva.



### Usando **SOLVE**

No cálculo de raízes, a operação **SOLVE** chama e executa repetidamente uma sub-rotina *escrita por você*, para a determinação de  $f(x)$ .

\* Na realidade, *qualquer* equação com uma variável pode ser expressa nessa forma. Por exemplo,  $f(x) = a$  é equivalente a  $f(x) - a = 0$  e  $f(x) = g(x)$  é equivalente a  $f(x) - g(x) = 0$ .

† A função **SOLVE** não usa a pilha imaginária.

As regras básicas para o uso de **SOLVE** são:

1. No Modo de Programação, introduza uma sub-rotina que calcule o valor de  $f(x) = 0$ . Esta sub-rotina deverá começar com uma instrução de rótulo (**f** **LBL** *rótulo*), devendo colocar o valor de  $f(x)$  no registrador X.

No Modo de Execução:

2. Introduza nos registradores X e Y duas estimativas iniciais da raiz desejada, separadas por **ENTER**. Tais estimativas simplesmente indicam à calculadora o domínio aproximado de  $x$  no qual deverá ser inicialmente feita a pesquisa da raiz de  $f(x) = 0$ .
3. Pressione **f** **SOLVE** seguidas pelo rótulo da sua sub-rotina. A calculadora e então pesquisará pelo zero de sua função e apresentará o resultado no visor. Se a função que você estiver analisando possuir mais de um zero, a rotina será interrompida quando encontrar qualquer um deles. Para o cálculo das demais raízes, você pode fornecer estimativas iniciais diferentes das anteriores e usar **SOLVE** novamente.

Imediatamente antes de **SOLVE** endereçar sua sub-rotina, ela coloca um valor de  $x$  nos registradores X, Y, Z e T. Este valor é então utilizado pela sua rotina para o cálculo de  $f(x)$ . Preenchendo toda a pilha operacional com o valor  $x$ , este fica continuamente disponível à sua sub-rotina. (O uso desta técnica está descrito à página 41).

**Exemplo:** Use **SOLVE** para calcular os valores de  $x$  para os quais

$$f(x) = x^2 - 3x - 10 = 0$$

Utilizando o método de Horner (veja a página 81), você pode reescrever  $f(x)$  para que possa ser programada mais eficientemente:

$$f(x) = (x - 3)x - 10$$

No Modo de Programação, introduza a seguinte sub-rotina que calcula  $f(x)$ :

**Pressione**

**g** **P/R**

**f** **CLEAR** **PRGM**

**Visor**

**000-**

**000-**

Modo de Programação.

Apaga a memória de programação.

Pressione	Visor	
$\boxed{f} \boxed{LBL} 0$	001-42,21, 0	Inicia com a instrução $\boxed{LBL}$ . A sub-rotina presume que a pilha operacional está preenchida com $x$ .
3	002- 3	
$\boxed{-}$	003- 30	Calcula $x - 3$ .
$\boxed{\times}$	004- 20	Calcula $(x - 3)x$ .
1	005- 1	
0	006- 0	
$\boxed{-}$	007- 30	Calcula $(x - 3)x - 10$ .
$\boxed{g} \boxed{RTN}$	008- 43 32	

No Modo de Execução, introduza duas estimativas iniciais nos registradores X e Y. Faça uma tentativa com as estimativas 0 e 10, para o cálculo da raiz positiva.

Pressione	Visor *	
$\boxed{g} \boxed{P/R}$		Modo de Execução.
0 $\boxed{ENTER}$	0.0000	} Estimativas iniciais.
10	10	

Agora você pode calcular a raiz desejada pressionando  $\boxed{f} \boxed{SOLVE} 0$ . Ao fazer isso, a calculadora não apresentará a resposta imediatamente. A HP-15C emprega um algoritmo iterativo † para estimar a raiz. O algoritmo analisa a sua função executando-a diversas vezes, chegando a executá-la dúzias de vezes ou mais. Isso é feito através da chamada repetida de sua sub-rotina. O cálculo de uma raiz em geral leva de 30 segundos a 2 minutos podendo, algumas vezes, levar até mais tempo.

Pressione  $\boxed{f} \boxed{SOLVE} 0$  e sente-se enquanto a sua HP-15C exibe um dos seus mais poderosos recursos. O visor apresentará a palavra **running** (em execução) durante a operação de  $\boxed{SOLVE}$ .

\* Pressione  $\boxed{f} \boxed{FIX} 4$  para obter a apresentação da forma mostrada aqui. O formato de apresentação não influencia a operação de  $\boxed{SOLVE}$ .

† Um algoritmo é um procedimento definido em passos que soluciona um problema matemático. Um algoritmo iterativo é o que contém uma parcela que é executada várias vezes no processo de obtenção da solução do problema.

Pressione

Visor

f SOLVE 0

5.0000

A raiz desejada.

Após o cálculo e apresentação da raiz, você pode se certificar de que o número contido no visor é realmente uma raiz de  $f(x) = 0$ , bastando verificar o conteúdo da pilha operacional. Você notou que o visor (o registrador X) contém a raiz desejada. O registrador Y contém uma estimativa anterior da raiz, que deverá ser bastante próxima da raiz apresentada. O registrador Z contém o valor de sua função calculado com a raiz apresentada.

Pressione

Visor

R ↓

5.0000

Estimativa anterior da raiz.

R ↓

0.0000

Valor da função na raiz, mostrando que  $f(x) = 0$ .

As equações quadráticas, tais como a que você está resolvendo, podem ter duas raízes. Se você especificar duas novas estimativas iniciais, poderá obter uma segunda raiz. Faça uma tentativa com as estimativas 0 e -10, para o cálculo da raiz negativa.

Pressione

Visor

0 ENTER

0.0000

10 CHS

-10

} Estimativas iniciais.

f SOLVE 0

-2.0000

A segunda raiz.

R ↓

-2.0000

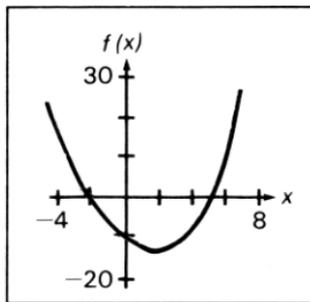
Estimativa anterior da raiz.

R ↓

0.0000

Valor de  $f(x)$  na segunda raiz.

Agora você encontrou as duas raízes de  $f(x) = 0$ . Observe que esta equação quadrática *poderia* ter sido resolvida algebricamente, e você teria obtido os mesmos resultados encontrados por SOLVE.

Gráfico de  $f(x)$

A potência e a conveniência da tecla **SOLVE** ficarão mais evidentes quando você tentar resolver uma equação cuja raiz não possa ser determinada algebricamente.

**Exemplo:** Um campeão no arremesso de martelo conseguiu um lançamento que atingiu uma velocidade ascendente de 50 metros/segundo. Se altura do martelo pode ser expressa como

$$h = 5000(1 - e^{-t/20}) - 200t,$$

qual o tempo gasto para que este toque o solo novamente? Nesta equação,  $h$  é a altura em metros e  $t$  é o tempo em segundos.



**Solução:** A solução desejada é o valor positivo de  $t$  para o qual  $h = 0$ .

Use a seguinte sub-rotina para calcular a altura.

**Pressione**

**g** **P/R**  
**f** **LBL** **A**

2

0

**+**

**CHS**

**e<sup>x</sup>**

**CHS**

1

**+**

5

0

0

0

**x**

**x  $\leftrightarrow$  y**

**Visor**

000-

001-42,21,11

002-

003-

004-

005-

006-

007-

008-

009-

010-

011-

012-

013-

014-

015-

2

0

10

16

12

16

1

40

5

0

0

0

20

34

Inicia com um rótulo.

A sub-rotina assume que  $t$  está presente nos registradores X e Y.

$-t/20$ .

$-e^{-t/20}$ .

$1 - e^{-t/20}$ .

$5000(1 - e^{-t/20})$ .

Traz um outro valor de  $t$  ao registrador X.

**Pressione****Visor**

2	016-	2	
0	017-	0	
0	018-	0	
$\boxed{\times}$	019-	20	$200t.$
$\boxed{-}$	020-	30	$5000(1 - e^{-t^{20}}) - 200t.$
$\boxed{g}$ $\boxed{RTN}$	021-	43 32	

Comute ao Modo de Execução, introduza as duas estimativas de tempo iniciais (por exemplo, 5 e 6 segundos) e execute  $\boxed{\text{SOLVE}}$ .

**Pressione****Visor**

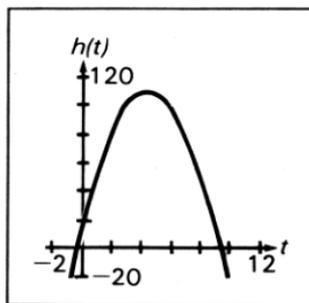
$\boxed{g}$ $\boxed{P/R}$		Modo de Execução.
5 $\boxed{\text{ENTER}}$	5.0000	} Estimativas iniciais.
6	6	
$\boxed{f}$ $\boxed{\text{SOLVE}}$ $\boxed{A}$	9.2843	A raiz desejada.

Verifique a raiz, revendo os registradores Y e Z.

**Pressione****Visor**

$\boxed{R}$ $\downarrow$	9.2843	Estimativa anterior da raiz.
$\boxed{R}$ $\downarrow$	0.0000	Valor da função na raiz, mostrando que $h = 0$ .

O martelo do esportista atingiu o solo 9.2843 segundos após o lançamento: uma marca memorável.

Gráfico de  $h$  versus  $t$

## Quando Nenhuma Raiz é Encontrada

Você já viu como a tecla **SOLVE** estima e apresenta a raiz de uma equação do tipo  $f(x) = 0$ . No entanto, é possível que uma equação não tenha raízes reais (ou seja, que não haja um valor de  $x$  real que satisfaça a igualdade). É claro que você não espera que a calculadora encontre uma raiz, nesse caso; ao invés da raiz será apresentada a mensagem **Error 8**.

**Exemplo:** Considere a equação

$$|x| = -1$$

que não tem solução, pois a função valor absoluto nunca dá resultado negativo. Expresse esta equação na forma requerida

$$|x| + 1 = 0$$

e tente utilizar **SOLVE** para encontrar uma solução.

**Pressione**

**g** **P/R**

**f** **LBL** 1

**g** **ABS**

1

**+**

**g** **RTN**

**Visor**

000-

001-42,21, 1

002- 43 16

003- 1

004- 40

005- 43 32

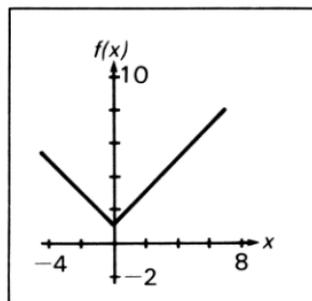


Gráfico de  $f(x) = |x| + 1$

Modo de Programação.

Como a função valor absoluto tem um mínimo próximo do argumento zero, especifique as estimativas iniciais nessa região, digamos -1 e 1. A seguir, tente calcular uma raiz.

**Pressione**

**g** **P/R**

1 **ENTER**

1 **CHS**

**f** **SOLVE** 1

**Visor**

1.0000

-1

**Error 8**

Modo de Execução.

} Estimativas iniciais.

Esta mensagem indica que não foi encontrada nenhuma raiz.

**←**

0.0000

Apaga a mensagem de erro.

Como você observou, a HP-15C parou de procurar uma raiz de  $f(x) = 0$  quando decidiu que não existia raiz alguma (pelo menos não no intervalo

de  $x$  inicialmente fornecido). A mensagem **Error 8** não indica a tentativa de execução de uma operação “ilegal”; simplesmente relata que não foi detectada raiz alguma no intervalo em que **SOLVE** presumia sua existência (baseada nas suas estimativas iniciais).

Se a HP-15C parar de procurar uma raiz e apresentar uma mensagem de erro, deverá ter ocorrido uma das 3 seguintes condições:

- Se repetidas iterações produzirem um mesmo valor constante, da função especificada, não nulo, a execução será encerrada, apresentando a mensagem **Error 8**.
- Se inúmeras tentativas indicarem que a *magnitude* da função parece ter um mínimo não nulo na área sendo pesquisada, a execução será encerrada apresentando a mensagem **Error 8**.
- Se for utilizado um argumento impróprio numa operação matemática da sua sub-rotina, a execução será encerrada apresentando a mensagem **Error 0**.

No caso da função de valor constante, a rotina pode verificar que os valores calculados não convergem a zero. Isto pode ocorrer para uma função cujos 10 dígitos mais significativos sejam constantes (tal como se vê em gráficos assintóticos) ou para uma função que tenha uma “planície” relativamente extensa, no intervalo de variação de  $x$  sendo investigando.

No caso da magnitude da função ter chegado a um mínimo, a rotina realizou uma série de tentativas para obter uma menor magnitude da função. Nesse caso, ela não encontrou um  $x$  para o qual o gráfico da função tenha tocado ou cruzado o eixo  $x$ .

O último caso denota uma deficiência potencial da sub-rotina e não uma limitação de **SOLVE**. Operações impróprias podem ser evitadas, às vezes, especificando-se estimativas iniciais que restrinjam a pesquisa numa região em que não ocorram tais problemas. No entanto, a rotina **SOLVE** é muito agressiva e poderá executar a função num intervalo bastante amplo. É uma boa prática a inclusão, na sua sub-rotina, de um teste ou ajuste de argumentos potencialmente impróprios antes de se realizar uma operação (por exemplo, use **ABS** antes de  $\sqrt{x}$ ). Outra boa tática é a mudança de escala para variáveis que possam assumir valores muito grandes.

O sucesso de **SOLVE** na localização de uma raiz depende, primariamente, da natureza da função que estiver sendo analisada e das estimativas iniciais da pesquisa. A simples existência de uma raiz não assegura que o uso casual da tecla **SOLVE** a determine. Se a função  $f(x)$  tiver uma assíntota horizontal não nula, ou um mínimo local de sua magnitude, a rotina somente poderá determinar uma raiz de  $f(x) = 0$  se as estimativas iniciais não

concentrarem a pesquisa numa dessas regiões improdutivas, e, é claro, se a raiz realmente existir.

## Escolhendo Estimativas Iniciais

Ao utilizar **SOLVE** para encontrar a raiz de uma equação, as duas estimativas iniciais que você fornece, determinam os valores da variável  $x$  nos quais a rotina principia a busca. Em geral, a probabilidade de você encontrar uma particular raiz aumenta com o seu nível de conhecimento do comportamento da função que estiver sendo analisada. De maneira realística, estimativas inteligentes facilitam (e muito) a determinação de uma raiz.

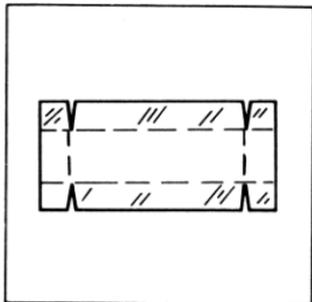
As estimativas iniciais que você usa podem ser escolhidas de várias maneiras:

Se a variável  $x$  tiver um intervalo de variação limitado, no qual se possa conceituar a existência de uma solução, é razoável se escolher as estimativas iniciais nesse intervalo. Ocorre frequentemente da equação que se aplica a um problema real, ter, além da solução desejada, outras raízes sem significado físico. Isso em geral ocorre porque a equação sendo analisada se aplica apenas dentro de certos limites da variável. Você deverá conhecer tais restrições e interpretar os resultados de maneira adequada.

Se você tiver algum conhecimento do comportamento da função  $f(x)$  com relação a diferentes valores de  $x$ , estará à vontade para especificar estimativas iniciais na vizinhança de um zero da função. Você também poderá evitar intervalos de  $x$  problemáticos, tais como os que produzam valores relativamente constantes ou mínimos da magnitude da função.

**Exemplo:** Deseja-se obter uma caixa sem a tampa superior, com  $7.5 \text{ dcm}^3$  de volume, a partir de uma chapa de metal tendo  $4 \text{ dcm} \times 8 \text{ dcm}$ . Como o metal deveria ser dobrado? (Dá-se preferência a uma caixa funda do que a uma caixa rasa).

**Solução:** Você precisa determinar a altura da caixa (ou seja, quanto será dobrado em todos os 4 lados) que dá o volume especificado. Se  $x$  é a altura (ou seja, a parcela a ser dobrada), o comprimento da caixa é  $(8 - 2x)$  e a largura é  $(4 - 2x)$ . O volume  $V$  é dado por



$$V = (8 - 2x)(4 - 2x)x$$

Expandindo-se a expressão e utilizando-se o método de Horner (página 81), esta equação pode ser reescrita assim:

$$V = 4((x - 6)x + 8)x$$

Como  $V = 7.5$ , calcule os valores de  $x$  para os quais

$$f(x) = 4((x - 6)x + 8)x - 7.5 = 0$$

A sub-rotina dada a seguir calcula  $f(x)$ :

Pressione	Visor	
<input type="button" value="g"/> P/R	000-	Modo de Programação.
<input type="button" value="f"/> LBL 3	001-42,21, 3	Rótulo.
6	002-	6 Assume que a pilha operacional esteja carregada com $x$ .
<input type="button" value="-"/>	003-	30
<input type="button" value="x"/>	004-	20 $(x - 6)x$ .
8	005-	8
<input type="button" value="+"/> <input type="button" value="x"/>	006-	40
<input type="button" value="x"/>	007-	20 $((x - 6)x + 8)x$ .
4	008-	4
<input type="button" value="x"/>	009-	20 $4((x - 6)x + 8)x$ .
7	010-	7
<input type="button" value="."/>	011-	48
5	012-	5
<input type="button" value="-"/>	013-	30
<input type="button" value="g"/> RTN	014-	43 32

Parece razoável que tanto uma caixa alta e estreita quanto uma caixa rasa e larga possam ser formadas dando o volume desejado. Como se está dando preferência a uma caixa alta, a estimativa de uma altura maior parece sensata. No entanto, altura acima de 2 dcm não são fisicamente possíveis (pois a chapa tem apenas 4 dcm de largura). Estimativas iniciais de 1 e 2 dcm serão apropriadas.

Calcule a altura desejada:

**Pressione**

**Visor**

$\square$  P/R

Modo de Execução.

1 ENTER

1.0000

Estimativas iniciais.

2

2

f SOLVE 3

1.5000

A altura desejada.

R ↓

1.5000

Estimativa anterior.

R ↓

0.0000

Valor de  $f(x)$  na raiz.

Tomando-se a altura de 1.5 dcm consegue-se construir a caixa especificada de  $5.0 \times 1.0 \times 1.5 \text{ dcm}^3$ .

Se você não considerar a altura com uma limitação superior e utilizar estimativas iniciais de 3 e 4 dcm (ainda menores do que a largura), você irá obter uma altura de 4.2026 dcm: uma raiz que não tem significado físico. Se você utilizar estimativas iniciais pequenas, digamos 0 e 1 dcm, irá obter uma altura de 0.2974 dcm, que corresponde à caixa rasa indesejada.

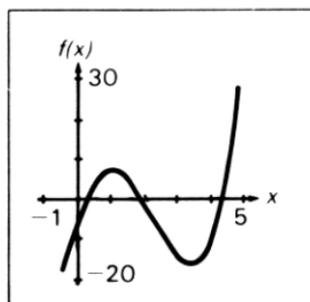


Gráfico de  $f(x)$

Como auxílio para examinar o comportamento de uma função, você pode facilmente calculá-la para um ou mais valores de  $x$ , se a sua sub-rotina estiver na memória de programação. Para fazer isso, preencha a pilha operacional com  $x$ . Execute a sub-rotina para calcular o valor da função (pressione  $\square$  rótulo alfabético ou  $\square$  rótulo).

Desenhe o gráfico da função com os valores obtidos. Este procedimento é particularmente útil para funções cujo comportamento você desconhece. Uma função de aparência simples pode ter um gráfico com variações relativamente severas, que você não poderia prever. A ocorrência de uma raiz num determinado entorno pode ser de localização difícil, a menos que você especifique uma estimativa inicial bastante próxima da raiz.

Se você não tiver informação ou um conceito intuitivo da natureza da função ou da localização do zero que você estiver pesquisando, empregue a tática de procurar a solução por tentativa e erro.

O sucesso da pesquisa da solução depende parcialmente da própria função. O método de tentativa e erro é freqüentemente (mas não sempre) um sucesso.

- Se você especificar duas estimativas iniciais, positivas ou negativas, moderadamente grandes, e o gráfico da função não tiver uma assíntota horizontal, a rotina encontrará a raiz mais positiva ou negativa (a menos que a função oscile muito, como ocorre nas funções trigonométricas).
- Se você já tiver determinado uma raiz da função, poderá procurar a outra raiz especificando estimativas que sejam relativamente distantes de zeros conhecidos.
- Muitas funções apresentam um comportamento especial quando seus argumentos se aproximam de zero. Você pode verificar a sua função para determinar valores de  $x$  para os quais sua função se torna nula, e a seguir especificar estimativas próximas desses valores.

Embora normalmente sejam fornecidas duas estimativas distintas quando se utiliza **SOLVE**, você pode fornecer a mesma estimativa e colocá-la nos registradores X e Y. Se as duas estimativas forem idênticas, uma segunda será gerada internamente. Se a sua estimativa única for não nula, a segunda estimativa diferirá da sua por uma unidade no 7º dígito significativo. Se a sua estimativa for zero,  $1 \times 10^{-7}$  será empregada como segunda estimativa. A seguir, a rotina de cálculo da raiz prosseguirá como se tivessem sido fornecidas duas estimativas distintas.

## Usando **SOLVE** num Programa

Você pode utilizar **SOLVE** como parte de um programa. Certifique-se de que o programa forneça as estimativas iniciais nos registradores X e Y antes da operação de **SOLVE**. A rotina **SOLVE** pára, colocando um valor de  $x$  no registrador X e o correspondente valor da função no registrador Z. Se o valor de  $x$  for uma raiz, o programa prosseguirá com a linha seguinte; caso contrário, a próxima linha será saltada (veja maiores detalhes sobre raízes em Interpretando Resultados, na página 227). Essencialmente, a instrução **SOLVE** testa se o valor de  $x$  é uma raiz e então procede de acordo com a regra “Faça se Verdadeiro”. O programa poderá então processar o caso da raiz não ter sido determinada, como por exemplo, definir novas estimativas ou alterar um parâmetro da função.

O uso de **SOLVE** como instrução de um programa utiliza um dos 7 retornos que a calculadora pode manter pendentes. Como a sub-rotina chamada por **SOLVE** utiliza um segundo retorno, poderão ser ainda mantidos 5 retornos pendentes. Por outro lado, ao ser executada pelo teclado, **SOLVE** por si só, não utiliza um dos retornos pendentes, podendo então serem mantidos outros seis dentro da sub-rotina chamada por **SOLVE**. Lembre-se de que se os 7 retornos pendentes forem utilizados, a chamada de uma 8ª sub-rotina (pendente) resultará na apresentação da mensagem **Error 5**. (Veja à página 105).

## Restrição ao Uso de **SOLVE**

A única restrição a respeito do uso de **SOLVE** é que esta não pode ser utilizada recursivamente. isto significa que você não pode usar **SOLVE** numa rotina que seja chamada durante a execução dela própria. Se isto ocorrer, a execução será interrompida e a mensagem **Error 7** será apresentada. É possível, no entanto, usar **SOLVE** com **/:**, utilizando dessa forma, os recursos avançados dessas duas teclas.

## Requisitos de Memória

A operação de **SOLVE** ocupa 5 registradores. (No Apêndice C você verá como eles são automaticamente alocados). Se não houver 5 registradores disponíveis, **SOLVE** não será executada, e a mensagem **Error 10** será apresentada.

Uma rotina que combine **SOLVE** e **/:** ocupará 23 registradores.

## Informações Adicionais

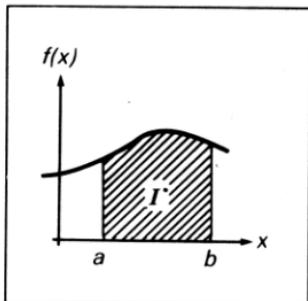
NO Apêndice D, Uma Visão mais Detalhada de **SOLVE**, são apresentadas técnicas adicionais e explicações sobre o uso de **SOLVE**. Os tópicos abordados são os seguintes:

- Como **SOLVE** funciona.
- Precisão da Raiz.
- Interpretando os Resultados.
- Calculando Diversas Raízes.
- Limitando o Tempo de Estimação.
- Informações Avançadas.

# Integração Numérica

Existem muitos problemas em Matemática, Engenharia e em outras áreas que exigem o cálculo da integral definida de uma função. Se a função é denotada por  $f(x)$  e o intervalo de integração é  $[a, b]$ , a integral pode ser expressa matematicamente como

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$



A integral  $I$  pode ser interpretada geometricamente como a área da região limitada pelo gráfico de  $f(x)$ , pelo eixo  $x$  e pelos limites  $x = a$  e  $x = b$ \*

Quando uma integral é de cálculo difícil ou até mesmo impossível pelos métodos analíticos, ela pode ser calculada através de técnicas numéricas. Em geral, isso é feito apenas com um programa computacional bastante complicado. Com a sua HP-15C, no entanto, você pode realizar a integração numérica com bastante facilidade, através da tecla  $\int$  †.

## Usando $\int$

As regras básicas pra o uso de  $\int$  são:

1. No Modo de Programação, introduza uma sub-rotina que calcule o valor da função  $f(x)$  que você deseja integrar. Esta sub-rotina deve se iniciar com a instrução  $\int$   $\text{LBL}$  rótulo e colocar um valor de  $f(x)$  no registrador X, ao seu final.

\* Desde que  $f(x)$  não seja negativa no intervalo de integração.

† A função  $\int$  não usa a pilha imaginária.

No Modo de Execução:

2. Introduza o limite inferior do intervalo de integração ( $a$ ) no registrador X e pressione **[ENTER]** para copiá-lo no registrador Y.
3. Introduza o limite superior do intervalo de integração ( $b$ ) no registrador X.
4. Pressione **[f]** **[f:]** seguidas pelo rótulo de sua sub-rotina.

