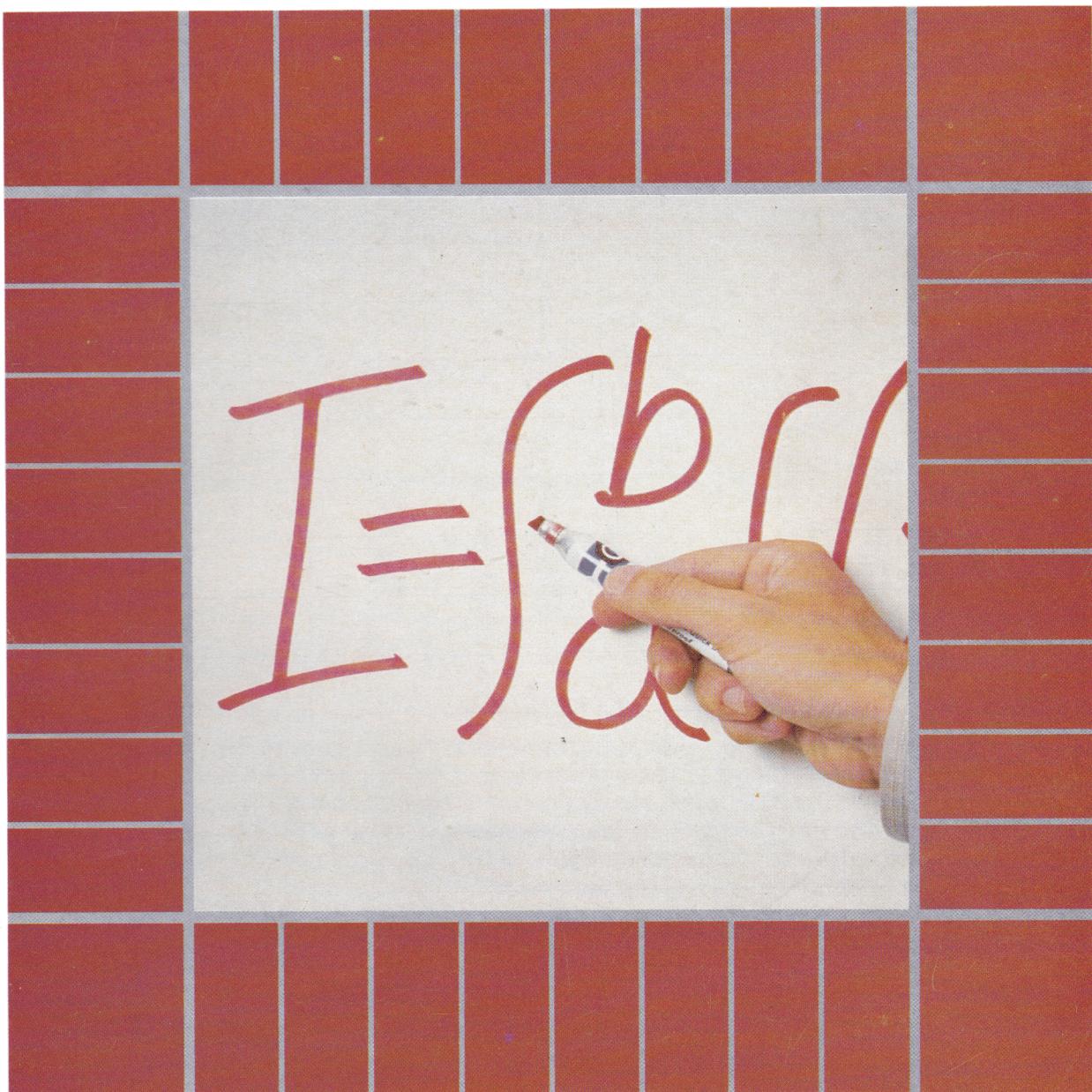


HEWLETT -PACKARD

HP-34C

Matemática avanzada



### **ADVERTENCIA**

**El material de programación contenido en este libro se suministra sin garantía de ninguna clase. La Compañía Hewlett-Packard, por lo tanto, no asume responsabilidad alguna y no tendrá compromiso en las consecuencias que de cualquier clase puedan surgir de cualquier forma de uso de estos programas o cualquier parte del contenido.**

**HEWLETT-PACKARD**

**HP-34C**

**Matemática avanzada**



HP-34C

CAMBIOS DE BASE

FACTORES PRIMOS, MCD, DECIMAL A FRACCION

ECUACION DE 4º GRADO

SISTEMAS DE ECUACIONES :  $f(x,y) = 0 \quad g(x,y) = 0$

AREAS, LONGITUDES, VOLUMENES

INTEGRALES DOBLES :  $\int_{x_0}^{x_m} \int_{y_0}^{y_n} f(x,y) dy dx$

SUMACION DE SERIES INFINITAS ALTERNADAS

ECUACIONES DIFERENCIALES :  $y' = f(x,y)$

SISTEMAS DE EC. DIFERENCIALES :  $y' = f(x,y,z,)$   
 $z' = g(x,y,z,)$

OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS

OPERACIONES VECTORIALES

DETERMINANTE, ECUACION CARACTERISTICA, AUTOVALORES DE UNA MATRIZ 3x3

INTERPOLACION

AJUSTE DE DATOS

ANALISIS ARMONICO

RESOLUCION DE TRIANGULOS

TABLAS DE AMORTIZACION

CALENDARIO

Autores: Valentín Albilló  
Fernando del Rey



## CAMBIOS DE BASE

1.- Descripción .- Este programa permite pasar números en base 10 a cualquier otra base, y viceversa. Igualmente, pueden pasarse números en base B a otra base B', ambas distintas de 10. Se puede trabajar con cualquier base, (con la limitación lógica de que sea entera y mayor que 1) y los números pueden tener parte entera y fraccionaria.

Los algoritmos utilizados son los siguientes:

$N_B \rightarrow N_{10}$  Tenemos un número en base B de la forma:

$$N_B = \dots x_2 x_1 x_0 . x_{-1} x_{-2} \dots \quad (0 \leq x_i < B)$$

El número equivalente en base 10 será :

$$N_{10} = \sum x_i \cdot B^i$$

El programa descompone  $N_B$  dígito por dígito y realiza el sumatorio multiplicando cada dígito por su correspondiente potencia de B. Primero lo hace con la parte entera, y luego con la decimal .

$N_{10} \rightarrow N_B$  Este algoritmo resulta algo más artificioso.  $N_{10}$  se descompone en sus partes entera y fraccionaria y se obtiene  $N_B$  como sigue:

-la parte entera de  $N_{10}$  se divide sucesivamente por B, obteniéndose como resultado de cada i-ésima división una parte entera que será dato para la siguiente división , y un resto  $R_i$  .La parte entera de  $N_B$  sera:

$$\text{INT}(N_B) = \sum_i R_i \cdot 10^{ki} \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

siendo:  $k = 1$  si  $1 < B \leq 10$   
 $k = 2$  si  $10 < B \leq 100$   
 $k = 3$  si  $100 < B \leq 1000$  , etc

-la parte fraccionaria de  $N_{10}$  se multiplica sucesivas veces por B obteniéndose como resultado de cada i-ésima multiplicación una parte fraccionaria que sirve de dato para la siguiente multiplicación, y una parte entera  $S_i$ . La parte fraccionaria de  $N_B$  será :

$$\text{FRAC}(N_B) = \sum_i S_i \cdot 10^{-ki} \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$N_B \leftrightarrow N_B'$  Simplemente utiliza los algoritmos anteriores para convertir el número expresado en una de las bases a base 10, y de ésta a la otra base

2.- Notas .-

-el programa no realiza ningún test para comprobar si los datos de entrada son consistentes. En caso de no serlo , los resultados serán erroneos

-la precisión puede verse afectada si se realizan sucesivos cambios de base, puesto que la longitud de cada número (esto es, el número de dígitos de que consta ese número) es diferente de una base a otra, y pueden perderse cifras en el proceso.

3.- Utilización .- Introducir el programa, y ejecutar uno de los siguientes casos:

- (1)  $N_B \rightarrow N_{10}$  : -introducir la base B:  
 - id. el número  $N_B$       B [GSBO]  
 $N_B$  [A]  $\rightarrow$   $N_{10}$

- (2)  $N_{10} \rightarrow N_B$  : -introducir la base B : B [GSB 0]  
                   -introducir el número  $N_{10}$  :  $N_{10}$  [B]  $\rightarrow N_B$
- (3)  $N_B \leftarrow N_B'$  : -introducir  $B'$  y B : B' [ENTER] B [GSB 0]  
                   (por este orden)
- $(N_B \rightarrow N_B')$  -introducir el número  $N_B$  :  $N_B$  [GSB 1]  $\rightarrow (N_{10}) \rightarrow N_B'$
- $(N_B \leftarrow N_B')$  -introducir el número  $N_B$  :  $N_B$  [GSB 2]  $\rightarrow (N_{10}) \rightarrow N_B$

Notas:

- los valores de B y  $B'$  permanecen en memoria, salvo que se introduzcan nuevos valores que alteren a los anteriores. Por consiguiente sólo es necesario introducirlos una vez si se va a trabajar constantemente con la misma B (y la misma  $B'$ )
- Es importante el formato de entrada y salida de los números, según la base con la que se trabaje, pues cada dígito real del número en base B puede ocupar uno ó varios dígitos en pantalla.

$1 < B \leq 10$  : cada dígito real del nº ocupa uno en pant.  
 $10 < B \leq 100$  : id. id. id. id. id. dos id.

... ~~xxxxxx,xxxxxx~~ -dígitos de pantalla  
~~y y y , y y y~~ - id. reales de  $N_B$

para bases  $100 < B \leq 1000$ , cada dig. ocupa 3 en pantalla, etc.

### 3.- Ejemplos :

(1) Convertir 8, 9, 10, ..., 15 a base 2

|       |   |         |    |     |                    |   |    |     |                    |
|-------|---|---------|----|-----|--------------------|---|----|-----|--------------------|
| FIX 0 | 2 | [GSB 0] | 8  | [B] | $\rightarrow 1000$ | ; | 9  | [B] | $\rightarrow 1001$ |
|       |   |         | 10 | [B] | $\rightarrow 1010$ | ; | 11 | [B] | $\rightarrow 1011$ |
|       |   |         | 12 | [B] | $\rightarrow 1100$ | ; | 13 | [B] | $\rightarrow 1101$ |
|       |   |         | 14 | [B] | $\rightarrow 1110$ | ; | 15 | [B] | $\rightarrow 1111$ |

(2) Cuál es la expresión de  $\pi$  en base 5 ? y en base 15 ? Comprobar los resultados.

$$\begin{array}{l} \text{FIX 9} \quad 5 \quad [\text{GSB } 0] \quad \pi \quad [\text{B}] \rightarrow 3,032322143_5 = \pi_5 \\ \text{(comprobación)} \quad [\text{A}] \rightarrow 3,141592576_{10} = \pi_{10} \end{array}$$

obsérvese la pérdida de precisión debida a la conversión a base 5

$$\begin{array}{l} 15 \quad [\text{GSB } 0] \quad \pi \quad [\text{B}] \rightarrow 3,02\ 01\ 12\ 13\ 0_{15} = \pi_{15} \\ \text{(comprobación)} \quad [\text{A}] \rightarrow 3,141590123_{10} = \pi_{10} \end{array}$$

- vemos pues que en ambos casos se pierde precisión, aunque los motivos son algo distintos. En el primer caso se debe a que 10 dígitos en base 5 no aportan la misma precisión que en base 10 : en efecto, una unidad en el noveno lugar en base 10 da una resolución de hasta 0.0000000001, en tanto que una unidad en el mismo noveno puesto en base 5 sólo da resolución de

$$1 \cdot 5^{-9} = 0.000000512, \text{ bastante menos fina}$$

en el segundo caso, la pérdida de precisión se debe a que en base 15 cada dígito real sólo puede ser representado mediante dos en pantalla, con lo cual ésta sólo contiene 5 dígitos reales del número, que nos proporcionarán una precisión no superior al

$$1 \cdot 15^{-5} = 0.000001317$$

- (3) Convertir de base 4 a base 7 los números 123,321 y 321,123 , y comprobar los resultados ;

**FIX 3**      7 **ENTER** 4 **GSB 0**

123,321 **GSB 1**  $\rightarrow$  (27,891)  $\rightarrow$  36,614

(comprobación)    **GSB 2**  $\rightarrow$  (27,891)  $\rightarrow$  123,321

321,123 **GSB 1**  $\rightarrow$  (57,422)  $\rightarrow$  111,264

(comprobación)    **GSB 2**  $\rightarrow$  (57,422)  $\rightarrow$  321,123

luego ha resultado ser:    123,321<sub>4</sub> = 36,614<sub>7</sub>

321,123<sub>4</sub> = 111,264<sub>7</sub>

- (4) Hallar en base 7 el valor de la expresión : 434<sub>9</sub>/161<sub>8</sub>

-el programa realiza conversiones entre bases, pero no aritmética. Sin embargo la calculadora en sí , si que realiza aritmética, en base 10 para ser exactos, así que debemos convertir todos los números a la base 10, realizar la aritmética necesaria entre estos números, y reconvertir el resultado a la base pertinente:

**FIX 9**      9 **GSB 0** 434 **A**  $\rightarrow$  355.000000<sub>10</sub>      **STO 6**  
8 **GSB 0** 161 **A**  $\rightarrow$  113.000000<sub>10</sub>      **STO/ 6**  
7 **GSB 0** **RCL 6** **B**  $\rightarrow$  3.066365160<sub>7</sub>

por consiguiente, 434<sub>9</sub>/161<sub>8</sub> = 3.066365160<sub>7</sub>

-----

# HP 34 C

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY                   | KEY CODE | COMMENTS  | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY      | KEY CODE | COMMENTS  |
|---------------|-----------------------------|----------|---|---------------|----------------|----------|---|
| *             | LBL A                       | 25.13.11 |   |               | RCL I          | 24.14.23 |   |
|               | RCL 0                       | 24. 0    |   |               | y <sup>x</sup> | 25. 3    | B <sup>i</sup>  |
| .             | .                           | 73       |   |               | x              | 61       | x <sub>i</sub> <sup>i</sup>                           |
| 5             | 5                           | 5        | calcula el n° de dígitos necesarios para el formato de salida del número en base B: |               | STO+3          | 23.51. 3 | $\Sigma = \Sigma + x_i \cdot B^i$                     |
| s             | -                           | 41       | 2 $\leq B \leq 10$ - 1 dig  | 60            | DSE            | 15.23    | i = i - 1   |
|               | LOG                         | 14. 2    | 10 $< B \leq 100$ - 2 dig   |               | GTO 5          | 22. 5    |   |
|               | INT                         | 25.32    | etc   |               | GTO 5          | 22. 5    |   |
| 10            | 1                           | 1        |   | *             | LBL B          | 25.13.12 | N <sub>10</sub> → N <sub>B</sub>                      |
|               | +                           | 51       |   |               | RCL 0          | 24. 0    | cálculo para el formato de los números en base B.     |
| 10            | 10 <sup>x</sup>             | 15. 2    |   | 65            | .              | 73       |   |
|               | STO 4                       | 23. 4    |   |               | 5              | 5        |   |
|               | CL X                        | 34       |   |               | -              | 41       |   |
|               | STO 3                       | 23. 3    |   |               | LOG            | 14. 2    | cálculo de k  |
|               | STO I                       | 23.14.23 | $\Sigma = 0$ en R <sub>3</sub>  |               | INT            | 25.32    |   |
| 15            | R <sup>v</sup>              | 15.22    | i = 0 en RI   | 70            | 1              | 1        | preparación de registros                              |
|               | FRAC                        | 25.33    |   |               | +              | 51       |   |
|               | STO 2                       | 23. 2    | separa parte entera y fraccionaria en N <sub>B</sub>                                |               | EEX            | 33       |   |
|               | LAST X                      | 25. 0    |   |               | 5              | 5        |   |
|               | INT                         | 25.32    |   | 75            | STO I          | 23.14.23 |   |
| 20            | STO 1                       | 23. 1    |   |               | CLK            | 34       |   |
| *             | LBL 3                       | 25.13. 3 | Transforma la parte entera  |               | STO 3          | 23. 3    |   |
|               | RCL 1                       | 24. 1    |   |               | R <sup>v</sup> | 15.22    |   |
|               | x = 0                       | 15.71    |   | 80            | FRAC           | 25.33    |   |
| 25            | GTO 4                       | 22. 4    | bifurca si ha terminado   |               | STO 2          | 23. 2    | separa parte entera y fraccionaria de N <sub>10</sub> |
|               | RCL 4                       | 24. 4    |   |               | LAST X         | 25. 0    |   |
|               | /                           | 71       |   |               | INT            | 25.32    |   |
|               | INT                         | 25.32    | separa un nuevo dígito x <sub>i</sub>   |               | STO 1          | 23. 1    |   |
|               | STO 1                       | 23. 1    |   | *             | LBL 7          | 25.13. 7 |   |
|               | LAST X                      | 25. 0    |   |               | RCL 1          | 24. 1    | transforma la parte entera                            |
| 30            | FRAC                        | 25.33    |   |               | x = 0          | 15.71    |   |
|               | RCL 4                       | 24. 4    |   |               | GTO 8          | 22. 8    |   |
|               | x <sup>61</sup>             | 61       |   |               | RCL 0          | 24. 0    |   |
|               | RCL 0                       | 24. 0    |   |               | /              | 71       | obtiene resto R <sub>i</sub> de la división por B     |
|               | RCL I                       | 24.14.23 |   |               | INT            | 25.32    |   |
| 35            | y <sup>x</sup>              | 25. 3    |   |               | STO 1          | 23. 1    | K <sub>i</sub>  |
|               | x                           | 61       |   |               | LAST X         | 25. 0    | k <sub>i</sub>  |
|               | x <sub>i</sub> <sup>i</sup> |          |   |               | FRAC           | 25.33    | 10 <sup>k<sub>i</sub></sup>                           |
|               | STO+3                       | 23.51. 3 | $\Sigma = \Sigma + x_i \cdot B^i$   |               | RCL 0          | 24. 0    | $\Sigma = \Sigma + R_i \cdot 10^{k_i}$                |
|               | ISG                         | 15.24    |   |               | /              | 61       | k <sub>i</sub> = k <sub>i</sub> + k                   |
| 40            | GTO 3                       | 22. 3    | i = i + 1   | 400           | STO+3          | 23.51. 3 |   |
|               | GTO 3                       | 22. 3    |   |               | ISG            | 15.24    |   |
| *             | LBL 4                       | 25.13. 4 | prepara el registro contador  |               | GTO 7          | 22. 7    |   |
|               | 1                           | 1        | i = -1  |               | GTO 7          | 22. 7    |   |
|               | CHS                         | 32       |   | *             | LBL 8          | 25.13. 8 |   |
|               | STO I                       | 23.14.23 |   |               |                |          |   |
| 45            | *                           | LBL 5    | 25.13. 5  |               |                |          |   |
|               | RCL 2                       | 24. 2    |   |               |                |          |   |
|               | x = 0                       | 15.71    | transforma la parte fraccionaria  |               |                |          |   |
|               | GTO 6                       | 22. 6    |   |               |                |          |   |
|               | RCL 4                       | 24. 4    |   |               |                |          |   |
| 50            | x                           | 61       |   |               |                |          |   |
|               | FRAC                        | 25.33    |   |               |                |          |   |
|               | STO 2                       | 23. 2    |   |               |                |          |   |
|               | LAST X                      | 25. 0    |   |               |                |          |   |
|               | INT                         | 25.32    |   |               |                |          |   |
| 55            | RCL 0                       | 24. 0    |   |               |                |          |   |
|               |                             |          | - no se utiliza ningún flag   |               |                |          |   |
|               |                             |          | - se utilizan todas las etiquetas   |               |                |          |   |
|               |                             |          | - id. registros I, 0, 1, 2, 3, 4, 5   |               |                |          |   |
|               |                             |          | - id. en total 161 pasos de programa  |               |                |          |   |
|               |                             |          | - se recomienda moda FIX  |               |                |          |   |
|               |                             |          | - id. cualquier moda angular  |               |                |          |   |