**Exemplo:** Certos problemas de Engenharia e Física exigem o cálculo das *funções de Bessel*. A função de Bessel de primeiro grau, de ordem 0, pode ser expressa como

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen} \theta) d\theta.$$

Calcule  $J_0(1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\operatorname{sen} \theta) d\theta.$

No Modo de Programação, introduza a seguinte sub-rotina que calcula a função  $f(\theta) = \cos(\operatorname{sen} \theta)$

Pressione	Visor	
<b>[g]</b> <b>[P/R]</b>	<b>000-</b>	Modo de Programação.
<b>[f]</b> <b>CLEAR</b> <b>[PRGM]</b>	<b>000-</b>	Apaga a Memória de Programação.
<b>[f]</b> <b>[LBL]</b> <b>0</b>	<b>001-42.21, 0</b>	Inicia a sub-rotina com uma instrução <b>[LBL]</b> . A sub-rotina assume que o registrador X contém um valor de $\theta$ .
<b>[SIN]</b>	<b>002- 23</b>	Calcula $\operatorname{sen} \theta$ .
<b>[COS]</b>	<b>003- 24</b>	Calcula $\cos(\operatorname{sen} \theta)$ .
<b>[g]</b> <b>[RTN]</b>	<b>004- 43 32</b>	

Volte agora ao Modo de Execução e introduza o limite inferior de integração no registrador Y e o limite superior no registrador X. Para este problema em particular, você deve especificar o Modo Radianos para as funções trigonométricas.

Pressione	Visor	
$\boxed{g} \boxed{P/R}$		Modo de Execução.
$0 \boxed{ENTER}$	<b>0.0000</b>	Introduz o limite inferior, 0, no registrador Y.
$\boxed{g} \boxed{\pi}$	<b>3.1416</b>	Introduz o limite superior, $\pi$ , no registrador X.
$\boxed{g} \boxed{RAD}$	<b>3.1416</b>	Especifica o Modo Radianos para as funções trigonométricas.

Agora você já está pronto para poder pressionar  $\boxed{f} \boxed{f/}$  0 e calcular a integral. Ao fazer isso, você verá (assim como se sucedeu com  $\boxed{SOLVE}$ ) que a calculadora não apresenta o resultado imediatamente, como ocorre com outras operações. A HP-15C calcula integrais usando um sofisticado algoritmo iterativo. Este algoritmo calcula  $f(x)$  (a função a ser integrada) para vários valores de  $x$  pertencentes ao intervalo de integração. Para cada um desses valores, a calculadora avalia a função, executando a sub-rotina que você escreveu com essa finalidade. Quando a calculadora executa uma sub-rotina muitas vezes, como é o caso de  $\boxed{f/}$ , você não deve esperar que a resposta seja imediatamente apresentada. A maioria das integrais exige da ordem de 30 segundos a 2 minutos, e até mais, para determinadas integrais. Mais adiante veremos como você deve proceder para reduzir o tempo de execução; por enquanto, pressione  $\boxed{f} \boxed{f/}$  0 e faça um intervalo para descanso (ou prossiga na leitura do manual) enquanto a HP-15C faz o trabalho pesado por você.

Pressione	Visor	
$\boxed{f} \boxed{f/} 0$	<b>2.4040</b>	$= \int_0^{\pi} \cos(\sin \theta) d\theta.$

Não se esqueça de multiplicar o valor da integral pelas eventuais constantes que ocorrem nos casos mais gerais, fora da integral. Neste caso em particular, precisamos multiplicar o valor da integral por  $1/\pi$  para obter  $J_0(1)$ :

Pressione	Visor	
$\boxed{g} \boxed{\pi}$	<b>3.1416</b>	
$\boxed{+}$	<b>0.7652</b>	$J_0(1).$

Antes de chamar a sub-rotina que você forneceu para o cálculo de  $f(x)$ , o algoritmo de  $\boxed{f}$  (da mesma maneira que o algoritmo de  $\boxed{\text{SOLVE}}$ ) coloca o valor de  $x$  nos registradores X, Y, Z e T. Como cada um dos registradores da pilha operacional contém o valor de  $x$ , e a sua sub-rotina pode fazer cálculos com esse número sem ter que recuperá-lo de um registrador de armazenamento. As sub-rotinas dos dois próximos exemplos tiram proveito desse recurso. (Uma técnica de programação que explora esse recurso. (Uma técnica de programação que explora esse recurso em funções polinomiais foi vista na página 80).

**Observação:** Como a calculadora coloca o valor de  $x$  em todos os registradores da pilha operacional, qualquer conteúdo anterior da mesma será substituído por  $x$ . Por conseguinte, se a pilha operacional tiver resultados intermediários que sejam necessários após o cálculo da integral, coloque-os em registradores de armazenamento para uso futuro.

Ocasionalmente você pode querer utilizar a sub-rotina que você escreveu para  $\boxed{f}$ , simplesmente para calcular o valor de  $f(x)$  para um dado  $x$ . Se você fizer isso com uma função que retire  $x$  da pilha operacional mais de uma vez, certifique-se de preencher a pilha operacional manualmente com o valor de  $x$ , pressionando  $\boxed{\text{ENTER}}$   $\boxed{\text{ENTER}}$   $\boxed{\text{ENTER}}$ , antes de executar a sub-rotina.

**Exemplo:** A função de Bessel de primeira grau, de ordem 1, pode ser expressa como

$$J_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\theta - x \operatorname{sen} \theta) d\theta.$$

Calcule  $J_1(1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\theta - \operatorname{sen} \theta) d\theta.$

Introduza a sub-rotina que calcula a função  $f(\theta) = \cos(\theta - \operatorname{sen} \theta)$ .

**Pressione**

$\boxed{g}$   $\boxed{\text{P/R}}$

$\boxed{f}$   $\boxed{\text{LBL}}$  1

**Visor**

000-

001-42.21, 1

Modo de Programação.

Inicia a sub-rotina com um rótulo.

## Pressione

[SIN]

[-]

[COS]

[g] [RTN]

## Visor

002-

003-

004-

005-

23 Calcula  $\text{sen } \theta$ .

30 Como um valor de  $\theta$  será colocado no registrador Y pelo algoritmo de [f/], antes de executar esta sub-rotina, a operação [-] neste ponto calculará  $(\theta - \text{sen } \theta)$ .

24 Calcula  $\cos(\theta - \text{sen } \theta)$ .

43 32

No Modo de Execução, introduza os limites de integração nos registradores X e Y. Certifique-se de ativar o Modo Trigonométrico Radianos e então pressione [f] [f/] 1 para calcular a integral. Finalmente multiplique a integral por  $1/\pi$ , para obter  $J_1(1)$ .

## Pressione

[g] [P/R]

0 [ENTER]

[g] [ $\pi$ ]

[g] [RAD]

[f] [f/] 1

[g] [ $\pi$ ] [ $\div$ ]

## Visor

0.0000

3.1416

3.1416

1.3825

0.4401

Modo de Execução.

Introduz o limite inferior no registrador Y.

Introduz o limite superior no registrador X.

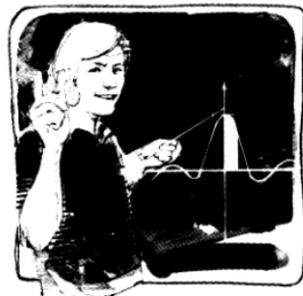
(Se o Modo Radianos ainda não estiver em vigor).

$$= \int_0^{\pi} \cos(\theta - \text{sen } \theta) d\theta.$$

 $J_1(1)$ .

**Exemplo:** Certos problemas da Teoria das Comunicações (tal como a transmissão de um pulso em redes ideais) exige o cálculo de uma integral, comumente denominada como *integral do seno* da forma

$$Se(t) = \int_0^t \frac{\text{sen } x}{x} dx.$$



Calcule  $Se(2)$ .

Introduza a sub-rotina abaixo para calcular a função  $f(x) = (\text{sen } x)/x$ .\*

Pressione	Visor	
$\boxed{g}$ $\boxed{P/R}$	000-	Modo de Programação.
$\boxed{f}$ $\boxed{LBL}$ .2	001-42,21, .2	Inicia a sub-rotina com uma instrução $\boxed{LBL}$
$\boxed{SIN}$	002- 23	Calcula $\text{sen } x$ .
$\boxed{x \rightleftharpoons y}$	003- 34	Como será colocado um valor de $x$ no registrador Y pelo algoritmo de $\boxed{f}$ , antes desta sub-rotina ser executada, a operação $\boxed{x \rightleftharpoons y}$ neste ponto devolverá $x$ ao registrador X e moverá $\text{sen } x$ ao registrador Y.
$\boxed{\div}$	004- 10	Divide $\text{sen } x$ por $x$ .
$\boxed{g}$ $\boxed{RTN}$	005- 43 32	

Introduza agora os limites de integração nos registradores X e Y. No Modo Radianos, pressione  $\boxed{f}$   $\boxed{f}$  .2 para calcular a integral.

Pressione	Visor	
0 $\boxed{ENTER}$	0.0000	Introduz o limite inferior no registrador Y.
2	2	Introduz o limite superior no registrador X.
$\boxed{g}$ $\boxed{RAD}$	2.0000	(Se o Modo Radianos ainda não estiver em vigor)
$\boxed{f}$ $\boxed{f}$ .2	1.6054	$Se(2)$ .

\* Se a calculadora tentasse calcular  $f(x) = \text{sen}(x)/x$  para  $x = 0$ , que é o limite inferior da integração, a execução seria interrompida, apresentando a mensagem **iError 0** no visor (denotando a tentativa de divisão por zero), e a integral não seria calculada. No entanto, o algoritmo de  $\boxed{f}$  normalmente *não* calcula o valor da função nos extremos do intervalo, para que a calculadora possa realizar o cálculo da integral que não esteja definida nesses pontos. Somente nos casos em que os extremos do intervalo de integração forem muito próximos, ou quando o número de pontos amostrados for muito grande, o algoritmo realizará o cálculo da função nos limites de integração.

## Precisão de $\int$

A precisão da integral de uma função qualquer depende da precisão da própria função. Dessa maneira, a precisão da integral  $\int$  é limitada pela precisão da função calculada pela sua sub-rotina.\* Para especificar a precisão da função, defina o formato de apresentação de modo que o visor apresente um número de dígitos *menor ou igual* ao que você julga preciso para os valores da função.† Quanto menor for o número de dígitos especificados, mais rapidamente a calculadora efetuará a integral;‡ mas ela presumirá que a função é precisa apenas até o número de dígitos especificados no formato de apresentação. Veremos logo mais como você pode determinar a precisão da integral calculada, depois de dizer algumas palavras sobre o formato de apresentação.

Você se recorda de que a HP-15C possui 3 tipos de formatos de apresentação: **FIX**, **SCI** e **ENG**. O tipo de formato de apresentação depende essencialmente de sua conveniência, pois a maioria das integrais darão aproximadamente os mesmos resultados com qualquer deles (desde que o número de dígitos seja corretamente especificado, considerando-se a magnitude da função). Por ser mais conveniente no cálculo da maioria das integrais, usaremos **SCI** nos próximos exemplos.

**Observação:** Lembre-se de que, uma vez definido o formato de apresentação, você poderá alterar o número de dígitos no visor, armazenando um número em  $R_1$  e então pressionando **f** **FIX** **I**, **f** **SCI** **I** ou **f** **ENG** **I**, como foi visto na seção 10. Este recurso é especialmente útil quando  $\int$  é executada como parte de um programa.

---

\* É possível que as integrais de funções com características peculiares (tais como picos ou oscilações muito rápidas) possam ser calculadas de maneira imprecisa. No entanto, *esta possibilidade é bastante remota*. As características gerais das funções que poderiam ocasionar problemas, bem como as técnicas para sua manipulação serão vistas no Apêndice E.

† A precisão de uma função calculada também depende de considerações sobre a precisão das constantes empíricas da função, e sobre os erros de arredondamento dos cálculos, entre outras.

‡ A razão disso é abordada no Apêndice E.

Como a precisão de qualquer integral é limitada pela precisão da função (indicada pelo formato de apresentação), a calculadora não pode computar exatamente o valor de uma integral, mas tão somente *aproximá-la*. A HP-15C coloca a incerteza\* da aproximação de uma integral no registrador Y e, ao mesmo tempo, coloca a aproximação no registrador X. Para determinar a precisão de uma aproximação, verifique sua incerteza pressionando  $\boxed{x \div y}$ .

**Exemplo:** Estando em vigor o formato de apresentação  $\boxed{\text{SCI}} 2$ , calcule a integral da expressão de  $J_1(1)$  (do exemplo da página 198).

Pressione	Visor	
$\boxed{0}$ $\boxed{\text{ENTER}}$	0.0000	Introduz o limite inferior no registrador Y.
$\boxed{q}$ $\boxed{\pi}$	3.1416	Introduz o limite superior no registrador X.
$\boxed{q}$ $\boxed{\text{RAD}}$	3.1416	(Se o Modo Radianos ainda não estiver em vigor).
$\boxed{f}$ $\boxed{\text{SCI}} 2$	3.14 00	Define o formato $\boxed{\text{SCI}} 2$ de apresentação.
$\boxed{f}$ $\boxed{/:}$ 1	1.38 00	Valor aproximado da integral em $\boxed{\text{SCI}} 2$ .
$\boxed{x \div y}$	1.88 -03	Incerteza da aproximação em $\boxed{\text{SCI}} 2$ .

O valor da integral é  $1.38 \pm 0.00188$ . Como a incerteza não afeta a aproximação até a sua terceira casa decimal, você pode considerar como exatos todos os dígitos apresentados nesta aproximação.

---

\* Nenhum algoritmo de integração numérica pode calcular a diferença exata entre a aproximação e o valor real da integral. Mas o algoritmo da HP-15C estima um "limite superior" dessa diferença, que é a *incerteza* da aproximação. Como exemplo, se a integral  $Se(2)$  é  $1.6054 \pm 0.0001$ , a aproximação da integral é 1.6054 e sua incerteza é 0.0001. Isto significa que embora não saibamos a diferença exata entre o valor real da integral e sua aproximação, *sabemos* que é altamente improvável que ela seja superior a 0.0001. (Veja a primeira nota do rodapé da página 201).

Em geral é difícil se prever quantos dígitos de uma aproximação não serão afetados pela incerteza. Isso depende da particular função sendo integrada, dos limites de integração e do formato de apresentação no visor.

Se a incerteza de uma aproximação é maior do que a que você pode tolerar, ela pode ser diminuída especificando-se um maior número de dígitos no formato de apresentação e repetindo-se a aproximação\*.

Toda vez que você precisar repetir uma aproximação, não será necessária a reintrodução dos limites de integração nos registradores X e Y. Depois que uma integral é calculada, não só a aproximação e a sua incerteza são colocadas nos registradores X e Y, mas também o limite superior da integração é colocado no registrador Z e o limite inferior é colocado no registrador T. Para trazer os limites de volta aos registradores X e Y, para a realização de um novo cálculo, basta pressionar  $\boxed{R\downarrow}$   $\boxed{R\downarrow}$ .

**Exemplo:** Calcule a integral contida na expressão de  $J_1(1)$  de modo que a precisão seja de 4 casas decimais, ao invés de apenas duas.

Pressione	Visor	
$\boxed{f}$ $\boxed{SCI}$ 4	1.8826 -03	Define o formato $\boxed{SCI}$ 4 de apresentação.
$\boxed{R\downarrow}$ $\boxed{R\downarrow}$	3.1416 00	Gira o conteúdo da pilha operacional para baixo, até o limite superior ficar no registrador X.
$\boxed{f}$ $\boxed{f}$ 1	1.3825 00	Aproximação da integral em $\boxed{SCI}$ 4.
$\boxed{x \approx y}$	1.7091 -05	Incerteza da aproximação em $\boxed{SCI}$ 4.

A incerteza calculada garante a precisão da aproximação em pelo menos 4 casas decimais. Observe que a incerteza da aproximação em  $\boxed{SCI}$  4 é cerca de um centésimo da incerteza da aproximação em  $\boxed{SCI}$  2. Em geral, a incerteza de qualquer aproximação de  $\boxed{f}$  decrescerá de um fator de 10 para cada dígito adicional especificado no formato de apresentação.

\* Desde que  $f(x)$  ainda seja calculada segundo a precisão determinada pelo número de casas decimais do formato de apresentação.

No exemplo anterior, a incerteza indicava que a aproximação *deveria* ser correta apenas nas 4 casas decimais. Se apresentarmos momentaneamente todos os 10 dígitos da aproximação, e a compararmos com o valor real da aproximação (na verdade, uma aproximação que se saiba ser precisa para um número suficiente de casas decimais) descobriremos que a aproximação é na realidade mais precisa do que a indicada pela incerteza.

Pressione	Visor	
$x \rightarrow y$	1.3825 00	Retorna a aproximação ao visor
f CLEAR PREFIX	1382459676	Todos os 10 dígitos da aproximação.

O valor desta integral, correto até a 8ª casa decimal, é 1.38245969. A aproximação da calculadora é precisa até a 7ª casa decimal, ao invés de sê-la até a 4ª. De fato, como a incerteza de uma aproximação é calculada de maneira muito conservadora, *a aproximação da calculadora, na maioria dos casos, será mais precisa do que a sua incerteza indicar*. No entanto, normalmente não há meios de se determinar *quão precisa* é uma aproximação.

Você encontrará, no Apêndice E, informações mais detalhadas sobre a incerteza e a precisão da aproximação de  $\int$ .

## Usando $\int$ num Programa

$\int$  pode ser utilizada como uma instrução de um programa, desde que este não seja chamado (como uma sub-rotina) pela própria  $\int$ . Em outras palavras,  $\int$  não pode ser utilizada recursivamente. Conseqüentemente, você não pode usar  $\int$  para o cálculo de integrais múltiplas; se você tentar fazer isso, a calculadora irá parar, apresentando a mensagem **Error 7** no visor. No entanto,  $\int$  pode ser utilizada como uma instrução de uma sub-rotina chamada por **SOLVE**.

O uso de  $\int$  como instrução de um programa utiliza um dos 7 retornos pendentes da calculadora. Como a sub-rotina chamada por  $\int$  utiliza um segundo retorno, restarão outros cinco retornos pendentes. Por outro lado, ao ser executada pelo teclado,  $\int$  por si só não utiliza um dos retornos pendentes, de forma que restariam outros 5 que poderiam ser utilizados por sub-rotinas dentro das sub-rotinas chamadas por  $\int$ . Lembre-se de que se todos os 7 retornos pendentes tiverem sido utilizados, a chamada de uma 8ª sub-rotina encadeada resultará na apresentação da mensagem **Error 5** (Veja à página 108).

## Requisitos de Memória

$\int$  utiliza 23 registradores em sua operação. (O Apêndice C explica como eles são automaticamente alocados). Se não houver 23 registradores disponíveis,  $\int$  não será executada e a mensagem **Error 10** aparecerá no visor.

Uma rotina que combine  $\int$  com **SOLVE** também exigirá 23 registradores de armazenamento.

## Informações Adicionais

Esta seção forneceu as informações para você utilizar  $\int$  com segurança, numa enorme variedade de aplicações. No apêndice E veremos aspectos menos comuns de  $\int$ , assim distribuídos:

- Como  $\int$  funciona.
- Precisão, Incerteza e Duração do Cálculo.
- A Incerteza e o Formato de Apresentação no Visor.
- Condições que Poderiam Ocasionar Resultados Incorretos.
- Condições que Prolongam a Duração do Cálculo.
- Obtendo a Aproximação Atual de uma Integral.
- Informações Avançadas.

## Condições de Erro

Se você tentar executar um cálculo que contenha uma operação imprópria, digamos, uma divisão por zero, o visor apresentará a palavra **Error** seguida de um número. Para apagar uma mensagem de erro, pressione uma tecla qualquer. Com isso se voltará à condição anterior à apresentação da mensagem.

As possíveis mensagens de erro da HP-15C são as seguintes (após a descrição da mensagem **Error 2** é dada a relação das fórmulas estatísticas utilizadas):

### Error 0: Operação Matemática Imprópria

Argumento ilegal numa rotina matemática:

$\boxed{+}$ , onde  $x = 0$ .

$\boxed{y^x}$ , onde:

- fora do Modo Complexo,  $y < 0$  e  $x$  não é um inteiro;
- fora do Modo Complexo,  $y = 0$  e  $x \leq 0$ ; ou
- no Modo Complexo,  $y = 0$  e  $\text{Re}(x) \leq 0$ .

$\boxed{\sqrt{x}}$ , onde, fora do Modo Complexo,  $x < 0$ .

$\boxed{1/x}$ , onde  $x = 0$ .

$\boxed{\text{LOG}}$ , onde:

- fora do Modo Complexo,  $x \leq 0$ ; ou
- no Modo Complexo,  $x = 0$ .

$\boxed{\text{LN}}$ , onde:

- fora do Modo Complexo,  $x \leq 0$ ; ou
- no Modo Complexo,  $x = 0$ .

$\boxed{\text{SIN}^\circ}$ , onde, fora do Modo Complexo,  $|x| > 1$ .

$\boxed{\text{COS}^\circ}$ , onde, fora do Modo Complexo,  $|x| > 1$ .

$\boxed{\text{STO}} \boxed{+}$ , onde  $x = 0$ .

$\boxed{\text{RCL}} \boxed{+}$ , onde o conteúdo do registrador endereçado é  $= 0$ .

$\boxed{\Delta\%}$ , onde o conteúdo do registrador Y é zero.

$\boxed{\text{HYP}^\circ} \boxed{\text{COS}}$ , onde, fora do Modo Complexo,  $x < 1$ .

$\boxed{\text{HYP}^\circ} \boxed{\text{TAN}}$ , onde, fora do Modo Complexo,  $|x| > 1$ .

$\boxed{\text{C}_{y,x}}$  ou  $\boxed{\text{P}_{y,x}}$ , onde:

- $x$  ou  $y$  não são inteiros;
- $x < 0$  ou  $y < 0$ ;
- $x > y$ ;
- $x$  ou  $y \geq 10^{10}$

## Error 1: Operação Matricial Imprópria

Essa mensagem será obtida se for tentada a execução de uma operação não matricial com uma matriz contida num registrador relevante (tanto no registrador X ou Y, como num registrador de armazenamento).

## Error 2: Operação Estatística Imprópria

$$\boxed{\bar{x}} \quad n = 0$$

$$\boxed{s} \quad n \leq 1$$

$$\boxed{\hat{y}_r} \quad n \leq 1$$

$$\boxed{\text{L.R.}} \quad n \leq 1$$

A mensagem **Error 2** também pode ser obtida no caso de divisão por zero ou de extração de raiz quadrada de número negativo, durante o cálculo de uma das seguintes fórmulas:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{M}{n(n-1)}} \qquad s_y = \sqrt{\frac{N}{n(n-1)}} \qquad r = \frac{P}{\sqrt{M \cdot N}}$$

$$A = \frac{P}{M} \qquad B = \frac{M \Sigma y - P \Sigma x}{n \cdot M}$$

$$\hat{y} = \frac{M \Sigma y + P(n \cdot x - \Sigma x)}{n \cdot M}$$

onde:

$$M = n \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2$$

$$N = n \Sigma y^2 - (\Sigma y)^2$$

$$P = n \Sigma xy - \Sigma x \Sigma y$$

(A e B são os valores calculados por  $\boxed{\text{L.R.}}$ , onde  $y = AX + B$ ).

### **Error 3: Número Impróprio de Registrador ou Elemento Impróprio de Matriz**

O registrador de armazenamento especificado não existe ou o elemento da matriz indicada não existe.

### **Error 4: Número Impróprio de Linha ou Chamada de Rótulo Impróprio**

O número da linha referida está atualmente desocupado ou não existe (> 448); ou você tentou carregar uma linha de programa sem haver memória disponível; ou o rótulo referido não existe.

### **Error 5: Nível de Encadeamento de Sub-Rotinas Acima do Limite**

Encadeamento de mais de 7 sub-rotinas.

### **Error 6: Indicador Impróprio**

Tentativa de referência de indicador > 9.

### **Error 7: Chamada Recursiva de `SOLVE` ou `/:`**

A sub-rotina chamada por `SOLVE` também contém uma instrução `SOLVE`; a sub-rotina chamada por `/:` também contém uma instrução `/:`.

### **Error 8: Raiz Inexistente**

`SOLVE` não conseguiu determinar uma raiz, com as estimativas fornecidas.

### **Error 9: Assistência Técnica**

A rotina de auto-diagnóstico detectou um problema nos circuitos da calculadora, ou foi pressionada uma tecla indevida durante o teste do teclado. Veja maiores detalhes no Apêndice F.

### **Error 10: Memória Insuficiente**

Não há memória suficiente para a realização da operação solicitada.

### **Error 11: Argumento Impróprio de uma Matriz**

Numa dada operação matricial, os argumentos da matriz são inconsistentes ou impróprios:

$\boxed{+}$  ou  $\boxed{-}$ , onde as dimensões são incompatíveis.

$\boxed{x}$ , onde:

- as dimensões são incompatíveis; ou
- o resultado é um dos argumentos.

$\boxed{1/x}$ , onde a matriz não é quadrada.

$\boxed{\div}$  de escalar por matriz, onde a matriz não é quadrada.

$\boxed{\div}$ , onde

- a matriz do registrador X não é quadrada;
- as dimensões são incompatíveis; ou
- o resultado é a matriz do registrador X.

$\boxed{\text{MATRIX}}$  2, onde o dado é escalar; ou o número de linhas é ímpar.

$\boxed{\text{MATRIX}}$  3, onde o dado é escalar; ou o número de colunas é ímpar.

$\boxed{\text{MATRIX}}$  4, onde o dado é escalar.

$\boxed{\text{MATRIX}}$  5, onde:

- o dado é escalar;
- as dimensões são incompatíveis; ou
- o resultado é um dos argumentos.

$\boxed{\text{MATRIX}}$  6, onde:

- o dado é escalar;
- as dimensões (inclusive o resultado) são incompatíveis; ou
- o resultado é um dos argumentos.

$\boxed{\text{MATRIX}}$  9, onde a matriz não é quadrada.

$\boxed{\text{RCL}} \boxed{\text{DIM}} \boxed{\text{I}}$ , onde o conteúdo de  $R_1$  é escalar.

$\boxed{\text{DIM}} \boxed{\text{I}}$ , onde o conteúdo de  $R_1$  é escalar.

$\boxed{\text{STO}} \boxed{\text{RESULT}}$ , onde o dado é escalar.

$\boxed{P_{y,x}}$ , onde o número de colunas é ímpar.

$\boxed{C_{y,x}}$ , onde o número de linhas é ímpar.

### Pr Error (Falha de Energia)

O conteúdo da Memória Contínua foi apagado devido a uma falha de energia.

# Movimentação da Pilha Operacional e o Registrador ÚLTIMO X

A calculadora HP-15C foi projetada para operar de maneira natural. Como você viu à medida em que foi trabalhando através deste manual, poucas vezes você se viu forçado a pensar a respeito da operação da pilha operacional.

Haverá ocasiões, no entanto, particularmente ao programar, que você desejará saber o efeito de uma determinada operação envolvendo a pilha operacional. A explicação que se segue deverá ajudá-lo nesse sentido.

## Término da Introdução de Dígitos

A maioria das operações da calculadora, tanto quando executadas como instruções de um programa, como quando pressionadas pelo teclado, causam o término da introdução de dígitos. Isto significa que a calculadora sabe que quaisquer dígitos que você introduzir após qualquer uma dessas operações, farão parte de um novo número.