## REGISTERS

| 0 B | 1 INT | 2 FRAC | 3 Σ | 4 10 <sup>k</sup> | 5 B' | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|-------|--------|-----|-------------------|------|---|---|---|---|
| 0   | 1     | 2      | 3   | 4                 | 5    | 6 | 7 | 8 | 9 |

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS                          | STEP/<br>LINE   | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS |
|---------------|-----------|----------|-----------------------------------|-----------------|-----------|----------|----------|
| 105           | RCL I     | 24.14.23 |                                   | 160             | R↓        | 15.22    |          |
|               | FRAC      | 25.33    |                                   |                 | RTN       | 25.12    |          |
|               | .         | 73       |                                   |                 |           |          |          |
| 110           | 0         | 0        |                                   |                 |           |          |          |
|               | 0         | 0        |                                   |                 |           |          |          |
| 115           | 9         | 9        |                                   | 165             |           |          |          |
|               | +         | 51       |                                   |                 |           |          |          |
| 120           | STO I     | 23.14.23 |                                   | 170             |           |          |          |
|               | ISG       | 15.24    |                                   |                 |           |          |          |
| 125           | * LBL 9   | 25.13. 9 |                                   | 175             |           |          |          |
| 130           | RCL 2     | 24. 2    |                                   |                 |           |          |          |
|               | x = 0     | 15.71    |                                   |                 |           |          |          |
| 135           | GTO 6     | 22. 6    |                                   |                 |           |          |          |
|               | RCL 0     | 24. 0    |                                   |                 |           |          |          |
|               | x         | 61       |                                   |                 |           |          |          |
| 140           | FRAC      | 25.33    |                                   |                 |           |          |          |
| 145           | STO 2     | 23. 2    |                                   |                 |           |          |          |
|               | LAST X    | 25. 0    |                                   |                 |           |          |          |
| 150           | INT       | 25.32    |                                   |                 |           |          |          |
| 155           | RCL I     | 24.14.23 |                                   |                 |           |          |          |
| 160           | INT       | 25.32    |                                   |                 |           |          |          |
|               | CHS       | 32       |                                   |                 |           |          |          |
|               | 10^x      | 15. 2    |                                   |                 |           |          |          |
| 165           | x         | 61       |                                   |                 |           |          |          |
| 170           | STO + 3   | 23.51. 3 |                                   | -k <sub>i</sub> |           |          |          |
|               | ISG       | 15.24    |                                   |                 |           |          |          |
| 175           | GTO 9     | 22. 9    |                                   |                 |           |          |          |
| 180           | * LBL 6   | 25.13. 6 |                                   |                 |           |          |          |
| 185           | RCL 3     | 24. 3    |                                   |                 |           |          |          |
|               | RTN       | 25.12    |                                   |                 |           |          |          |
| 190           | * LBL 0   | 25.13. 0 |                                   |                 |           |          |          |
| 195           | STO 0     | 23. 0    |                                   |                 |           |          |          |
|               | x ≠ y     | 21       |                                   |                 |           |          |          |
| 200           | STO 5     | 23. 5    |                                   |                 |           |          |          |
|               | x ≠ y     | 21       |                                   |                 |           |          |          |
| 205           | RTN       | 25.12    |                                   |                 |           |          |          |
| 210           | * LBL 2   | 25.13. 2 |                                   |                 |           |          |          |
|               | GSB 6     | 13. 6    | N <sub>B</sub> → N <sub>B</sub>   |                 |           |          |          |
|               | GSB A     | 13.11    | N <sub>B'</sub> → N <sub>10</sub> |                 |           |          |          |
| 215           | PAUSE     | 25.74    |                                   |                 |           |          |          |
| 220           | GSB 6     | 13. 6    | N <sub>10</sub> → N <sub>B</sub>  |                 |           |          |          |
|               | GSB B     | 13.12    |                                   |                 |           |          |          |
|               | RTN       | 25.12    |                                   |                 |           |          |          |
| 225           | * LBL 1   | 25.13. 1 | N <sub>B</sub> → N <sub>B'</sub>  |                 |           |          |          |
|               | GSB A     | 13.11    |                                   |                 |           |          |          |
| 230           | GSB 6     | 13. 6    | N <sub>B'</sub> → N <sub>10</sub> |                 |           |          |          |
|               | PAUSE     | 25.74    |                                   |                 |           |          |          |
|               | GSB B     | 13.12    |                                   |                 |           |          |          |
|               | GSB 6     | 13. 6    | N <sub>10</sub> → N <sub>B'</sub> |                 |           |          |          |
|               | RTN       | 25.12    |                                   |                 |           |          |          |
| 235           | * LBL 6   | 25.13. 6 |                                   |                 |           |          |          |
|               | RCL 0     | 24. 0    |                                   |                 |           |          |          |
|               | RCL 5     | 24. 5    |                                   |                 |           |          |          |
| 240           | GSB 0     | 13. 0    |                                   |                 |           |          |          |
|               | R↓        | 15.22    |                                   |                 |           |          |          |

REGISTERS

|   |   |   |     |   |      |   |   |   |                 |   |    |   |   |   |   |
|---|---|---|-----|---|------|---|---|---|-----------------|---|----|---|---|---|---|
| 0 | B | 1 | INT | 2 | FRAC | 3 | Σ | 4 | 10 <sup>k</sup> | 5 | B' | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 |   |   |     | 2 |      | 3 |   | 4 |                 | 5 |    |   |   |   |   |

## FACTORES PRIMOS , MCD , DECIMAL A FRACCION

1.- Descripción .- Presentamos aquí una colección de subrutinas relacionadas con Teoría de números:

Factores de un número: Dado un entero N , halla sucesivamente todos sus factores primos, presentándolos durante pausas, y se detiene con el último factor en pantalla, con signo negativo (para indicar que es el último). Si el N es primo, aparecerá él mismo, con signo "-". El programa prueba todos los divisores -- desde 2 hasta la raíz cuadrada de N, excepto los múltiplos de 2,3 ó 5. Esto reduce considerablemente el tiempo de computación. Incluso así, para N muy grande , el tiempo puede ser bastante considerable.

Máximo común divisor (MCD): Dados dos enteros P, Q, halla su máximo común divisor, empleando para ello el algoritmo de Euclides. Si los dos enteros son primos entre sí, su MCD es la unidad. El tiempo de computación es corto.

Decimal a fracción: Halla aproximaciones racionales a un número decimal dado, esto es, halla fracciones con enteros por numerador y denominador, de forma que su cociente sea aproximadamente igual a un decimal cualquiera dado. Emplea el algoritmo de fracciones continuas: para ello, primeramente forma una fracción con el decimal D, y a continuación calcula las reducidas sucesivas de esa fracción, de una forma iterativa, mostrando a cada iteración el numerador y el denominador de la reducida correspondiente, su cociente, y el error entre este cociente y D. Cuando el error es cero el programa se detiene y muestra el numerador y el denominador de la última reducida. En cualquier momento puede detenerse el proceso y mostrar en pantalla los valores de num. y den. de la actual.

2.- Utilización .-

(1) Introducir el programa

(2) -para hallar factores de un número:

-introducir N: N **A** → (1<sup>er</sup> factor) → (2<sup>º</sup> factor) → ...  
→ ... → -(ultimo factor)

(3) - para hallar el MCD de P y Q:

-introducir P y Q : P **ENTER** Q **B** → MCD(P,Q)

(4) -para hallar aprox. racionales a un decimal D :

-introducir D : D **GSB 9** → (N<sub>1</sub>) → (D<sub>1</sub>) → (N<sub>1</sub>/D<sub>1</sub>) → (error)<sub>1</sub>  
→ ... → (N<sub>n</sub>) → (D<sub>n</sub>)

-para presentar los valores de N,D correspondientes a un error únicamente calculado: parar el programa **R/S**

**GSB 8** → (N<sub>1</sub>) → D<sub>1</sub>

(5) para otros valores, ir al paso adecuado.

3.- Notas .-

- N debe ser entero, positivo; D puede ser negativo
- Se recomienda que N no exceda de 10<sup>6</sup>
- puede ahorrarse el registro R.1 suprimiendo el paso 127 siempre que no se coloque ningún programa más después.
- las 3 subrutinas A,B,9 son independientes, y pueden introducirse con independencia unas de otras.

4.- Ejemplos:

(1)-- Hallar la descomposición en factores primos de 32670001

-introducir N: 32670001 [A]  $\rightarrow$  (7)  $\rightarrow$  (13)  $\rightarrow$  (31)  $\rightarrow$  (37)  $\rightarrow$  -313  
luego,  $32670001 = 7 \times 13 \times 31 \times 37 \times 313$

(2)-- Hallar la descomposición en factores primos de 7332197

-introducir N: 7332197 [A]  $\rightarrow$  (983)  $\rightarrow$  -7459  
es decir,  $7332197 = 983 \times 7459$  (tardó algo menos de 5 min.)

(3)-- Comprobar si 72727 , 10001 , 11111 , 5555551 , son primos

72727 [A]  $\rightarrow$  -72727 , es primo

10001 [A]  $\rightarrow$  (73)  $\rightarrow$  -137 ;  $10001 = 73 \times 137$  , no es primo

11111 [A]  $\rightarrow$  (41)  $\rightarrow$  -271 ;  $11111 = 41 \times 271$  , no es primo

5555551 [A]  $\rightarrow$  (773)  $\rightarrow$  -7187 ;  $5555551 = 773 \times 7187$  , no es primo

(4)-- Hallar el máximo común divisor de 32670001 y 7331438

32670001 [ENTER] 7331438 [B]  $\rightarrow$  31 es el MCD

(5)-- Hallar el MCD de 7777771 y 1777777

7777771 [ENTER] 1777777 [B]  $\rightarrow$  1 , son primos entre sí

(6)-- Hallar fracciones cuyo valor se aproxime a  $\pi = 3.141592654$

3.141592654 [GSB 9]  $\rightarrow$  obtenemos la siguiente tabla:

| NUMERADOR | DENOMINADOR | COCIENTE    | ERROR        |
|-----------|-------------|-------------|--------------|
| 3         | 1           | 3.000000000 | 0.141592654  |
| 22        | 7           | 3.142857143 | -0.001264489 |
| 333       | 106         | 3.141509434 | 0.000083220  |
| 355       | 113         | 3.141592920 | -0.000000266 |
| 104348    | 33215       | 3.141592654 | 0.000000000  |

y el programa se detiene presentando 104348 y 33215

luego  $104348/33215 = 3.141592654$  , que coincide con  $\pi$  hasta 10 cifras.

(7)-- Hallar una aproximación a  $\ln 2 = 0.6931471806$ , con error < 0.0001

2 [Ln] [GSB 9]  $\rightarrow$  (0)  $\rightarrow$  (1)  $\rightarrow$  (0.000000000)  $\rightarrow$  (0.693147181)  $\rightarrow$   
 $\rightarrow$  (1)  $\rightarrow$  (1)  $\rightarrow$  (1.000000000)  $\rightarrow$  (-0.306852819)  $\rightarrow$   
 $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow$  (3)  $\rightarrow$  (0.666666667)  $\rightarrow$  (0.026480514)  $\rightarrow$   
 $\rightarrow$  (7)  $\rightarrow$  (10)  $\rightarrow$  (0.700000000)  $\rightarrow$  (-0.006852819)  $\rightarrow$   
 $\rightarrow$  (9)  $\rightarrow$  (13)  $\rightarrow$  (0.692307692)  $\rightarrow$  (0.000839488)  $\rightarrow$   
 $\rightarrow$  (61)  $\rightarrow$  (88)  $\rightarrow$  (0.693181818)  $\rightarrow$  (-0.000034638) [R/S]

[GSB 8]  $\rightarrow$  (61)  $\rightarrow$  88

así pues, la fracción  $61/88 = 0.693181818$  se diferencia de  $\ln 2$  en no más de  $0.00004 < 0.0001$

# HP 34 C

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS                                   | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS                 |
|---------------|-----------|----------|--|---------------|-----------|----------|--------------------------|
| *             | LBL A     | 25.13.11 |  |               | CL X      | .34      | la subrutina             |
|               | STO 0     | 23. 0    |  |               | +         | 51       | halla el máxi-           |
|               | 0         | 0        |  |               | R↓        | 15.22    | mo común divi-           |
|               | STO 1     | 23. 1    |  |               | /         | 71       | sor de 2 ente-           |
| 5             | 2         | 2        | esta subrutina<br>halla los fac-           | 60            | INT       | 25.32    | ros dados, uti-          |
|               | GSB 0     | 13. 0    | tores primos de                            |               | R↑        | 14.22    | lizando el al-           |
|               | 1         | 1        | un entero dado:                            |               | x         | 61       | goritmo de               |
|               | GSB 0     | 13. 0    | para ello prue-                            |               | -         | 41       | Euclides. Si             |
| 10            | 2         | 2        | ba como divisores                          | 65            | GTO B     | 22.12    | ambos son pri-           |
|               | GSB 0     | 13. 0    | a todos los                                |               | +         | 51       | mos entre sí             |
|               | 2         | 2        | enteros desde                              |               | RTN       | 25.12    | entonces MCD             |
|               | GSB 0     | 13. 0    | 2 hasta el pri-                            |               | *LBL 9    | 25.13. 9 | es igual a 1             |
| 15            | 2         | 2        | mero que no su-                            |               | STO 8     | 23. 8    |                          |
|               | *         | LBL 1    | pere la raíz                               | 70            | CL Σ      | 14.34    | la subrutina             |
|               | 4         | 4        | cuadrada del                               |               | EEX       | 33       | permite hallar           |
|               | GSB 0     | 13. 0    | número a fac-                              |               | 9         | 9        | fracciones rati-         |
|               | 2         | 2        | torizar, excep-                            |               | x         | 61       | onales que se ap-        |
|               | GSB 0     | 13. 0    | to los múltiplos                           |               | LAST X    | 25. 0    | roximan a un decimal     |
| 20            | 4         | 4        | de 2, 3, 6 5.                              | 75            | 1         | 1        | dado en una forma óptima |
|               | GSB 0     | 13. 0    | Cuando encuen-                             |               | STO 6     | 23. 6    |                          |
|               | 2         | 2        | tra un divisor                             |               | STO 7     | 23. 7    | Utiliza el m-            |
|               | GSB 0     | 13. 0    | lo muestra en                              |               | R↓        | 15.22    | todo de las re-          |
| 25            | 6         | 6        | pantalla duran-                            | 80            | *LBL 3    | 25.13. 3 | ducidas de fra-          |
|               | GSB 0     | 13. 0    | te 1 seg., di-                             |               | STO 0     | 23. 0    | cciones.                 |
|               | 2         | 2        | vide el número                             |               | x= y      | 21       |                          |
|               | GSB 0     | 13. 0    | por él y                                   |               | STO 1     | 23. 1    | La subrutina             |
| 30            | 6         | 6        | trata de ha-                               |               | x= y      | 21       | va sucesiva-             |
|               | GSB 0     | 13. 0    | llar factores                              |               | /         | 71       | mente calculan-          |
|               | GTO 1     | 22. 1    | del nuevo nú-                              |               | INT       | 25.32    | reducidas, y             |
| *             | LBL 0     | 25.13. 0 | mero.                                      |               | STO 2     | 23. 2    | presentando              |
|               | STO +1    | 23.51. 1 | El proceso                                 |               | RCL 1     | 24. 1    | pantalla du-             |
|               | RCL 0     | 24. 0    | continua hasta                             |               | x= y      | 21       | rante pausas             |
|               | RCL 1     | 24. 1    | llegar al úl-                              |               | RCL 0     | 24. 0    | cada numerad-            |
| 35            | /         | 71       | timó factor,                               | 40            | x         | 61       | y cada denom-            |
|               | LAST X    | 25. 0    | que se muestra                             |               | -         | 41       | nador, su co-            |
|               | x> y      | 14.51    | con signo ne-                              |               | STO 3     | 23. 3    | ciente y el er-          |
|               | GTO 2     | 22. 2    | gativo, para                               |               | RCL 4     | 24. 4    | ror entre este co-       |
| 40            | x= y      | 21       | indicar que                                |               | RCL 6     | 24. 6    | cient y el decimal       |
|               | FRAC      | 25.33    | es el último.                              | 45            | STO 4     | 23. 4    | dado.                    |
|               | x≠ 0      | 15.61    |  |               | RCL 2     | 24. 2    |                          |
|               | RTN       | 25.12    |  |               | x         | 61       |                          |
|               | LAST X    | 25. 0    |  |               | -         | 41       |                          |
|               | STO 0     | 23. 0    |  |               | STO 6     | 23. 6    |                          |
| 45            | RCL 1     | 24. 1    |  | 50            | FIX 0     | 14.11. 0 | Cuando el er-            |
|               | PAUSE     | 25.74    |  |               | PAUSE     | 25.74    | ror es cer-              |
|               | 0         | 0        |  |               | RCL 7     | 24. 7    | se presentan             |
|               | GTO 0     | 22. 0    |  |               | RCL 5     | 24. 5    | nuevamente               |
| *             | LBL 2     | 25.13. 2 |  |               | STO 7     | 23. 7    | los últimos              |
| 50            | RCL 0     | 24. 0    |  |               |           |          |                          |
|               | CHS       | 32       | -no se utilizan flags                      |               |           |          |                          |
|               | R/S       | 74       | -se utilizan las etiquetas A,B,0,1,2,3,8,9 |               |           |          |                          |
|               | LBL B     | 25.13.12 | - id. registros 0,1,2,3,4,5,6,7            |               |           |          |                          |
|               | ENTER     | 31       | - id. en total 127 pasos de programa       |               |           |          |                          |
| 55            | ENTER     | 31       | - se recomienda moda FIX 0                 |               |           |          |                          |
|               |           |          | - id. cualquier moda angular               |               |           |          |                          |