As únicas operações que *não* encerram a introdução de dígitos são as próprias teclas dos dígitos:

0 a 9  
.

CHS  
EEX



## Movimentação da Pilha Operacional

Há 3 tipos de operações da calculadora, em função da maneira pela qual afetam a movimentação do conteúdo da pilha operacional. São as operações de bloqueio, ativação e neutras da pilha operacional.

Quando a calculadora está no Modo Complexo, cada operação afeta tanto a pilha real como a pilha imaginária. O efeito sobre a movimentação dos seus conteúdos é o mesmo. Além disso, o número introduzido no visor (no registrador X real) *após qualquer operação (exceto*  *ou*  *) é acompanhado da colocação de um zero no registrador X imaginário.*

## Operações de Desativação (Bloqueio)

**Movimentação do Conteúdo da Pilha Operacional.** Existem apenas 4 operações na calculadora que causam o bloqueio da pilha operacional\*. Tais operações bloqueiam a movimentação do conteúdo da pilha operacional, fazendo com que o número introduzido após a execução de uma delas seja gravado sobre o valor existente no registrador X, sem que o conteúdo da pilha operacional suba. Estas operações especiais de bloqueio são:

[ENTER] [CLx] [Σ+] [Σ-]

**Registrador X Imaginário.** É colocado um número zero no registrador X imaginário quando o próximo número após [ENTER], [Σ+] ou [Σ-] seja introduzido ou recuperado no visor (no registrador X real). No entanto, o próximo número que for introduzido ou recuperado, após [←] ou [CLx], não afetará o conteúdo do registrador X imaginário.

## Operações de Ativação

**Movimentação do Conteúdo da Pilha Operacional.** A maioria das operações efetuadas pelo teclado, incluindo as funções matemáticas de um ou dois argumentos, tais como [x²] e [x], são operações de ativação da pilha operacional. Tais operações ativam a subida do conteúdo da pilha operacional, de forma que um número introduzido após a execução de uma dessas operações, fará com que o conteúdo da pilha operacional suba. Estas operações afetam tanto a pilha real quanto a pilha imaginária. (Lembre-se de que o registrador X sombreado indica que seu conteúdo será sobrescrito, quando um próximo número for introduzido ou recuperado).

<b>T</b>	t	z	y	y
<b>Z</b>	z	y	x	x
<b>Y</b>	y	x	<b>4.0000</b>	<b>4.0000</b>
<b>X</b>	x	<b>4</b>	<b>4.0000</b>	<b>3</b>

**Teclas:**                      4                      [ENTER]                      3

(Presume que a pilha operacional estava ativada).	O conteúdo da pilha operacional sobe.	A pilha está desativada.	O conteúdo da pilha operacional não sobe.
---	---------------------------------------	--------------------------	---

\* Veja o rodapé da página 36.

T	y	y	y	y
Z	x	x	x	x
Y	4.0000	53.1301	53.1301	53.1301
X	3	5.0000	0.0000	7

Teclas g →P g CLx 7

A pilha está  
ativada.

A pilha está  
desativada.

O conteúdo  
da pilha  
operacional  
não sobe

**Registrador X Imaginário.** Todas as funções de ativação colocam um zero no registrador X imaginário *quando o próximo número é introduzido ou recuperado no visor.*

## Operações Neutras

**Movimentação do Conteúdo da Pilha Operacional.** Algumas operações tais como **FIX**, são neutras, isto é, não alteram o estado anterior de movimentação do conteúdo da pilha operacional. Dessa forma, se você havia previamente bloqueado a subida, pressionando **ENTER**, ao pressionar **f** **FIX** *n* e introduzir um novo número, este será gravado sobre o conteúdo anterior do registrador X, sem ocorrer o deslocamento dos demais valores da pilha operacional. Da mesma forma, se você havia previamente ativado a subida, executando, digamos, **√x**, ao executar uma instrução **FIX** seguida por uma introdução de dígitos, ocorreria o deslocamento para cima dos demais valores da pilha operacional\*.

As operações seguintes são neutras na HP-15C:

<b>FIX</b>	<b>GRD</b>	<b>USER</b>	<b>R/S</b>
<b>SCI</b>	<b>GTO</b> <b>CHS</b> <i>nnn</i>	<b>CLEAR</b> <b>PREFIX</b>	<b>P/R</b>
<b>ENG</b>	<b>BST</b>	<b>CLEAR</b> <b>REG</b>	<b>(i)</b> †
<b>DEG</b>	<b>SST</b>	<b>CLEAR</b> <b>Σ</b>	
<b>RAD</b>	<b>MEM</b>	<b>PSE</b>	

\* Todas as funções de introdução de dígitos também são neutras *durante* a introdução de dígitos. Após o término da introdução de dígitos **CHS** e **EEX** são operações de ativação; **→** é de bloqueio.

† Isto é, a seqüência **f** **(i)** utilizada para a apresentação do conteúdo do registrador X imaginário.

**Registrador X Imaginário.** As operações acima também são neutras com relação à colocação de zero no registrador X imaginário.

## Registrador ÚLTIMO X (LAST X)

As operações seguintes preservam X no registrador ÚLTIMO X:

-	$x^2$	HYP <sup>†</sup> COS	%
+	SIN	HYP <sup>†</sup> TAN	$\Delta\%$
x	COS	→H.MS	→P
+	TAN	→H	→R
ABS	SIN <sup>-1</sup>	→DEG	P <sub>y,x</sub> *
FRAC	COS <sup>-1</sup>	→RAD	C <sub>y,x</sub> *
INT	TAN <sup>-1</sup>	LN	$\Sigma+$
RND	HYP SIN	$e^x$	$\Sigma-$
1/x	HYP COS	LOG	$\hat{y},r$
x!	HYP TAN	10 <sup>x</sup>	MATRIX 5 a 9
$\sqrt{x}$	HYP <sup>†</sup> SIN	$y^x$	$i/\dagger$

\* Exceto quando utilizada como uma função matricial.

†  $i/\dagger$  usa o registrador ÚLTIMO X de uma maneira especial, descrita no Apêndice E.

# Alocação de Memória

## A Memória

A execução envolvendo registradores de armazenamento, linhas de programas e funções avançadas\* atua sobre o espaço comum de memória da HP-15C. A *disponibilidade* de memória para um propósito específico depende da sua *alocação* atual, bem como da capacidade total da memória da calculadora.

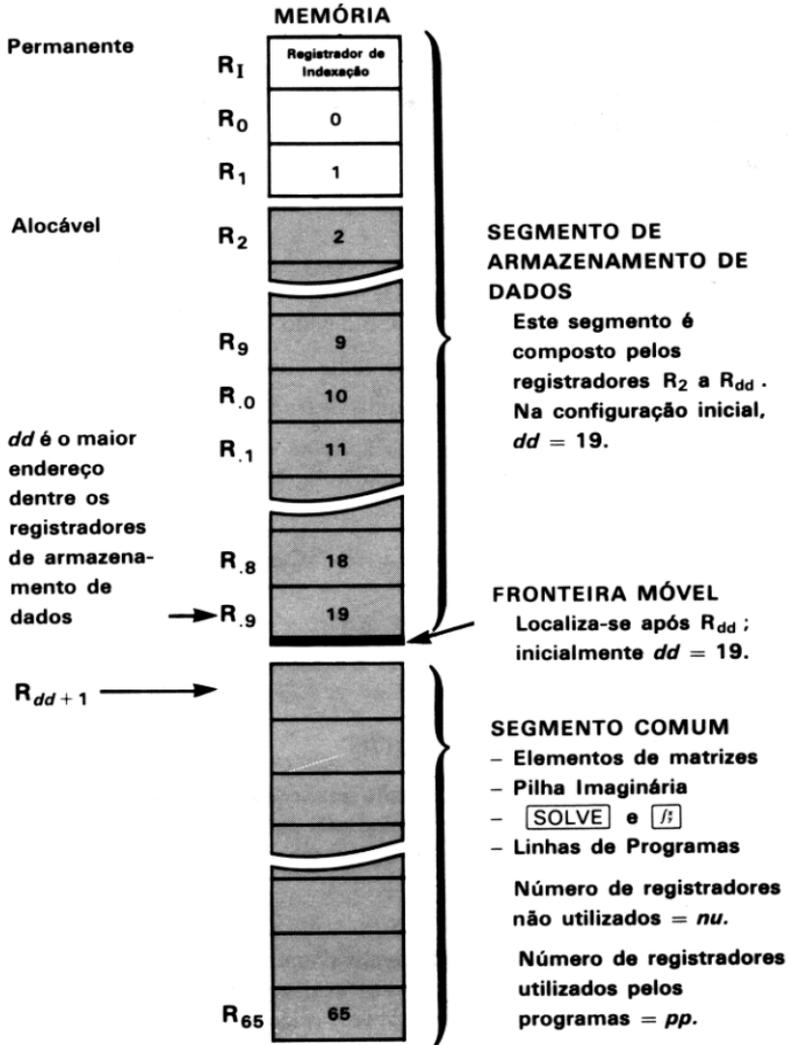
## Registradores

O espaço de memória da HP-15C é alocado na base de *registradores*. Este espaço é dividido em dois segmentos ("pools"), que definem com exatidão como o registrador poderá ser utilizado. Esses dois segmentos possuem 67 registradores ao todo.

- O *segmento de armazenamento de dados* contém os registradores que *somente* podem ser usados para o armazenamento de dados. Na condição inicial de energia (ou quando a Memória Contínua é totalmente apagada), este segmento possui 21 registradores. Este segmento nunca poderá ter menos do que os 3 seguintes registradores (qualquer que seja a situação):  $R_1$ ,  $R_0$  e  $R_1$ .
- O *segmento comum* contém os registradores disponíveis para a alocação de programas, de matrizes, da pilha imaginária e de registradores para as operações  $\boxed{\text{SOLVE}}$  e  $\boxed{f/}$ . Na condição inicial de energia, este segmento possui 46 registradores.

---

\* O uso de  $\boxed{\text{SOLVE}}$ ,  $\boxed{f/}$ , do Modo Complexo e de matrizes exige um espaço adicional temporário de memória, como veremos mais adiante, ainda neste Apêndice.



**Total de memória alocável** = 64 registradores, numerados de  $R_2$  a  $R_{65}$ .  $(dd - 1) + nu + pp + (\text{elementos de matrizes}) + (\text{pilha imaginária}) + (\text{SOLVE e } \beta) = 64$ . Na alocação de memória e no endereçamento indireto, os registradores  $R_{.0}$  a  $R_{.9}$  são referidos como  $R_{10}$  a  $R_{19}$ .

## Estado da Memória ( **MEM** )

Para apresentar a configuração atual de memória da calculadora, pressione **g** **MEM** (*MEMory = memória*), e mantenha a tecla **MEM** pressionada para reter esses dados no visor\*. O visor apresentará 4 números:

$$dd \ nu \ pp - b$$

onde:

*dd* = maior endereço dentre os registradores pertencentes ao segmento de armazenamento de dados. (De modo que o número total de registradores de dados será  $dd + 2$  devido a  $R_0$  e  $R_1$ ).

*nu* = número de registradores do segmento comum não utilizados.

*pp* = número de registradores contendo instruções de programas e

*b* = número total de bytes que restarão quando *nu* for decrementado e *pp* incrementado (indicando a adição de 7 bytes à memória de programação).

O estado inicial da memória, quando a HP-15C estiver na condição inicial de energia será o seguinte:

19 46 0-0

A fronteira móvel entre o segmento de armazenamento de dados e o segmento comum estará sempre entre  $R_{dd}$  e  $R_{dd+1}$ .

## Realocação de Memória

A memória possui 67 registradores, cada qual contendo 7 bytes. 64 desses registradores ( $R_2$  a  $R_{65}$ ) são intercambiáveis, podendo ser usados no segmento de armazenamento de dados ou no segmento comum.

### A Função **DIM** (i)

Ao precisar de mais espaço no segmento comum (para seus programas, por exemplo) ou de mais registradores de armazenamento (não os dois simultaneamente!), você poderá promover a realocação dos registradores necessários, usando **DIM** (i).† O procedimento é o seguinte:

\* **MEM** não é programável.

† **DIM** (*DIMension = dimensão*) é então chamada porque também é utilizada (com **A** a **E** ou **I**) para dimensionar matrizes. Neste caso, no entanto, **DIM** é usada com (i) para "dimensionar" o tamanho do segmento de armazenamento de dados.

1. Coloque no visor *dd*, o maior endereço dentre os registradores de armazenamento de dados que você deseja alocar.  $1 \leq dd \leq 65$ . O número de registradores potencialmente disponíveis para programação, passará a ser  $(65 - dd)$ .
2. Pressione **f** **DIM** **(i)**.

Há duas maneiras de você rever a sua alocação:

- Pressione **RCL** **DIM** **(i)** para recuperar, na pilha operacional, o maior endereço dentre os registradores de armazenamento de dados (*dd*). Esta seqüência é programável.
- Pressione **g** **MEM** (como já foi explicado acima), para obter no visor uma descrição mais detalhada da alocação de memória (*dd nu pp b*).

**Pressione**

**Visor**

(presumindo-se que a memória de programação tenha sido apagada)\*

<p>1 <b>f</b> <b>DIM</b> <b>(i)</b>  <b>g</b> <b>MEM</b> (mantenha-a pressionada)</p>	<p><b>1.0000</b>  <b>1 64 0-0</b></p>	<p><math>R_0, R_1</math> e <math>R_1</math> são alocados para o armazenamento de dados.                  Encontram-se disponíveis 64 registradores; nenhum destes contém instruções de programas.</p>
<p>19 <b>f</b> <b>DIM</b> <b>(i)</b>  <b>RCL</b> <b>DIM</b> <b>(i)</b></p>	<p><b>19.0000</b>  <b>19.0000</b></p>	<p><math>R_{19}</math> (<math>R_9</math>) passou a ser o registrador de armazenamento de dados de maior endereço.                  O segmento comum ficou reduzido a 46 registradores.</p>

**Restrições de Realocação**

A Memória Contínua preservará a configuração que você tiver alocado até que uma nova instrução **DIM** **(i)** seja executada ou até que a Memória Contínua seja apagada. Se você tentar alocar um número de registradores menor do que 1, *dd* será adotado como sendo igual a 1. Se você tentar alocar além de 65 registradores, obterá a mensagem **Error 10**.

---

\* Se a memória não tiver sido apagada, o número de registradores disponíveis (*nu*) será menor, permitindo a alocação de *pp* registradores de memória de programação. Além disso *pp* poderia ser > 0 e *b* poderia variar.

Ao converter registradores, observe que:

- Você pode converter registradores do segmento comum *somente se eles estiverem disponíveis*. Se, por exemplo, você tentar converter registradores que contenham instruções de um programa, você irá obter a mensagem **Error 10** (memória insuficiente).
- Você *pode* converter registradores *ocupados* do segmento de armazenamento de dados, *com a conseqüente perda dos dados armazenados*. Se você tentar endereçar um registrador “perdido” (isto é, inexistente) irá obter a mensagem **Error 3**. Consequentemente, constitui-se uma boa prática o armazenamento de dados a partir dos registradores de menor endereço, pois estes serão os últimos a serem convertidos.

## Memória de Programação

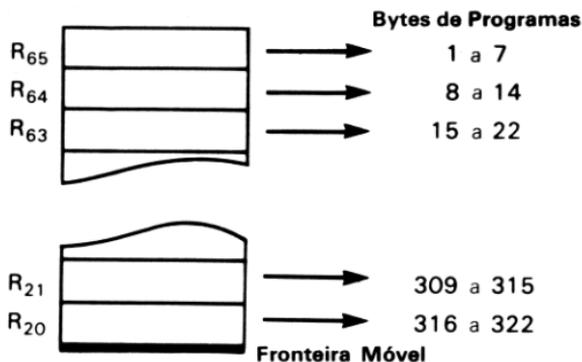
Como já foi mencionado anteriormente, cada registrador contém 7 bytes de memória. As instruções usam 1 ou 2 bytes de memória. A maioria das linhas de um programa usa 1 byte; as que usam 2 bytes estão relacionadas na página

A capacidade de programação *máxima* da HP-15C é de 448 bytes (64 registradores conversíveis, a 7 bytes por registrador). Na condição inicial de energia, a memória comporta até 322 bytes de programas (46 registradores alocados, a 7 bytes por registrador).

## Realocação Automática da Memória de Programação

Dentro do segmento comum, a memória de programação se expande automaticamente, conforme a necessidade. A expansão se dá à razão de um registrador a cada vez, começando pelo registrador disponível de maior endereço. Cada registrador será convertido em 7 bytes de memória de programação.

## Conversão dos Registradores Disponíveis em Memória de Programação



A sua primeira instrução de programa transformará o registrador R<sub>65</sub> (todos os seus 7 bytes) num registrador da memória de programação. A sua 8ª instrução do programa transformará o registrador R<sub>64</sub>, e assim por diante, até chegar à fronteira do segmento comum. Os registradores do segmento de armazenamento de dados (ou seja, do R<sub>19</sub> para baixo, na condição inicial de energia) não estão disponíveis para uso como memória de programação, a menos que seja feita a realocação através de **[DIM] (i)**.

## Instruções (de Dois Bytes) de Programas

As instruções relacionadas a seguir são as únicas que ocupam 2 bytes da memória da calculadora. (Todas as demais ocupam apenas 1 byte).

**[f] [LBL] [·]** rótulo

**[f] [GTO] [·]** rótulo

**[g] [CF]** (n ou I)

**[g] [SF]** (n ou I)

**[g] [F?]** (n ou I)

**[f] [FIX]** (n ou I)

**[f] [SCI]** (n ou I)

**[f] [ENG]** (n or I)

**[f] [SOLVE]**

**[f] [f]**

**[f] [MATRIX]** {0 a 9}

**[f] [x<sub>z</sub>]** {2 a 9, .0 a .9}

**[f] [DSE]** {2 a 9, .0 a .9}

**[f] [ISG]** {2 a 9, .0 a .9}

**[STO]** {+, -, x, ÷}

**[RCL]** {+, -, x, ÷}

**[STO] [MATRIX]** {A a E}

**[STO]** {A a E, (i)} no Modo do Usuário

**[RCL]** {A a E, (i)} no Modo do Usuário

**[STO] [g] (i)**

**[RCL] [g] (i)**

## Requisitos de Memória para as Funções Avançadas

As quatro funções avançadas ocupam, temporariamente, espaço do segmento comum.

Função	Registradores Necessários
SOLVE / <sub>2</sub> Pilha Complexa Matrizes	5 23 } <sup>23 se forem executadas            juntas.</sup> 5 1 por elemento de matriz.

A alocação e desalocação dos registradores utilizados por SOLVE e /<sub>2</sub> é realizada automaticamente\*. A memória só ficará alocada enquanto tais operações estiverem sendo processadas.

Toda a vez que f I, f Re<sub>2</sub>Im ou g SF 8 são pressionadas, é feita a alocação de espaço para a pilha imaginária. A desalocação ocorre quando CF 8 é executada.

O espaço ocupado pelos registradores de matrizes somente é alocado após o seu dimensionamento (usando-se DIM). A realocação ocorre quando uma matriz é redimensionada. MATRIX 0 redimensiona todas as matrizes, reduzindo-as a 0 x 0.

---

\* Se você, ao pressionar uma tecla qualquer, interromper a execução de uma rotina SOLVE ou /<sub>2</sub>, poderá desalocar seus registradores pressionando g RTN ou f CLEAR PRGM no Modo de Execução.

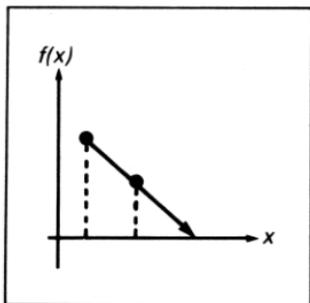
## Uma Visão mais Detalhada de **SOLVE**

A seção 13, Cálculo das Raízes de uma Equação, contém as informações básicas necessárias ao uso efetivo do algoritmo **SOLVE**. Este apêndice apresenta considerações suplementares mais aprofundadas sobre **SOLVE**.

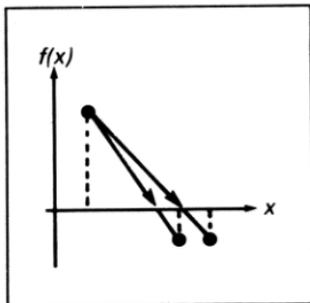
### Como **SOLVE** Funciona

Você estará apto a utilizar **SOLVE** mais efetivamente, conhecendo como o algoritmo funciona.

No processo de pesquisa de um zero da função especificada, o algoritmo utiliza o valor da função em duas ou três estimativas prévias para determinar a forma aproximada do gráfico da função. O algoritmo usa essa forma para fazer uma "previsão" inteligente de uma nova estimativa, onde o gráfico parece cruzar o eixo  $x$ . A seguir a sub-rotina da função é executada, calculando o valor da função na nova estimativa. Este procedimento é realizado repetidamente pelo algoritmo de **SOLVE**.



Se duas estimativas quaisquer derem origem a dois valores da função com sinais opostos, o algoritmo presumirá que o eixo  $x$  deverá estar sendo cruzado em pelo menos um local do intervalo determinado por estas estimativas. O intervalo é então diminuído sistematicamente, até que seja encontrado um zero da equação.



Uma raiz é encontrada com sucesso se o correspondente valor da função é igual a zero ou então, se as duas estimativas, diferindo entre si em uma unidade no seu dígito menos significativo, corres-

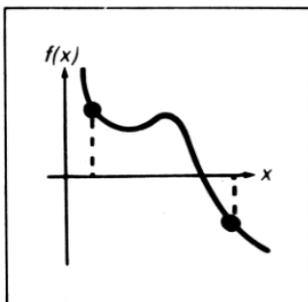
ponderem valores da função com sinais opostos. Neste caso, a execução pára e a estimativa é apresentada.

Como foi discutido na seção 13 (página 188), a ocorrência de outras situações no processo iterativo indica a aparente ausência de um zero da função. A razão disso é que não há uma maneira de se fazer uma previsão lógica de uma nova estimativa que pareça ter um correspondente valor da função próximo de zero. Nesses casos, a mensagem **Error 8** é apresentada no visor.

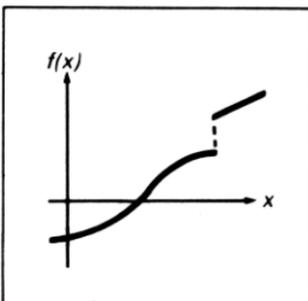
Você deve ter observado que as estimativas iniciais que você fornece são utilizadas para desencadear o processo de “previsão”. Ao permitir previsões mais precisas do que as que poderiam ocorrer de outra forma, a escolha de estimativas adequadas facilita enormemente a determinação da solução procurada.

O algoritmo de **SOLVE** sempre encontrará uma raiz, desde que ela exista (dentro do intervalo fornecido) e se ocorrer uma das seguintes condições:

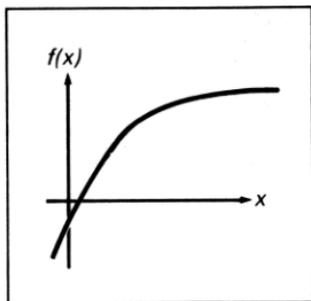
- Aplicando-se a função a duas estimativas quaisquer, se obtém valores de sinais opostos.



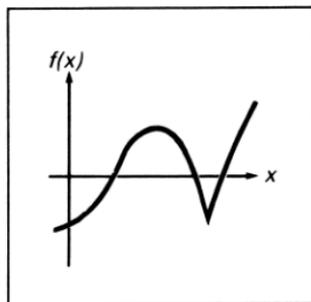
- A função é monotônica, indicando que  $f(x)$  ou é sempre decrescente ou é sempre crescente, à medida que  $x$  aumenta.



- O gráfico da função é convexo ou côncavo.



- Os mínimos e máximos (únicos) locais do gráfico da função, só ocorrem entre zeros adjacentes da função.



Além disso, presume-se que o algoritmo de **SOLVE** não seja interrompido por uma operação imprópria.

## Precisão da Raiz

Quando você utiliza a tecla **SOLVE** para encontrar a raiz de uma equação, esta é calculada com precisão. A raiz que é apresentada dá o valor calculado da função ( $f(x)$ ) como sendo zero ou um número de 10 dígitos virtualmente adjacente ao ponto onde o gráfico da função corta o eixo  $x$ . Qualquer raiz terá precisão dentro de uma variação de 2 ou 3 unidades no 10º dígito significativo.

Na maioria das vezes, a raiz calculada é uma estimativa acurada da raiz teórica (infinitamente precisa) da equação. No entanto, certas condições podem fazer com que a precisão limitada da calculadora dê um resultado que pareça ser inconsistente com a sua expectativa teórica.

Se o resultado de um cálculo for de magnitude inferior a  $1.000000000 \times 10^{-99}$ , este será igualado a zero. Este efeito é conhecido pelo nome de “underflow”. Se, na sub-rotina que calcula a sua função, ocorrer um “underflow”, para um dado intervalo de  $x$ , e isso afetar o valor da função, pode-se esperar que a raiz desse intervalo tenha alguma imprecisão. Por exemplo, a equação

$$x^4 = 0$$

tem uma raiz no ponto  $x = 0$ . Devido ao “underflow”, **SOLVE** produz como resultado uma raiz igual a **1.5060 -25** (para estimativas iniciais de 1 e 2). Como um outro exemplo, a equação

$$1/x^2 = 0$$

tem uma raiz de valor infinito. Devido ao “underflow”, **SOLVE** dá como resultado uma raiz igual a **3.1707 49** (para estimativas iniciais 10 e 20). Em cada um desses exemplos, o algoritmo encontrou um valor de  $x$  para o qual o valor calculado da função se igualou a zero. Conhecendo o efeito do “underflow”, você pode interpretar adequadamente tais resultados.

A precisão de um valor calculador pode algumas vezes ser afetado por uma condição adversa, tal como um erro de arredondamento, no qual um número com precisão infinita é arredondado para seus 10 dígitos mais significativos. Se a sua sub-rotina exige uma precisão extra para o cálculo adequado da função, num dado intervalo de  $x$ , o resultado obtido por **SOLVE** pode ser impreciso. Por exemplo, a equação

$$|x^2 - 5| = 0$$

tem uma raiz em  $x = \sqrt{5}$ . Como não existe um número de 10 dígitos *exatamente* igual a  $\sqrt{5}$ , o resultado, ao se utilizar **SOLVE** será a mensagem **Error 8** (quaisquer que sejam as estimativas iniciais) porque a função nunca se iguala a zero nem muda de sinal. Por outro lado, a equação

$$[(|x| + 1) + 10^{15}]^2 = 10^{30}$$

não tem raízes porque a parte esquerda da igualdade é sempre maior do que a parte direita. No entanto, devido aos erros de arredondamento no cálculo de

$$f(x) = [(|x| + 1) + 10^{15}]^2 - 10^{30},$$

a raiz **1.0000** é encontrada (para estimativas iniciais de 1 e 2). Conhecendo as situações nas quais o erro de arredondamento pode influir no funcionamento de **SOLVE**, você pode avaliar adequadamente os resultados e talvez reescrever a função para diminuir o efeito dos erros de arredondamento.

Numa grande variedade de aplicações práticas, os parâmetros de uma equação, ou, as vezes, a própria equação, são apenas *aproximações*. Parâmetros físicos possuem uma precisão (ou imprecisão) a eles inerente. Representações matemáticas de processos físicos nada mais são do que modelos desses processos, sendo precisos apenas na extensão da veracidade das premissas adotadas. Conhecendo essas e outras imprecisões, você poderá tirar um melhor proveito delas. Ao estruturar a sua sub-rotina, de modo a retornar um valor zero no caso do resultado não ter sentido prático, você economizará um tempo considerável no cálculo da raiz, através de **SOLVE**, particularmente em casos que normalmente levariam muito tempo.

**Exemplo:** Os arremessadores de martelo, tais como o do exemplo da seção 13 (página 186), podem alcançar alturas de 105 metros ou mais. Quanto tempo levaria para que o memorável arremesso do esportista do exemplo acima mencionado chegasse a 107 metros?

**Solução:** A resposta desejada é o valor de  $t$  para o qual  $h = 107$ . Introduza a sub-rotina da página 186 que calcula a altura obtida no arremesso. Esta sub-rotina pode ser utilizada por uma nova sub-rotina para calcular

$$f(t) = h(t) - 107$$

A sub-rotina dada a seguir calcula  $f(t)$ :

**Pressione**

**g** **P/R**  
**f** **LBL** **B**  
**GSB** **A**

**Visor**

**000-** Modo de Programação.  
**001-42,21,12** Inicia com um novo rótulo.  
**002- 32 11** Calcula  $h(t)$ .

**Pressione**

**1**  
**0**  
**7**  
**-**  
**g** **RTN**

**Visor**

**003- 1**  
**004- 0**  
**005- 7** Calcula  $h(t) - 107$ .  
**006- 30**  
**007- 43 32**

Para calcular a primeira vez em que a altura é de 107 metros, use estimativas iniciais de 0 e 1 segundos e execute **SOLVE** usando **B**.

Pressione	Visor	
<b>g</b> <b>P/R</b>		Modo de Execução.
<b>0</b> <b>ENTER</b>	<b>0.0000</b>	} Estimativas iniciais.
<b>1</b>	<b>1</b>	
<b>f</b> <b>SOLVE</b> <b>B</b>	<b>4.1718</b>	A raiz desejada.
<b>R</b> <b>↓</b>	<b>4.1718</b>	Estimativa anterior da raiz.
<b>R</b> <b>↓</b>	<b>0.0000</b>	Valor de $f(t)$ na raiz.

São gastos 4.1718 segundos para o martelo chegar à altura de exatamente 107 metros. (A calculadora leva aproximadamente 1 minuto para encontrar esta solução).

Suponha, no entanto, que você assuma que a função  $h(t)$  seja exata apenas na ordem de metros. Você pode agora alterar a sua sub-rotina para que  $f(t) = 0$  sempre que a magnitude calculada de  $f(t)$  seja menor do que 0.5 metros. Introduza as seguintes alterações na sua sub-rotina:

Pressione	Visor	
<b>g</b> <b>P/R</b>	000-	Modo de Programação.
<b>GTO</b> <b>CHS</b> 006	006- 30	Linha que precede a instrução <b>RTN</b> .
<b>g</b> <b>ABS</b>	007- 43 16	Magnitude de $f(t)$ .
<b>.</b>	008- 48	} Precisão.
<b>5</b>	009- 5	
<b>g</b> <b>TEST</b> 7	010-43,30, 7	} Verifica se $x > y$ e retorna zero se a precisão > magnitude ( $0.5 >  f(t) $ ).
<b>g</b> <b>CLx</b>	011- 43 35	
<b>g</b> <b>TEST</b> 0	012-43,30, 0	} Verifica se $x \neq 0$ e retorna $f(t)$ se o valor não for nulo.
<b>g</b> <b>LSTx</b>	013- 43 36	

Execute **SOLVE** novamente:

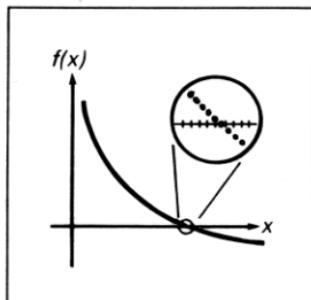
Pressione	Visor	
<b>g</b> <b>P/R</b>		Modo de Execução.
<b>0</b> <b>ENTER</b>	<b>0.0000</b>	} Estimativas iniciais.
<b>1</b>	<b>1</b>	
<b>f</b> <b>SOLVE</b> <b>B</b>	<b>4.0681</b>	A raiz desejada.
<b>R</b> <b>↓</b>	<b>4.0681</b>	Estimativa anterior da raiz.
<b>R</b> <b>↓</b>	<b>0.0000</b>	Valor de $f(t)$ modificada na raiz.

Depois de 4.0681, o martelo chega a uma altura de  $107 \pm 0.5$  metros. Esta solução, embora distinta da obtida anteriormente, é correta dentro da incerteza da equação da altura. (Esta solução é calculada em cerca da metade do tempo da execução anterior).

## Interpretando os Resultados

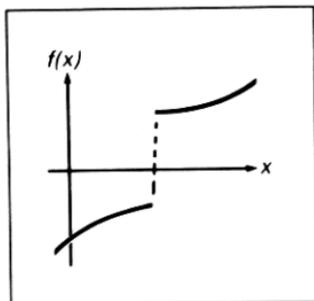
Os valores que **SOLVE** coloca nos registradores X, Y e Z ajudam você a avaliar os resultados obtidos, na pesquisa da raiz da sua equação\*. Mesmo quando nenhuma raiz é encontrada, os resultados ainda são significativos.

Quando **SOLVE** encontra uma raiz da equação especificada, os valores da raiz e da função são colocados, respectivamente, nos registradores X e Z. O resultado esperado, com relação ao valor da função na raiz, é o número zero. No entanto, um valor não nulo da função na raiz, é também aceitável, por indicar que o gráfico da função aparenta cruzar o eixo  $x$  a uma distância infinitésima da raiz calculada. Na maioria dos casos, o valor da função será relativamente próximo de zero.

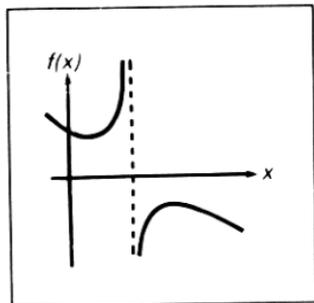


\* O valor no registrador T é o mesmo que é deixado no registrador Y ao final da execução de sua sub-rotina. Em geral, esse valor não é de interesse.

É necessária uma consideração especial numa situação diferente, na qual **SOLVE** calcula uma raiz sendo o valor da função não nulo. Se o gráfico da sua função tem uma descontinuidade que cruza o eixo  $x$ , **SOLVE** especificará como raiz um valor de  $x$  adjacente à descontinuidade. Isto é razoável porque uma variação muito grande no valor da função, entre dois valores de  $x$  adjacentes, deverá ser a consequência de uma transição contínua muito rápida. Como esse fato não pode ser resolvido pelo algoritmo, a raiz é apresentada para que você a interprete.



Uma função pode ter um *polo*, onde sua magnitude tende ao infinito. Se o valor da função muda de sinal num polo, o valor correspondente de  $x$  se assemelha a uma possível raiz da sua equação, como ocorre com qualquer descontinuidade que cruze o eixo  $x$ . No entanto, para tais funções, o valor da função colocado no registrador Z quando tal raiz é encontrada, será relativamente grande. Se o polo ocorrer para um valor de  $x$  que seja *exatamente* representado por 10 dígitos, a sub-rotina poderá utilizá-lo como estimativa e parar prematuramente, com uma indicação de erro. Nesse caso, a operação **SOLVE** não será completada. É claro que esse fato pode ser evitado, pelo uso prudente de um comando condicional na sua sub-rotina.



**Exemplo:** Ao analisar as tensões sobre o componente de uma estrutura, uma engenheira determinou que a tensão de cisalhamento pode ser expressa por

$$Q = \begin{cases} 3x^3 - 45x^2 + 350 & \text{para } 0 < x < 10 \\ 1000 & \text{para } 10 \leq x < 14 \end{cases}$$

onde  $Q$  é a tensão de ruptura em newtons por metro quadrado e  $x$  é a distância a uma extremidade, em metros. Escreva uma sub-rotina que calcule a ten-





Pressione	Visor	
<b>g</b> <b>P/R</b>		Modo de Execução.
<b>7</b> <b>ENTER</b>	<b>7.0000</b>	} Estimativas iniciais.
<b>14</b>	<b>14</b>	
<b>f</b> <b>SOLVE</b> <b>2</b>	<b>10.0000</b>	Uma possível raiz.
<b>R↓</b> <b>R↓</b>	<b>1,000.0000</b>	Tensão não nula.

Pelo expressivo valor da tensão na raiz, obtido pela rotina **SOLVE**, configurou-se uma descontinuidade. Esta é uma posição da viga onde a tensão rapidamente passa de negativa a positiva. Comece pela outra extremidade da viga onde a tensão rapidamente passa de negativa a positiva. Comece pela outra extremidade da viga (com as estimativas 0 e 7) e use **SOLVE** novamente.

Pressione	Visor	
<b>0</b> <b>ENTER</b>	<b>0.0000</b>	} Estimativas iniciais.
<b>7</b>	<b>7</b>	
<b>f</b> <b>SOLVE</b> <b>2</b>	<b>3.1358</b>	Uma possível raiz.
<b>R↓</b> <b>R↓</b>	<b>2.0000 -07</b>	Tensão desprezível.

A engenheira achou uma tensão nula de cisalhamento a aproximadamente 3.1358 metros, e uma variação abrupta da tensão a 10.0000 metros.

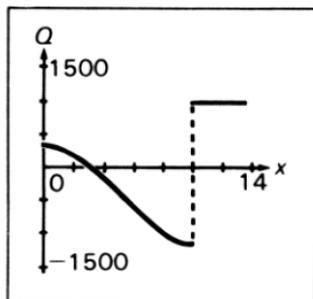
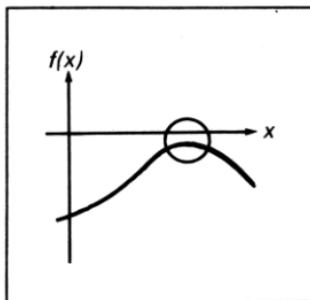


Gráfico de  $Q$  versus  $x$ .

Quando não se encontra nenhuma raiz e a mensagem **Error8** é apresentada, você pode pressionar **◀** ou qualquer outra tecla para eliminar a mensagem do visor e observar a estimativa que proporcionou o valor de  $f(x)$  mais próximo de zero. Ao rever os valores contidos nos registradores Y e Z você pode freqüentemente determinar a natureza da função nas proximidades da estimativa da raiz e usar essa informação de maneira construtiva.

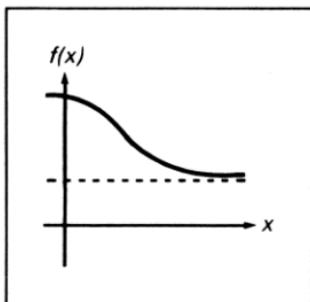
Se o algoritmo termina a sua pesquisa perto de uma posição de mínimo local da *magnitude* da função, elimine a mensagem **Error 8** do visor e observe os valores contidos nos registradores X, Y e Z, girando o conteúdo da pilha operacional para baixo. Se o valor da função preservado no registrador Z for relativamente próximo de zero, é possível que tenha sido encontrada uma raiz da equação (O



valor retornado em X pode ser um número de 10 dígitos bastante próximo da raiz teórica). Você pode explorar mais esse mínimo potencial, girando a pilha operacional até que as novas estimativas cheguem aos registradores X e Y, e executar **SOLVE** novamente, usando tais valores como estimativas iniciais. Se for encontrado um mínimo real, a mensagem **Error 8** será novamente apresentada e o conteúdo do registrador X será aproximadamente o mesmo obtido anteriormente, porém possivelmente mais próximo da localização real do mínimo.

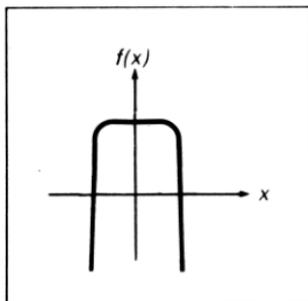
É claro que você pode deliberadamente utilizar **SOLVE** para encontrar um mínimo local da magnitude da função. Nesse caso, no entanto, tome o cuidado de confinar a pesquisa na região do mínimo. Lembre-se de que **SOLVE** sempre tenta calcular um zero da função.

Se o algoritmo pára a busca, apresentando a mensagem **Erro 8** por estar trabalhando numa assíntota horizontal (quando o valor da função é essencialmente constante num amplo intervalo de  $x$ ), as estimativas contidas nos registradores X e Y em geral diferem significativamente uma da outra. O valor contido no registrador Z é o da assíntota em potencial. Se você executar **SOLVE** mais uma vez,



utilizando como estimativas iniciais os valores retornados a X e Y, a assíntota horizontal ainda poderá ocasionar o **Error 8** mas obtendo valores em X e Y que diferirão dos anteriores. O valor da função no registrador Z seria então aproximadamente igual ao obtido anteriormente.

Se a mensagem **Error 8** é apresentada como resultado de uma pesquisa concentrada numa região local “plana” da função, as estimativas nos registradores X e Y serão relativamente próximas ou então extremamente pequenas. Execute **SOLVE** novamente, utilizando como estimativas iniciais os valores contidos nos registradores X e Y (ou então dois valores mais distantes). Se a magnitude da função não corresponder nem a um mínimo e nem a uma constante, o algoritmo eventualmente expandirá a sua busca, encontrando um resultado mais significativo.



**Exemplo:** Investigue o comportamento da função

$$f(x) = 3 + e^{-|x|} \cdot 10 - 2e^{x^2} e^{-|x|}$$

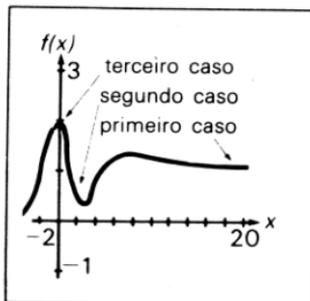
calculada pela sub-rotina dada abaixo.

Pressione	Visor	
<b>g</b> P/R	000-	Modo de Programação.
<b>f</b> LBL .0	001-	42.21, .0
<b>g</b> ABS	002-	43 16
<b>CHS</b>	003-	16
<b>e<sup>x</sup></b>	004-	12 $e^{- x }$ .
<b>x <math>\leftrightarrow</math> y</b>	005-	34 Traz o valor de x ao registrador X.
<b>g</b> <b>x<sup>2</sup></b>	006-	43 11
<b>x</b>	007-	20 $x^2 e^{- x }$ .
<b>e<sup>x</sup></b>	008-	12
<b>2</b>	009-	2
<b>x</b>	010-	20
<b>CHS</b>	011-	16 $-2e^{x^2} e^{- x }$ .
<b>x <math>\leftrightarrow</math> y</b>	012-	34 Traz o valor de x ao registrador X.
<b>g</b> ABS	013-	43 16
<b>CHS</b>	014-	16
<b>1</b>	015-	1
<b>0</b>	016-	0
<b>+</b>	017-	10 $- x /10$ .
<b>e<sup>x</sup></b>	018-	12



Pressione	Visor	
<b>g</b> <b>R</b> <b>↑</b> <b>g</b> <b>R</b> <b>↑</b>	1.0000	-20 Restaura a pilha operacional.
<b>f</b> <b>SOLVE</b> .0	Error 8	
<b>←</b>	1.1250	-20 Outro valor de $x$ .
<b>R</b> <b>↓</b>	1.5626	-16 Valor anterior.
<b>R</b> <b>↓</b>	2.0000	Mesmo valor da função.

Em cada um dos 3 casos, **SOLVE** inicialmente pesquisou uma raiz na direção sugerida pelo gráfico, em torno da estimativa inicial. Usando 10 como a estimativa inicial, **SOLVE** encontrou a assíntota horizontal (onde o valor da função = 1.0000). Usando 1 como a estimativa inicial, **SOLVE** encontrou um mínimo de 0.3788 para  $x = 2.1213$ . Usando  $10^{-20}$  como estimativa inicial, a função foi essencialmente constante (num valor de 2.0000) para uma pequena variação de  $x$  escolhida.



## Calculando Diversas Raízes

Muitas das equações que você irá resolver terão mais do que uma raiz. Por esse motivo, você verificará como é útil conhecer algumas técnicas para a determinação das várias raízes de uma equação.

O método mais simples para o cálculo de várias raízes é orientar a pesquisa em diferentes intervalos de  $x$  onde as raízes possam existir. As suas estimativas iniciais especificam o intervalo a ser inicialmente pesquisado. Este método foi utilizado em todos os exemplos da seção 13. Dessa maneira você freqüentemente encontrará as raízes de uma equação.

Existe um outro método conhecido pelo nome de *deflação*. O método da *deflação* “elimina” as raízes de uma equação. Ele modifica a equação de forma que as primeiras raízes a serem encontradas deixam de ser raízes da equação modificada, porém as demais raízes ainda continuam sendo zeros da equação original.

Se uma função  $f(x)$  possui um zero para  $x = a$ , então a nova função  $f(x)/(x - a)$  não se aproximará de zero nesta região (se  $a$  for uma raiz simples de  $f(x) = 0$ ). Você pode utilizar esta informação para eliminar uma raiz conhecida. Basta acrescentar umas poucas linhas de programa ao final da sua sub-rotina de cálculo da função. Estas linhas deverão subtrair a raiz conhecida (com 10 dígitos significativos) do valor de  $x$  e dividir a função por esta diferença. Em muitos casos, a raiz será única e a nova função dirigirá **SOLVE** para longe da raiz conhecida.

Por outro lado, a raiz pode ser *múltipla*. Uma raiz múltipla é a que está repetidamente presente, no seguinte sentido: nessa raiz, não somente o gráfico de  $f(x)$  cruza o eixo  $x$ , mas a sua inclinação (e talvez algumas das derivadas seguintes de ordem mais alta) é igual a zero. Se a raiz conhecida da sua equação for múltipla, ela não será eliminada pela simples divisão pelo fator descrito acima. Por exemplo, a equação:

$$f(x) = x(x - a)^3 = 0$$

possui uma raiz múltipla para  $x = a$  (com multiplicidade igual a 3). Esta raiz não é eliminada dividindo-se  $f(x)$  por  $(x - a)$ . Mas ela pode ser eliminada dividindo-se por  $(x - a)^3$ .

**Exemplo:** Use a deflação para ajudá-lo no cálculo das raízes de

$$60x^4 - 944x^3 + 3003x^2 + 6171x - 2890 = 0$$

Utilizando o método de Horner, esta equação pode ser reescrita na forma

$$(((60x - 944)x + 3003)x + 6171)x - 2890 = 0$$

Programar uma sub-rotina que calcule o valor do polinômio.

**Pressione**

**Visor**

**g** **P/R**

000-

Modo de Programação.

**f** **CLEAR** **PRGM**

000-

**f** **LBL** 2

001-42,21, 2

6

002- 6

0

003- 0

**x**

004- 20

9

005- 9

4

006- 4

4

007- 4

**-**

008- 30

Pressione	Visor
<b>x</b>	009- 20
3	010- 3
0	011- 0
0	012- 0
3	013- 3
<b>+</b>	014- 40
<b>x</b>	015- 20
6	016- 6
1	017- 1
7	018- 7
1	019- 1
<b>+</b>	020- 40
<b>x</b>	021- 20
2	022- 2
8	023- 8
9	024- 9
0	025- 0
<b>-</b>	026- 30
<b>g</b> <b>RTN</b>	027- 43 32

No Modo de Execução, introduza duas estimativas iniciais negativas (tais como -10 e -20) e use **SOLVE** para encontrar a raiz mais negativa.

Pressione	Visor	
<b>g</b> <b>P/R</b>		Modo de Execução.
10 <b>CHS</b> <b>ENTER</b>	-10.0000	} Estimativas iniciais.
20 <b>CHS</b>	-20	
<b>f</b> <b>SOLVE</b> 2	-1.6667	Primeira raiz.
<b>STO</b> 0	-1.6667	Armazena a raiz para a deflação.
<b>R</b> <b>↓</b> <b>R</b> <b>↓</b>	4.0000 -06	Valor quase nulo da função.

Volte ao Modo de Programação de acrescentar à sua sub-rotina as instruções que eliminarão a raiz que acabou de ser encontrada.

Pressione	Visor	
<b>g</b> <b>P/R</b>	000-	Modo de Programação.
<b>g</b> <b>BST</b> <b>g</b> <b>BST</b>	026- 30	Linha anterior a da instrução <b>RTN</b> .
<b>x</b> <b>↔</b> <b>y</b>	027- 34	Traz x ao registrador X.
<b>RCL</b> 0	028- 45 0	} Divide por (x - a), onde a é raiz conhecida.
<b>-</b>	029- 30	
<b>+</b>	030- 10	

Use agora as mesmas estimativas iniciais para encontrar a próxima raiz.

Pressione	Visor	
<b>g</b> <b>P/R</b>	<b>4.0000 -06</b>	Modo de Execução.
10 <b>CHS</b> <b>ENTER</b>	<b>-10.0000</b>	} Mesmas estimativas iniciais.
20 <b>CHS</b>	<b>-20</b>	
<b>f</b> <b>SOLVE</b> 2	<b>0.4000</b>	Segunda raiz.
<b>STO</b> 1	<b>0.4000</b>	Armazena a raiz para a deflação.
<b>R</b> ↓ <b>R</b> ↓	<b>0.0000</b>	Valor de função deflacionada.

Modifique agora a sua sub-rotina para eliminar a segunda raiz.

Pressione	Visor	
<b>g</b> <b>P/R</b>	<b>000-</b>	Modo de Programação.
<b>g</b> <b>BST</b> <b>g</b> <b>BST</b>	<b>030-</b>	10 Linha anterior a da instrução <b>RTN</b> .
<b>x</b> ↔ <b>y</b>	<b>031-</b>	34 Traz x ao registrador X.
<b>RCL</b> 1	<b>032-</b>	45 1
<b>-</b>	<b>033-</b>	30
<b>+</b>	<b>034-</b>	10

} Deflação para a segunda raiz.

Ainda mais uma vez, use as mesmas estimativas iniciais para encontrar a próxima raiz.

Pressione	Visor	
<b>g</b> <b>P/R</b>	<b>0.0000</b>	Modo de Execução.
10 <b>CHS</b> <b>ENTER</b>	<b>-10.0000</b>	} Mesmas estimativas iniciais.
20 <b>CHS</b>	<b>-20</b>	
<b>f</b> <b>SOLVE</b> 2	<b>8.4999</b>	Terceira raiz.
<b>STO</b> 2	<b>8.4999</b>	Armazena a raiz para a deflação.
<b>R</b> ↓ <b>R</b> ↓	<b>-1.0929 -07</b>	Valor quase nulo da função deflacionada.

Modifique agora a sua sub-rotina para eliminar a terceira raiz.

Pressione	Visor	
<b>g</b> <b>P/R</b>	<b>000-</b>	Modo de Programação.
<b>g</b> <b>BST</b> <b>g</b> <b>BST</b>	<b>034-</b>	10 Linha anterior a da instrução <b>RTN</b> .
<b>x</b> ↔ <b>y</b>	<b>035-</b>	34 Traz x ao registrador X.

**Pressione**

**RCL** 2  
**-**  
**÷**

**Visor**

**036** 45 2  
**037-** 30  
**038-** 10

} Deflação para a  
terceira raiz.

Calcule a quarta raiz.

**Pressione**

**g** **P/R**  
 10 **CHS** **ENTER**  
 20 **CHS**  
**f** **SOLVE** 2  
**STO** 3

**Visor**

-1.0929 -07  
 -10.0000  
 -20  
 8.5001  
 8.5001

} Mesmas estimativas iniciais.

Quarta raiz.

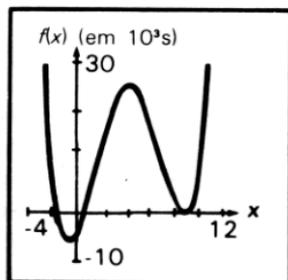
Armazena a raiz para  
referências futuras.

**R↓** **R↓**

-0.0009

Valor quase nulo da função  
deflacionada.

Ao utilizar as mesmas estimativas iniciais a cada vez, você encontrou 4 raízes desta equação, que envolvia um polinômio do 4º grau. No entanto, as últimas duas raízes estão bastante próximas uma da outra, e na realidade constituem uma única raiz (com multiplicidade 2). Esta é a razão pela qual a raiz não foi eliminada quando você tentou deflacionar com esta raiz. (Erros de arredondamento podem fazer com que a função original assumia valores pequenos (positivos e negativos) para valores de  $x$  entre 8.4999 e 8.5001. Para  $x = 8.5$ , o valor da função é exatamente igual a zero).



**Gráfico de  $f(x)$**

Em geral, você não saberá antecipadamente a multiplicidade da raiz que estiver tentando eliminar. Se, depois de ter tentado eliminar uma raiz, **SOLVE** encontrar a mesma raiz novamente, você pode proceder de várias maneiras:

- Use estimativas iniciais distintas com a função deflacionada, para tentar detectar uma raiz diferente.

- Use a deflação novamente para tentar eliminar uma raiz múltipla. Se não souber a multiplicidade da raiz, você precisará repeti-la um certo número de vezes.
- Examine o comportamento da função deflacionada para valores de  $x$  próximos da raiz conhecida. Se os valores calculados pela função cruzarem ligeiramente o eixo  $x$ , isto indicará a existência de outra raiz ou uma multiplicidade de maior grau.
- Analise algebricamente a função original e suas derivadas. É possível determinar o seu comportamento para valores de  $x$  próximos da raiz conhecida. (Uma representação em séries de Taylor, por exemplo, poderá indicar a multiplicidade de uma raiz).

## Limitando o Tempo de Estimação

Ocasionalmente você pode desejar limitar o tempo gasto por **SOLVE** até a detecção de uma raiz. Você pode utilizar duas técnicas para isso: contar iterações ou especificar uma tolerância.