## REGISTERS

| 1 usado | 2 usado | 3 usado | 4 usado | 5 denomin | 6 numerad | 7 usado | 8 | 9 |
|---------|---------|---------|---------|-----------|-----------|---------|---|---|
| ^       | 1       | 2       | 3       | 4         | 5         | 6       | 7 | 8 |

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY      | KEY CODE | COMMENTS          | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS |
|---------------|----------------|----------|-------------------|---------------|-----------|----------|----------|
| 105           | RCL 2          | 24. 2    |                   | 160           |           |          |          |
|               | x              | 61       |                   |               |           |          |          |
|               | +              | 51       |                   |               |           |          |          |
| 114           | STO 5          | 23. 5    |                   |               |           |          |          |
|               | PAUSE          | 25.74    |                   |               |           |          |          |
| 110           | /              | 71       |                   | 6             | 165       |          |          |
|               | FIX 9          | 14.11. 9 | numerador y de-   |               |           |          |          |
|               | PAUSE          | 25.74    | nominador, y el   |               |           |          |          |
|               | RCL 8          | 24. 8    | programa se de-   |               |           |          |          |
|               | x <sup>y</sup> | 21       | tiene.            |               |           |          |          |
| 115           | -              | 41       |                   | 170           |           |          |          |
|               | PAUSE          | 25.74    | En cualquier fa-  |               |           |          |          |
|               | x = 0          | 15.71    | se del cálculo    |               |           |          |          |
|               | GTO 8          | 22. 8    | es posible deter- |               |           |          |          |
|               | RCL 0          | 24. 0    | ner el programa   |               |           |          |          |
| 120           | RCL 3          | 24. 3    | sin necesidad de  |               |           |          |          |
|               | GTO 3          | 22. 3    | esperar a que     | 5             |           |          |          |
| 122           | * LBL 8        | 25.13. 8 | el error sea      |               |           |          |          |
|               | FIX 0          | 14.11. 0 | cero. Simplemente |               |           |          |          |
|               | RCL 6          | 24. 6    | pulsar R/S        |               |           |          |          |
| 125           | PAUSE          | 25.74    | y despues GSB 8   | 175           |           |          |          |
|               | RCL 5          | 24. 5    | y se presentaran  |               |           |          |          |
|               | RTN            | 25.12    | el último numera- |               |           |          |          |
|               |                |          | dor y denominador |               |           |          |          |
| 130           |                |          | calculados.       | 180           |           |          |          |
|               |                |          |                   |               |           |          |          |
| 135           |                |          |                   | 185           |           |          |          |
| 0             |                |          |                   | 190           |           |          |          |
|               |                |          |                   | 195           |           |          |          |
| 140           |                |          |                   | 200           |           |          |          |
| 9             |                |          |                   | 205           |           |          |          |
| 145           |                |          |                   | 210           |           |          |          |
| 2             |                |          |                   |               |           |          |          |
| 150           |                |          |                   |               |           |          |          |
|               |                |          |                   |               |           |          |          |
| 155           |                |          |                   |               |           |          |          |
| 7             |                |          |                   |               |           |          |          |

#### REGISTERS

| 0<br>usado | 1<br>usado | 2<br>usado | 3<br>usado | 4<br>usado | 5<br>denomin. | 6<br>numerad. | 7<br>usado | 8      | 9      |
|------------|------------|------------|------------|------------|---------------|---------------|------------|--------|--------|
| 0<br>0     | 1<br>1     | 2<br>2     | 3<br>3     | 4<br>4     | 5<br>5        | 6<br>6        | 7<br>7     | 8<br>8 | 9<br>9 |

## ECUACION DE 4<sup>o</sup> GRADO

1.- Descripción .- Dada una ecuación de grado 4, de la forma general

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

el programa halla simultáneamente todas sus raíces, tanto reales como imaginarias, empleando un procedimiento no iterativo. Presenta grandes ventajas sobre la función **SOLVE**:

- hallá simultáneamente (en 15 ó 20 segundos) todas las raíces, reales o imaginarias, sin requerir ninguna aproximación inicial
- puede emplearse para resolver ecuaciones de 2<sup>o</sup> ó 3<sup>er</sup> grado: basta con multiplicar la ecuación por  $x^2$ , resolver, y descartar las raíces que sean 0. Veáse ejemplos en la otra página.
- si la ecuación es de 4<sup>o</sup> grado y el término  $x^4$  no tiene coeficiente 1, basta dividir toda la ecuación por éste coeficiente.

el método empleado es el siguiente: se reduce la ec. a la forma

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0, \text{ siendo } p = (c - 6k^2)/2, q = 2k(4k^2 - c) + d, r = k(k(c - 3k^2) - d) + e, k = b/4$$

entonces, se resuelve la ec. cúbica:  $a^3 + 2pa^2 + (p^2 - r)a - q^2/8 = 0$  sea  $a$  una raíz real. Entonces:

$$\begin{cases} x_1^2 - \sqrt{2a} x_1 + (p + a + q/2\sqrt{2a}) = 0 \\ x_1^2 + \sqrt{2a} x_1 + (p + a - q/2\sqrt{2a}) = 0 \end{cases}$$

son las dos ecuaciones de 2<sup>o</sup> grado que hay que resolver. Se obtienen 4 raíces (reales o imaginarias)  $x_1$ , y de ellas:

$$x = x_1 - k$$

la ecuac. cúbica se resuelve así: Sea  $B = 2p$ ,  $C = p^2 - r$ ,  $D = -q^2/8$  entonces:

$$\text{se reduce a } z^3 + Pz + Q = 0, \text{ donde } P = C - B^2/3, Q = D + B(2B^2/27 - C/3)$$

y su raíz es: - si  $(Q/2)^2 + (P/3)^3 \geq 0$

$$z = \sqrt[3]{(-Q/2) + \sqrt{(Q/2)^2 + (P/3)^3}} + \sqrt[3]{(-Q/2) - \sqrt{(Q/2)^2 + (P/3)^3}}$$

si  $(Q/2)^2 + (P/3)^3 < 0$ , entonces  $z = 2\sqrt{-P/3} \cos(\frac{1}{3}\arccos \frac{3Q}{2P} \sqrt{-3/P})$

y finalmente,  $a = z - B/3$

2.- Utilización .-

(1) Introducir el programa

(2) Introducir los coeficientes:  $b$  **STO 0**;  $c$  **STO 1**;  $d$  **STO 2**;  $e$  **STO 3**

(3) Resolver la ec.: **A** → a) si las raíces son reales:

$$\rightarrow x_1 \quad \text{R/S} \rightarrow x_2 \quad \text{R/S} \rightarrow x_3 \quad \text{R/S} \rightarrow x_4$$

en caso de que cualquiera de los dos pares sean (o los dos) imaginarias, se presenta un "1" indicador durante una pausa

**A** → (1.0000) → parte imaginaria **R/S** → parte real

y las raíces son  $x = \text{part.real} \pm \text{part. imaginaria} i$

(4) para otra ecuación, ir a (2)

### 3.- Ejemplos .-

11- Resolver la ecuación  $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$

- introducir el programa. [F PRGM]
- id. coeficientes:

|     |       |
|-----|-------|
| -10 | STO 0 |
| 35  | STO 1 |
| -50 | STO 2 |
| 24  | STO 3 |

- hallar las raices: [A] → 4.0000  
[R/S] → 3.0000  
[R/S] → 2.0000  
[R/S] → 1.0000

las raíces son:  $x_1 = 4.0000$   
 $x_2 = 3.0000$   
 $x_3 = 2.0000$   
 $x_4 = 1.0000$

12- Resolver la ecuación  $x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 7x + 5 = 0$

- introd. coeficientes: 3 STO 0  
8 STO 1  
7 STO 2  
5 STO 3

- hallar las raices:

$$\begin{array}{ll} \boxed{A} - (1.0000) \rightarrow 0.8660 & \boxed{R/S} \rightarrow -0.5000 \\ \boxed{R/S} - (1.0000) \rightarrow 2.0000 & \boxed{R/S} \rightarrow -1.0000 \end{array}$$

así que las 4 raíces son imaginarias:  $x_{1,2} = -0.5000 \pm 0.8660 i$   
 $x_{3,4} = -1.0000 \pm 2.0000 i$

13-Resolver la ecuación  $x^4 - 2x^3 - x + 2 = 0$

- introd. coeficientes: -2 STO 0  
0 STO 1  
-1 STO 2  
2 STO 3

- hallar raíces:

$$\begin{array}{ll} \boxed{A} \rightarrow 2.0000 & \boxed{R/S} \rightarrow 1.0000 \\ \boxed{R/S} \rightarrow (1.0000) \rightarrow 0.8660 & \boxed{R/S} \rightarrow -0.5000 \end{array}$$

las raíces son:  $x_1 = 2.0000$ ,  $x_2 = 1.0000$ ,  $x_{3,4} = -0.5000 \pm 0.8660 i$

14- Hallar todas las raíces de  $x^3 - 6x - 2 = 0$

- introducir coeficientes: la ec. es equivalente a  $x^4 - 6x^2 - 2x = 0$

|    |       |
|----|-------|
| 0  | STO 0 |
| -6 | STO 1 |
| -2 | STO 2 |
| 0  | STO 3 |

} ahora:  $\boxed{A} \rightarrow 2.6017$  [FIX 9]  $\rightarrow 2.601679132$   
 $\boxed{R/S} \rightarrow 0.000000000$  [R/S]  $\rightarrow -0.339876887$   
 $\boxed{R/S} \rightarrow -2.261802245$

y las raíces (descartando el 0) son :

$$\begin{array}{l} x_1 = 2.601679132 \\ x_2 = -0.339876887 \\ x_3 = -2.261802245 \end{array} \text{, las 3 reales}$$

### 4.- Notas .-

- el método puede fallar si la ecuación tiene una raíz múltiple
- la exactitud del resultado no depende del número de decimales en pantalla. El tiempo de ejecución es fijo, 15 a 20 segundos para hallar las 4 raíces con 10 cifras de precisión.

# HP 34 C

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY  | KEY CODE | COMMENTS  |
|---------------|-----------|----------|----------|---------------|------------|----------|---|
| *             | LBL A     | 25.13.11 |          |               | x          | 61       | $C = p^2 - r$   |
|               | RCL 1     | 24. 1    |          |               | 9          | 9        | $D = -q^2/8$  |
|               | RCL 0     | 24. 0    |          |               | /          | 71       | se reduce a ]   |
|               | 4         | 4        |          | 60            | -          | 41       | forma :   |
| 5             | /         | 71       |          | RCL 1         | 24. 1      |          | $z^3 + Pz + Q = 0$  |
|               | STO I     | 23.14.23 |          | RCL 2         | 24. 2      |          | siendo:   |
|               | $x^2$     | 15. 3    |          | x             | 61         |          | $P = C - B^2/3$   |
|               | 6         | 6        |          | 3             | 3          |          | $Q = D + B(2B^2/27 - C/3)$                                    |
| 10            | x         | 61       |          | STO/ 3        | 23.71. 3   |          | y se calcula el discriminante:                                |
|               | -         | 41       |          | 65            | /          | 71       | $W = (Q/2)^2 + (P/3)$   |
|               | 2         | 2        |          | RCL 0         | 24. 0      |          |   |
|               | /         | 71       |          | $x^2$         | 15. 3      |          | si $W < 0$ , resolver trigonom.                               |
| 15            | STO 4     | 23. 4    |          | 8             | 8          |          | si no, la raíz es :   |
|               | RCL I     | 24.14.23 |          | /             | 71         |          | $z = (-Q/2 + \sqrt{W})^{1/3}$                                 |
|               | $x^2$     | 15. 3    |          | 170           | -          | 41       | $(-Q/2 - \sqrt{W})^{1/3}$                                     |
|               | 4         | 4        |          | 2             | 2          |          | y de aquí:  |
|               | x         | 61       |          | STO 1         | 23. 1      |          | $a = z - B/3$   |
| 20            | RCL 1     | 24. 1    |          | $x^2$         | 15. 3      |          |   |
|               | -         | 41       |          | 75            | RCL 3      | 24. 3    | con esta raíz a, se resuelven las dos ecuaciones de 2º grado: |
|               | STO I     | 24.14.23 |          | 3             | 3          |          |   |
|               | x         | 61       |          | 80            | $x < 0$    | 15.41    |   |
|               | 2         | 2        |          | GTO 2         | 22. 2      |          |   |
| 25            | x         | 61       |          | $\sqrt{x}$    | 14. 3      |          |   |
|               | RCL 2     | 24. 2    |          | STO 3         | 23. 3      |          |   |
|               | +         | 51       |          | RCL 1         | 24. 1      |          |   |
|               | STO 0     | 23. 0    |          | 41            |            |          |   |
|               | RCL I     | 24.14.23 |          | GSB 1         | 13. 1      |          |   |
|               | RCL 1     | 24. 1    |          | RCL 1         | 24. 1      |          |   |
| 30            | RCL I     | 24.14.23 |          | CRS           | 32         |          |   |
|               | $x^2$     | 15. 3    |          | RCL 3         | 24. 3      |          |   |
|               | 3         | 3        |          | 10            | -          | 41       |   |
|               | x         | 61       |          | GSB 1         | 13. 1      |          |   |
|               | -         | 41       |          | +             | 51         |          |   |
| 35            | RCL 2     | 24. 2    |          | * LBL 3       | 25.13. 3   |          |   |
|               | -         | 41       |          | RCL 2         | 24. 2      |          |   |
|               | x         | 61       |          | 45            | -          | 41       |   |
|               | STO+ 3    | 23.51. 3 |          | STO+ 4        | 23.51. 4   |          |   |
| 40            | RCL 4     | 24. 4    |          | 2             | 2          |          |   |
|               | $x^2$     | 15. 3    |          | /             | 71         |          |   |
|               | RCL 3     | 24. 3    |          | 100           | $\sqrt{x}$ | 14. 3    |   |
|               | -         | 41       |          | STO 1         | 23. 1      |          |   |
| 45            | STO 1     | 23. 1    |          | STO/ 0        | 23.71. 0   |          |   |
|               | RCL 4     | 24. 4    |          | GSB 6         | 13. 6      |          |   |
|               | 2         | 2        |          | R/S           | 74         |          |   |
|               | x         | 61       |          | * LBL 6       | 25.13. 6   |          |   |
|               | STO 2     | 23. 2    |          |               |            |          |   |
|               | $x^2$     | 15. 3    |          |               |            |          |   |
|               | 3         | 3        |          |               |            |          |   |
| 50            | /         | 71       |          |               |            |          |   |
|               | -         | 41       |          |               |            |          |   |
|               | STO 3     | 23. 3    |          |               |            |          |   |
|               | RCL 2     | 24. 2    |          |               |            |          |   |
|               | $x^2$     | 15. 3    |          |               |            |          |   |
| 55            | 2         | 2        |          |               |            |          |   |

- se utiliza el flag 0  
 - id. etiquetas A,1,2,3,4,6,8  
 - id. registros I,0,1,2,3,4  
 - id. en total 175 pasos de programa  
 - se recomienda moda FIX 4  
 - id. cualquier moda angular

## REGISTERS

| b.usado | c.usado | d.usado | e.usado | usado |    |    | 7  | 8  | 9  |
|---------|---------|---------|---------|-------|----|----|----|----|----|
| .1      | .1      | .2      | .3      | .4    | .5 | .6 | .7 | .8 | .9 |