### Contando Iterações

Ao procurar uma raiz, **SOLVE** normalmente calcula o valor de sua função pelo menos 12 vezes. Ocasionalmente, **SOLVE** pode precisar calculá-la 100 vezes ou mais. (No entanto, **SOLVE** sempre irá parar por si mesma). Devido ao fato da sua função ser calculada uma vez a cada estimativa, ela pode contar e limitar o número de iterações. Uma maneira fácil de se fazer isso é através da instrução **ISG**, acumulando o número de iterações no registrador  $R_1$  (ou em qualquer outro registrador de armazenamento).

Se você armazenar um valor adequado no registrador (que irá fazer as vezes de contador) antes de utilizar **SOLVE**, a sua sub-rotina poderá interromper o algoritmo **SOLVE** quando o limite for excedido.

### Especificando uma Tolerância

Você pode diminuir a duração do cálculo de uma raiz se especificar uma precisão que seja aceitável para a sua função. A sua sub-rotina deve retornar um valor de função nulo se o valor calculado (da função) for menor do que a precisão especificada. A tolerância que você especificar deverá corresponder a um valor da função que não tenha utilidade para efeitos práticos ou que corresponda à precisão do cálculo. Esta técnica elimina o tempo gasto na definição de uma estimativa com precisão acima da que o problema justifica. (Um exemplo deste método pode ser visto à página 225).

## Uma Visão mais Detalhada de $\int_x^y$

A seção 14, Integração Numérica, apresentou as informações básicas para a utilização de  $\int_x^y$ . Este Apêndice aborda aspectos mais intrincados de  $\int_x^y$  que serão de seu interesse se você utilizar  $\int_x^y$  frequentemente.

### Como $\int_x^y$ Funciona

O algoritmo de  $\int_x^y$  calcula a integral de uma função  $f(x)$  através de uma média ponderada de valores da função para vários valores de  $x$  (conhecidos como pontos amostrados) dentro do intervalo de integração. A precisão do resultado de qualquer processo de amostragem depende do número de pontos amostrados considerados: quanto maior for o número de pontos amostrados, maior será a precisão. Se  $f(x)$  pudesse ser calculada num número infinito de pontos amostrados, o algoritmo poderia dar um resultado exato (desprezando-se a limitação imposta pela imprecisão do cálculo da função  $f(x)$ ).

O cálculo do valor de uma função num número infinito de pontos amostrados levaria um tempo muito longo (na verdade, eterno). No entanto, isso não é necessário, pois a precisão máxima da integral calculada é limitada pela precisão dos valores calculados para a função. Ao se usar apenas um número finito de pontos amostrados, o algoritmo pode calcular uma integral que é tão precisa quanto possível, considerando-se a incerteza inerente a  $f(x)$ .

Inicialmente o algoritmo de  $\int_x^y$  considera apenas uns poucos pontos amostrados, dando uma aproximação com precisão relativamente baixa. Se estas aproximações não são tão precisas como a precisão que  $f(x)$  permitiria, o algoritmo é iterado (isto é, repetido) com um maior número de pontos amostrados. Estas iterações prosseguem, utilizando cerca de o dobro dos pontos amostrados a cada vez, até que o resultado da aproximação seja tão preciso quanto a incerteza inerente a  $f(x)$  justificar.

A incerteza da aproximação final é um número derivado do formato de apresentação no visor, o qual especifica a incerteza da função\*. Ao final de cada iteração, o algoritmo compara a aproximação que acabou de ser calculada com as calculadas nas duas iterações anteriores. Se a diferença entre qualquer dessas três aproximações for menor do que a incerteza tolerável na aproximação final, o algoritmo termina, colocando a aproximação atual no registrador X e a incerteza desta aproximação no registrador Y.

É extremamente improvável que os erros, em cada uma das três aproximações sucessivas, (isto é, as diferenças entre o real valor da integral e as aproximações) sejam todos maiores do que a disparidade entre as próprias aproximações. Conseqüentemente, o erro na aproximação final será menor do que sua incerteza†. Embora não conheçamos o erro na aproximação final, saberemos que esse erro muito dificilmente excederá a incerteza da aproximação (apresentada no visor). Em outras palavras, a incerteza da estimativa contida no registrador Y é um “limite superior” da diferença entre a aproximação e o real valor da integral.

## Precisão, Incerteza e Duração do Cálculo

A precisão de uma aproximação de  $\boxed{\beta}$  nem sempre muda quando você acrescenta *apenas um dígito* no número de dígitos especificados no formato de apresentação no visor (embora a incerteza diminua). De maneira semelhante, o tempo exigido para o cálculo de uma integral algumas vezes varia com o formato de apresentação no visor, outras vezes não.

**Exemplo:** A função de Bessel de 1ª espécie, de 4ª ordem, pode ser expressa como

$$J_4(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(4\theta - x \operatorname{sen} \theta) d\theta.$$

\* A relação entre o formato de apresentação no visor, a incerteza da função e a incerteza da aproximação com relação à integral serão discutidos mais adiante, ainda neste Apêndice.

† Desde que  $f(x)$  não varie muito rapidamente, (essa consideração será vista com maior detalhe mais adiante ainda neste Apêndice).

Calcule a integral que ocorre na expressão de  $J_4(1)$ .

$$\int_0^{\pi} \cos(4\theta - \operatorname{sen} \theta) d\theta.$$

Em primeiro lugar, comute para o Modo de Programação e introduza uma sub-rotina que calcule a função  $f(\theta) = \cos(4\theta - \operatorname{sen} \theta)$ .

Pressione	Visor	
$\int$ P/R	000-	Modo de Programação
$\int$ CLEAR PRGM	000-	
$\int$ LBL 0	001-42,21, 0	
4	002- 4	
$\times$	003- 20	
$x \leftrightarrow y$	004- 34	
SIN	005- 23	
-	006- 30	
COS	007- 24	
$\int$ RTN	008- 43 32	

Passa agora ao Modo de Execução e introduza os limites de integração nos registradores X e Y. Certifique-se de que o Modo Trigonométrico seja radianos e defina o formato de apresentação como  $\int$  SCI 2. Finalmente, pressione  $\int \int$ : 0 para calcular a integral.

Pressione	Visor	
$\int$ P/R		Modo de Execução.
0 ENTER	0.0000	Introduz o limite inferior no registrador Y.
$\int$ $\pi$	3.1416	Introduz o limite superior no registrador X.
$\int$ RAD	3.1416	Ativa o Modo Trigonométrico radianos.
$\int$ SCI 2	3.14 00	Ativa o formato de apresentação $\int$ SCI 2.
$\int \int$ 0	7.79 -03	Valor aproximado da integral, em $\int$ SCI 2.
$x \leftrightarrow y$	1.45 -03	Incerteza da aproximação, em $\int$ SCI 2.

A incerteza indica que nenhum dos dígitos da aproximação (apresentados no visor) pode ser considerado preciso. Na realidade, esta aproximação é mais acurada do que sua incerteza indica.

**Pressione** $\boxed{x \rightarrow y}$  $\boxed{f}$  CLEAR  $\boxed{\text{PREFIX}}$ 

(mantenha-a pressionada)

**Visor****7.79 -03**

A aproximação retorna ao visor.

**7785820888**Todos os 10 dígitos da aproximação em  $\boxed{\text{SCI}}$  2.

O valor correto desta integral, com cinco dígitos significativos, é  $7.7805 \times 10^{-3}$ . Conseqüentemente, o erro desta aproximação é cerca de  $(7.7858 - 7.7805) \times 10^{-3} = 5.3 \times 10^{-6}$ . Este erro é consideravelmente menor do que a incerteza,  $1.45 \times 10^{-3}$ . A incerteza é apenas um *limite superior* do erro da aproximação; o erro real será menor, em geral.

Calcule agora a integral em  $\boxed{\text{SCI}}$  3 e compare a precisão da aproximação resultante com a obtida em  $\boxed{\text{SCI}}$  2.

**Pressione** $\boxed{f}$   $\boxed{\text{SCI}}$  3 $\boxed{R \downarrow}$   $\boxed{R \downarrow}$  $\boxed{f}$   $\boxed{\int}$  0 $\boxed{x \rightarrow y}$  $\boxed{x \rightarrow y}$  $\boxed{f}$  CLEAR  $\boxed{\text{PREFIX}}$ 

(mantenha-a pressionada)

**Visor****7.786 -03****3.142 00****7.786 -03****1.448 -04****7.786 -03****7785820888**Muda o formato de apresentação para  $\boxed{\text{SCI}}$  3.

Gira a pilha operacional para baixo, até o limite superior aparecer no registrador X.

Aproximação da integral, em  $\boxed{\text{SCI}}$  3.Incerteza da aproximação, em  $\boxed{\text{SCI}}$  3.

Retorna a aproximação ao visor.

Todos os 10 dígitos da aproximação em  $\boxed{\text{SCI}}$  3.

Todos os 10 dígitos das aproximações em  $\boxed{\text{SCI}} 2$  e em  $\boxed{\text{SCI}} 3$  são idênticos: a precisão da aproximação em  $\boxed{\text{SCI}} 3$  não é melhor do que a precisão em  $\boxed{\text{SCI}} 2$ , embora a incerteza em  $\boxed{\text{SCI}} 3$  seja melhor do que a incerteza em  $\boxed{\text{SCI}} 2$ . Por que? Lembre-se de que a precisão de qualquer aproximação depende em primeiro lugar do número de pontos amostrados, para os quais a função  $f(x)$  tenha sido calculada. O algoritmo de  $\int$  é iterado com um número crescente de pontos amostrados até que a disparidade entre três aproximações sucessivas seja menor do que a incerteza derivada do formato de apresentação. Após uma particular iteração, a disparidade entre as aproximações pode ser ainda bem menor do que a incerteza obtida pelo decréscimo de um fator de 10. Em tais casos, se você diminuir a incerteza especificando mais um dígito no formato de apresentação, o algoritmo não teria que considerar outros pontos adicionais à amostra, e a aproximação resultante seria idêntica à aproximação calculada com maior incerteza.

Se você tivesse calculado as duas aproximações anteriores na sua calculadora, poderia ter notado que a demora seria aproximadamente a mesma, tanto para calcular a integral em  $\boxed{\text{SCI}} 3$  como em  $\boxed{\text{SCI}} 2$ . Isto ocorre porque o tempo de cálculo de uma integral de uma dada função depende do número de pontos amostrados, para os quais a função deve ser calculada até a obtenção de uma aproximação aceitável. Para a aproximação em  $\boxed{\text{SCI}} 3$ , o algoritmo não precisou considerar mais pontos amostrados do que em  $\boxed{\text{SCI}} 2$ , de forma que ele não levou mais tempo para calcular a integral.

Freqüentemente, no entanto, ao se aumentar o número de dígitos do formato de apresentação, se estará exigindo que a função seja calculada em pontos amostrados adicionais, de forma que o cálculo da integral ficará mais demorado. Calcule agora a mesma integral em  $\boxed{\text{SCI}} 4$ .

**Pressione**

$\boxed{f}$   $\boxed{\text{SCI}} 4$

$\boxed{R\downarrow}$   $\boxed{R\downarrow}$

$\boxed{f}$   $\boxed{\int}$  0

**Visor**

7.7858 -03 Apresentação em  $\boxed{\text{SCI}} 4$ .

3.1416 00 Gira a pilha operacional para baixo, até o limite superior aparecer no registrador X.

7.7807 -03 Aproximação da integral, em  $\boxed{\text{SCI}} 4$ .

Esta aproximação levou o dobro do tempo para ser obtida, em relação a  $\text{SCI}$  3 ou  $\text{SCI}$  2. Neste caso, o algoritmo teve de calcular o valor da função em cerca do dobro do número de pontos amostrados anteriormente, até encontrar uma aproximação de precisão aceitável.

Observe, no entanto, que nossa paciência foi recompensada: a precisão desta aproximação é melhor, em cerca de 2 dígitos, do que a calculada com a metade do número de pontos amostrados.

Os exemplos precedentes mostraram que repetindo-se a aproximação de uma integral num formato de apresentação diferente, obteve-se, às vezes, uma resposta mais precisa (mas nem sempre). A mudança da precisão depende da função em particular e geralmente pode ser determinada apenas por tentativa.

Além disso, o preço de se obter uma resposta mais precisa é a espera do decurso do dobro do tempo de cálculo. Este compromisso entre a precisão e a duração do cálculo é muito importante de se ter em mente, quando se desejar uma resposta mais precisa com menor incerteza.

O tempo exigido para o cálculo da integral de uma dada função não depende apenas do número especificado de dígitos para o formato de apresentação, mas também, até uma certa extensão, dos limites de integração. Quando o cálculo de uma integral exige um tempo excessivo, o comprimento do intervalo de integração (isto é, a diferença entre os limites) poderá ser muito grande, se comparado a certas características da função sendo integrada. Na maioria dos problemas, você não precisa se preocupar com relação ao efeito dos limites de integração no tempo de cálculo. Estas considerações, bem como as técnicas para se sair dessas situações, serão vistas um pouco mais adiante, ainda neste Apêndice.

## A Incerteza e o Formato de Apresentação no Visor

Devido ao erro de arredondamento, a sub-rotina que você escreve para o cálculo de  $f(x)$  não o faz com exatidão, realizando ao invés disso, o seguinte cálculo:

$$\hat{f}(x) = f(x) \pm \delta_1(x),$$

onde  $\delta_1(x)$  é a incerteza de  $f(x)$ , ocasionada pelo erro de arredondamento.

Se  $f(x)$  representar um fenômeno físico, então a função que você gostaria de integrar não seria  $f(x)$ , e sim

$$F(x) = f(x) \pm \delta_2(x),$$

onde  $\delta_2(x)$  é a incerteza associada a  $f(x)$  que é ocasionada pela aproximação ao fenômeno físico real.

Como  $f(x) = \hat{f}(x) \pm \delta_1(x)$ , a função que você deseja integrar é

$$F(x) = \hat{f}(x) \pm \delta_1(x) \pm \delta_2(x)$$

ou 
$$F(x) = \hat{f}(x) \pm \delta(x),$$

onde  $\delta(x)$  é a incerteza total associada a  $\hat{f}(x)$ .

Dessa forma, a integral que você deseja é

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) dx &= \int_a^b [\hat{f}(x) \pm \delta(x)] dx \\ &= \int_a^b \hat{f}(x) dx \pm \int_a^b \delta(x) dx \\ &= I \pm \Delta \end{aligned}$$

onde  $I$  é a aproximação de  $\int_a^b F(x) dx$  e  $\Delta$  é a incerteza associada à aproximação. O algoritmo de  $\boxed{f}$  coloca o valor de  $I$  no registrador X e o valor de  $\Delta$  no registrador Y.

A incerteza  $\delta(x)$  de  $\hat{f}(x)$  (a função calculada pela sua sub-rotina) é determinada como se segue. Suponha que você considere que os valores da função tenham 3 dígitos de precisão, de maneira que você possa definir o formato  $\boxed{SCI}$  2 de apresentação. O visor então apresentaria somente os dígitos precisos da mantissa dos valores da função: por exemplo, 1.23 -0.4

Como o formato de apresentação no visor arredonda o conteúdo do registrador X de acordo com o valor a ser apresentado, isto implica que a incerteza dos valores da função é de  $\pm 0.005 \times 10^{-4} = \pm 0.5 \times 10^{-2} \times 10^{-4} = \pm 0.5 \times 10^{-6}$ . Assim sendo, ao se definir o formato de apresentação  $\boxed{SCI}$   $n$  ou

$\boxed{\text{ENG}}$   $n$ , onde  $n$  é um valor inteiro\*, teremos, como decorrência, que a incerteza dos valores da função será

$$\begin{aligned}\delta(x) &= 0.5 \times 10^{-n} \times 10^{m(x)} \\ &= 0.5 \times 10^{-n+m(x)}\end{aligned}$$

Nessa fórmula,  $n$  é o número especificado de dígitos no formato de apresentação e  $m(x)$  é o expoente do valor da função em  $x$ , que apareceria se o valor fosse apresentado no formato  $\boxed{\text{SCI}}$ .

A incerteza é proporcional ao fator  $10^{m(x)}$ , que representa a magnitude do valor da função em  $x$ . Além disso, os formatos  $\boxed{\text{SCI}}$  e  $\boxed{\text{ENG}}$  de apresentação implicam numa incerteza da função que é *relativa* à magnitude da função.

De maneira semelhante, se o valor da função é apresentado em  $\boxed{\text{FIX}}$   $n$ , o arredondamento feito no visor implica em que a incerteza dos valores da função é

$$\delta(x) = 0.5 \times 10^{-n}.$$

Como esta incerteza é independente da magnitude da função, o formato  $\boxed{\text{FIX}}$  de apresentação implica numa incerteza que é *absoluta*.

Cada vez que o algoritmo  $\boxed{f}$  calcula o valor da função num ponto  $x$ , ele também deriva  $\delta(x)$ , que é a incerteza do valor da função em  $x$ . Este cálculo é feito utilizando  $n$  (o número de dígitos especificado pelo formato de apresentação) e a magnitude  $m(x)$  do valor da função em  $x$  (se o formato de apresentação for  $\boxed{\text{SCI}}$  ou  $\boxed{\text{ENG}}$ ).

---

\* Ao se especificar  $\boxed{\text{SCI}}$  8 ou 9, embora os resultados *apresentados* sejam geralmente iguais aos obtidos em  $\boxed{\text{SCI}}$  7, a *incerteza* da integral calculada, (em  $\boxed{\text{SCI}}$  8 ou 9) será menor. (O mesmo é verdadeiro para o formato  $\boxed{\text{ENG}}$ ). Se  $n$  for negativo ( $n$  pode ser definido em  $R_1$ ) ele afetará a incerteza do cálculo de  $\boxed{f}$ . O valor mínimo de  $n$  que afeta a incerteza é -6. Se o conteúdo de  $R_1$  for menor do que -6, ele será interpretado como -6.

O valor de  $\Delta$ , a incerteza da aproximação da integral desejada, é a integral de  $\delta(x)$ :

$$\begin{aligned}\Delta &= \int_a^b \delta(x) dx \\ &= \int_a^b [0.5 \times 10^{-n + m(x)}] dx.\end{aligned}$$

Esta integral é calculada com amostras de  $\delta(x)$  quase que da mesma forma que a aproximação da integral é calculada usando amostras de  $\hat{f}(x)$ .

Como  $\Delta$  é proporcional ao fator  $10^{-n}$ , a incerteza de uma aproximação varia num fator de 10 a cada dígito especificado no formato de apresentação. No entanto, este fator não será exato no formato de apresentação  $\boxed{\text{SCI}}$  ou  $\boxed{\text{ENG}}$ , porque a mudança do número de dígitos especificados poderá exigir que a função seja calculada em pontos amostrados distintos, de modo que  $\delta(x) \sim 10^{m(x)}$  poderá dar origem a valores diferentes.

Note que quando uma integral é aproximada no formato de apresentação  $\boxed{\text{FIX}}$ ,  $m(x) = 0$  e, dessa forma, a incerteza da aproximação será calculada assim:

$$\Delta = 0.5 \times 10^{-n}(b - a).$$

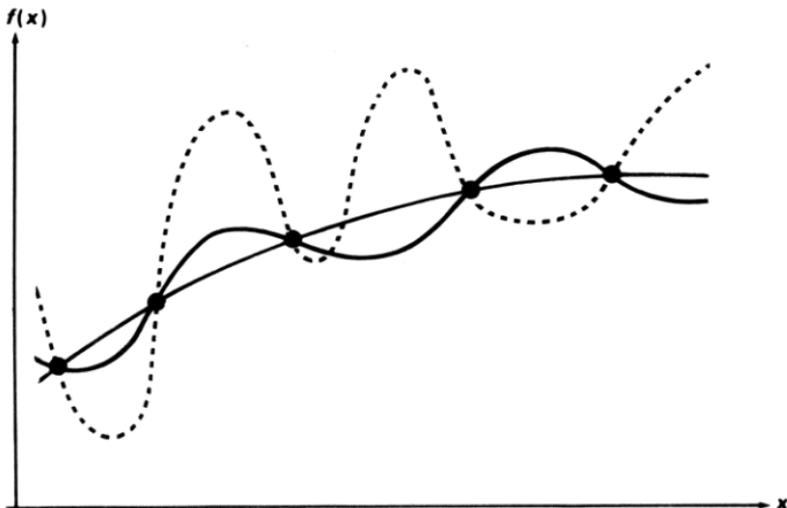
Normalmente você não terá que determinar precisamente a incerteza da função. (Para tanto, seria necessária uma análise bastante complicada). Em geral, é mais conveniente se utilizar  $\boxed{\text{SCI}}$  ou  $\boxed{\text{ENG}}$  se a incerteza dos valores da função puder ser estimada mais facilmente como uma incerteza *relativa*. Por outro lado, é conveniente a utilização do formato de apresentação  $\boxed{\text{FIX}}$  se a incerteza dos valores da função puder ser estimada mais facilmente como uma *incerteza absoluta*. A utilização de  $\boxed{\text{FIX}}$  pode ser inadequada (dando origem a resultados peculiares) ao se integrar uma função cuja magnitude e incerteza tenham valores extremamente pequenos dentro do intervalo de integração. Da mesma maneira, o formato  $\boxed{\text{SCI}}$  pode ser inadequado (também dando origem a resultados peculiares) se a magnitude da função ficar muito menor do que sua incerteza. Se os resultados do cálculo de uma integral parecerem estranhos, é melhor recalculá-la em um outro formato de apresentação.

## Condições que Poderiam Ocasionar Resultados Incorretos

Embora o algoritmo de  $\int$  da HP-15C seja um dos melhores disponíveis, em certas situações poderá fornecer uma resposta incorreta. *A possibilidade de ocorrer esse fato é extremamente remota.* O algoritmo de  $\int$  foi projetado para dar resultados precisos, independentemente da suavidade do gráfico da função. Existe um risco substancial de se obter uma resposta imprecisa somente se a função apresentar um comportamento *extremamente* errático. Tais funções raramente ocorrem em problemas relacionados a fenômenos físicos; quando ocorrem, podem ser usualmente reconhecidos e tratados à parte.

Como foi visto à página 240, o algoritmo de  $\int$  calcula a função  $f(x)$  para vários valores de  $x$ , amostrados dentro do intervalo de integração. Calculando a média ponderada dos valores da função nos pontos amostrados, o algoritmo chega a uma aproximação da integral de  $f(x)$ .

Infelizmente, tudo o que o algoritmo sabe a respeito de  $f(x)$  são seus valores nos pontos amostrados, e por isso ele não pode distinguir entre  $f(x)$  e qualquer outra função que coincida com  $f(x)$  em todos os pontos amostrados. Esta situação está ilustrada na próxima página, a qual mostra três das infinitas funções cujos gráficos coincidem nos finitos pontos amostrados.



Com este número de pontos amostrados, o algoritmo calculará a mesma aproximação para a integral de qualquer das funções apresentadas. Os reais valores das integrais das funções apresentadas como linhas contínuas são quase os mesmos, de forma que a aproximação será razoavelmente precisa se  $f(x)$  for uma delas. No entanto, o real valor da integral da função representada pela linha espaçada é bastante diverso dos valores das outras duas, de modo que a aproximação atual da integral será imprecisa se  $f(x)$  for essa função.

O algoritmo de  $\boxed{f}$  realiza a amostragem de valores da função em número suficiente para determinar seu comportamento. Se a função flutuar, numa determinada região, de maneira diferente de seu comportamento no restante do intervalo de integração, uma iteração qualquer detectará a flutuação. Quando isso ocorrer, o número de pontos amostrados será incrementado, em iterações sucessivas, até que a flutuação (rápida, *mas característica*) seja considerada.

Por exemplo, considere a aproximação de

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx.$$

Como esta integral está sendo calculada numericamente, você poderia supor (mais adiante você verá que esta suposição é ingênua) que o limite superior da integração poderia ser representado pelo maior número que se pode introduzir na calculadora ( $10^{99}$ ). Tente com ele e veja o que acontece.

Introduza uma sub-rotina que calcule a função  $f(x) = x e^{-x}$ .

#### Pressione

$\boxed{g}$   $\boxed{P/R}$

$\boxed{f}$   $\boxed{LBL}$  1

$\boxed{CHS}$

$\boxed{e^x}$

$\boxed{x}$

$\boxed{g}$   $\boxed{RTN}$

#### Visor

000-

001-42.21, 1

002- 16

003- 12

004- 20

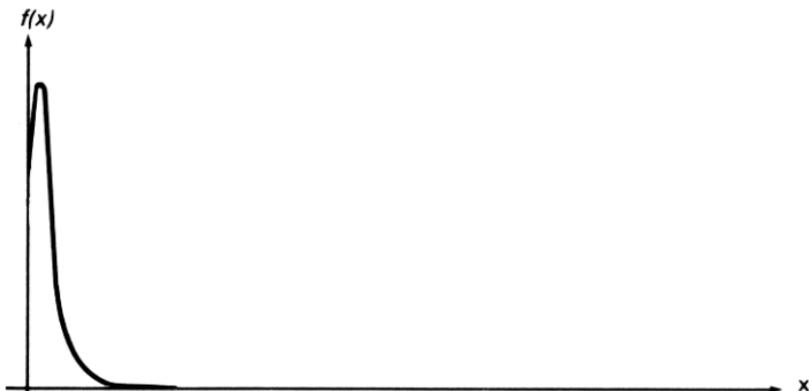
005- 43 32

Modo de Programação

Coloque a calculadora no Modo de Execução. Defina o formato de apresentação  $\boxed{SCI}$  3 e introduza os limites da integração nos registradores X e Y.

Pressione	Visor	Modo de Execução
$\boxed{g}$ $\boxed{P/R}$		Define o formato $\boxed{SCI}$ 3 de apresentação.
$\boxed{f}$ $\boxed{SCI}$ 3		
0 $\boxed{ENTER}$	0.000 00	Introduz o limite inferior no registrador Y.
$\boxed{EEX}$ 99	1 99	Introduz o limite superior no registrador X.
$\boxed{f}$ $\boxed{\beta}$ 1	0.000 00	Aproximação da integral.

A resposta dada pela calculadora é claramente incorreta, porque o real valor da integral de  $f(x) = xe^{-x}$  de 0 a  $\infty$  é exatamente igual a 1. A razão da resposta incorreta *não* se deve ao fato de se ter representado  $\infty$  por  $10^{99}$ , pois o real valor da integral desta função de 0 a  $10^{99}$  é bem próximo de 1. A razão pela qual foi obtida uma resposta incorreta ficará evidente quando você observar o gráfico de  $f(x)$  no intervalo de integração.