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY      | KEY CODE | COMMENTS                     | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY  | KEY CODE | COMMENTS   |  |
|---------------|----------------|----------|------------------------------|---------------|------------|----------|--|--|
| 105           | RCL 1          | 24. 1    |                              | 100           | 1/x        | 25. 2    | cúbica por me-                                       |  |
|               | x <sup>2</sup> | 15. 3    |                              |               | CHS        | 32       | dio de la for-                                       |  |
|               | RCL 4          | 24. 4    |                              |               | $\sqrt{x}$ | 14. 3    | mula trigonomé-                                      |  |
| 4             | -              | 41       | $x_1^2 - Fx_1 + G = 0$       |               | STO 1      | 23. 1    | trica:   |  |
|               | RCL 0          | 24. 0    | y                            | 6             | x          | 61       | $z = 2 \sqrt{-P/3} \cos J$                           |  |
| 110           | CHS            | 32       | $x_1^2 + Fx_1 + L = 0$       | 165           | RCL 3      | 24. 3    | donde $3J =$   |  |
|               | STO 0          | 23. 0    | donde $F = \sqrt{2a}$        |               | /          | 71       | $= \arccos \left( \frac{3Q}{2P} \sqrt{-3/I} \right)$ |  |
| 4             |                | 4        | $G = p + a + q / 2\sqrt{2a}$ |               | COS-1      | 15. 8    |  |  |
|               | /              | 71       | $L = p + a - q / 2\sqrt{2a}$ | 170           | COS        | 14. 8    |  |  |
| 115           | x < 0          | 15. 41   | las raíces son               |               | RCL 1      | 24. 1    |  |  |
|               | GTO 4          | 22. 4    | reales, y se                 |               | /          | 71       |  |  |
|               | $\sqrt{x}$     | 14. 3    | calcular con                 |               | 2          | 2        |  |  |
|               | STO 2          | 23. 2    | la fórmula de                |               | x          | 61       |  |  |
| 120           | RCL 1          | 24. 1    | la ecuación de               |               | 175        | GTO 3    | 22. 3  |  |
|               | CHS            | 32       | 2º grado.                    |               |            |          |  |  |
|               | STO 1          | 23. 1    |                              |               |            |          |  |  |
|               | CHS            | 32       |                              |               |            |          |  |  |
| 125           | +              | 51       | entonces:                    |               |            |          |  |  |
|               | GSB 8          | 13. 8    | $x = x_1 - k$                |               |            |          |  |  |
|               | R/S            | 74       |                              |               |            |          |  |  |
| 130           | RCL 1          | 24. 1    |                              |               |            |          |  |  |
|               | CHS            | 32       |                              |               |            |          |  |  |
|               | RCL 2          | 24. 2    |                              |               |            |          |  |  |
| 135           | -              | 41       |                              |               |            |          |  |  |
|               | GTO 8          | 22. 8    |                              |               |            |          |  |  |
| *             | LBL 4          | 25.13. 4 |                              |               |            |          |  |  |
|               | CHS            | 32       | las raíces son               |               |            |          |  |  |
|               | $\sqrt{x}$     | 14. 3    | imaginarias:                 |               |            |          |  |  |
| 140           | x ≈ y          | 21       | antes de cal-                |               |            |          |  |  |
|               | R/S            | 74       | cularlas se                  |               |            |          |  |  |
|               | RCL 1          | 24. 1    | presenta un 1                |               |            |          |  |  |
|               | CHS            | 32       | durante una                  |               |            |          |  |  |
| 145           | STO 1          | 23. 1    | pausa, para in-              |               |            |          |  |  |
|               | CHS            | 32       | dicar que son                |               |            |          |  |  |
| *             | LBL 8          | 25.13. 8 | imaginarias.                 |               |            |          |  |  |
|               | RCL 1          | 24.14.23 | Luego se pre-                |               |            |          |  |  |
|               | -              | 41       | sentan parte                 |               |            |          |  |  |
| 150           | RTN            | 25.12    | imaginaria y                 |               |            |          |  |  |
| *             | LBL 1          | 25.13. 1 | parte real por               |               |            |          |  |  |
|               | x < 0          | 15.41    | este orden.                  |               |            |          |  |  |
|               | SF 0           | 25.51. 0 |                              |               |            |          |  |  |
|               | ABS            | 25.34    |                              |               |            |          |  |  |
| 155           | 3              | 3        |                              |               |            |          |  |  |
|               | 1/x            | 25. 2    |                              |               |            |          |  |  |
|               | $y^x$          | 25. 3    |                              |               |            |          |  |  |
|               | F? 0           | 25.71. 0 |                              |               |            |          |  |  |
|               | CHS            | 32       |                              |               |            |          |  |  |
| 160           | CF 0           | 25.61. 0 |                              |               |            |          |  |  |
|               | RTN            | 25.12    |                              |               |            |          |  |  |
| *             | LBL 2          | 25.13. 2 |                              |               |            |          |  |  |
|               | RCL 1          | 24. 1    |                              |               |            |          |  |  |
|               | RCL 3          | 24. 3    |                              |               |            |          |  |  |
|               |                |          | halla una raíz               |               |            |          |  |  |
|               |                |          | de la ecuación               |               |            |          |  |  |

## REGISTERS

|          |          |          |          |          |   |   |   |
|----------|----------|----------|----------|----------|---|---|---|
| b, usado | c, usado | d, usado | e, usado | f, usado | g | h | i |
| 1        | 2        | 3        | 4        | 5        | 6 | 7 | 8 |

SISTEMAS DE ECUACIONES :  $f(x,y) = 0$   
 $g(x,y) = 0$

1.- Descripción .- Tenemos un sistema de dos ecuaciones, no necesariamente lineales, de la forma genérica

$$f(x,y) = 0, \quad g(x,y) = 0$$

dónde  $f, g$ , son funciones de  $x$  e  $y$  definidas por el usuario. Partiendo de una aproximación inicial  $(x_0, y_0)$ , el programa halla las soluciones del sistema (reales),  $x, y$ .

Se emplea un método iterativo de Newton:

$$\left. \begin{array}{l} x_{i+1} = x_i + \delta_{x_i} \\ y_{i+1} = y_i + \delta_{y_i} \end{array} \right\} \text{siendo } \delta_{x_i} = \frac{\begin{vmatrix} -f & f_y \\ -g & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}}, \quad \delta_{y_i} = \frac{\begin{vmatrix} f_x & -f \\ g_x & -g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}}$$

$$\text{donde } f = f(x_i, y_i) \\ g = g(x_i, y_i), \quad f_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{x_i, y_i} \simeq \frac{f(x_i, y_i) - f(x_i - \Delta x, y_i)}{\Delta x}$$

$$\Delta x = 8 \cdot 10^{-4} = \Delta y \quad f_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{x_i, y_i} \simeq \frac{f(x_i, y_i) - f(x_i, y_i - \Delta y)}{\Delta y}$$

$$e = 10^{-8} \quad g_x = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \Big|_{x_i, y_i} \simeq \frac{g(x_i, y_i) - g(x_i - \Delta x, y_i)}{\Delta x}$$

$$g_y = \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \Big|_{x_i, y_i} \simeq \frac{g(x_i, y_i) - g(x_i, y_i - \Delta y)}{\Delta y}$$

se itera hasta que se cumple

$$\frac{|\delta_{x_i}| + |\delta_{y_i}|}{|x_{i+1}| + |y_{i+1}|} < \varepsilon$$

2.- Utilización .- Introducir el programa

(1) Definir  $f, g$  : **GTO 0**, p.a. PRGM, introducir la lista de instrucciones que calculan  $f(x, y)$ , **RTN**, p.a. RUN

**GTO 1**, p.a. PRGM, introducir la lista de instrucciones que calculan  $g(x, y)$ , **RTN**, p.a. RUN

Es esencial que  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$ , estén definidas con su correspondiente LBL al principio y RTN al final. Además, antes de definir nuevas  $f, g$ , es preciso borrar de la memoria de programa las anteriores.

Para definir  $f, g$ ,  $X$  está en X y en R0  
 $Y$  está en Y y en R1

y es posible utilizar los registros disponibles desde R.0 en adelante. Hay 38 pasos para definir  $f, g$ .

(2) Introducir aproximaciones iniciales, y calcular la solución:

$x_0$  **ENTER**  $y_0$  **A**  $\rightarrow (x_1) \rightarrow (y_1)$   
 $\rightarrow (x_n) \rightarrow (y_n) \rightarrow x_n$

$x_n$  queda en X,  $y_n$  en Y

(3) Para probar con otras aproximaciones iniciales (Para buscar otras soluciones, por ejemplo), ir a (2). para otro caso, ir a (1)

3.- Ejemplos .-

(1)-Hallar un punto de intersección entre la circunferencia de ecuación :  
 $x^2 + y^2 - 5x + y - 6 = 0$

y la hipérbola  $x^2 - y^2 + 5x - y - 2 = 0$  cercano al (1,1)

-definimos  $f(x,y)$  y  $g(x,y)$  :  $\boxed{\text{GTO 0}}$ , p.a.PRGM ,  $\boxed{x^2}$   $\boxed{x \Rightarrow y}$   $\boxed{x^2}$   $\boxed{+}$   $\boxed{\text{RCI}}$   
 $\boxed{5}$   $\boxed{x}$   $\boxed{-}$   $\boxed{\text{RCL 1}}$   $\boxed{+}$   $\boxed{6}$   $\boxed{-}$   $\boxed{\text{RTN}}$  , p.a.RUN  
 $\boxed{\text{GTO 1}}$  , p.a.PRGM ,  $\boxed{x^2}$   $\boxed{x \Rightarrow y}$   $\boxed{x^2}$   $\boxed{-}$   $\boxed{\text{RCL 0}}$   $\boxed{5}$   $\boxed{x}$   $\boxed{+}$   $\boxed{\text{RCL 1}}$   $\boxed{-}$   $\boxed{2}$   $\boxed{-}$   $\boxed{\text{RTN}}$   
p.a.RUN

-introducimos la prox. inicial: 1  $\boxed{\text{ENTER}}$  1  $\boxed{A} \rightarrow (2.5006) \rightarrow (3.5C10)$   
 $\rightarrow (2.0500) \rightarrow (3.3217)$   
 $\rightarrow (2.0006) \rightarrow (3.0048)$   
 $\rightarrow (2.0000) \rightarrow (2.9997)$   
 $\rightarrow (2.0000) \rightarrow (3.0000)$

y despues de mostrar (2.0000)  $\rightarrow$  (3.0000) durante 5 iteraciones más, el programa se detiene con 2.0000 en la pantalla

la intersección será :  $\boxed{\text{FIX 9}} \rightarrow 2.000000000$  (xint)  
 $\boxed{x \Rightarrow y} \rightarrow 2.999999993$  (yint)

es decir, el punto (2,3) , que es la verdadera intersección

(2) Hallar una raiz de la ecuación  $z^x - 3x + 2 + 4i = 0$

-suponemos la raíz  $r = x + y i$  . La ecuación se transforma en :

$z^{x+y i} - 3(x+yi) + 2 + 4i = 0$  . Puesto que  $z^{x+y i} = z^x (\cos y \ln z + i \sin y \ln z)$   
estos quedan como :  $z^x (\cos y \ln z + i \sin y \ln z) - 3x - 3yi + 2 + 4i = 0$

y separando las partes real e imaginaria, tenemos el sistema:

|                                  |   |
|----------------------------------|---|
| $3x - z^x \cos(y \ln z) - 2 = 0$ | que es un sistema de 2 ec. no lineales con 2 incógnitas, x,y , reales |
| $3y - z^x \sin(y \ln z) - 4 = 0$ |   |

-definimos las ecuaciones: primero borramos las anteriores:

$\boxed{\text{f PRGM}}$  , p.a.PRGM,  $\boxed{\text{h BST}}$  , y  $\boxed{\text{h DEL}}$  hasta llegar al paso 103

$\boxed{3}$   $\boxed{x}$   $\boxed{2}$   $\boxed{\text{RCL 0}}$   $\boxed{y^x}$   $\boxed{\text{RCL 1}}$   $\boxed{2}$   $\boxed{\text{Ln}}$   $\boxed{x}$   $\boxed{\cos}$   $\boxed{x}$   $\boxed{-}$   $\boxed{2}$   $\boxed{-}$   $\boxed{\text{RTN}}$

$\boxed{\text{LBL 1}}$   $\boxed{x \Rightarrow y}$   $\boxed{3}$   $\boxed{x}$   $\boxed{2}$   $\boxed{\text{RCL 0}}$   $\boxed{y^x}$   $\boxed{\text{RCL 1}}$   $\boxed{2}$   $\boxed{\text{Ln}}$   $\boxed{x}$   $\boxed{\sin}$   $\boxed{x}$   $\boxed{-}$   $\boxed{4}$   $\boxed{-}$   $\boxed{\text{RTN}}$  , p.a.RUN

-fijamos FIX 4 y RAD :  $\boxed{\text{FIX 4}}$   $\boxed{\text{RAD}}$

-probamos con (1,1):

1  $\boxed{\text{ENTER}}$  1  $\boxed{A} \rightarrow (1.1795) \rightarrow (1.7593) \rightarrow$   
 $\rightarrow (0.9265) \rightarrow (2.0422) \rightarrow$   
 $\rightarrow (0.7646) \rightarrow (1.9593) \rightarrow$   
 $\rightarrow (0.7862) \rightarrow (1.8869) \rightarrow (0.8161) \rightarrow (1.8884) \rightarrow (0.8186) \rightarrow (1.9002) \rightarrow$   
 $\rightarrow (0.8142) \rightarrow (1.9024) \rightarrow (0.8129) \rightarrow (1.9009) \rightarrow (0.8133) \rightarrow (1.9002) \rightarrow$   
 $\rightarrow (0.8137) \rightarrow (1.9004) \rightarrow (0.8136) \rightarrow (1.9005) \rightarrow (0.8136) \rightarrow (1.9005) \rightarrow$

y despues de varias iteraciones más se llega a  $x = 0.813591019$   
 $y = 1.900471318$

y por consiguiente, la raiz es  $r = 0.813591019 + 1.900471318 i$

# HP 34 C

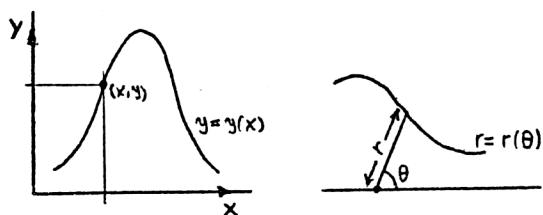
| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS  | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS   |
|---------------|-----------|----------|---|---------------|-----------|----------|--|
| *             | LBL A     | 25.13.11 | Ciclo general   |               | RCL 9     | 24. 9    |  |
|               | SF 0      | 25.51. 0 |   |               | x         | 61       | -f fy  |
|               | STO 1     | 23. 1    |   |               | -         | 41       | -g gy  |
| 5             | x ≠ y     | 21       | se pone el flag 0 en posición de convergencia no alcanzada, y almacena los valores iniciales, o los resultados de la anterior iteración |               | RCL 6     | 24. 6    | f <sub>x</sub> fy                                |
|               | STO 0     | 23. 0    |   | 60            | RCL 9     | 24. 9    | g <sub>x</sub> gy                                |
|               | GSB 0     | 13. 0    |   |               | x         | 61       |  |
|               | STO 2     | 23. 2    |   |               | RCL 7     | 24. 7    |  |
|               | STO 6     | 23. 6    |   |               | RCL 8     | 24. 8    |  |
| 10            | STO 7     | 23. 7    |   | 65            | x         | 61       |  |
|               | RCL 1     | 24. 1    |   |               | -         | 41       |  |
|               | RCL 0     | 24. 0    |   |               | STO 5     | 23. 5    |  |
|               | GSB 1     | 13. 1    |   |               | /         | 71       |  |
|               | STO 3     | 23. 3    |   |               | STO+0     | 23.51. 0 |  |
| 15            | STO 8     | 23. 8    |   | 70            | ABS       | 25.34    | x = x + δx                                       |
|               | STO 9     | 23. 9    |   |               | STO 4     | 23. 4    | x  en R4   |
|               | RCL 1     | 24. 1    |   |               | RCL 2     | 24. 2    |  |
|               | RCL 0     | 24. 0    |   |               | RCL 8     | 24. 8    |  |
| 20            | 8         | 8        | Δx = 8.10 <sup>-4</sup>   | 75            | x         | 61       |  |
|               | EEX       | 33       |   |               | RCL 3     | 24. 3    |  |
|               | 4         | 4        |   |               | RCL 6     | 24. 6    |  |
|               | CHS       | 32       |   | 80            | x         | 61       | f <sub>x</sub> -f                                |
|               | STO 5     | 23. 5    | Δx en R5  |               | -         | 41       | g <sub>x</sub> -g                                |
|               | -         | 41       |   |               | RCL 5     | 24. 5    |  |
| 25            | STO 4     | 23. 4    | x - Δx en R4  |               | /         | 71       |  |
|               | GSB 0     | 13. 0    |   |               | STO+1     | 23.51. 1 | δy   |
|               | STO-6     | 23.41. 6 | f(x,y) - f(x-Δ,y)   |               | ABS       | 25.34    | y = y + δy                                       |
|               | RCL 1     | 24. 1    | en R6   |               | STO+4     | 23.51. 4 | δx  +  δy  en R4                                 |
|               | RCL 4     | 24. 4    |   |               | RCL 4     | 24. 4    |  |
|               | GSB 1     | 13. 1    |   |               | RCL 1     | 24. 1    |  |
| 30            | STO-8     | 23.41. 8 | g(x,y) - g(x-Δ,y)   |               | ABS       | 25.34    |  |
|               | RCL 5     | 24. 5    | en R8   |               | RCL 0     | 24. 0    | e <sub>1</sub> = $\frac{ δx  +  δy }{ x  +  y }$ |
|               | STO/6     | 23.71. 6 |   |               | ABS       | 25.34    |  |
|               | STO/8     | 23.71. 8 | f <sub>x</sub> en R6  | 70            | +         | 51       |  |
|               | RCL 1     | 24. 1    | x en R6   |               | /         | 71       |  |
| 35            | 8         | 8        | g <sub>x</sub> en R8  | 75            | EEX       | 33       | si e <sub>1</sub> < 10 <sup>-8</sup> , se        |
|               | EEX       | 33       |   |               | CHS       | 32       | coloca el flag                                   |
|               | 4         | 4        |   |               | 8         | 8        | en posición de                                   |
|               | CHS       | 32       | Δy en R5  |               | x > y     | 14.51    | convergencia a                                   |
| 40            | STO 5     | 23. 5    |   |               | CFO       | 25.61. 0 | canzada  |
|               | -         | 41       | y - Δy en R4  |               | RCL 0     | 24. 0    |  |
|               | STO 4     | 23. 4    |   |               | PAUSE     | 25.74    |  |
|               | RCL 0     | 24. 0    |   |               | RCL 1     | 24. 1    | muestra x e                                      |
|               | GSB 0     | 13. 0    |   |               | PAUSE     | 25.74    |  |
| 45            | STO-7     | 23.41. 7 | f(x,y) - f(x,y-Δ)   |               | F? 0      | 25.71. 0 | itera si aún n                                   |
|               | en R7     |          |   |               | GTO A     | 22.11    | hay convergenc                                   |
|               | RCL 4     | 24. 4    |   |               | x ≠ y     | 21       |  |
|               | RCL 0     | 24. 0    |   |               | RTN       | 25.12    | f(x,y) g(x,y)                                    |
|               | GSB 1     | 13. 1    |   |               | * LBL 0   | 25.13. 0 |  |
| 50            | STO-9     | 23.41. 9 | g(x,y) - g(x,y-Δ)   |               | * LBL 1   | 25.13. 1 |  |
|               | en R9     |          |   |               |           |          |  |
|               | RCL 5     | 24. 5    |   |               |           |          |  |
|               | STO/7     | 23.71. 7 | -se utiliza el flag 0   |               |           |          |  |
|               | STO/9     | 23.71. 9 | - id. etiquetas A,1,0   |               |           |          |  |
|               | RCL 3     | 24. 3    | - id. registros 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9   |               |           |          |  |
|               | RCL 7     | 24. 7    | - id. en total 102 pasos de programa + f,g  |               |           |          |  |
|               | x         | 61       | -se recomiendan modas FIX 4 y RAD   |               |           |          |  |
| 55            | RCL 2     | 24. 2    |   |               |           |          |  |

## REGISTERS

| 0 x | 1 y | 2 f | 3 g | 4 usado | 5 usado | 6 fx | 7 fy | 8 gx | 9 gy |
|-----|-----|-----|-----|---------|---------|------|------|------|------|
| 0   | 1   | 2   | 3   | 4       | 5       | 6    | 7    | 8    | 9    |

## AREAS, LONGITUDES, VOLUMENES

1.- Descripción .- Dada la ecuación de una curva expresada en coordenadas rectangulares ,  $y = y(x)$  , o en polares ,  $r = r(\theta)$  el presente programa permite hallar diversas medidas geométricas relativas a esa curva, así como evaluar su derivada en cualquier punto. A continuación se dan detalles de las diferentes subrutinas



-- todas las subrutinas utilizan la función  $\boxed{f_x}$  , por lo cual la precisión y el tiempo de cálculo dependen grandemente del n° de decimales en pantalla; se recomienda FIX 4.