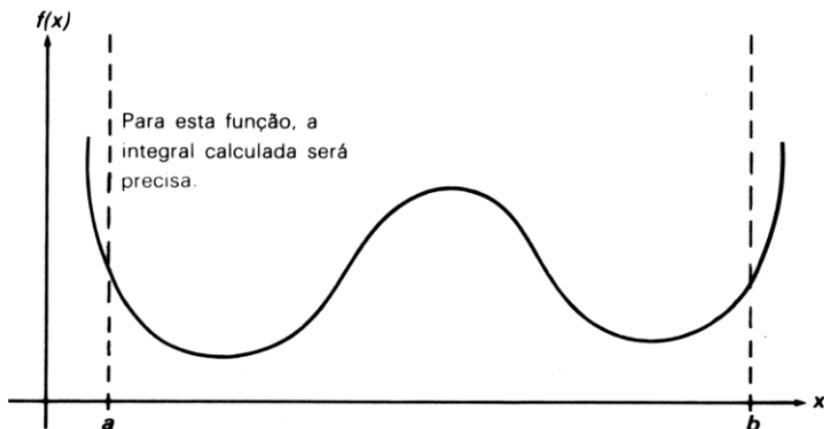


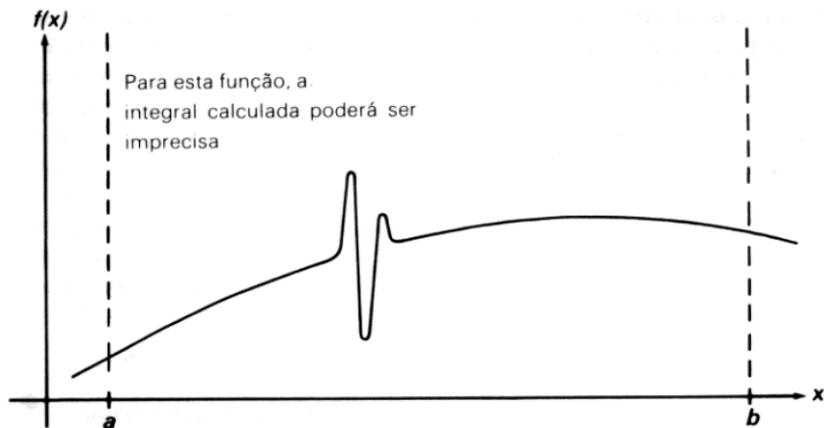
O gráfico possui um espigão bem próximo da origem. (Na realidade, a amplitude de  $f(x)$  foi exagerada na ilustração. Numa escala real do intervalo de integração, seria difícil se fazer a distinção entre o espigão e o eixo vertical). Como nenhum ponto amostrado denunciou o espigão, o algoritmo assumiu que  $f(x)$  era nula ao longo do intervalo de integração. Mesmo que você aumentasse o número de pontos amostrados, calculando a integral em  $\boxed{SCI}$  9, nenhum dos pontos adicionais descobriria o espigão, quando esta função em particular fosse integrada nesse dado intervalo. (Os problemas deste tipo serão vistos com maior detalhe ao final do próximo tópico, Condições que Prolongam a Duração do Cálculo.

Já vimos como o algoritmo de  $\int$  pode dar a você uma resposta incorreta, quando  $f(x)$  possui uma sinuosidade num local pouco característico, com relação ao comportamento geral da função. Felizmente, as funções que apresentam tal aberração são muito pouco usuais, de modo que é pouco provável que você venha a fazer uma integração desse tipo.

As funções que podem levar a resultados incorretos podem ser indetectadas em termos simples, pela rapidez da variação de suas derivadas de ordem mais baixa, no intervalo de integração. Basicamente, quanto mais rápida for a variação da função (ou de suas derivadas), e quanto menor for a ordem dessas derivadas de variação rápida, mais lenta será a execução do algoritmo de  $\int$  e menor será a confiança na aproximação obtida.

Observe que a rapidez da variação da função (ou de suas derivadas de ordem mais baixa) deve ser determinada com relação à amplitude do intervalo de integração. Com um dado número de pontos amostrados, uma função  $f(x)$  que tenha três sinuosidades, pode ser melhor caracterizada por seus valores calculados quando essas sinuosidades se estenderem por todo o intervalo de integração ao invés de estarem confinadas numa pequena fração do intervalo. (Essas duas situações são apresentadas nas ilustrações abaixo). Considerando-se as variações ou sinuosidades como tipos de oscilação da função, o critério de interesse é a razão entre o período das oscilações e a amplitude do intervalo de integração: quanto maior for essa razão, mais rapidamente o algoritmo terminará, e maior será a confiança na aproximação resultante.





Em muitos casos, você estará suficientemente familiarizado com a função a ser integrada e saberá se a função possui sinuosidades no intervalo de integração. Se você não estiver familiarizado com a função, e tiver motivos para suspeitar que ela poderá causar problemas, faça um rápido gráfico da função, calculando seu valor para alguns pontos, através da rotina que você escreveu com esse propósito.

Se por algum motivo, depois de obter uma aproximação de uma integral, você suspeitar de sua validade, existe um processo muito simples que pode ser empregado para verificá-la: subdivida o intervalo de integração em dois ou mais sub-intervalos adjacentes, integre a função em cada sub-intervalo e a seguir some as aproximações resultantes. Isto faz com que a função seja calculada num novo conjunto de pontos amostrados, revelando mais adequadamente, desse modo, qualquer eventual espigão anteriormente existente. Se a aproximação inicial foi válida, ela deverá ser igual à soma das aproximações nos sub-intervalos.

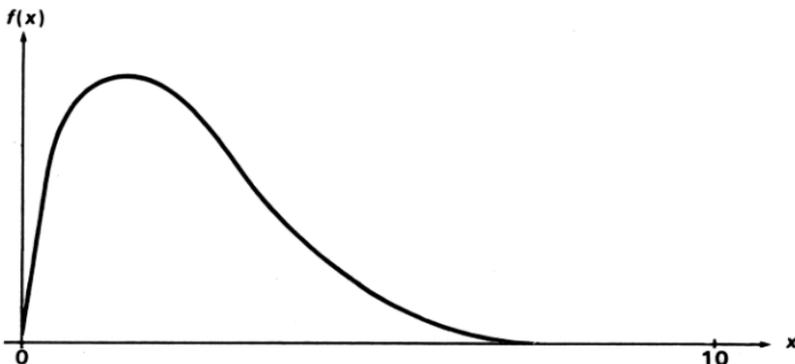
## Condições que Prolongam a Duração do Cálculo

No exemplo anterior (página 251) você viu que o algoritmo deu uma resposta incorreta porque ele nunca detectava o espigão. Isto ocorreu porque a variação da função era muito pequena com relação à amplitude do intervalo de integração. Se a amplitude do intervalo fosse menor, você poderia ter obtido a resposta correta; mas poderia levar muito tempo se o intervalo fosse exageradamente maior.

Para certas integrais, tais como a precedente, o cálculo pode ser indevidamente prolongado, devido ao fato da amplitude do intervalo de integração ser muito grande com relação a determinadas características da função que estiver sendo integrada. Considere uma integral onde o intervalo de integração seja suficientemente extenso para exigir um excessivo tempo de cálculo, mas não tão longo que possa ocasionar um resultado incorreto. Observe que como  $f(x) = xe^{-x}$  se aproxima de zero (muito rapidamente) à medida que  $x$  se aproxima do  $\infty$ , a contribuição da função à integral, para grandes valores de  $x$ , é desprezível. Conseqüentemente você pode calcular a integral substituindo  $\infty$  (o limite superior da integração) por um valor não tão exagerado como  $10^{99}$  (tal como  $10^3$ ).

Pressione	Visor	
0 $\square$ ENTER	0.000 00	Introduz o limite inferior no registrador Y.
$\square$ EEX 3	1 03	Introduz o limite superior no registrador X.
$\square$ f $\square$ $\int$ 1	1.000 00	Aproximação da integral.
$\square$ x $\square$ y	1.824 -04	Incerteza da aproximação.

Esta é a resposta correta, mas levou um tempo muito longo para ser obtida. Para entender o porque, compare o gráfico da função no intervalo de integração, com o da página 251, e verifique como são semelhantes entre  $x = 0$  e  $x = 10$ .



Comparando os dois gráficos, você pode ver que a função tem “interesse” apenas para pequenos valores de  $x$ . Para maiores valores de  $x$ , a função é “desinteressante”, pois ela decresce suave e gradualmente, numa maneira bastante previsível.

Como já vimos anteriormente, o algoritmo de  $\int$  calcula a função com maior densidade de pontos amostrados até que a disparidade entre aproximações sucessivas fique suficientemente pequena. Em outras palavras, o algoritmo calcula a função aumentando o número de pontos amostrados até ter informação suficiente sobre a função, para poder fornecer uma aproximação que tenha variação insignificante com relação ao aumento do número de pontos amostrados.

Se o intervalo de integração fosse  $(0,10)$ , o algoritmo precisaria calcular a função apenas nos valores onde houvesse interesse e o gráfico fosse relativamente suave; os pontos amostrados, depois das poucas primeiras iterações, contribuiriam com novas informações sobre o comportamento da função. Além disso, somente umas poucas iterações seriam necessárias antes da disparidade entre aproximações sucessivas tornar-se suficientemente pequena, permitindo ao algoritmo encerrar a execução, obtendo uma aproximação dentro de uma precisão dada.

Por outro lado, se o intervalo de integração fosse mais semelhante ao visto no gráfico da página 251, a maioria dos pontos amostrados poderia “capturar” a função na região onde sua inclinação não variasse muito. Os poucos pontos amostrados, para pequenos valores de  $x$ , descobririam que os valores da função variariam apreciavelmente de uma iteração para a seguinte. Conseqüentemente, a função teria de ser calculada em pontos amostrados adicionais, antes que a disparidade entre aproximações sucessivas se tornasse suficientemente pequena.

*Para que a integral seja aproximada com a mesma precisão, tanto num intervalo amplo como num intervalo menor, a densidade dos pontos amostrados deve ser a mesma, na região onde a função seja de interesse.* Para se conseguir a mesma densidade de pontos amostrados, o número total destes num intervalo mais amplo deverá ser bem maior que o necessário para um intervalo menor. Conseqüentemente, serão necessárias várias iterações adicionais no intervalo maior para se conseguir uma aproximação com a mesma precisão; com isso, o cálculo da integral exigirá mais tempo.

Como o tempo de duração do cálculo depende da rapidez com que é determinada uma densidade de pontos amostrados na região de interesse da função, o cálculo da integral de qualquer função será prolongado se o intervalo de integração incluir a maioria das regiões onde a função não é de

interesse. Felizmente, ao calcular tal integral, você pode modificar o problema de forma o tempo para obtenção da estimativa seja consideravelmente reduzido. Discutiremos duas técnicas para fazer isso: a de subdividir o intervalo de integração e a transformar variáveis. Tais métodos permitem que você altere a função ou os limites da integração, de modo que o integrando seja melhor avaliado no(s) intervalo(s) de integração.

## Obtendo a Aproximação Atual de uma Integral

Quando o cálculo de uma integral exigir mais tempo do que o disponível, você pode interromper a execução e apresentar o valor atual da aproximação. Você pode obter a aproximação atual mas não a sua incerteza.

Ao pressionar  $\int$ , quando a HP-15C estiver calculando uma integral, você provocará a interrupção da execução do programa. Ao fazer isso, a calculadora pára na linha da sub-rotina que você escreveu para o cálculo da função e apresenta o resultado da execução da linha anterior. Observe que após a interrupção do cálculo, a aproximação atual da integral *não* é o conteúdo do registrador X nem nenhum outro valor da pilha operacional. Como ocorre com qualquer outro programa, ao se pressionar  $\int$  novamente, reinicia-se o cálculo a partir da linha do programa onde se deu a interrupção.

O algoritmo de  $\int$  atualiza a aproximação corrente e a armazena no registrador ÚLTIMO X, após o cálculo da função num novo ponto amostrado. Para se obter a aproximação atual, no entanto, basta se interromper a execução e percorrer linha à linha (se necessário) a sua sub-rotina, até que a calculadora termine o cálculo da função e atualize a aproximação corrente. A seguir, recupere o conteúdo do registrador ÚLTIMO X, que é atualizado quando a instrução  $\int$  da sub-rotina é executada.

Quando a calculadora está atualizando a aproximação corrente, o visor fica em branco e não apresenta a mensagem *running*. (Quando a calculadora está executando a sua sub-rotina, a mensagem *running* é apresentada). Sabendo isso, você pode evitar um longo percurso linha à linha, ao longo da sub-rotina, interrompendo a calculadora no instante em que o visor estiver em branco.

Em resumo, para obter a aproximação atual de uma integral, siga os passos abaixo:

1. Pressione  $\boxed{R/S}$  para interromper a calculadora, de preferência quando o visor estiver em branco.
2. Quando a calculadora interromper o programa, passe ao Modo de Programação para verificar a linha atual do programa.
  - Se o visor apresentar a linha do programa que contiver o rótulo da sua sub-rotina, volte ao Modo de Execução e veja o conteúdo do registrador ÚLTIMO X (prossiga com o passo 3).
  - Se o visor apresentar uma outra linha do programa, volte ao Modo de Execução e pressione ( $\boxed{SST}$ ) repetidamente até chegar à linha da instrução  $\boxed{RTN}$  (de código 43 32) ou à linha 000 (se a instrução  $\boxed{RTN}$  não existir). (Certifique-se de manter  $\boxed{SST}$  pressionada até chegar ao número da linha (e código de teclas) desejada.
3. Pressione  $\boxed{g}$   $\boxed{LSTx}$  para apresentar a aproximação atual. Se você desejar prosseguir no cálculo da aproximação final, pressione  $\boxed{\leftarrow}$   $\boxed{+}$   $\boxed{R/S}$ . Isto faz com que o valor atual de  $x$  preencha a pilha operacional e inicialize o cálculo.

# Bateria, Garantia e Informações sobre Assistência Técnica

## Baterias

A HP-15C é acionada por 3 baterias. A HP-15C foi projetada para operar durante 6 meses ou mais, em uso "normal", com um conjunto de baterias alcalinas. As baterias fornecidas com a calculadora são alcalinas, mas também podem ser utilizadas as de óxido de prata (que deverão durar o dobro do tempo).

Um conjunto de 3 baterias alcalinas novas proporcionarão no mínimo 60 horas de execução *contínua* de um programa (que é o uso de maior consumo das baterias\*). Um conjunto de 3 baterias novas de óxido de prata proporcionarão no mínimo 135 horas de execução *contínua* de um programa. Se a calculadora estiver sendo usada para outras operações que não a execução de um programa, o consumo de energia será bem menor. Se apenas o visor estiver ligado, não sendo pressionada nenhuma tecla, nem executado nenhum programa, o consumo de energia será mínimo.

Se a calculadora permanecer desligada, um conjunto de baterias novas preservará o conteúdo da Memória Contínua por um período de tempo equivalente ao de duração das baterias quando fora da calculadora: 1,5 anos, no mínimo, para baterias alcalinas e 2 anos, no mínimo, para baterias de óxido de prata.

A duração real das baterias varia com a frequência de uso da calculadora, se você a utiliza mais para cálculos manuais ou na execução de programas, e quais as funções que você emprega\*.

As baterias fornecidas com a calculadora, bem como as relacionadas, a seguir, para substituição, *não* são recarregáveis.

---

\* O consumo de energia da HP-15C varia com o modo de uso da calculadora: desligada (sendo preservada a Memória Contínua); ociosa (estando apenas o visor ligado) ou em "operação" (executando um programa, realizando um cálculo ou tendo sido pressionada uma tecla). Quando a calculadora está ligada, seu uso típico é um misto de tempo ocioso e de operação. Conseqüentemente, a duração das baterias depende do tempo gasto em cada um desses 3 modos.

### CUIDADO

Não tente recarregar as baterias; não as armazene próximas a fontes de calor nem jogue-as ao fogo. Ao fazê-lo, as baterias poderão vazar ou explodir.

Ao substituir as baterias descarregadas da sua HP-15C por novas, recomendamos o uso de uma das seguintes (nem todas estão disponíveis em todos os países):

#### Alcalinas

Eveready A76  
UCAR A76  
RAY-O-VAC RW82  
National ou Panasonic LR44  
Varta 4276

#### Óxido de Prata

Eveready 357  
UCAR 357  
RAY-O-VAC RS76 ou RW42  
Duracell MS76 ou 10L14  
Varta 541

### Indicação de Bateria Fraca

Quando a vida útil das baterias estiver próxima ao fim, um asterisco (\*) aparecerá piscando no canto inferior esquerdo do visor.

Se a calculadora estiver com baterias alcalinas:

- ela poderá ser usada para a execução contínua de programas durante, no mínimo, as 1,5 horas subseqüentes à primeira apresentação do asterisco no visor†.
- se desligada, o conteúdo da Memória Contínua será preservado durante, no mínimo, o mês subseqüente à primeira apresentação do asterisco no visor.

Se a calculadora estiver com baterias de óxido de prata:

- ela poderá ser usada para a execução contínua de programas durante, no mínimo, os 10 minutos subseqüentes à primeira apresentação do asterisco no visor†.

† Observe que o tempo mencionado é o mínimo disponível para a *execução contínua de um programa*, ou seja, em "operação" contínua (como já foi mencionado no rodapé da página 258). Em cálculos manuais (um misto entre os modos ocioso e de "operação") a calculadora poderá ser utilizada por um tempo bem maior, antes da primeira apresentação do asterisco.

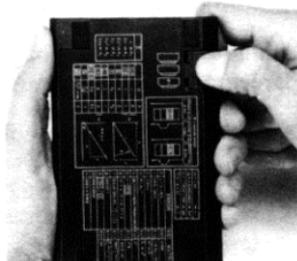
- se desligada, o conteúdo da Memória Contínua será preservado durante, no mínimo, a semana subsequente à primeira apresentação do asterisco no visor.

## Instalando Baterias Novas

A Memória Contínua da calculadora é preservada por algum tempo quando as baterias estão fora da calculadora (desde que você a desligue *antes* de retirar as baterias). Você terá tempo suficiente para substituir as baterias, sem perder dados ou programas. Se a sua calculadora ficar muito tempo sem as baterias, o conteúdo da Memória Contínua poderá ser perdido.

Para instalar as novas baterias, faça o seguinte:

1. Desligue a calculadora.
2. Segure a calculadora como na foto e pressione a porta do compartimento das baterias para fora, até que ela se abra ligeiramente.



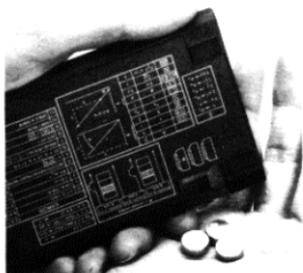
3. Segure a borda externa da porta do compartimento das baterias. Puxe-a para cima, retirando-a da calculadora.



### CUIDADO

Nos próximos dois passos, tome o cuidado de não pressionar tecla alguma enquanto as baterias estiverem fora da calculadora; se isto acontecer, o conteúdo da Memória Contínua e o controle do teclado poderão ser perdidos (ou seja, a calculadora poderá não responder às teclas pressionadas).

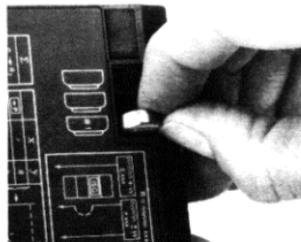
4. Vire a calculadora para cima e balance-a delicadamente, até que as baterias caiam na palma da sua mão.



### CUIDADO

No próximo passo, substitua *todas as três baterias* por outras novas. Se você trocar apenas uma ou duas, uma das antigas poderá vazar. Além disso, tome o cuidado de não inverter a polaridade das mesmas; se isto acontecer, o conteúdo da Memória Contínua poderá ser perdido e as baterias poderão ser danificadas.

5. Coloque as 3 baterias novas, mantendo abertas as duas abas plásticas do compartimento de baterias. Elas devem ser posicionadas de modo que seus lados planos (marcados com "+") fiquem *de frente* para o apoio de borracha adjacente, conforme a ilustração existente na caixa da calculadora.

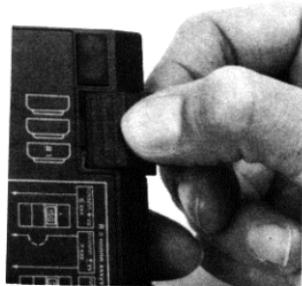


6. Insira a saliência da porta do compartimento de baterias na fenda existente na caixa da calculadora.



7. Feche a porta do compartimento até que esta fique nivelada com o corpo da máquina, e então empurre-a até ficar bem encaixada.

8. Ligue a calculadora. Se por algum motivo a Memória Contínua tiver sido apagada (ou seja, seu conteúdo tiver sido perdido), o visor apresentará a mensagem **Pr Error**. Pressionando-se qualquer tecla, a mensagem será apagada.



## Verificando a Operação Correta (Auto-Diagnóstico)

Se você não conseguir ligar a calculadora, ou se algo não estiver funcionando adequadamente, use um dos procedimentos abaixo:

Se a calculadora *não* reagir às teclas pressionadas:

1. Pressione as teclas  $y^x$  e **ON** simultaneamente, e então solte-as. Com isto, o conteúdo do registrador X será alterado; apague-o após esta operação.
2. Se a calculadora ainda não reagir às teclas pressionadas, retire e recoloque as baterias. Verifique se as baterias estão corretamente posicionadas no seu compartimento.
3. Se a calculadora ainda não reagir às teclas pressionadas, provoque um curto-circuito utilizando os terminais das baterias sem tirá-las de seu compartimento. Para tanto, segure as abas plásticas de modo que os terminais fiquem expostos (os terminais são as linguetas metálicas flexíveis que se localizam nos extremos do compartimento de bate-

rias). *Feche o contato apenas momentaneamente.* Ao fazer isso, o conteúdo da Memória Contínua será perdido e você precisará pressionar a tecla **ON** mais de uma vez para ligar a calculadora.

4. Se você ainda não conseguir ligar a calculadora, coloque novas baterias. Se ela ainda não reagir, será necessário repará-la.

Se a calculadora *reagir* às teclas pressionadas:

1. Ligue a calculadora, mantenha a tecla **ON** pressionada e pressione a tecla **X**.
2. Solte a tecla **ON** e então solte a tecla **X**. Com isso, será iniciado um teste completo dos circuitos eletrônicos da calculadora. Se tudo estiver funcionando corretamente, o visor apresentará a palavra **running** (por cerca de 25 segundos) e então apresentará **8,8,8,8,8,8,8,8,8**; todos os indicadores de estado ficarão ativados (exceto o \* indicativo de bateria fraca)\*. Se o visor apresentar a mensagem **Error 9**, ficar em branco, ou apresentar algo que não seja o resultado adequado, a calculadora necessitará de reparos.†

**Observação:** Os circuitos da calculadora também poderão ser testados se as teclas **X** ou **÷** forem mantidas pressionadas quando a tecla **ON** for solta. †† Tais testes foram incluídos para verificação da calculadora nas fases de produção e de reparos.

---

\* Alguns dos indicadores de estado ativados ao final deste teste não são normalmente apresentados no visor da HP-15C.

† Se a calculadora apresentar a mensagem **Error 9** como resultado do teste **ON**/**X** ou **ON**/**÷**, e você quiser continuar a utilizá-la, apague a Memória Contínua seguindo a descrição dada na página 64.

† A combinação **ON**/**÷** inicia um teste semelhante ao descrito acima, mas prossegue indefinidamente. Pressionando-se uma tecla qualquer, o teste será encerrado em 25 segundos. A combinação **ON**/**÷** inicia um teste do teclado e do visor. Quando a tecla **ON** for solta, certos segmentos do visor ficarão acesos. Para executar o teste, as teclas deverão ser pressionadas em ordem da esquerda para a direita, ao longo de cada linha, da linha superior à inferior. À medida que cada tecla for pressionada, ficarão acesos diferentes segmentos do visor. Se a calculadora estiver funcionando adequadamente e todas as teclas forem pressionadas na ordem correta, a calculadora apresentará o número 15 após a pressão da última tecla. (A tecla **ENTER** deverá ser pressionada 2 vezes, tanto na 3ª como na 4ª linhas). Se a calculadora não estiver funcionando adequadamente, ou se alguma tecla for pressionada fora de ordem, o visor apresentará a mensagem **Error 9**. *Observe que se o visor apresentar a mensagem de erro em consequência da pressão de uma tecla errada, isto não indicará que a calculadora precisa ser reparada.* Este teste pode ser encerrado pressionando-se qualquer tecla fora da ordem (o que, é claro, fará com que a mensagem **Error 9** seja apresentada). Tanto a mensagem **Error 9** como o número 15 podem ser eliminados pressionando-se uma tecla qualquer.

Se você suspeitar que a calculadora não está funcionando adequadamente, embora tenha apresentado no visor a configuração do passo 2, é provável que você tenha cometido um engano ao operá-la. Sugerimos que você leia novamente a parte do manual relativa à operação desejada.

## **Garantia Limitada de Um Ano**

### **O que Faremos**

A HP-15C é garantida pela Hewlett-Packard, contra defeitos de material e montagem por um ano, a partir da data da compra original. Se você a vender ou presentear, a garantia será automaticamente transferida ao novo proprietário e permanecerá em efeito com relação ao período original de um ano. Durante o período de garantia, nós repararemos ou, a nosso critério, substituiremos sem qualquer ônus, o produto comprovadamente defeituoso, quando for enviado, com porte pago, a um dos Postos de Assistência Técnica da Hewlett-Packard.

### **O que não Está Coberto**

Esta garantia não se aplicará nos casos em que o produto tiver sido danificado por acidente, uso indevido, ou como resultado de serviços ou modificações realizadas por outros que não os Postos de Assistência Técnica da Hewlett-Packard.

Nenhum outro tipo de garantia expressa será dado. A iniciativa de reparo ou substituição do produto é exclusivamente do usuário.

### **Obrigatoriedade de Realização de Modificações**

Os produtos HP são vendidos tendo por base as especificações aplicáveis por ocasião da fabricação. A Hewlett-Packard não se obriga a modificar ou atualizar seus produtos, depois que estes são vendidos.

## **Assistência Técnica**

A Hewlett-Packard mantém Postos de Assistência Técnica em muitos países. Você poderá mandar consertar a sua calculadora num Posto de Assistência Técnica sempre que ela precisar de reparos, esteja ou não na garantia. Existe um custo para consertos feitos após o período de um ano de garantia.

As calculadoras Hewlett-Packard são normalmente reparadas e devolvidas em 5 (cinco) dias úteis a partir da data de recebimento no Posto de Assistência Técnica. Este prazo é uma estimativa média, podendo variar em função da época do ano e da carga de trabalho no Posto de Assistência Técnica. O tempo total que você ficará sem a sua calculadora dependerá bastante dos serviços de despacho utilizados.