-- la mayor parte de ellas utilizan la subrutina **B** para el cálculo de la derivada.

### a) Derivación : $y'(x)$

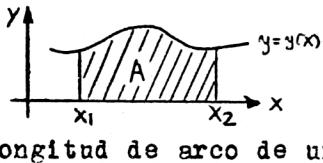
Muchas de las rutinas de integración requieren el cálculo de la derivada. Esto se realiza en una forma aproximada, empleando la fórmula:

$$y'(x) \doteq (y(x+\Delta) - y(x-\Delta)) / 2\Delta, \text{ donde } \Delta = 8 \cdot 10^{-4}$$

esto da un mínimo de 6 decimales de precisión. El valor de  $y'$  queda almacenado en R0 , además de presentarse en pantalla . (por supuesto,, si la función es  $r=r(\theta)$ , se calcula  $r'(\theta)$ )

### b) Área encerrada por una curva $y(x)$

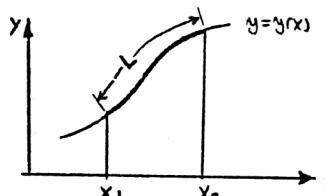
Calcula el área encerrada por una curva  $y=y(x)$ , expresada en coordenadas rectangulares, entre 2 límites arbitrarios  $x_1, x_2$



Simplemente emplea la fórmula

$$A = \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx$$

### c) Longitud de arco de una curva $y(x)$

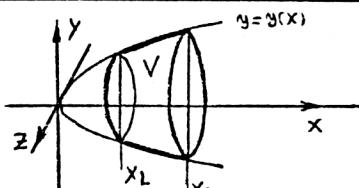


Calcula la longitud de arco de una curva  $y(x)$  expresada en c.rectangulares, entre 2 límites arbitrarios  $x_1, x_2$ . Utiliza la fórmula:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y'(x))^2} dx$$

$y(x)$  &  $y'(x)$  deben ser continuas en  $(x_1, x_2)$

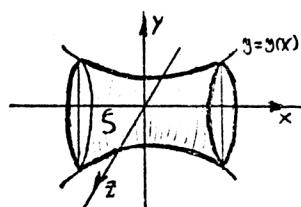
### d) Volumen de revolución engendrado por $y(x)$



Calcula el volumen del sólido de revolución engendrado por la curva  $y(x)$ , expresada en c.rectangulares, al girar alrededor del eje XX', entre 2 límites arbitrarios  $x_1, x_2$ . Utiliza

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \pi y^2 dx$$

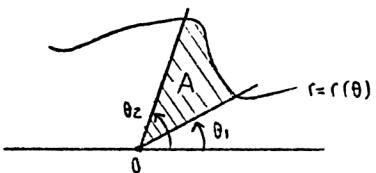
### e) Área de revolución engendrada por $y(x)$



Calcula el área de la superficie de revolución engendrada por  $y(x)$  (c.rect), al girar alrededor del eje XX', entre 2 límites,  $x_1, x_2$ . Usa:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \sqrt{1+(y')^2} dx$$

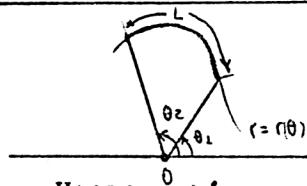
f) Área encerrada por una curva  $r=r(\theta)$



Calcula el área encerrada por una curva  $r=r(\theta)$  expresada en coordenadas polares, y 2 ángulos arbitrarios (argumentos, mas bien),  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Utiliza la fórmula:

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

g) Longitud de arco de una curva  $r=r(\theta)$



Calcula la longitud de arco de una curva  $r=r(\theta)$  expresada en coordenadas polares, entre 2 argumentos arbitrarios,  $\theta_1$  y  $\theta_2$ : utiliza la fórmula:

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\frac{1}{r^2} + (r')^2} d\theta$$

2.- Utilización:

(1) definir  $y(x)$  ó  $r(\theta)$ ; pulsar [GTO A], pasar a PRGM, e introducir la secuencia de teclas que calcula  $y(x)$  ó  $r(\theta)$ , teniendo en cuenta que el argumento se encuentra en pantalla al comienzo, y que el resultado final debe quedar también allí. Al final de la secuencia, pulsar [h RTN]. La función no debe emplear  $\pi$  y debe ser continua en el intervalo de integración. Antes de introducir otra función es preciso borrar de la memoria la anterior utilizando [DEL] hasta llegar a 076-25.13.11 (LBL A).Pasar a RUN.

(2) una vez definida la función, las siguientes subrutinas están disponibles:

(3) para hallar  $y(x)$  (ó  $r(\theta)$ ) para un valor dado de  $x$  (ó  $\theta$ ):

$$x (\delta \theta) [A] \rightarrow y(x) (\delta r(\theta))$$

(4) para hallar  $y'(x)$  (ó  $r'(\theta)$ ) para un valor dado  $x$  (ó  $\theta$ ):

$$x (\delta \theta) [B] \rightarrow y'(x) (\delta r'(\theta))$$

(5) id. área entre  $y(x)$  y dos argumentos,  $x_1$ ,  $x_2$ :

$$x_1 [\text{ENTER}] x_2 [\text{GSB } 7] \rightarrow \text{Área}$$

(6) id. longitud de arco de  $y(x)$  entre  $x_1, x_2$ :

$$x_1 [\text{ENTER}] x_2 [\text{GSB } 8] \rightarrow \text{Longitud}$$

(7) id. volumen de revoluc. entre  $x_1, x_2$ , engendrado por  $y(x)$ :

$$x_1 [\text{ENTER}] x_2 [\text{GSB } 9] \rightarrow \text{Volumen}$$

(8) id. área de la sup. de revolución engendrada por  $y(x)$ , entre  $x_1, x_2$

$$x_1 [\text{ENTER}] x_2 [\text{GSB } 6] \rightarrow \text{Superficie}$$

(9) id. área entre  $r(\theta)$  y dos argumentos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ :

$$\theta_1 [\text{ENTER}] \theta_2 [\text{GSB } 4] \rightarrow \text{Área}$$

(10) id. longitud de arco de  $r(\theta)$  entre dos argumentos,  $\theta_1$  y  $\theta_2$ :

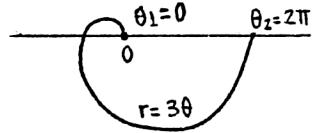
$$\theta_1 [\text{ENTER}] \theta_2 [\text{GSB } 5] \rightarrow \text{Longitud}$$

(11) para cualquier otro cálculo, ir al paso adecuado.

-en todos los casos, la incertidumbre del resultado está en Y

### 3.- Ejemplos .-

- (1) - Hallar la longitud de la primera voluta de la espiral de Arquímedes definida por su ecuación en polares:  $r = 3\theta$

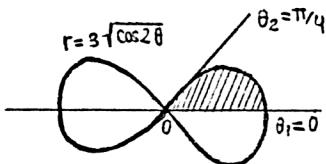


-introducir el programa  
-pulsar [GTO A]; pasar a PRGM → 076-25.13.11  
-introducir  $r(\theta)$ :  $3 \times \text{RTN}$  → 079- 25 12  
-pasar a RUN  
-pulsar [FIX 4]  
-introducir límites: 0 [ENTER] 2 [GSB 5] → 63.7689

luego es  $L = 63.7689$ ; el error máximo es

$|x-y| \rightarrow 0.0003$ . En realidad, el valor exacto es 63.768882, y el error no supera  $9.10^{-6}$ .

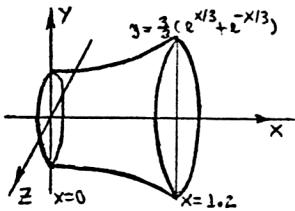
- (2) - Área encerrada por un cuarto de voluta de la lemniscata  $r = 3\sqrt{\cos 2\theta}$



-pulsar [h RTN]; pasar a PRGM → 000- ; [h BST]  
-pulsar [h DEL] hasta llegar a 076-25.13.11  
-introducir  $r(\theta)$ :  $2 \times \cos \sqrt{3} \times \text{RTN} \rightarrow$   
→ 083- 25 12  
-pasar a RUN; pulsar [g RAD]  
-introducir límites: 0 [ENTER] π/4 [GSB 4] → 2.250

es decir,  $A = 2.2500$ , con error máximo:  $|x-y| \rightarrow 3.9270.10^{-5}$

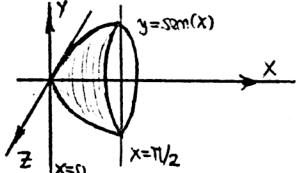
- (3) - Volumen del sólido obtenido por la revolución de la catenaria  $y = 3(e^{x/3} + e^{-x/3})/2$  entre  $x = 0$  y  $x = 1.2$



-pulsar [h RTN]; pasar a PRGM → 000- ; [h BST]  
-pulsar [h DEL] hasta llegar a 076-25.13.11  
-introducir  $y(x)$ :  $3 / e^x \text{ ENTER} 1/x + 1$   
 $0.5 \times \text{RTN} \rightarrow 087- 25 12$   
-pasar a RUN  
-introducir límites: 0 [ENTER] 1.2 [GSB 9] → 35.797

luego  $V=35.7976$ , con e.máx:  $|x-y| \rightarrow 0.0001$  (en realidad,  $3.10^{-7}$ )

- (4) - Área de la superficie de revolución engendrada por  $y=\sin(x)$  al girar alrededor de  $XX'$ , entre  $x=0$  y  $x=\pi/2$



-pulsar [h RTN]; pasar a PRGM → 000- ; [h BST]  
-pulsar [h DEL] hasta llegar a 076-25.13.11  
-introducir  $y(x)$ :  $\text{SIN} \text{ RTN}$ , pasar a RUN  
-pulsar [g RAD]:  
-introducir límites: 0 [ENTER] π/2 [GSB 6] → 7.2118

así que  $S = 7.2118$ , con e.máx:  $|x-y| \rightarrow 0.0001$  (realmente,  $2.10^{-7}$ )

- (5) - Hallar valores de  $y(x)$  y de  $y'(x)$  para  $x = 0, 0.5, 1$ , siendo  $y(x) = \exp(-x^2)$

-pulsar [h RTN]; pasar a PRGM → 000- ; pulsar [h BST], y después [h DEL] hasta llegar a 076-25.13.11  
-introducir la función  $y(x)$ :  $x^2 \text{ CHS} e^x \text{ RTN} \rightarrow 080- 25 12$   
-pasar a RUN

|     |     |                                |                         |
|-----|-----|--------------------------------|-------------------------|
| 0   | [A] | → 1.0000 ( $y(0)$ ); 0 [B]     | → 0.0000 ( $y'(0)$ )    |
| 0.5 | [A] | → 0.7788 ( $y(1/2)$ ); 0.5 [B] | → -0.7788 ( $y'(0.5)$ ) |
| 1   | [A] | → 0.3679 ( $y(1)$ ); 1 [B]     | → -0.7358 ( $y'(1)$ )   |

# HP 34 C

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY    | KEY CODE | COMMENTS  | STEP/<br>LINE  | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS |
|---------------|--------------|----------|---|----------------|-----------|----------|----------|
| *             | LBL 7        | 25.13. 7 |   |                | RTN       | 25.12    |          |
|               | $\int_3^x$ A | 14.72.11 | calcula el area                                     | *              | LBL B     | 25.13.12 |          |
|               |              |          | bajo una curva                                      |                | STO 2     | 23. 2    |          |
|               | RTN          | 25.12    | en rectangular.                                     |                |           | 8        |          |
| *             | LBL 8        | 25.13. 8 | calcula longitud                                    |                | EEX       | 33       |          |
| 5             | $\int_3^x$ 0 | 14.72. 0 | en rectangular.                                     |                | CHS       | 32       |          |
|               | RTN          | 25.12    | ,   |                |           | 4        |          |
| *             | LBL 0        | 25.13. 0 | calcula   |                | STO 1     | 23. 1    |          |
|               | GSB B        | 13.12    | $\sqrt{1+(y')^2}$                                   |                | STO+1     | 23.51. 1 |          |
| 10            |              | 1        |   | 65             | STO- 2    | 23.41. 2 |          |
|               | R→P          | 15. 4    |   |                |           | +        | 51       |
|               | RTN          | 25.12    |   |                | GSB A     | 13.11    |          |
| *             | LBL 9        | 25.13. 9 | calcula el vol.                                     |                | STO 0     | 23. 0    |          |
|               | $\pi$        | 25.73    | de revolución                                       |                | RCL 2     | 24. 2    |          |
|               | GTO 9        | 22. 9    | en rectangular.                                     | 70             | GSB A     | 13.11    |          |
| 15            | *            | LBL 4    | 25.13. 4  |                | STO- 0    | 23.41. 0 |          |
|               |              | 73       | calcula el area                                     |                | RCL 1     | 24. 1    |          |
|               |              | 5        | encerrada por                                       |                | STO/ 0    | 23.71. 0 |          |
| *             | LBL 9        | 25.13. 9 | una curva ex-                                       |                | RCL 0     | 24. 0    |          |
|               | STO I        | 23.14.23 | presada en  | 75             | RTN       | 25.12    |          |
| 20            | R↑           | 15.22    | coordenadas   | *              | LBL A     | 25.13.11 |          |
|               | $\int_3^x$ 1 | 14.72. 1 | polares   |                | RTN       | 25.12    |          |
|               | RTN          | 25.12    |   |                |           |          |          |
| *             | LBL 1        | 25.13. 1 | calcula   | 80             |           |          |          |
|               | GSB A        | 13.11    |   |                |           |          |          |
| 25            | $x^2$        | 15. 3    |   |                |           |          |          |
|               | RCL I        | 24.14.23 |   |                |           |          |          |
|               | x            | 61       |   |                |           |          |          |
|               | RTN          | 25.12    |   |                |           |          |          |
| *             | LBL 5        | 25.13. 5 | longitud de   | 85             |           |          |          |
| 30            | $\int_3^x$ 2 | 14.72. 2 | una curva en  |                |           |          |          |
|               | RTN          | 25.12    | polares   |                |           |          |          |
| *             | LBL 2        | 25.13. 2 | calcula   | 90             |           |          |          |
|               | STO I        | 23.14.23 | $\sqrt{r^2 + (r')^2}$                               |                |           |          |          |
|               | GSB B        | 13.12    |   |                |           |          |          |
| 35            | RCL I        | 24.14.23 |   |                |           |          |          |
|               | GSB A        | 13.11    |   |                |           |          |          |
|               | RCL 0        | 24. 0    |   |                |           |          |          |
|               | R→P          | 15. 4    |   |                |           |          |          |
|               | RTN          | 25.12    |   |                |           |          |          |
| 40            | *            | LBL 6    | 25.13. 6  | area de la su- | 95        |          |          |
|               | $\int_3^x$ 3 | 14.72. 3 | perficie de   |                |           |          |          |
|               | RTN          | 25.12    | revol. en rect.                                     |                |           |          |          |
| *             | LBL 3        | 25.13. 3 | calcula   | 100            |           |          |          |
|               | STO I        | 23.14.23 | $2\pi y \sqrt{1+(y')^2}$                            |                |           |          |          |
| 45            | GSB A        | 13.11    |   |                |           |          |          |
|               | $x \geq 1$   | 14.21    |   |                |           |          |          |
|               | GSB B        | 13.12    |   |                |           |          |          |
|               | 1            | 1        |   |                |           |          |          |
|               | R→P          | 15. 4    |   |                |           |          |          |
| 50            | RCL I        | 24.14.23 |   |                |           |          |          |
|               | x            | 61       | - se utilizan etiquetas A,B,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9     |                |           |          |          |
|               | 2            | 2        | - id. registros I,0,1,2                             |                |           |          |          |
|               | x            | 61       | - no se utiliza ningun flag                         |                |           |          |          |
|               | $\pi$        | 25.73    | - se utilizan en total 77 pasos de programa         |                |           |          |          |
| 55            | x            | 61       | - se recomienda moda FIX 4 (o inferior: FIX 3, etc) |                |           |          |          |
|               |              |          | - id. moda RAD                                      |                |           |          |          |

## REGISTERS

|         |            |            |    |    |    |    |    |    |    |
|---------|------------|------------|----|----|----|----|----|----|----|
| 0<br>y' | 1<br>usado | 2<br>usado | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| .6      | .1         | .2         | .3 | .4 | .5 | .6 | .7 | .8 | .9 |

**INTEGRALES DOBLES :**  $\int_{x_0}^{x_m} \int_{y_0}^{y_m} f(x,y) dy dx$

**1.- Descripción .-** La potente función  $\int_y^x$  incorporada en la HP-34C permite el cálculo de integrales simples, de la forma genérica

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Sin embargo,  $\int_y^x$  no puede ser utilizada en forma recursiva, es decir, no puede utilizarse para calcular la integral de una función que a su vez viene expresada por una integral, lo cual imposibilita el cálculo de integrales dobles (o múltiples, en general) de la forma

$$\int_{x_0}^{x_m} \int_{y_0}^{y_m} f(x,y) dy dx = \int_{x_0}^{x_m} \left[ \int_{y_0}^{y_m} f(x,y) dy \right] dx$$

Este programa utiliza la función  $\int_x^y$  conjuntamente con un método gaussiano para calcular integrales dobles. Tengamos la integral doble:

$$I = \int_{x_0}^{x_m} \int_{y_0}^{y_m} f(x,y) dy dx$$

el programa utiliza  $\int_x^y$  para calcular  $\int_{y_0}^{y_m} f(x,y) dy$ , y el siguiente método numérico para, a su vez, calcular la integral doble total :

- tengamos  $\int_a^b g(x) dx$ , entonces, el intervalo  $(a,b)$  se reduce al  $(1,1)$  mediante el cambio de variable  $x = (b+a)/2 + (b-a)/2 \cdot t$ ,  $dx = \frac{1}{2}(b-a)dt$  y la integral resultante, :

$$\int_1^1 g(x) dx = \frac{1}{9} (8g(0) + 5 \cdot (g(\sqrt{0.6}) + g(-\sqrt{0.6})))$$

este es el método de Gauss de 3 puntos, y es exacto si  $g(x)$  es un polinomio de grado 5 ó menos. Este método es, con mucho, el mejor que existe para ser implementado en una calculadora programable: exige únicamente 3 evaluaciones de  $g(x)$  para dar una exactitud de 5º orden, sus coeficientes numéricos son extremadamente simples, y puede ser programado en un mínimo espacio de memoria, requiriendo únicamente 3 registros de almacenamiento. (En contraste, la regla de Simpson también requiere 3 evaluaciones de  $g(x)$  y sus coeficientes son muy sencillos, pero sólo es exacta para  $g(x)$  = polinomio de grado 3 ó menos, por consiguiente nuestro método es casi el doble de exacto)

### **2.- Utilización .-** Introducir el programa

(1) definir  $f(x,y)$  : [GTO B], pasar a PRGM, pulsar la secuencia de teclas que calcula  $f(x,y)$  , [RTN], pasar a RUN

-para definir  $f(x,y)$  debe tenerse en cuenta que  $x$  se encuentra en R5, y  $y$  se encuentra en X (en pantalla)

(2) almacenar el nº de subintervalos : m [STO I]

(3) Calcular la integral:  $x_0$  [ENTER]  $x_m$  [ENTER]  $y_0$  [ENTER]  $y_n$  [A]  $\rightarrow$  Integ.

(4) Para otro caso con la misma  $f(x,y)$ , ir a (2)

(5) Para otra  $f(x,y)$ , ir a (1), después de borrar la anterior

**3.- Notas .-** La precisión del cálculo depende de dos factores: la moda FIX N ó SCI N que se elija, y el número m de subintervalos. Se recomienda muy encarecidamente el seleccionar FIX ó SCI con 4 decimales ó menos (FIX 4 ó SCI 4), y m = 1 ó 2 : esto proporcionará una exactitud de 4 decimales o así en un tiempo moderado. Si se requiere mayor exactitud, elegir m = 3 ó mayor, y en ultima instancia, FIX 6 ó SCI 6. Téngase en cuenta que al pasar de m = 1 a m = 2, el tiempo de cálculo se duplica como mínimo, y que seleccionar FIX 6 en vez de FIX 4 duplica o triplica el tiempo de funcionamiento. Veanse ejemplos para una idea de la efectividad del método.

4.- Ejemplos .-

(1) Hallar  $I = \int_0^1 \int_1^2 (x^2 + y^2) dy dx$

-definimos  $f(x,y)$  : **f PRGM**, p.a.PRGM, **x<sup>2</sup>** **RCL 5** **x<sup>2</sup>** **+** **RTN**  
p.a.RUN

-probamos con 1 subintervalo, y FIX 4 : **FIX 4** 1 **STO I**

-calculamos  $I$  : 0 **ENTER** 1 **ENTER** 1 **ENTER** 2 **A**  $\rightarrow$  2.6667

**FIX 7**  $\rightarrow$  2.6666666, luego  $I = 2.6666666$  (exacto,  $I = 8/3$ )

-el resultado es muy exacto, porque el método de Gauss lo es para polinomios de grado 5 ó menos, y  $f(x,y)$  = polinomio de grado 2

(2) Hallar  $I = \int_3^4 \int_1^2 (x+y)^{-2} dy dx$

-definimos  $f(x,y)$  : primero hay que borrar la anterior :

**f PRGM**, p.a.PRGM, **h BST**, y ahora **h DEL** hasta llegar al paso 067  
**RCL 5** **+** **x<sup>2</sup>** **1/x** **RTN**, p.a.RUN

-ahora, 1 subint., y FIX 4: **FIX 4** 1 **STO I**

-calculamos  $I$  : 3 **ENTER** 4 **ENTER** 1 **ENTER** 2 **A**  $\rightarrow$  0.0408

**FIX 6**  $\rightarrow$  0.040821. Exacto =  $\ln(25/24) = 0.040822$

(3) Hallar :  $\int_{-2.3}^{1.6} \int_{3.9}^{6.1} (e^{-x^2} + x^3 - y^3 x^2 + 7) \cdot \text{arctg}(x-2) \cdot \sin(y+3) dy dx$

-definimos  $f(x,y)$  : **f PRGM**, p.a.PRGM, **h BST**, ahora **h DEL** hasta llegar al paso 067

**STO 9** **3** **y<sup>x</sup>** **RCL 5** **-** **RCL 5** **x<sup>2</sup>** **x** **LASTX** **CHS** **e<sup>x</sup>** **x<sup>=y</sup>** **-**  
**7** **+** **RCL 5** **2** **-** **TAN-1** **x** **RCL 9** **3** **+** **SIN** **x** **RTN**, p.a.RUN

-con 2 subint., y SCI 4 : **SCI 4** **RAD** 2 **STO I**

-calculamos: -2.3 **ENTER** 1.6 **ENTER** 3.9 **ENTER** 6.1 **A**  $\rightarrow$  1.3213.10<sup>3</sup>

**FIX 2**  $\rightarrow$  1321.27. El valor exacto es 1321.27

este problema era especialmente difícil por varios motivos: la  $f(x,y)$  tarda 6 segundos en ser evaluada, lo cual incrementa mucho el tiempo de cálculo. Además, el intervalo de integración es bastante grande, y eso afecta a la precisión. Pese a ello, se han obtenido 6 cifras significativas correctas. Este mismo ejemplo resuelto mediante un método similar en una HP-67, tardó 2 horas.

(4) Hallar  $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dy dx$  (Aparece en Probabilidades)

-definimos  $f(x,y)$  : **f PRGM**, p.a.PRGM, **h BST**, y **h DEL** hasta llegar al paso 067  
**x<sup>2</sup>** **RCL 5** **x<sup>2</sup>** **+** **CHS** **e<sup>x</sup>** **RTN**, p.a.RUN

-usamos 3 subint., FIX 4 : **FIX 4** 3 **STO I**

-calculamos: 0 **ENTER** 4 **ENTER** 0 **ENTER** 4 **A**  $\rightarrow$  0.7853 ( $= \int_0^4 \int_0^4 e^{-x^2-y^2} dy dx$ )

el resultado exacto es  $\pi/4 = 0.7854$ . Como puede verse, hemos sustituido la integral entre límites infinitos por una aproximación entre límites finitos.

# HP 34 C

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY    | KEY CODE | COMMENTS |
|---------------|-----------|----------|----------|---------------|--------------|----------|----------|
| *             | LBL A     | 25.13.11 |          |               | .            | 73       |          |
|               | STO 3     | 23. 3    |          |               | 6            | 6        |          |
|               | R↓        | 15.22    |          |               | - $\sqrt{x}$ | 14. 3    |          |
|               | STO 4     | 23. 4    |          |               | x            | 61       |          |
| s             | R↓        | 15.22    |          | 60            | RTN          | 25.12    |          |
|               | x ≈ y     | 21       |          |               | *            | LBL 1    | 25.13. 1 |
|               | STO 6     | 23. 6    |          |               |              | STO 5    | 23. 5    |
|               | -         | 41       |          |               |              | RCL 4    | 24. 4    |
|               | RCL I     | 24.14.23 |          |               |              | RCL 3    | 24. 3    |
| 10            | /         | 71       |          | 65            | $\int_x^y$ B | 14.72.12 |          |
|               | STO 7     | 23. 7    |          |               |              | RTN      | 25.12    |
|               | RCL 8     | 24. 8    |          |               | *            | LBL B    | 25.13.12 |
|               | STO- 8    | 23.41. 8 |          |               |              |          |          |
| *             | LBL 2     | 25.13. 2 |          | 70            |              |          |          |
| 15            | RCL 6     | 24. 6    |          |               |              |          |          |
|               | RCL 6     | 24. 6    |          | 75            |              |          |          |
|               | RCL 7     | 24. 7    |          |               |              |          |          |
|               | STO+ 6    | 23.51. 6 |          | 80            |              |          |          |
|               | +         | 51       |          |               |              |          |          |
| w             | STO 0     | 23. 0    |          | 85            |              |          |          |
|               | x ≈ y     | 21       |          |               |              |          |          |
|               | STO- 0    | 23.41. 0 |          | 90            |              |          |          |
|               | +         | 51       |          | 95            |              |          |          |
|               | 2         | 2        |          |               |              |          |          |
| 25            | STO/ 0    | 23.71. 0 |          | 100           |              |          |          |
|               | /         | 71       |          |               |              |          |          |
|               | STO 1     | 23. 1    |          |               |              |          |          |
|               | GSB 0     | 13. 0    |          |               |              |          |          |
|               | +         | 51       |          |               |              |          |          |
| 30            | GSB 1     | 13. 1    |          |               |              |          |          |
|               | STO 2     | 23. 2    |          |               |              |          |          |
|               | RCL 1     | 24. 1    |          |               |              |          |          |
|               | GSB 0     | 13. 0    |          |               |              |          |          |
|               | -         | 41       |          |               |              |          |          |
| 35            | GSB 1     | 13. 1    |          |               |              |          |          |
|               | STO+ 2    | 23.51. 2 |          |               |              |          |          |
|               | 5         | 5        |          |               |              |          |          |
|               | STOx 2    | 23.61. 2 |          |               |              |          |          |
|               | RCL 1     | 24. 1    |          |               |              |          |          |
| 40            | GSB 1     | 13. 1    |          |               |              |          |          |
|               | 8         | 8        |          |               |              |          |          |
|               | x         | 61       |          |               |              |          |          |
|               | STO+ 2    | 23.51. 2 |          |               |              |          |          |
|               | RCL 0     | 24. 0    |          |               |              |          |          |
| 45            | STOx 2    | 23.61. 2 |          |               |              |          |          |
|               | 9         | 9        |          |               |              |          |          |
|               | STO/ 2    | 23.71. 2 |          |               |              |          |          |
|               | RCL 2     | 24. 2    |          |               |              |          |          |
|               | STO+ 8    | 23.51. 6 |          |               |              |          |          |
| 50            | DSE       | 15.23    |          |               |              |          |          |
|               | GTO 2     | 22. 2    |          |               |              |          |          |
|               | RCL 8     | 24. 8    |          |               |              |          |          |
|               | RTN       | 25.12    |          |               |              |          |          |
| *             | LBL 0     | 25.13. 0 |          |               |              |          |          |
| 55            | RCL 0     | 24. 0    |          |               |              |          |          |

-no se utiliza ningun flag  
 -se utilizan las etiquetas A,B,O,1,2  
 - id. registros I,O,1,2,3,4,5,6,7,8  
 - id. en total 66 pasos de programa + f(x,:  
 -se recomiendan modas FIX 4 ó SCI 4 y RAD

REGISTERS

| <sup>0</sup> usado | <sup>1</sup> usado | <sup>2</sup> Isubin | <sup>3</sup> y <sub>n</sub> | <sup>4</sup> y <sub>0</sub> | <sup>5</sup> x <sub>1</sub> | <sup>6</sup> x <sub>k</sub> | <sup>7</sup> increm | <sup>8</sup> Integ. | <sup>9</sup> |
|--------------------|--------------------|---------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|---------------------|---------------------|--------------|
| .0                 | .1                 | .2                  | .3                          | .4                          | .5                          | .6                          | .7                  | .8                  | .9           |

## SUMACION DE SERIES INFINITAS ALTERNADAS

1.- Descripción .. Dada una serie alternada infinita (los signos de los sucesivos términos van alternando de positivo a negativo) , cuyo término general es definido por el usuario (en un máximo de 35 pasos) , éste programa calcula su suma muy rápidamente , utilizando la transformación de Euler con diferencias hasta el 7º orden.

El programa calcula la suma de una serie infinita de la forma general

$$S = y(0) - y(1) + y(2) - y(3) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i y(i) , i=0,1,2,\dots$$

es sumamente útil cuando la serie converge muy lentamente hacia su límite, como por ejemplo la serie

$$S = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots = \ln 2$$

serían necesarios 2000 términos para hallar  $\ln 2$  con 3 decimales correctos; sumar 2000 términos llevaría un tiempo bastante largo. Por contra, el presente programa puede hallar esta suma (u otra cualquiera) con 10 cifras de precisión en 1 minuto ó menos.

Se emplea la transformación de Euler : reemplaza la serie original por

$$S = 1/2 y(0) - 1/4 \Delta y(0) + 1/8 \Delta^2 y(0) - \dots$$

donde las  $\Delta^n y(0)$  son las diferencias de  $n$ -ésimo orden de  $y(i)$ . Pueden usarse diferencias hasta de 7º orden. Este procedimiento es particularmente eficaz en el caso de series muy lentamente convergentes, y se aplica no a la serie original, sino a la que resulta de restarle a ésta la suma de unos pocos primeros términos.

El programa procede así: teniendo el término general de la serie definido bajo LBL B (35 pasos como máximo) ,  $n$  términos de la serie son sumados de antemano ( $n$  es elegido por el usuario) para dar  $S'$ . Entonces, se forma una tabla de diferencias:

|          |                 |                   |                   |       |  |  |
|----------|-----------------|-------------------|-------------------|-------|--|--|
| $y(n+1)$ |                 |                   |                   |       |  |  |
| $y(n+2)$ | $\Delta y(n+1)$ | $\Delta^2 y(n+1)$ |                   |       |  |  |
|          | $\Delta y(n+2)$ |                   | $\Delta^3 y(n+1)$ |       |  |  |
| $y(n+3)$ |                 | .....             |                   | ..... |  |  |
|          | .....           |                   |                   |       |  |  |
| .....    |                 |                   |                   |       |  |  |

calculando diferencias hasta el  $m$ -ésimo orden ( $1 \leq m \leq 7$ ). Finalmente, se aplica la transformación de Euler para dar

$$S'' = \frac{1}{2}y(n+1) - \frac{1}{4}\Delta y(n+1) + \frac{1}{8}\Delta^2 y(n+1) - \dots$$

y la suma final es  $S = S' + S''$

2.- Utilización .. Introducir el programa

(1) definir el término general  $y(i)$ : [GTO B] , p.a.PRGM , pulsar la secuencia de teclas que calcula  $y(i)$  , [RTN] , p.a.RUN

(2) introducir el  $n$ º de términos a sumar de antemano = SUM ( $\geq 0$ ) y el  $n$ º de diferencias a calcular = DIF ( $1 \leq DIF \leq 7$ )

SUM [ENTER] DIF [A] → S

(3) para otros valores de SUM ó DIF , ir a (2). Para otro caso, a (:

3.- Notas .- -se recomiendan valores de SUM = DIF = 7, para obtener máxima precisión. SUM puede ser mayor que 7, incluso 10 ó más.  
 -la precisión y el tiempo de funcionamiento dependen de SUM, DJ  
 -la transformación de Euler es más efectiva con series muy lentamente convergentes. Series divergentes pueden ser sumadas en algunos casos: la suma obtenida se llama "suma de Euler" de la serie divergente.

4.- Ejemplos .-

(1) Hallar  $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  hasta 10 cifras decimales

-definimos  $y(i) = 1/(1+i)$  : [f PRGM], p.a.PRGM, **1 + 1/x RTN**, p.a.RUN

-utilizaremos 10 términos previos y 7 diferencias : SUM = 10, DIF=7

**FIX 9 10 ENTER 7 A**  $\rightarrow$  0.693147182 ( $\ln 2 = 0.693147181$ )

$$(2) \text{Hallar } S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta dk}{1 - k^2 \sin^2 \theta} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)}$$

-definimos  $y(i)$ : primero, hay que borrar la anterior  $y(i)$

[f PRGM], p.a.PRGM, [h BST], y ahora [h DEL] hasta llegar al paso 084

**2 x 1 + 1/x x^2 RTN**, p.a.RUN

-SUM = 8, DIF = 7 : 8 **ENTER 7 A**  $\rightarrow$  0.915965595

el valor exacto es  $S = \int_0^1 (\arctg x)/x .dx = 0.915965594$

(3) Hallar el valor de  $S = 1/0.23 - 1/0.24 + 1/0.25 - 1/0.26 + \dots$

-el término general es :  $S = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{0.23 + 0.01 i}$

-lo definimos: [f PRGM], p.a.PRGM,

[h BST], [h DEL] hasta 084, [RCL .3] [x] [RCL .4] [+ 1/x RTN], p.a.RUN

-almacenamos constantes: 0.01 [STO .3] 0.23 [STO .4]

-SUM = DIF = 6 : 6 **ENTER A**  $\rightarrow$  2.221127525

el valor exacto es  $S = 100 \int_0^1 t^{22}/(1+t) .dt = 2.221127525$

(4) Sumar la serie divergente  $S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$

-el término general es :  $S = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (1+i)$