### **Informações sobre a Assistência Técnica Internacional**

Nem todos os Postos de Assistência Técnica da Hewlett-Packard oferecem assistência técnica para todos os modelos de calculadoras HP. Contudo, se você adquiriu sua calculadora de um revendedor autorizado Hewlett-Packard, pode ter certeza de que o serviço estará disponível no país onde se deu a aquisição.

Se acontecer de você estar fora do país onde se deu a aquisição, entre em contacto com o Posto de Assistência Técnica local para verificar se a mesma pode ser nele reparada. Se não puder, faça a gentileza de remetê-la para

#### **Hewlett-Packard Company**

Corvallis Division Service Department  
P.O. Box 999/1000 N.E. Circle Blvd.  
Corvallis, Oregon, 97330, U.S.A.

Todas as despesas para envio e remportação são de sua responsabilidade.

### **Custo de Reparos**

Existe uma taxa fixa para os reparos feitos fora da garantia. Os encargos incluem todo o trabalho e o material empregado.

As calculadoras danificadas por acidente ou negligência não estão cobertas por taxas de reparo fixas. Nestes casos, o custo será individualmente determinado, em função do material e tempo gastos no reparo.

### **Garantia dos Reparos**

O material e a mão de obra dos reparos feitos fora da garantia são garantidos por 90 dias a partir da data do serviço.

## **Instruções de Remessa para Reparos**

Se a sua calculadora precisar de reparos, envie-a com os seguintes itens:

- O Cartão de Serviço preenchido, incluindo a descrição do problema.
- A nota de compra ou qualquer outro comprovante da data de aquisição (se a garantia de um ano não tiver expirado).

A calculadora, o Cartão de Serviço contendo uma breve descrição do problema e (se necessário) o comprovante da data de compra, devem ser acondicionados na embalagem original de despacho ou em outra embalagem que ofereça proteção adequada, para evitar danos de transporte. Tais danos não são cobertos pela garantia de um ano; a Hewlett-Packard sugere que você faça um seguro ao enviar a calculadora ao Posto de Assistência Técnica. A calculadora, adequadamente embalada, deve ser enviada ao endereço constante no Cartão de Serviço. No caso de dúvidas, consulte o revendedor autorizado. (Se você não estiver no país onde a calculadora foi originalmente adquirida, leia as Informações sobre a Assistência Técnica Internacional dadas acima).

Quer a calculadora esteja ou não na garantia, as despesas de remessa ao Posto de Assistência Técnica Hewlett-Packard correrão por sua conta. Nos reparos feitos dentro do período de garantia, a Hewlett-Packard arcará com as despesas de devolução ao proprietário. Nos reparos feitos fora do período de garantia, o proprietário, pro ocasião do recebimento, deverá pagar as despesas de frete e o custo do serviço de reparos.

## **Informações Adicionais**

Não existem contratos de manutenção. Os circuitos e o projeto são propriedades da Hewlett-Packard, não estando à disposição dos usuários os Manuais de Serviço.

Para quaisquer outras informações ou esclarecimentos relacionados a serviços, não previstos neste manual, solicitamos a gentileza de contactar o Posto de Assistência Técnica mais próximo.

## **Informações sobre Vendas e Produto**

Para obter tais dados, escreva para

**Hewlett-Packard do Brasil Ind. e Com. Ltda.**  
**Alameda Rio Negro, 750 - Alphaville**  
**Rodovia Castelo Branco - Km 23.5**  
**06400 Barueri, São Paulo - SP**

## **Especificações de Temperatura**

- Quando em Operação: 0°C a 55°C (32°F a 131°F)
- Quando Guardada: -40°C a 65°C (-40°F a 149°F)

# Resumo e Índice de Funções

<b>ON</b> .....	268
Alteração de Números .....	268
Armazenamento .....	269
Controle do Registrador de Indexação .....	269
Controle do Visor .....	269
Conversões .....	270
Estatística .....	270
Funções Complexas .....	270
Funções Hiperbólicas .....	271
Funções Logarítmicas e Exponenciais .....	271
Funções de Matrizes .....	271
Introdução de Dígitos .....	273
Manipulação da Pilha Operacional .....	273
Matemática .....	274
Porcentagem .....	274
Probabilidades .....	274
Teclas de Prefixo .....	274
Trigonometria .....	275

## **ON**

A tecla **ON** liga e desliga o visor da calculadora (**página 17**). Ela também é utilizada para se apagar a Memória Contínua (**página 64**), para se intercambiar os separadores de dígitos (**página 62**) e em vários testes de operação da calculadora (**páginas 262-263**).

## Alteração de Números

**ABS** Dá o valor absoluto do conteúdo do visor (**página 24**).

**FRAC** Deixa apenas a parte fracionária do conteúdo do visor (registrador X), truncando a sua parte inteira (**página 24**).

**INT** Deixa apenas a parte inteira do conteúdo do visor (registrador X), truncando a sua parte fracionária (**página 24**).

**RND** Arredonda a mantissa de 10 dígitos do conteúdo do registrador X, segundo o formato de apresentação no visor (**página 24**).

**Armazenamento**

**[STO]** Armazena.

Seguida por um endereço { 0 a 9, .0 a .9, **[I]** ou **[(i)]** }, armazena o conteúdo do visor no registrador de armazenamento especificado (**página 43**). Também utilizada em aritmética com registrador de armazenamento: novo conteúdo do registrador = conteúdo anterior do registrador { **[+]**, **[-]**, **[x]**, **[÷]** } conteúdo do visor (**página 44**).

**[RCL]** Recupera.

Seguida por um endereço { 0 a 9, .0 a .9, **[I]** ou **[(i)]** }, recupera no visor o conteúdo do registrador de armazenamento especificado (**página 43**). Também utilizada em aritmética de armazenamento: novo conteúdo do visor = conteúdo anterior do visor { **[+]**, **[-]**, **[x]**, **[÷]** } conteúdo do registrador (**página 44**).

CLEAR **[REG]** Apaga o conteúdo de todos os

registradores de armazenamento, zerando-os (**página 44**).

**[LSTx]** Recupera no visor o número apresentado antes da realização da última operação (**página 35**).

### Controle do Registrador de Indexação

**[I]** Registrador de Indexação ( $R_1$ ). Registrador de armazenamento utilizado para: execução indireta de programas (desvios com **[GTO]** e **[GSB]** ciclos com **[ISG]** e **[DSE]**), controle indireto de indicadores e controle indireto do formato de apresentação no visor (**página 109**). Também utilizado para a introdução de números complexos e para a ativação do Modo Complexo (**página 123**).

**[(i)]** Operações indiretas. Utilizada para endereçar um *segundo* registrador de

armazenamento de dados *através* de  $R_1$ , para armazenamento, recuperação, aritmética e controle de ciclos de programas (**página 109**). Também é utilizada com **[DIM]** para a alocação de registradores de armazenamento (**página 216**).

### Controle do Visor

**[FIX]** Seleciona a apresentação em ponto fixo (**página 59**).

**[SCI]** Seleciona a apresentação em notação científica (**página 59**).

**[ENG]** Seleciona a apresentação em notação de Engenharia (**página 59**).

Mantissa. Pressionando-se **[f]** CLEAR **[PREFIX]** são apresentados, no visor, todos os 10 dígitos do conteúdo do registrador X, enquanto a tecla **[PREFIX]** for mantida pressionada (**página 61**); também apaga qualquer seqüência parcial de teclas (**página 19**).

**Conversões**

**↔R** Converte a magnitude polar  $r$  e o ângulo  $\theta$ , contidos nos registradores X e Y, respectivamente, em coordenadas retangulares  $x$  e  $y$  (página 30). Para operação no Modo Complexo, veja a página 133.

**↔P** Converte as coordenadas retangulares  $x$  e  $y$ , contidas nos registradores X e Y, respectivamente, na magnitude polar  $r$  e no ângulo  $\theta$  (página 30). Para operação no Modo Complexo, veja a página 133.

**↔H.MS** Converte horas (ou graus) decimais em horas, minutos e segundos (ou graus, minutos, segundos) (página 27).

**↔H** Converte horas, minutos e segundos (ou graus, minutos e segundos) em horas (ou graus) decimais (página 27).

**↔RAD** Converte graus em radianos (página 27).

**↔DEG** Converte radianos em graus (página 27).

**Estatística**

**Σ+** Acumula nos registradores  $R_2$  a  $R_7$ , estatísticas dos valores contidos nos registradores X e Y (página 50).

**Σ-** Subtrai dos registradores  $R_2$  a  $R_7$  as estatísticas dos valores contidos nos registradores X e Y, para a correção dos dados introduzidos por **Σ+** (página 53).

**Σ** Calcula a média aritmética dos valores de  $x$  e  $y$  acumulados por **Σ+** (página 54).

**S** Calcula os desvios-padrão dos valores  $x$  e  $y$  acumulados por **Σ+** (página 54).

**ŷ<sub>r</sub>** Estimativa Linear e Coeficiente de Correlação. Calcula o valor estimado de  $y$  ( $\hat{y}$ ), para um dado valor de  $x$ , pelo método dos mínimos quadrados, colocando o resultado no registrador X. Calcula o coeficiente de correlação ( $r$ ) dos

dados acumulados e o coloca no registrador Y (página 57).

**L.R.** Regressão Linear. Calcula a intersecção com o eixo  $y$  e a inclinação da função linear que melhor se aproxima dos dados acumulados. O valor da intersecção com  $y$  é colocado no registrador X; o valor da inclinação é colocado no registrador Y (página 55).

**RAN#** Número Aleatório. Gera um número pseudo-aleatório a partir de um termo inicial ("semente"), armazenado com **STO** **RAN#** (página 49).

**CLEAR Σ** Apaga o conteúdo dos registradores estatísticos ( $R_2$  a  $R_7$ ) (página 50).

**Funções Complexas**

**ReIm** Intercâmbio Real ↔ Imaginário. Ativa o Modo Complexo (estabelecendo uma pilha imaginária) e intercambia o conteúdo dos registradores X,

real e imaginário  
(página 126).

**I** Utilizada para a introdução de números complexos. Ativa o Modo Complexo (estabelecendo uma pilha imaginária) (página 123). Também é usada com **DIM** para o dimensionamento indireto de matrizes (página 175). (Para as funções com o Registrador de Indexação, veja as teclas de Controle do Registrador de Indexação, na página 269).

**(i)** Mantida pressionada, apresenta o conteúdo do registrador X imaginário (página 126).

**SF** 8 Ativa o indicador 8, estabelecendo o Modo Complexo (página 123).

**CF** 8 Apaga o indicador 8, desativando o Modo Complexo (página 123).

### Funções Hiperbólicas

**HYP SIN** · **HYP COS** · **HYP TAN**

Calculam, respectivamente, o seno hiperbólico, o cosseno hiperbólico e a tangente hiperbólica- (página 28).

**HYP<sup>-1</sup> SIN** · **HYP<sup>-1</sup> COS** · **HYP<sup>-1</sup> TAN**

Calculam, respectivamente, o arco-seno hiperbólico, o arco-cosseno hiperbólico e o arco-tangente hiperbólico (página 28).

### Funções Logarítmicas e Exponenciais

**LN** Calcula o logaritmo natural (página 28).

**e<sup>x</sup>** Antilogaritmo Natural. Eleva **e** à potência do valor contido no visor (registrador X) (página 28).

**LOG** Calcula o logaritmo comum (na base 10) (página 28).

**10<sup>x</sup>** Antilogaritmo Comum. Eleva 10 à potência do valor contido no visor

(registrador X) (página 28).

**y<sup>x</sup>** Eleva o conteúdo do registrador Y à potência do valor contido no registrador X. (Introduza y seguido por x). Provoca a descida do conteúdo da pilha operacional (página 29).

### Funções de Matrizes

**DIM** Dimensiona a matriz { **A** a **E**, **I** } especificada (página 143).

**RESULT** Designa a matriz que irá preservar o resultado de uma determinada operação matricial (página 150).

**USER** Modo do Usuário. Os números da linha (em R<sub>0</sub>) e da coluna (em R<sub>1</sub>) são automaticamente incrementados cada vez que **STO** ou **RCL** { **A** a **E** ou **(i)** } é pressionada (página 146).

**STO** e **RCL** { **A** a **E**, **(i)** } Armazena ou recupera elementos de uma matriz, em função do número da

linha (em  $R_0$ ) e do número da coluna (em  $R_1$ ) (páginas 146, 148).

**STO**  $\square$  e **RCL**  $\square$   
 { **A** a **E**, (j) }

Armazena ou recupera elementos de uma matriz, em função dos números da linha e da coluna contidos, respectivamente, nos registradores Y e X (páginas 148-149).

**STO** e **RCL**

**MATRIX** { **A** a **E** }

Armazena ou recupera a matriz especificada (páginas 144, 151).

**STO** e **RCL** **RESULT**

Armazena ou recupera o descritor da matriz de resultados (página 151).

**RCL** **DIM** { **A** a **E**, **I** } Recupera as dimensões da matriz especificada; o registrador Y passa a conter o número de linhas e o registrador X passa a conter o número de colunas (página 144).

**1/x** Inverte a matriz cujo descritor esteja no visor; a resposta será colocada na matriz de

resultados especificada. O descritor da matriz de resultados será então apresentado (página 152).

**+**, **-**, **x** Soma, subtrai ou multiplica os elementos das matrizes correspondentes (ou os elementos da matriz e o escalar correspondente). Armazena a resposta na matriz de resultados (páginas 154-157).

**+** No caso de duas matrizes, multiplica a inversa da matriz especificada no registrador X pela matriz especificada no registrador Y. No caso de uma única matriz: se o descritor dela estiver em Y, todos os elementos da matriz serão divididos pelo escalar em X; se o descritor dela estiver em X, cada elemento da matriz inversa será multiplicado pelo escalar em Y. A resposta será colocada na matriz de resultados (páginas 154-157).

**CHS** Troca o sinal de todos os elementos da matriz especificada no registrador X (página 152).

**MATRIX** {0 a 9}. Operações matriciais.

**MATRIX** 0. Dimensiona todas as matrizes como sendo  $0 \times 0$  (página 145).

**MATRIX** 1. Define os conteúdos de  $R_0$  (número da linha) e de  $R_1$  (número da coluna) como sendo iguais a 1 (página 145).

**MATRIX** 2. Transformação complexa:  $Z^P$  em  $\bar{Z}$  (página 166).

**MATRIX** 3. Inversa da transformação complexa:  $\bar{Z}$  em  $Z^P$  (página 167).

**MATRIX** 4 Transposta:  $X$  em  $Y^T X$  (página 152).

**MATRIX** 5 Transposição e Multiplicação:  $Y$  e  $X$  em  $Y^T X$  (página 156).

**MATRIX** 6 Calcula os resíduos na matriz de resultados (página 161).

**MATRIX** 7 Calcula a norma de linha da matriz especificada no registrador X (**página 152**).

**MATRIX** 8 Calcula a norma de Frobenius da matriz especificada no registrador X (**página 153**).

**MATRIX** 9 Calcula o determinante da matriz especificada no registrador X (além de realizar a decomposição  $LU$  da matriz) (**página 153**).

**Cy,x** Transforma a matriz armazenada na "forma particionada" ( $Z^P$ ) para a "forma complexa" ( $Z^C$ ) (**página 164**).

**Py,x** Transforma a matriz armazenada na "forma complexa" ( $Z^C$ ) para a "forma particionada" ( $Z^P$ ) (**página 164**).

**x=0**, **TEST** 0, **TEST** 5, **TEST** 6. Testes de condição para os descritores de matrizes contidos nos registradores X ou X e Y. **x=0** e **TEST** 0 ( $x \neq 0$ ) comparam o conteúdo de X com

zero. Os descritores de matrizes são considerados não nulos. **TEST** 5 ( $x = y$ ) e **TEST** 6 ( $x \neq y$ ) comparam os descritores contidos em X e Y. O resultado afeta a execução do programa: se a comparação constatar que  $x \neq y$ , uma linha será saltada (**página 175**).

#### Introdução de Dígitos

**ENTER** Introduz no registrador Y uma cópia do número contido no registrador X (visor); é utilizada para separar introduções consecutivas de números (**páginas 21, 37**).

**CHS** Muda o sinal do número (ou expoente de 10) contido no visor (**páginas 18, 126**).

**EEX** Introduz expoente. Depois de pressionada, os dígitos introduzidos a seguir compoem um expoente de 10 (**página 18**). Teclas dos dígitos **0** a **9** (**página 21**).

**.** Ponto decimal (**página 21**).

#### Manipulação da Pilha Operacional

**x↔y** Intercambia o conteúdo dos registradores X e Y da pilha operacional (**página 34**).

**x↔** Intercâmbio com o registrador X. Intercambia o conteúdo do registrador X com o do registrador especificado. Usada com **I**, **(i)**, teclas dos dígitos, ou **.** seguida pelo dígito do endereço (**página 43**).

**ReIm** Intercâmbio real ↔ imaginário. Intercambia o conteúdo dos registradores X real e imaginário, ativando o Modo Complexo (**página 126**).

**R↓** Gira o conteúdo da pilha operacional para baixo (**página 34**).

**R↑** Gira o conteúdo da pilha operacional para cima (**página 34**).

**CLx** Apaga o conteúdo do visor (registrador X), zerando-o (**página 21**).

**←** No Modo de Execução: elimina o último dígito

introduzido ou apaga o visor (se a introdução de dígitos tiver sido encerrada) (**página 21**).

### Matemática

**[ - ]**, **[ + ]**, **[ × ]**, **[ ÷ ]**

Operadores aritméticos; causam a descida do conteúdo da pilha operacional (**página 29**).

**[ √ ]** Calcula a raiz quadrada de  $x$  (**página 25**).

Calcula  $x$  ao quadrado (**página 25**).

**[ x! ]** Calcula o fatorial ( $n!$ ) de  $x$  ou a função Gama ( $\Gamma$ ) de  $(1 + x)$  (**página 25**).

**[ 1/x ]** Calcula o inverso de  $x$  (**página 25**). (Para uso com matrizes, veja as Funções de Matrizes na **página 271**).

**[ π ]** Coloca o valor de  $\pi$  no visor (**página 24**).

**[ SOLVE ]** Calcula a raiz real da função  $f(x)$ , definida pelo usuário através de uma sub-rotina (**página 182**).

**[ ∫ ]** Integral. Calcula a integral definida de  $f(x)$ , estabelecida pelo

usuário através de uma sub-rotina (**página 195**).

### Porcentagem

**[ % ]** Porcentagem. Calcula  $x\%$  do conteúdo do registrador Y (**página 29**). De maneira diversa da maioria das funções de dois números, **[ % ]** não provoca a descida do conteúdo da pilha operacional.

**[ Δ% ]** Variação percentual. Calcula a variação percentual entre o conteúdo do registrador Y e o do visor (**página 30**). Não provoca a descida do conteúdo da pilha operacional.

### Probabilidades

**[ Cy,x ]** Combinação. Calcula o número de possíveis conjuntos de  $y$  itens distintos, em grupos de  $x$ , provocando a descida do conteúdo da pilha operacional (**página 48**). Para uso com matrizes, veja as Funções de Matrizes na **página 271**.

**[ Py,x ]** Permutação. Calcula o número de possíveis arranjos distintos de  $y$  elementos, em grupos de  $x$ , provocando a descida do conteúdo da pilha operacional (**página 48**). (Para uso com matrizes, veja as Funções de Matrizes na **página 271**).

### Teclas de Prefixo

**[ f ]** Pressionada antes de uma tecla de função, seleciona a função em dourado, acima da tecla (**página 17**).

**[ g ]** pressionada antes de uma tecla de função, seleciona a função em azul, abaixo da tecla (**página 17**).

Para as demais teclas de prefixo, veja as teclas de Controle do Visor (**página 269**), as teclas de Armazenamento (**página 269**) e o Resumo e Índice de Programação (**página 275**).

CLEAR **[ PREFIX ]**  
Cancela as teclas de prefixo e instruções que tenham sido

parcialmente introduzidas, tais como **f** **SCI** (página 20). Também apresenta a mantissa de 10 dígitos do valor contido no visor (página 61).

### Trigonometria

**DEG** Ativa o Modo Graus decimais para as funções trigonométricas, o que pode ser constatado pela ausência dos anúncios **GRAD** ou **RAD** (página 26). Não

funciona com as operações trigonométricas complexas.

**RAD** Ativa o Modo Radianos para as funções trigonométricas, o que é indicado pelo anúncio **RAD** (página 26).

**GRD** Ativa o Modo Grados para as funções trigonométricas, o que é indicado pelo anúncio **GRAD** (página 26). Não funciona com as operações

trigonométricas complexas.

**SIN** · **COS** · **TAN**  
Calcula o seno, cosseno ou tangente, respectivamente, do valor contido no visor (registrador X) (página 26).

**SIN<sup>-1</sup>** · **COS<sup>-1</sup>** · **TAN<sup>-1</sup>**  
Calcula o arco-seno, arco-cosseno ou arco-tangente, respectivamente, do valor contido no visor (registrador X) (página 26).

## Resumo e Índice de Programação

**P/R** Modo de Programação (Program)/Execução (Run). Ativa o Modo de Programação (o anúncio **PRGM** fica aceso) ou o de Execução (o anúncio **PRGM** fica apagado) (página 66).

**CLEAR** **PRGM** No Modo de Programação:

apaga todas as instruções da memória de programação e desloca todos os registradores de programação. No Modo de Execução: apenas reposiciona a calculadora na linha 000 (página 67).

**MEM** Apresenta o estado atual da

alocação de memória da calculadora (número de registradores dedicados ao armazenamento de dados, ao segmento comum e à memória de programação) (página 216).

 Tecla de Correção. No Modo de Programação, elimina a

instrução (apresentada no visor) da memória de programação; todas as instruções seguintes são deslocadas uma linha para cima (página 85).

**LBL** Rótulo. Utilizada com uma designação de rótulo para denotar o início de uma rotina do programa (página 67).

**A B C D E**

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 .0  
.1 .2 .3 .4 .5 .6 .7 .8 .9

Designações de rótulos. Quando precedidas por **LBL**, definem o início de uma rotina do programa (página 67). Também são utilizadas (sem **LBL**) para iniciar a execução da rotina especificada (página 69).

**USER** Ativa e desativa o Modo do Usuário, no qual as funções primárias (brancas) são intercambiadas com as funções alternativas (douradas) **A** a **E** das 5 primeiras funções à esquerda do teclado (página 69) O Modo do

Usuário também afeta o uso de **STO** ou **RCL** { **A** a **E** . (i) } com matrizes. O Modo do Usuário incrementa, automaticamente,  $R_0$  (número da linha) e/ou  $R_1$  (número da coluna), no armazenamento ou recuperação dos elementos de uma matriz (página 146).

**GTO** Desvio. Utilizada com uma designação de rótulo (um dos acima relacionados) ou com **I**, para transferir a execução ao rótulo designado. Como instrução de um programa, a execução prossegue a partir do rótulo designado. Se não for instrução de um programa, apenas será afetado o posicionamento da calculadora no programa (página 92). Se o conteúdo de  $R_1$  for negativo, **GTO I** efetuará uma transferência a uma linha numerada (página 111).

**GTO CHS** *nnn*. Desvia para uma linha numerada. Posiciona a calculadora na linha especificada por *nnn*.

Não é programável (página 84).

**GSB** Desvia para uma sub-rotina. Utilizada com uma designação de rótulo (um dos acima relacionados) ou com **I** para reiniciar a execução de uma dada rotina. Pode ser utilizada tanto num programa como pelo teclado (no Modo de Execução). Uma instrução **RTN** transferirá a execução de volta à primeira linha que seguir **GSB** (página 104).

**BST** Linha anterior. Posiciona a calculadora nas linhas anteriores da memória de programação. (Também faz o percurso circular (Scroll), no Modo de Programação). Apresenta o número e o conteúdo da linha anterior do programa (página 85).

**SST** Linha à linha. No Modo de Programação: posiciona a calculadora nas linhas seguintes da memória de programação. No Modo de Execução: apresenta e executa a

próxima linha do programa e deixa a calculadora posicionada na linha seguinte a ser executada (**página 84**).

**[PSE]** Pausa.

Interrompe a execução do programa por cerca de 1 segundo, para apresentar o conteúdo do registrador X, reiniciando a execução a seguir (**página 68**).

**[R/S]** Executa/Pára.

Inicia a execução do programa a partir da linha numerada atual, da memória de programação. Interrompe a execução de um programa (**página 68**).

**[RTN]** Retorna. Faz com que a calculadora retorne à linha 000 e pare a execução do programa (**página 68**).

Numa sub-rotina, simplesmente retorna à linha seguinte à **[GSB]** (**página 104**).

**[SF]** Ativa o indicador ("flag"), deixando-o no estado "verdadeiro". Ativa um dos indicadores 0 a 9. Os indicadores 0 a 7 são do usuário, o indicador 8 é o do Modo

Complexo e o indicador 9 denuncia a condição de ultrapassagem da capacidade da calculadora ("overflow") (**página 94**).

**[CF]** Desativa o indicador, deixando-o no estado "falso". Desativa um dos indicadores 0 a 9 (**página 94**).

**[F?]** O indicador  $n$  está ativado? Testa o indicador designado. Se o indicador estiver ativado, a execução do programa prosseguirá; se o indicador estiver desativado, a execução do programa saltará uma linha antes de prosseguir (**página 94**).

**[ $x \leq y$ ]**, **[ $x = 0$ ]**, **[TEST]** {0 a 9} Testes condicionais. Cada qual compara o valor contido no registrador X com 0 ou com o conteúdo do registrador Y, conforme indicado. Se a condição testada for verdadeira, a calculadora executará a instrução da linha seguinte da memória de programação. Se a condição testada for falsa, a calculadora

saltará uma linha da memória de programação antes de prosseguir (**página 93**). **[TEST]** 0, 5, 6 e **[ $x = 0$ ]** também são válidos com números complexos e com descritores de matrizes (**páginas 134, 175**).

**[TEST]** 0 ( $x \neq 0$ )

**[TEST]** 1 ( $x > 0$ )

**[TEST]** 2 ( $x < 0$ )

**[TEST]** 3 ( $x \geq 0$ )

**[TEST]** 4 ( $x \leq 0$ )

**[TEST]** 5 ( $x = y$ )

**[TEST]** 6 ( $x \neq y$ )

**[TEST]** 7 ( $x > y$ )

**[TEST]** 8 ( $x < y$ )

**[TEST]** 9 ( $x \geq y$ )

**[DSE]** Decrementa e salta quando for menor ou igual. Subtrai do contador o valor especificado como decrémento. Salta uma linha do programa se o novo valor do contador for menor ou igual do que o valor de teste (**página 112**).

**[ISG]** Incrementa e salta se for maior. Incrementa o valor do contador do registrador especificado. Salta uma linha do programa se o novo valor do contador for maior do que o valor de teste (**página 112**).