-lo definimos: [f PRGM], p.a.PRGM, [h BST], [h DEL] hasta 084,

**1 + RTN**, p.a.RUN

-SUM = 0, DIF = 1 : 0 **ENTER 1 A**  $\rightarrow$  0.250000000

por supuesto, la serie carece de suma, pero consideremos la función  $y(x)$  cuyo desarrollo en serie es el siguiente:

$$1/(1+x)^2 = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$$

Haciendo  $x = 1$  en ambos miembros queda:

$$1/4 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + = 0.25$$

# HP 34 C

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS         |
|---------------|-----------|----------|----------|---------------|-----------|----------|------------------|
| *             | LBL A     | 25.13.11 |          |               | FIX 4     | 14.11.4  |                  |
|               | CF 0      | 25.61.0  |          |               | STO-(1)   | 23.41.24 | diferencias: so  |
|               | STO .1    | 23..1    |          |               | RCL .1    | 24..1    | dos bucles ani   |
|               | x ≈ y     | 21       |          |               | RCL I     | 24.14.23 | dados            |
| 5             | STO .0    | 23..0    |          | 60            | x ≠ y     | 14.61    | control del 1º   |
|               | 1         | 1        |          |               | GTO 0     | 22.0     | bucle            |
|               | STO 8     | 23.8     |          |               | RCL .2    | 24..2    |                  |
|               | 0         | 0        |          |               | STO I     | 23.14.23 |                  |
|               | STO 9     | 23.9     |          |               | x = 0     | 15.71    |                  |
| 10            | STO I     | 23.14.23 |          | 65            | GTO 4     | 22.4     |                  |
| *             | LBL 1     | 25.13.1  |          |               | 1         | 1        | control del 2º   |
|               | GSB B     | 13.12    |          |               | GTO 6     | 22.6     | bucle            |
|               | RCL 8     | 24..8    |          |               | * LBL 4   | 25.13.4  |                  |
|               | STO- 8    | 23.41..8 |          |               | RCL (1)   | 24.14.24 | transformación   |
| 15            | STO- 8    | 23.41..8 |          |               | RCL 8     | 24..8    | de Euler         |
|               | x         | 61       |          |               | /         | 71       |                  |
|               | STO+ 9    | 23.51..9 |          |               | STO+ 9    | 23.51..9 | aquí se sumen    |
|               | ISG       | 15.24    |          |               | 2         | 2        | los términos d.  |
|               | FIX 4     | 14.11.4  |          |               | CHS       | 32       | diferencias qu-  |
| 20            | RCL .0    | 24..0    |          |               | 75 STOx 8 | 23.61..8 | constituyen en   |
|               | RCL I     | 24.14.23 |          |               | ISG       | 15.24    | sí la transfor-  |
|               | x ≤ y     | 14.41    |          |               | FIX 4     | 14.11.4  | mación, con el   |
|               | GTO 1     | 22.1     |          |               | RCL .1    | 24..1    | resultado de si- |
|               | STO 8     | 23.8     |          |               | RCL I     | 24.14.23 | mar directamen-  |
| 25            | 2         | 2        |          |               | x ≤ y     | 14.41    | los n primeros   |
|               | /         | 71       |          |               | GTO 4     | 22.4     | términos.        |
|               | FRAC      | 25.33    |          |               | RCL 9     | 24..9    |                  |
|               | x ≠ 0     | 15.61    |          |               | RTN       | 25.12    |                  |
|               | SF 0      | 25.51..0 |          |               | * LBL B   | 25.13.12 |                  |
| 30            | CL X      | 34       |          |               | R9        |          |                  |
|               | STO I     | 23.14.23 |          |               |           |          |                  |
| *             | LBL 2     | 25.13.2  |          |               |           |          |                  |
|               | RCL 8     | 24..8    |          |               |           |          |                  |
|               | GSB B     | 13.12    |          |               |           |          |                  |
| 35            | STO (1)   | 23.14.24 |          |               |           |          |                  |
|               | ISG       | 15.24    |          |               |           |          |                  |
|               | FIX 4     | 14.11.4  |          |               |           |          |                  |
|               | 1         | 1        |          |               |           |          |                  |
|               | STO+ 8    | 23.51..8 |          |               |           |          |                  |
| 40            | RCL .1    | 24..1    |          |               |           |          |                  |
|               | RCL I     | 24.14.23 |          |               |           |          |                  |
|               | x ≤ y     | 14.41    |          |               |           |          |                  |
|               | GTO 2     | 22.2     |          |               |           |          |                  |
|               | 2         | 2        |          |               |           |          |                  |
| 45            | F? 0      | 25.71..0 |          |               |           |          |                  |
|               | CHS       | 32       |          |               |           |          |                  |
|               | STO 8     | 23.8     |          |               |           |          |                  |
|               | ABS       | 25.34    |          |               |           |          |                  |
| *             | LBL 6     | 25.13.6  |          |               |           |          |                  |
| 50            | -         | 41       |          |               |           |          |                  |
|               | STO I     | 23.14.23 |          |               |           |          |                  |
|               | STO .2    | 23..2    |          |               |           |          |                  |
| *             | LBL 0     | 25.13.0  |          |               |           |          |                  |
|               | RCL (1)   | 24.14.24 |          |               |           |          |                  |
| 55            | ISG       | 15.24    |          |               |           |          |                  |

- se utiliza el flag 0  
 - se utilizan las etiquetas A,B,O,1,2,4,6  
 - id. registros I,O,1,2,3,4,5,6,7,8,9,.0,.  
 - id. en total 84 pasos de programa  
 - se recomiendan modas FIX 4 y cualquiera angular

## REGISTERS

| <sup>0</sup> y(n-1) | <sup>1</sup> º dif | <sup>2</sup> º dif | <sup>3</sup> º dif | <sup>4</sup> º dif | <sup>5</sup> º dif | <sup>6</sup> º dif | <sup>7</sup> º dif | <sup>8</sup> usado | <sup>9</sup> Σ |
|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|----------------|
| <sup>0</sup> m=SUM  | <sup>1</sup> m=DIF | <sup>2</sup> usado | <sup>3</sup>       | <sup>4</sup>       | <sup>5</sup>       | <sup>6</sup>       | <sup>7</sup>       | <sup>8</sup>       | <sup>9</sup>   |

## ECUACIONES DIFERENCIALES : $y' = f(x,y)$

1.- Descripción .- Dada una ecuación diferencial de primer orden:

$$y' = f(x,y)$$

con condición inicial  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , el presente programa permite hallar una solución numérica aproximada, esto es, permite determinar el valor de  $y_i$  para un conjunto discreto de puntos  $x_i$  igualmente espaciados.

Se emplea el método de Runge-Kutta de 4º orden :

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

donde:

$$\left| \begin{array}{l} k_1 = h.f(x_i, y_i) \\ k_2 = h.f(x_i + h/2, y_i + k_1/2) \\ k_3 = h.f(x_i + h/2, y_i + k_2/2) \\ k_4 = h.f(x_i + h, y_i + k_3) \end{array} \right.$$

el error es proporcional a  $h^5$ , por tanto, cuanto menor sea el espaciado  $h$ , tanto más exacta será la solución. Se recomienda  $h = 0.1$  ó inferior.

2.- Utilización .- Introducir el programa

(1) definir  $f(x,y)$  bajo LBL 1 : **GTO 1**, **PRGM**,  $f(x,y)$ , **RUN**

$f(x,y)$  es una secuencia de teclas que calcula  $f(x,y)$ , teniendo en cuenta que al principio,  $x$  está en X y en R1,  $y$  está en Y y R2

(2) introducir el espaciado  $h$  :  $h$  **B**

(3) introducir los valores iniciales  $x_0$ ,  $y_0$  :

$x_0$  **ENTER**  $y_0$  **A**  $\rightarrow (x_i) \rightarrow (y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$

(4) para modificar algo, ir al paso adecuado (2), (3)

(5) para otro caso, ir a (1)

3.- Notas .-

Al definir  $f(x,y)$  debe prestarse especial atención a :

- la subrutina que calcula  $f(x,y)$  debe estar encabezada por **LBL 1** y terminada por **RTN**.

- antes de introducir una nueva  $f(x,y)$  es preciso borrar la anterior (si la hubiere) de la memoria de programa. Para ello sígase el procedimiento que a continuación se expone:

1) en moda RUN, pulsar **f PRGM**. Pasar a moda PRGM

2) pulsar **h BST**, y ahora, pulsar **h DEL** hasta llegar a 067-25.13.1

3) teclear la nueva  $f(x,y)$  y al final, pulsar **h RTN**

4.- Ejemplos .-

(1) Hallar una solución numérica de  $y' = y$  con condición inicial  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ . La solución será un conjunto de valores  $(x, y)$  para  $x = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$

- definimos  $f(x, y) = y$  : [GTO 1], pasar a moda PRGM, [g R↓] [h RTN], pasar a moda RUN
- espaciado  $h = 0.1$  : 0.1 [B] [FIX 5]
- condiciones iniciales: 0 [ENTER] 1 [A] → se forma la tabla:

| x       | y       |
|---------|---------|
| 0.10000 | 1.10517 |
| 0.20000 | 1.22140 |
| 0.30000 | 1.34986 |
| 0.40000 | 1.49182 |
| 0.50000 | 1.64872 |
| 0.60000 | 1.82212 |
| 0.70000 | 2.01375 |
| 0.80000 | 2.22554 |
| 0.90000 | 2.45960 |
| 1.00000 | 2.71828 |

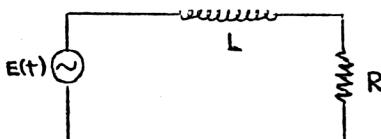
| y exacta |
|----------|
| 1.10517  |
| 1.22140  |
| 1.34986  |
| 1.49182  |
| 1.64872  |
| 1.82212  |
| 2.01375  |
| 2.22554  |
| 2.45960  |
| 2.71828  |

la solución exacta es:

$$y = e^x$$

como puede verse la solución calculada coincide hasta 5 decimales con la sol. exacta en  $(0, 1)$

(2) Tenemos un circuito R, L, como el de la figura. En él, se tiene:



$$\begin{aligned} R &= 15 \text{ ohmios} \\ L &= 3 \text{ henrios} \end{aligned}$$

$$E(t) = E_0 \sin \omega t = 110 \sin 120\pi t$$

En el instante inicial, el circuito se encuentra abierto. Se cierra y entonces, se pide estudiar el régimen transitorio durante los 10 primeros milisegundos. Comparar con la solución exacta.

-la ecuación diferencial que satisface el circuito es:

$$3 \frac{di}{dt} + 15 i = 110 \sin 120\pi t$$

donde  $i$  = intensidad instantánea,  $t$  = tiempo en segundos con la condición inicial  $t = 0$ ,  $i = 0$  (circuito abierto)

-la definimos: [f PRGM], pasar a moda PRGM, [h EST], y ahora, pulsamos [h DEL] hasta llegar a 067-25.13. 1 ahora, pulsar [RCL 6] [x] [SIN] [RCL 7] [x] [x ≠ y] [5] [x] [-] [RTN] pasar a moda RUN

-almacenar constantes: 120 [π] [x] [STO 6] 110 [ENTER] 3 [÷] [STO 7]  
-fijar modos: [ENG 2] [RAD]

-el espaciado,  $h = 0.001$  : 0.001 [B]

-condiciones iniciales: 0 [ENTER] 0 [A] → resulta la tabla

| t(ms) | 1 ms | 2 ms | 3 ms | 4 ms | 5 ms | 6 ms | 7 ms | 8 ms | 9 ms | 10 ms |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| i(mA) | 6.82 | 26.3 | 55.6 | 90.5 | 126  | 157  | 180  | 190  | 187  | 170   |

$$\text{la sol. exacta es } i = \frac{22(\sin 120\pi t - 24\pi \cos 120\pi t + 24\pi e^{-5t})}{3 + 576\pi^2}$$

# HP 34 C

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS                            | STEP/<br>LINE                       | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS                       |
|---------------|-----------|----------|-------------------------------------|-------------------------------------|-----------|----------|--------------------------------|
| *             | LBL B     | 25.13.12 |                                     |                                     | STO + 5   | 23.51. 5 | $\Sigma = k_1 + 2k_2 + 2k_3 +$ |
|               | STO 0     | 23. 0    |                                     |                                     | 6         | 6        |                                |
|               | R↓        | 15.22    |                                     |                                     | STO/ 5    | 23.71. 5 |                                |
|               | RTN       | 25.12    |                                     |                                     | RCL 5     | 24. 5    |                                |
| 5             | *         | LBL A    | 25.13.11                            | almacena $h$ en R0                  | 60        | STO + 4  | 23.51. 4                       |
|               | STO 4     | 23. 4    |                                     |                                     | RCL 3     | 24. 3    | $y_{i+1} = y_i + \Sigma / 6$   |
|               | R↓        | 15.22    |                                     |                                     | PAUSE     | 25.74    | $x_{i+1}$                      |
|               | STO 3     | 23. 3    | almacena $x_0$ en 3<br>$y_0$ en 4   |                                     | RCL 4     | 24. 4    |                                |
| *             | LBL 2     | 25.13. 2 |                                     |                                     | PAUSE     | 25.74    | $y_{i+1}$                      |
| 10            | RCL 4     | 24. 4    |                                     |                                     | 65 PAUSE  | 25.74    |                                |
|               | STO 2     | 23. 2    |                                     |                                     | GTO 2     | 22. 2    | otro punto                     |
|               | RCL 3     | 24. 3    |                                     |                                     | *         | LBL 1    | 25.13. 1 f(x,y)                |
|               | STO 1     | 23. 1    |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | GSB 1     | 13. 1    |                                     |                                     |           |          |                                |
| 15            | RCL 0     | 24. 0    |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | x         | 61       |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | STO 5     | 23. 5    |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | 2         | 2        |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | /         | 71       |                                     |                                     |           |          |                                |
| 20            | RCL 4     | 24. 4    |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | +         | 51       | $y_i + k_1 / 2$                     |                                     |           |          |                                |
|               | STO 2     | 23. 2    |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | RCL 0     | 24. 0    |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | 2         | 2        |                                     |                                     |           |          |                                |
| 25            | /         | 71       |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | RCL 3     | 24. 3    |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | +         | 51       | $x_i + h/2$                         |                                     |           |          |                                |
|               | STO 1     | 23. 1    |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | GSB 1     | 13. 1    | $f(x_i + h/2, y_i + \frac{k_1}{2})$ |                                     |           |          |                                |
| 30            | RCL 0     | 24. 0    |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | x         | 61       |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | STO + 5   | 23.51. 5 |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | STO + 5   | 23.51. 5 |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | 2         | 2        |                                     |                                     |           |          |                                |
| 35            | /         | 71       |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | RCL 4     | 24. 4    |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | +         | 51       | $y_i + k_2 / 2$                     |                                     |           |          |                                |
|               | STO 2     | 23. 2    |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | RCL 1     | 24. 1    |                                     |                                     |           |          |                                |
| 40            | GSB 1     | 13. 1    | $f(x_i + h/2, y_i + \frac{k_2}{2})$ |                                     |           |          |                                |
|               | RCL 0     | 24. 0    |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | x         | 61       |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | STO + 5   | 23.51. 5 |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | STO + 5   | 23.51. 5 |                                     |                                     |           |          |                                |
| 45            | RCL 4     | 24. 4    |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | +         | 51       |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | STO 2     | 23. 2    |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | RCL 0     | 24. 0    |                                     |                                     |           |          |                                |
|               | RCL 3     | 24. 3    |                                     |                                     |           |          |                                |
| 50            | +         | 51       | $y_i + k_3$                         | - no se utiliza ningun flag         |           |          |                                |
|               | STO 1     | 23. 1    |                                     | - se utilizan las etiquetas A,B,1,2 |           |          |                                |
|               | GSB 1     | 13. 1    |                                     | - id. registros 0,1,2,3,4,5         |           |          |                                |
|               | RCL 0     | 24. 0    |                                     | - id. 67 pasos de programa + f(x,y) |           |          |                                |
|               | STO + 3   | 23.51. 3 |                                     | - se recomiendan modes FIX 4, RAD   |           |          |                                |
| 55            | x         | 61       |                                     |                                     |           |          |                                |

- no se utiliza ningun flag  
 - se utilizan las etiquetas A,B,1,2  
 - id. registros 0,1,2,3,4,5  
 - id. 67 pasos de programa + f(x,y)  
 - se recomiendan modes FIX 4, RAD

REGISTERS

| 0 | h | 1 | x | 2 | y | 3 | xi | 4 | y <sub>i</sub> | 5 | $\Sigma$ | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|----|---|----------------|---|----------|---|---|---|---|
| 6 |   | 1 |   | 2 |   | 3 |    | 4 |                | 5 |          | 6 |   | 7 |   |

SISTEMAS DE EC. DIFERENCIALES :  $y' = f(x, y, z)$   
 $z' = g(x, y, z)$

1.- Descripción .- Con este programa puede resolverse numéricamente un sistema formado por 2 ecuaciones diferenciales de 1º orden , de la forma

$$\left. \begin{array}{l} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \end{array} \right\} \text{con condición inicial } x = x_0, y = y_0, z = z_0$$

Se utiliza el método generalizado de Runge-Kutta de 4º orden:

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad y_{i+1} = y_i + \frac{(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}, \quad z_{i+1} = z_i + \frac{(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)}{6}$$

siendo:

$$\left. \begin{array}{ll} k_1 = h.f(x_i, y_i, z_i) & l_1 = h.g(x_i, y_i, z_i) \\ k_2 = h.f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}) & l_2 = h.g(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}) \\ k_3 = h.f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}) & l_3 = h.g(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}) \\ k_4 = h.f(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3) & l_4 = h.g(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3) \end{array} \right.$$

La precisión depende de  $h^5$ : cuanto menor  $h$  , mejor . Se recomienda usar  $h = 0.1$  ó inferior.

Con este programa pueden resolverse también ecuaciones diferenciales de 2º orden , de la forma

$$y'' = g(x, y, y'), \quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad y' = y'_0$$

basta reducir la ecuación a un sistema mediante el cambio  $y' = z$  :

$$\text{quedará : } \left. \begin{array}{l} y' = z \\ z' = g(x, y, z) \end{array} \right\} \text{con condición } x=x_0, y=y_0, z=z_0 = y'_0$$

2.- Utilización .- Introducir el programa

(1) Definir  $f(x, y, z)$  bajo LBL 1 : [GTO 1] , pasar a PRGM , pulsar la secuencia de teclas que calcula  $f(x, y, z)$  , [h RTN] , pasar a RUN

(2) Definir  $g(x, y, z)$  bajo LBL 2 : [GTO 2] , pasar a PRGM , pulsar la secuencia de teclas que calcula  $g(x, y, z)$  , [h RTN] , pasar a RUN

en ambos casos,  $x$  está en X y R1,  $y$  está en Y y R2,  $z$  en Z y R3

(3) Introducir el espaciado  $h$  :  $h$  [B]

(4) id. condiciones iniciales:  $x_0$  [ENTER]  $y_0$  [ENTER]  $z_0$  [A]  $\rightarrow$   
 $\rightarrow (x_i) \rightarrow (y_i) \rightarrow (z_i)$

(5) Para cambiar  $h$ , ó condiciones iniciales, ir al paso adecuado

(6) Para otro caso, ir a (1)

3.- Notas .-

- $f(x, y, z)$  y  $g(x, y, z)$  deben estar perfectamente encabezadas por su etiqueta respectiva (LBL 1 ó 2) y finalizadas con RTN
- no deben emplear ni alterar el contenido de R0 a R9
- antes de definir nuevas  $f, g$ , es esencial borrar de la memoria las anteriores :  $f, g$ , conjuntamente, no deben sobrepasar 33 pasos de memoria, incluyendo sus LBL y RTN .