# Índice Remissivo

Os números de páginas em **negrito** são referências primárias; os números em tipo normal indicam que a referência é secundária.

## A

---

- ABS** , 24
- Acumulação de dados estatísticos (  $\Sigma^+$  ), 50
- Alocação de memória, 42, 214-220
- Alterando linhas de um programa, 84
- Antilogaritmos (comum e natural), 28
- Anúncios,
  - C, 103, 123
  - Complexo, 123
  - relação, 61
  - PRGM**, 32, 66
  - trigonométrico, 26
- Apagando
  - a condição de overflow, 46, 63
  - números complexos, 127-129
  - o visor, 20
    - piscando, 103
  - operações, 20-21
  - registradores estatísticos, 50
  - teclas de prefixo, 18
- Apresentação no visor
  - do ponto decimal, 62
  - de *running* (em execução), 69, 149, 184
  - do separador de dígitos, 62
  - de *u*, 176
- Aritmética
  - no armazenamento, 44
  - na recuperação, 45
  - vetorial, com funções estatísticas, 58
- Armazenamento e recuperação ( **STO** , **RCL** ), 43, 44, 45
  - de dados, 43
  - direto (com **I** ), 109, 110
  - de elementos de matrizes, 145-146, 149, 151
  - indireto, 109-110, 114

- de matrizes, **146, 151, 178**
- de números complexos, **132**
- Arredondamento no visor, **59**
  - erros, **51, 61**
    - com **SOLVE** **224, 238**
- Arredondando ( **RND** ), **24**
- Assíntotas horizontais, **231**
- Assistência Técnica, **264-265**
- Ativando a subida do conteúdo da pilha operacional, **36**
- Auto-Diagnóstico, **262-264**

**B**

- 
- Baterias,
    - duração, **258-259**
    - substituição, **260, 261-262**
  - BST**, **85**

**C**

- 
- Cálculo da inclinação, **55**
  - Cálculos
    - cumulativos, **41**
    - em cadeia, **22-23, 38**
  - Carregando a pilha operacional com constantes, **39, 41**
  - CF**, **123**
  - CHS**, **18**
  - Ciclos ("looping"), **92, 101**
    - valor de controle, **112, 119**
  - CLx**, **20**
  - Códigos de teclas, **75-76**
  - Coefficiente de correlação, cálculo, ( **r** ), **57**
  - Complexo conjugado, formação, **127**
  - Condição de overflow, **46, 62-63, 103**
  - Constantes,
    - cálculo, **39-42**
    - uso em cálculos aritméticos, **35, 39-42**
  - Contador de ciclos em programas, **101, 119-120**
  - Conversão de registradores, **216-218**
  - Conversões
    - coordenadas polares e retangulares, **30-31**
    - graus e radianos, **26**
    - tempos e ângulos, **26-27**

- Coordenadas polares, **30-31**  
 no Modo Complexo, **136-138**
- Coordenadas retangulares, **31**  
 no Modo Complexo, **136-138**
- Correção de dados estatísticos acumulados ( $\Sigma^-$ ), **53**  
 $\boxed{\text{COS}}$ ,  $\boxed{\text{COS}^\wedge}$ , **26**  
 $\boxed{\text{C}_y, x}$ , **48**

**D**

---

- Decomposição *LU*, **150, 157, 158, 162**
- Deflação, **234, 235, 238**  
 $\boxed{\text{DEG}}$ , **26**  
 $\rightarrow \boxed{\text{DEG}}$ , **27**
- Desativando a subida do conteúdo da pilha operacional, **36-37**
- Descritores, **141, 150, 162**
- Desvio  
 condicional, **93, 101, 178, 193**  
 indireto, **111-112, 116-117, 118**  
 simples, **92**
- Desvio padrão ( $\boxed{\text{S}}$ ), **54**  
 amostra versus população, **55**
- Determinante, **153**  
 $\boxed{\text{DIM}}$ , **77-78, 216-218**  
 $\boxed{\text{DSE}}$ , **112-113, 115, 119**
- Duração da bateria, **258**

**E**

---

- $\boxed{\text{EEX}}$ , **18**
- Elevando ao quadrado ( $\boxed{x^2}$ ), **25**  
 $\boxed{\text{ENG}}$ , **60**  
 $\boxed{\text{ENTER}}$ , **12, 33-34, 36**  
 efeito na introdução de dígitos, **21, 29**  
 efeito na movimentação do conteúdo da pilha operacional, **37, 41**
- Equações lineares (cálculo com matrizes), **140, 158**
- Erro  
 apresentação, **62**  
 condições, **206-209**  
 interrupção, **80**
- Erros,  
 com  $\boxed{\text{SOLVE}}$ , **189, 194**  
 com  $\boxed{\text{F}}$ , **204-205**

- Especificações de temperatura, **267**  
 Estimativa linear (  $\hat{y}_r$  ), **57**  
 $e^x$ , **28**  
 Executar/Parar (R/S), **69, 93**  
 Exemplos  
 da aritmética com números complexos, **134**  
 do arremesso do martelo, **186-187, 225-227**  
 do cálculo da secante, **105**  
 do circuito elétrico, **171-174**  
 das dimensões da caixa de metal, **190-192**  
 da estrela, **40**  
 da flor de crocus sativus, **43**  
 da integral do seno, **199-200**  
 do objeto em queda livre, **13**  
 do pagamento do débito, **97**  
 da população de bactérias, **42**  
 do radioisótopo, **95-97**  
 do rendimento do arroz, **52-58**  
 da tensão de ruptura, **228-230**  
 do volume e afeição da lata, **71-75**  
 Expoentes, **18-19**

## F

---

- $F?$ , **94**  
 $f$ , **18**  
 FIX, **59**  
 Formato do Manual, **2**  
 FRAC, **24**  
 Função  
 de combinações (  $C_{y,x}$  ), **48**  
 de exponenciação (veja função de potenciação)  
 de fatorial (  $x!$  ), **25**  
 de permutações (  $P_{y,x}$  ), **48**  
 de potenciação (  $y^x$  ), **29**  
 Função integral,  $\int$   
 Algoritmo, **197, 240-241, 249-251, 255**  
 consumo de memória, **205**  
 formato de apresentação, **245-248**  
 incerteza, **202-204, 241-245, 245-248**  
 obtendo uma aproximação, **256-257**

- precisão, 201-204, 240, 241-245  
 problemas com funções erráticas, 249-253  
 programada, 204-205  
 recursiva, 204  
 sub-rotinas, 195-196  
 tempo de execução, 197, 201, 244, 245, 253-256  
**Funções**  
 de Bessel, 196, 198  
 estatísticas  
   coeficiente de correlação, 57  
   combinações, 48  
   desvio padrão, 54  
   estimativa linear, 57  
   média, 54  
   permutações, 48  
   probabilidade, 48  
   regressão linear, 55  
 logarítmicas (comum e natural), 28  
 não programáveis, 82  
 de dois números, 21, 29  
 Gama  $\Gamma(x)$ , 25  
 hiperbólicas, 28  
 primárias e alternativas, 17  
 de um número, 21, 25  
 de percentagem, 29-30

## G

---

- $\square$ , 17  
 Garantia, informações, 264-265  
 Gerador de números aleatórios, 49  
 Girar para baixo ( $\square \downarrow$ ), 34  
 Girar para cima ( $\square \uparrow$ ), 34  
 $\square$ GRD, 26  
 $\square$ GSB, 104  
 $\square$ GTO, 92, 100, 101  
 $\square$ GTO  $\square$ CHS, 84

## H

---

- $\square \rightarrow$ H, 27  
 $\square \rightarrow$ H.MS, 27

**HYP**, **HYP<sup>+</sup>** { **SIN**, **COS**, **TAN** }, **28**

## I

---

**I**, **109-110**

**(i)**, **126**

Incremento automático de números de linha e coluna, **145**

Indicação de bateria fraca, **63**, **259-260**

Indicador 8, **103**

Indicador 9, **103**

Indicadores

de estado, **61-62**

do sistema, **94**, **103**

do usuário, **94**

Informações sobre a Assistência Técnica, **264-266**

Informações sobre a Garantia, **264**

Inicialização, **89**

Instruções, **75**

**INT**, **24**

Intercâmbio

de funções (veja Modo do Usuário)

entre as pilhas real e imaginária, **126**

de X (  **$x \pm yi$**  ), **43**

entre X e Y (  **$x \pm yi$**  ), **34**

Interpolação usando  **$\hat{y}_r$** , **57**

Intersecção com o eixo y, **55**

Introdução de dígitos, **21**

no Modo Complexo, **123**, **129**, **130-132**

término, **21**, **36**, **210**

Introduzindo

cálculos em cadeia, **22**

dados para análise estatística, **50**

expoentes, **18-19**

dois números, **21**, **29**

um número, **21**

Inverso (  **$1/x$**  ), **25**

com matrizes, **152**

**ISG**, **112-114**, **119**

Iterações usando **ISG** e **DSE**, **113**

## J

---

Jan Lukaszewicz, **32**

**L**

---

**LBL**, 67

Linha à linha (**SST**), 88

Linha anterior (**BST**), 85

**LN**, 28

**LOG**, 28

**L.R.**, 55

**LST<sub>x</sub>**, 35

Lukasiewicz, Jan, 32

**M**

---

Mantissa, apresentação de todos os 10 dígitos, 61

Manual, convenções, 17

Matriz

apresentando as dimensões, 144

dos coeficientes, 158

Complexa

armazenando elementos, 163

invertendo, 164, 166, 167

multiplicando, 164, 166, 168

transformando, 164, 166

copiando, 151

descritores, 141, 150, 162

dimensionando, 143, 145, 175

equações complexas, 170

memória, 143, 173

nome (veja matriz, descritores)

particionada, 163, 166

em  $R_1$ , 175

dos termos constantes, 158

Matriz, elementos

acesso individual, 147-149

apresentação, 147

armazenando e recuperando, 145-146, 149, 151, 178

Matriz, (funções)

aritmética, 155

condicional, 178

inversa, 152, 156

multiplicação, 156

norma de linha, 152, 178

programada, 178-179

- resíduo, **161**
- de resultados, **149, 150, 151, 152**
- resumo, **179-181**
- singular, **152-153**
- transposta, **152, 153, 156**
- usando registradores, **174**
- usando  $R_1$ , **175**
- MATRIX**, **145, 152, 156, 161, 166**
- Média ( $\bar{x}$ ), **54**
- MEM**, **216**
- Memória
  - Alocação, **76, 214-215**
  - configuração inicial, **76-77**
  - disponibilidade, **77-78, 214, 215**
  - distribuição, **77, 214-215**
  - indicação de estado, **216**
  - limitações, **77, 78, 217-218**
  - pilha operacional (*veja* Pilha Operacional)
  - registradores, **214-216**
  - requisitos para funções avançadas, **220**
  - requisitos para programação, **219**
- Memória Contínua
  - apagando, **64**
  - duração, **63**
  - o que preserva, **44, 49, 59, 62, 63**
- Memória de Programação, **70, 76-79, 218-219**
  - apagando, **68**
  - percorrendo, **68**
  - realocação automática, **218-219**
- Método de Horner, **81, 183**
- Mínimos, cálculo com **SOLVE**, **231**
- Modo Complexo, **122-123**
  - ativando, **103, 122-123, 135**
  - desativando, **123**
  - funções matemáticas, **133**
  - manipulação da pilha operacional, **126**
- Modo do Usuário, **69, 80**
  - com matrizes, **145, 178**
- Modos trigonométricos, **26**
  - no Modo Complexo, **123, 136**
- Monitoração, **84**
- Mudança de sinais, **18**

em matrizes, 179  
no Modo Complexo, 126-127

## N

---

Neutralizando a subida do conteúdo da pilha operacional, 36

Norma Euclideana (veja Norma de Frobenius)

Norma de Frobenius, 153, 178

Norma de linha, 152, 178

Normalizando dados estatísticos, 51

Notação

Científica, 60

de Engenharia, 60

Fatorial, 136

em Ponto Decimal Fixo, 59

Polonesa Reversa, 32

Null, apresentação no visor, 146, 151

Números Aleatórios

armazenamento e recuperação, 49

gerador (**RAN#**), 49

Números complexos

apagando, 127-129

armazenando e recuperando, 132

conversão entre as formas polar e retangular, 136-138

introduzindo, 123, 129-132

Números negativos, 18

no Modo Complexo, 126-127

## O

---

**ON**, 17

ligando e desligando a calculadora, 17

para apagar (zerar) a Memória Contínua, 64

para definir a apresentação do ponto decimal, 62

Operações aritméticas, 29, 37

Operações escalares, 154, 155

Operações neutras, 212

Operações trigonométricas, 26

## P

---

**↔P**, 30

Parte fracionária (**FRAC**), 24

- Parte inteira ( **INT** ), 24
- Pausa ( **PSE** ), 68
- Pi, 24
- Pilha imaginária
- apagando, 127
  - apresentando, 126
  - criando, 123-125, 135
  - elevando o conteúdo, 126
- Pilha operacional
- conteúdo, com **I** , 198, 202
  - descida, 33, 37, 38
  - funções de manipulação, 33-34
    - no Modo Complexo, 134
  - imaginária, 122-127
  - movimentação do conteúdo, 32, 33-37
    - com funções matrizes, 176-177
    - com **SOLVE**, 183
    - operações de ativação, 211-212
    - operações neutras, 212
    - subida do conteúdo, 33, 36, 38, 44, 210-212
    - uso no acesso a elementos de matrizes, 148-149
- Ponto decimal, 21
- Potenciação (  $\sqrt{x}$  ), 29
- P/R** , 66, 69
- PREFIX** , 61
- PRGM**, anúncio, 66, 84
- Programa
- carregando, 66
  - contadores de ciclos, 112, 116-118, 119
  - controle indireto, 110, 112-114
  - executando, 69-70
  - fim, 68, 78
  - início, 67
  - interrupção, 68, 78
  - introduzindo, 66-68
  - linhas (instruções), 67, 75
  - posicionamento, alteração, 84, 85
  - técnicas para introdução de dados, 70-71
- Programa, execução
- após **GSB**, 104
  - após **GTO**, 100
  - após um *overflow*, 103

após um teste, **93**

originada através de rótulos, **79**

Programa, linhas (instruções), **67, 75**

eliminando, **85, 89**

inserindo, **85, 89**

Programação

memória, **67, 70, 75, 218-219**

Modo, **66, 68, 88**

**PSE**, **68**

**Py,x**, **48**

## Q

---

Quadrática, resolução da equação, **183**

## R

---

**→R**, **31**

**R↓** **R↑**, **34**

**RAD**, **26**

**→RAD**, **27**

Raiz quadrada ( $\sqrt{x}$ ), **25**

Raízes

eliminando, **234, 235, 238**

múltiplas, **235**

sem significado, **188, 192**

**RAN#**, **49**

**RCL**, **43**

Recíproco ( $1/x$ ), **25**

com matrizes (inversão de uma matriz), **152**

Recuperação

de dados estatísticos acumulados, **51**

de matrizes, **146, 151, 178**

de números (**RCL**), **43, 45**

Registrador de Indexação (**R<sub>1</sub>**)

aritmética, **111, 115**

armazenamento e recuperação, **110, 114, 119**

controle de ciclos, **110, 112-113**

controle do formato de apresentação, **112, 117, 118, 120**

controle de indicadores, **112, 118**

intercâmbio com o Registrador X, **111, 115**

Registrador T, **32, 33**

em funções de matrizes, **176-177**

- com  $\boxed{f}$  , 203
- Registrador ÚLTIMO X, 35
  - colocando constantes, 39-40
  - correção de dados estatísticos, 53
  - em funções de matrizes, 176-177
  - operações que nele preservam X, 213
- Registrador X, 32, 35, 37, 42, 210-211
  - imaginário, 211
  - em funções de matrizes, 143, 158, 176-177
  - com  $\boxed{\text{SOLVE}}$  , 183, 193, 227
  - com  $\boxed{f}$  , 203
- Registrador Y, 32, 37
  - em funções de matrizes, 143, 158, 176-177
  - com  $\boxed{f}$  , 203
- Registrador Z, 32
  - em funções de matrizes, 176-177
  - com  $\boxed{\text{SOLVE}}$  , 183, 193, 227
  - com  $\boxed{f}$  , 203
- Registradores de armazenamento, 42
  - alocação, 42, 214-217
  - apagando, 44
  - aritmética, 44
  - estatístico, 42, 50
- Registradores estatísticos, 50-51
- Registradores não utilizados, 214, 216, 218
- Regra “Faça se Verdadeiro”, 94, 193
- Regra “Salta se Verdadeiro”, 113
- Regressão Linear (  $\boxed{\text{L.R.}}$  ), 55
- $\boxed{\text{Re}z\text{Im}}$  , 126, 129
- Resíduo, 161
- Resolução da equação quadrática, 183
- $\boxed{\text{RESULT}}$  , 150
- Resultados intermediários, 22, 38
- Retorno (  $\boxed{\text{RTN}}$  ), 68, 78
  - pendente, 105, 108, 194, 204
- $\boxed{\text{RND}}$  , 24
- Rótulos, 69, 79, 92, 100
- $\boxed{\text{R/S}}$  (Executar/Parar), 69, 93
- $\boxed{\text{RTN}}$  , 68, 78
- $R_0$  e  $R_1$  , uso no acesso a elementos de uma matriz, 145, 148, 178

## S

**S** 54**SCI** , 60**Scrolling** (Revisão Circular), 84**SF** , 123

Segmento de Armazenamento de Dados, 214-215

Segmento Comum, 214

Seqüências abreviadas de teclas, 80

**SIN** , **SIN'** , 26**SOLVE** , 182-183

algoritmo, 184, 189-190, 221-223, 231-132

condições necessárias, 222-223

consumo de memória, 194

estimativas iniciais, 183, 188-192, 222, 233, 238

função com mínimo não nulo, 188

função com valor constante, 189, 190

precisão, 223-227

especificando, 239

restrições, 194

rotina com operação matemática ilegal, 189

sem raiz, 188-190, 192, 230

tempo de execução, 239

uso em funções com descontinuidades, 228

uso em funções com diversas raízes, 234-239

uso em funções com polos, 228

uso programado, 193-194

uso recursivo, 194

uso como teste condicional, 193

**SST** , 84, 88**STO** , 43, 44

Sub-rotina

encadeamento, exemplo, 105

limites, 105, 108

níveis, 105, 108

retorno, 104, 108

uso com **SOLVE** , 182-183, 193

Substituição das baterias, 260-262

## T

**TAN** , **TAN'** , 26

## Teclas

- A** a **E** , 67, 69
- ABS** , 24
- BST** , 85
- CF** , 123
- CHS** , 18
- CLx** , 20
- COS** , **COS<sup>-1</sup>** , 26
- Cy,x** , 48
- DEG** , 26
- ↔DEG** , 27
- DIM** , 77-78 , 216-218
- DSE** , 112-114, 115, 119
- EEX** , 18
- ENG** , 60
- ENTER** , 11, 33-34, 36
- e<sup>x</sup>** , 28
- f** , 17
- F?** , 94
- FIX** , 59
- FRAC** , 24
- g** , 17
- GRD** , 26
- GSB** , 104
- GTO** , 92, 100, 101
- GTO** **CHS** , 84
- ↔H** , 27
- ↔H.MS** , 27
- HYP** { **SIN** , **COS** , **TAN** } , 28
- HYP<sup>-1</sup>** { **SIN** **COS** **TAN** } , 28
- I** , 109, 110
- (i)** , 126
- INT** , 24
- ISG** , 112-114, 119
- LBL** , 67
- LN** , 28
- LOG** , 28
- L.R.** , 55
- LSTx** , 35
- MATRIX** {0 a 9} , 146, 152, 153, 162, 166
- MEM** , 216
- ON** , 17

- $\Rightarrow P$  , 30
- $\pi$  , 24
- P/R , 66, 69
- PREFIX , 61
- PRGM , 67
- PSE , 68
- $P_{y,x}$  , 48
- $\Rightarrow R$  , 31
- $R \downarrow$  ,  $R \uparrow$  , 34
- RAD , 26
- $\Rightarrow$  RAD , 27
- RAN# , 49
- RCL , 43
- Re $\rightarrow$ Im , 126, 129
- REG , 44
- RESULT , 150-151
- RND , 24
- R/S , 68, 93
- RTN , 68, 78
- s , 54
- SCI , 60
- SF , 123
- SIN ,  $SIN^{-1}$  , 26
- SOLVE , 182-183
- SST , 84, 88
- STO , 43, 145, 149, 151
- TAN ,  $TAN^{-1}$  , 26
- TEST , 93
- USER , 146
- $x \div$  , 43
- $x!$  , 25
- $x=0$  , 175
- $\bar{x}$  , 54
- $\sqrt{x}$  , 25
- $x^x$  , 25
- $x \geq y$  , 34
- $x \leq y$  , 93
- $1/x$  , 25
- $\hat{y}_r$  , 57
- $y^x$  , 29
- $\beta$  , 204
- % , 29

$\Delta\%$  , 29 $\Sigma$  , 50 $\Sigma+$  , 50 $\Sigma-$  , 53

0 a 9 , 21

. , 21

-, +, x, ÷ , 29

 $10^x$  , 28

← , 21

Teclas de prefixo, 18

TEST , 93

Testes condicionais, 93, 102, 193

de descritores de matrizes, 175-176

de indicadores, 94, 102

no Modo Complexo, 134

Testes condicionais indiretos, 112-114, 115, 119

Transposição, 152, 153, 156

**U**

---

*Underflow*

na aritmética com registradores de armazenamento, 46

num registrador qualquer, 62-63

em SOLVE , 224

USER , 146

**V**

---

Valor absoluto ( ABS ), 24

Valor de controle de ciclos, 112, 119

Variação porcentual (  $\Delta\%$  ), 29

Visor (veja também Registrador X)

apagando, 20

apresentação integral da mantissa, 61

formato de apresentação, 59-60, 62

efeito sobre  $\beta$  , 201, 241, 244, 245-248

mensagens de erro, 62

no Modo Complexo, 123

piscando, 103

**X**

---

 $x\bar{x}$  , 43

$|x|$ , 25 $x=0$ , 175 $\bar{x}$ , 54 $x \approx y$ , 34 $x \leq y$ , 93 $x^2$ , 25 $\sqrt{x}$ , 25 $1/x$ , 25 $f$ , 204Y

---

 $\hat{y}_r$ , 57 $y^x$ , 29 $f$ , 204





# Cartão de Assistência Técnica

Este cartão deve ser respondido integralmente e enviado junto com a calculadora que necessita reparos. Através dele você estará autorizando a Hewlett-Packard a efetuar todos os reparos necessários e que permitam o funcionamento normal da unidade, bem como para servir de instrumento de cobrança do proprietário do valor dos reparos, quando a calculadora estiver fora do período de garantia.

**NOTA:** Qualquer unidade que seja enviada para reparo e não estiver acompanhada de um documento que comprove a data de compra, será considerada fora do período de garantia.

O período de garantia de sua calculadora Hewlett-Packard está especificado no Manual do Proprietário. Para informação sobre Assistência Técnica por favor consulte o Manual do Proprietário ou dirija-se ao Posto Autorizado de Recebimento para Assistência Técnica mais próximo.

## DESCRIÇÃO DO PROBLEMA:

Esta informação é muito importante e pode abreviar o tempo de reparo de sua unidade. Use outra folha de papel se for necessário um melhor detalhamento das informações solicitadas.

Modelo	Nº de Série	Tempo total de uso (horas/semanas)
--------	-------------	------------------------------------

---

---

---

## Devolver a unidade já reparada para:

---

Nome

---

Nome da empresa

---

Endereço

---

Cidade Estado CEP

---

Telefone residencial Telefone comercial

No caso de estar esta unidade fora do período de garantia, o proprietário deverá retirá-la em nosso Departamento de Assistência Técnica e efetuar o correspondente pagamento em lugar e data fixados pela Hewlett-Packard.

**Endereço para Assistência Técnica no Brasil**

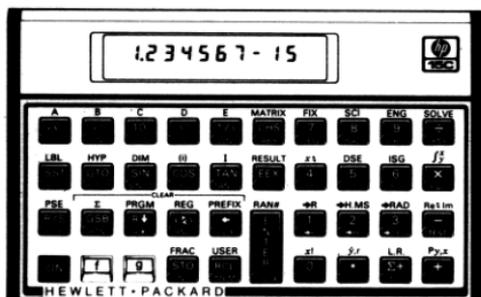
Hewlett-Packard do Brasil  
Al. Rio Negro, 750  
06400 - Barueri - SP

(Km 23,5 da Rodovia Castelo Branco)

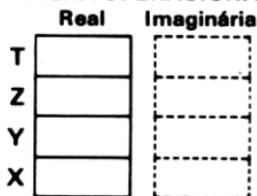


**HEWLETT  
PACKARD**

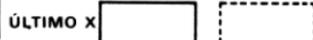
# O Teclado da HP-15C e a Memória Contínua



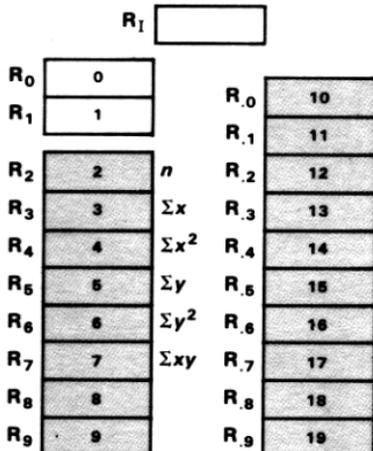
## PILHA OPERACIONAL



O visor apresenta o registrador X real



## SEGMENTO DE ARMAZENAMENTO DE DADOS

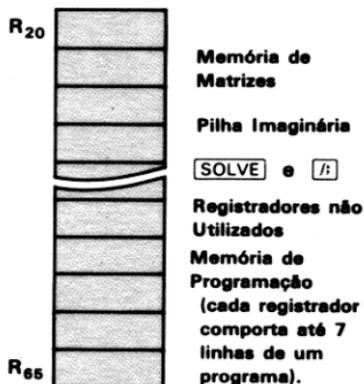


Os registradores  $R_0$  a  $R_{19}$  são os inicialmente alocados para o armazenamento de dados.

A alocação pode ser mudada através da função **DIM** (i) .

Cada registrador é constituído por 7 bytes de memória. Cada instrução consome 1 ou 2 bytes. A alocação é feita a partir do registrador disponível de maior endereço (um registrador a cada vez, à medida do necessário).

## SEGMENTO COMUM



A alocação de memória para programação é automática, dentro do Segmento Comum.

Os registradores  $R_{20}$  a  $R_{65}$  são os inicialmente alocados para compor o Segmento Comum, o qual fornece espaço de memória para as funções acima.