4.- Ejemplos ..-

(1) Resolver el sistema  $\begin{cases} y' = 3 \cos x + z \\ z' = \sin x + y \end{cases}$   $y(0) = 1, z(0) = -1$

en el intervalo  $(0, 0.25)$  con incrementos  $h = 0.05$

-definimos f : [GTO 1], pasar a PRGM, [COS] [3] [x] [FCL 3] [+] [RTN]  
pasar a RUN

-definimos g : [GTO 2], pasar a PRGM, [SIN] [+] [RTN] pasar a RUN

-fijamos las modas: [RAD] [FIX 6]

-el espaciado h: 0.05 [B]

-las c.iniciales: 0 [ENTER] 1 [ENTER] -1 [A]  $\Rightarrow$  se forma la tabla:

| x        | y        | z         |
|----------|----------|-----------|
| 0.050000 | 1.101250 | -0.946229 |
| 0.100000 | 1.205004 | -0.884837 |
| 0.150000 | 1.311273 | -0.815708 |
| 0.200000 | 1.420072 | -0.738730 |
| 0.250000 | 1.531429 | -0.653799 |

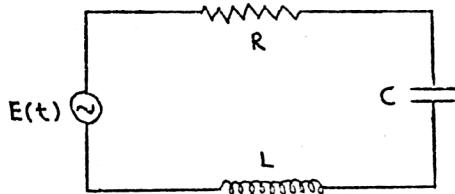
-la solución exacta es :

$$y = e^x + \sin x$$

$$z = e^x - 2\cos x$$

los valores calculados coinciden con los exactos hasta 6 decimales

(2) Un circuito RLC tiene  $R=180$  ohm,  $C=1/260$  faradios,  $L=20$  henrios, y un voltaje aplicado  $E(t)=10 \sin t$  volt.



Suponiendo que el condensador está inicialmente descargado, y que circula una intensidad de 1 Amp. antes de aplicar el voltaje ( $t=0$ ), estudiar la carga resultante en el condensador al aplicar voltaje, en el periodo desde  $t=0$  hasta  $t=0.3$  segundos, y ver su valor máximo .

$$E(t) = RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C}; \frac{dq}{dt} = I; \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{dI}{dt}$$

$$\text{y se llega al sistema } \frac{dI}{dt} = \frac{E(t)}{L} - \frac{RI}{L} - \frac{q}{LC}, \frac{dq}{dt} = I$$

$$\text{que en nuestro caso es } \frac{dI}{dt} = 0.5 \sin t - 9I - 14q; \frac{dq}{dt} = I$$

con condiciones iniciales:  $I(0) = 1$ ;  $q(0) = 0$ .

-las definiciones de f,g son: LBL 1, SIN, 2, /, x $\rightarrow$ y, 9, x, -, x $\rightarrow$ y, 14, x, -, RTN  
LBL 2, x $\rightarrow$ y, RTN

-fijamos [RAD] [FIX 3] y el espaciado h: 0.025 [B]

-condiciones iniciales : 0 [ENTER] 1 [ENTER] 0 [A]  $\Rightarrow$  la tabla :

| t     | I     | q     | t     | I     | q     | t     | I      | q     |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|
| 0.025 | 0.795 | 0.022 | 0.125 | 0.272 | 0.072 | 0.225 | 0.035  | 0.086 |
| 0.050 | 0.625 | 0.040 | 0.150 | 0.194 | 0.078 | 0.250 | 0.001  | 0.087 |
| 0.075 | 0.484 | 0.054 | 0.175 | 0.129 | 0.082 | 0.275 | -0.026 | 0.086 |
| 0.100 | 0.368 | 0.064 | 0.200 | 0.077 | 0.085 | 0.300 | -0.048 | 0.085 |

-puede verse que el valor de q máximo es  $q_{\max} = 0.087$  Coul., que se alcanza para  $t = 0.250$  segundos, cuando la intensidad vale  $I \approx 0$

-la solución exacta es que, para  $t = 0.2575$  seg.,  $I = 0$ ,  $q = 0.087$  Coul

# HP 34 C

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS                                     | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS   |
|---------------|-----------|----------|--|---------------|-----------|----------|--|
| *             | LBL B     | 25.13.12 |  |               | RCL 2     | 24. 2    |  |
|               | STO 0     | 23. 0    |  |               | RCL 1     | 24. 1    |  |
|               | R↓        | 15.22    |  |               | GSB 2     | 13. 2    | $g(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2})$ |
|               | RTN       | 25.12    |  |               | RCL 0     | 24. 0    |  |
| 5             | *         | LBL A    | 25.13.11                                     | comienzo      | x         | 61       | $l_2$  |
|               | STO 6     | 23. 6    |  |               | STO+ 8    | 23.51. 8 |  |
|               | R↓        | 15.22    |  |               | STO+ 8    | 23.51. 8 |  |
|               | STO 5     | 23. 5    |  |               | CF 0      | 25.61. 0 | comprueba si y   |
|               | R↓        | 15.22    |  |               | F? 1      | 25.71. 1 | ha calculado k   |
| 10            | STO 4     | 23. 4    |  |               | 65 SF 0   | 25.51. 0 | y l3; si ya lo   |
| *             | LBL 3     | 25.13. 3 |  |               | CF 1      | 25.61. 1 | hecho sigue, si  |
|               | RCL 6     | 24. 6    |  |               | F? 0      | 25.71. 0 | no, vuelve para  |
|               | STO 3     | 23. 3    |  |               | GTO 4     | 22. 4    | calcularlos  |
|               | RCL 5     | 24. 5    |  |               | RCL 6     | 24. 6    |  |
| 15            | STO 2     | 23. 2    |  |               | 70 +      | 51       |  |
|               | RCL 4     | 24. 4    |  |               | STO 3     | 23. 3    | $z_1 + l_3$  |
|               | STO 1     | 23. 1    |  |               | RCL 9     | 24. 9    |  |
|               | GSB 1     | 13. 1    |  |               | RCL 5     | 24. 5    |  |
|               | RCL 0     | 24. 0    |  |               | 75 +      | 51       |  |
| 20            | x         | 61       |  |               | STO 2     | 23. 2    | $y_1 + k_3$  |
|               | STO 7     | 23. 7    |  |               | RCL 0     | 24. 0    |  |
|               | STO 9     | 23. 9    |  |               | RCL 4     | 24. 4    |  |
|               | RCL 3     | 24. 3    |  |               | +         | 51       |  |
|               | RCL 2     | 24. 2    |  |               | STO 1     | 23. 1    | $x_1 + h$  |
| 25            | RCL 1     | 24. 1    |  |               | 80 GSB 1  | 13. 1    | $f(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3)$                               |
|               | GSB 2     | 13. 2    |  |               | RCL 0     | 24. 0    |  |
|               | RCL 0     | 24. 0    |  |               | x         | 61       |  |
|               | x         | 61       |  |               | STO+ 7    | 23.51. 7 |  |
| 30            | STO 8     | 23. 8    |  |               | RCL 3     | 24. 3    |  |
| *             | SF 1      | 25.51. 1 |  |               | RCL 2     | 24. 2    |  |
| *             | LBL 4     | 25.13. 4 |  |               | RCL 1     | 24. 1    |  |
|               | 2         | 2        |  |               | GSB 2     | 13. 2    | $g(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3)$                               |
|               | /         | 71       |  |               | RCL 0     | 24. 0    |  |
| 35            | RCL 6     | 24. 6    |  |               | STO+ 4    | 23.51. 4 | $x_{i+1} = x_i + h$  |
|               | +         | 51       |  |               | x         | 61       |  |
|               | STO 3     | 23. 3    |  |               | STO+ 8    | 23.51. 8 |  |
|               | RCL 9     | 24. 9    |  |               | 6         | 6        |  |
|               | 2         | 2        |  |               | STO/ 7    | 23.71. 7 |  |
| 40            | /         | 71       |  |               | STO/ 8    | 23.71. 8 |  |
|               | RCL 5     | 24. 5    |  |               | 45 RCL 7  | 24. 7    |  |
|               | +         | 51       |  |               | STO+ 5    | 23.51. 5 |  |
|               | STO 2     | 23. 2    |  |               | RCL 8     | 24. 8    |  |
|               | RCL 0     | 24. 0    |  |               | STO+ 6    | 23.51. 6 |  |
| 45            | /         | 71       |  |               | RCL 4     | 24. 4    |  |
|               | RCL 4     | 24. 4    |  |               | 100 PAUSE | 25.74    |  |
|               | +         | 51       |  |               | RCL 5     | 24. 5    |  |
|               | STO 1     | 23. 1    |  |               | PAUSE     | 25.74    |  |
|               | GSB 1     | 13. 1    |  |               | PAUSE     | 25.74    |  |
| 50            | RCL 0     | 24. 0    | -se utilizan los flags                       |               | RCL 6     | 24. 6    |  |
|               | x         | 61       | O, 1   |               |           |          |  |
|               | STO+ 7    | 23.51. 7 | - id. etiquetas A, B, 1, 2, 3, 4             |               |           |          |  |
|               | STO+ 7    | 23.51. 7 | - id. registros 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 |               |           |          |  |
|               | STO 9     | 23. 9    | - id. en total 107 pasos de programa + f, g  |               |           |          |  |
| 55            | RCL 3     | 24. 3    | - se recomiendan modas FIX 4 y RAD           |               |           |          |  |

REGISTERS

| 0 h | 1 x | 2 y | 3 z | 4 $x_i$ | 5 $y_i$ | 6 $z_i$ | 7 $\sum_k$ | 8 $\sum_l$ | 9 $k_1, k_2, l_1, l_2$ |
|-----|-----|-----|-----|---------|---------|---------|------------|------------|------------------------|
| .0  | .1  | .2  | .3  | .4      | .5      | .6      | .7         | .8         | .9                     |

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS |
|---------------|-----------|----------|----------|---------------|-----------|----------|----------|
| .05           | PAUSE     | 25.74    |          | 160           |           |          |          |
|               | PAUSE     | 25.74    |          |               |           |          |          |
|               | GTO 3     | 22.3     |          |               |           |          |          |
| .4            | *LBL 1    | 25.13.1  |          |               |           |          |          |
|               | *LBL 2    | 25.13.2  |          | 6             | 165       |          |          |
| 110           |           |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |
| .3            | 115       |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |
| .2            | 120       |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |
| .1            | 125       |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |
| .0            | 130       |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |
| .0            | 135       |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |
| .4            | 140       |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |
| .4            | 145       |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |
| .8            | 150       |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |
| 7             | 155       |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |

## REGISTERS

| 0 h | 1 x | 2 y | 3 z | 4 xi | 5 yi | 6 zi | 7 Σ k | 8 Σ q | 9 k1, k2, |
|-----|-----|-----|-----|------|------|------|-------|-------|-----------|
| .0  | .1  | .2  | .3  | .4   | X    | X    | X     | X     | X         |

## OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS

1.- Descripción .- Este programa permite realizar operaciones aritméticas empleando números complejos, así como varias de las funciones matemáticas más usuales, con argumentos complejos. Las operaciones se realizan de una forma muy similar a las habituales con números reales, utilizando un sistema que puede considerarse un RPN de dos registros: cada resultado es almacenado para poder ser utilizado en cálculos posteriores, permitiendo así la realización de operaciones en cadena, entre el complejo  $z_1$ , almacenado en el "registro superior" y el complejo  $z_2$  almacenado en "pantalla" (en realidad, en los registros X e Y del stack<sup>2</sup>operativo). Las funciones de una sola variable actúan sobre el complejo en "pantalla" y como todas las demás, almacenan el resultado tanto en "pantalla" como en el "registro superior". El programa incluye una memoria "compleja", capaz de almacenar el complejo en "pantalla" en ella, y recuperarlo posteriormente.

A continuación, se dan detalles de las diferentes funciones disponibles, y de los algoritmos empleados:

SUMA:  $z_1 + z_2 \leftarrow z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$   
 $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$

- a partir de ahora llamaremos "Y" al "registro superior" y "X" al registro de "pantalla"
- con este convenio,

**GSB 4** realiza la suma del complejo en "Y" con el complejo en "X", y deja el resultado tanto en "X" como en "Y"

RESTA:  $z_1 - z_2 \leftarrow z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i$

**GSB 7** realiza lo siguiente: al complejo en "Y" le resta el complejo en "X" y coloca el resultado tanto en "X" como en "Y"

MULTIPLICACION:  $z_1 \times z_2 \leftarrow z_1 \times z_2 = e^{\ln z_1 + \ln z_2} = e^{(\ln r_1 + \ln r_2) + (\theta_1 + \theta_2)i} = A + B i$

**GSB 1** multiplica el complejo en "Y" por el complejo en "X" y deja el resultado en "X" y en "Y"

DIVISION:  $z_1 / z_2 \leftarrow z_1 / z_2 = e^{\ln z_1 - \ln z_2} = A + B i$

**GSB 0** divide el complejo en "Y" por el complejo en "X" y deja el resultado en "X" y en "Y"

ELEVACION:  $z_1^{z_2} \leftarrow z_1^{z_2} = e^{z_2 \ln z_1} = A + B i$

**GSB 3** eleva el complejo en "Y" a la potencia indicada por el complejo en "X" y deja el resultado en "X" y en "Y"

LOG.NEPERIANO:  $\ln z \leftarrow \ln z = \ln r + \theta i = A + B i$

**GSB 2** halla el logaritmo del complejo en "X". El resultado queda en "X" y en "Y"

EXPONENCIAL:  $e^z \leftarrow e^z = e^a (\cos b + i \sin b)$

**GSB 5** eleva  $e^{(2.718...)}$  a la potencia indicada por el complejo en "X" y deja el resultado en "X" e "Y"

$$\text{SENO : } \sin(z) \therefore \sin(z) = (e^{iz} - e^{-iz})/2i = A + B i$$

**[GSB 9]** halla el seno trigonométrico del complejo en el registro "X" y deja el resultado en "X" e "Y". El argumento se supone en radianes.

STO z .-

**[GSB 8]** almacena el complejo en "X" en el registro especial "M" (memoria) y deja "X" intacto. ("Y", por supuesto, no se ve afectado en absoluto)

RCL z .-

**[B]** recupera el complejo almacenado en "M" (memoria), dejandolo en "X".

ENTER z .-

**[A]** almacena el complejo en "X" en el registro "Y" , y deja "X" intacto.

#### Notas .-

(todos los datos se introducen como:  
p.real **[ENTER]** p.imag)

(todos los resultados se obtienen como:  
(P.real → P.imaginario.)

"X" está formado por los registros X e Y del stack operativo: la parte real está en Y y la imaginaria en X

"Y" está formado por R0 y R1. La parte real está en R0 y la imaginaria en R1

"M" está formado por R2 y R3. La parte real está en R2 y la imaginaria en R3

- las funciones  $z^2$ ,  $e^z$ , Lnz , sin(z) utilizan moda trigonometrica RAD.

- todas las funciones muestran la parte real durante una PAUSA y se detienen con la p. imaginaria en pantalla. La parte real queda en Y (del stack)

- En realidad, el manejo del programa es muy simple de aprender: se tarda más en explicarlo de forma escrita que en entenderlo y dominarlo. Veanse ejemplos de utilización en la siguiente página.

2.- Utilización: -las funciones han sido asignadas a las diversas etiquetas con arreglo a sencillas reglas mnemotécnicas:

- las funciones aritméticas (+,-,x,/) se emplean pulsando **[GSB]** y el número más cercano a su respectiva función real (+,-,x,/) . Ejemplo:"multiplicar"es **[GSB 1]** porque el "1" es el número más cercano a "x".

- la función "elevación" está sobre su homónima " $y^x$ " , solo que prefijada con **[GSB]** en vez de con "h" . (es decir, es **[GSB 3]**)

- la función "logaritmo" está sobre "LOG" pero prefijada con "GSB" en vez de con "f" (es decir, es "GSB 2" en vez de "f 2". Su inversa, la exponencial, está inmediatamente encima de ella.(es decir, es **[GSB 5]**)

- la función "seno" está sobre la "TAN" real: esto es, es **[GSB 9]**

- la función "STO z" está sobre la tecla numérica más cercana a su homónima "STO" , esto es, es **[GSB 8]**.

- las dos funciones principales, "ENTER z" y "RCL z" son las teclas básicas **[A]** y **[B]** , para mayor facilidad de uso.

-para utilizar cualquier función, recuérdese que el resultado de la misma siempre se presenta como :

→ (parte real) → parte imaginaria

es preciso esperar a que el programa se detenga. Tratar de ejecutar cualquier otra función antes de que la parte imaginaria del anterior resultado se presente en pantalla, puede conducir a resultados erroneos. Los tiempos de ejecución son muy breves.

3.- Ejemplos :-

(1)- Hallar  $\ln(2+3i)$ ,  $e^{3+4i}$ ,  $\sin(1+i)$ ,  $(1-i)^{7+i}$

$\ln(2+3i) : 2 \text{ ENTER } 3 \text{ GSB 2} \rightarrow 1.2825 \Rightarrow = 1.2825 + 0.9828 i$

$e^{3+4i} : 3 \text{ ENTER } 4 \text{ GSB 5} \rightarrow -13.1288 \Rightarrow = -13.1288 - 15.20$

$\sin(1+i) : 1 \text{ ENTER } 1 \text{ GSB 9} \rightarrow 1.2985 \Rightarrow = 1.2985 + 0.6350 i$

$(1-i)^{7+i} : 1 \text{ ENTER } 1 \text{ CHS } [A] \rightarrow 1.0000 \Rightarrow = -1.0000$

$7 \text{ ENTER } 1 \text{ GSB 3} \rightarrow 10.5429 \Rightarrow = 10.5429 + 22.4630$

(2)- Ejemplo de operaciones en cadena:

Hallar  $\ln \left\{ \frac{[(2+3i)+(3-4i)+(6+8i)-(2-5i)] \times (3-2i)+(3-i)}{(2-i)} \right\}$

2 ENTER 3 [A]  $\rightarrow$  (2.0000)  $\rightarrow$  3.0000 (introduce  $z_1$  en "Y")  
 3 ENTER 4 CHS [GSB 4]  $\rightarrow$  (5.0000)  $\rightarrow$  -1.0000 (primera suma)  
 6 ENTER 8 GSB 4  $\rightarrow$  (11.0000)  $\rightarrow$  7.0000 (segunda suma)  
 2 ENTER 5 CHS [GSB 7]  $\rightarrow$  (9.0000)  $\rightarrow$  12.0000 (la resta)  
 3 ENTER 2 CHS [GSB 1]  $\rightarrow$  (51.0000)  $\rightarrow$  18.0000 (la multiplicación)  
 3 ENTER 1 CHS [GSB 4]  $\rightarrow$  (54.0000)  $\rightarrow$  17.0000 (la suma)  
 2 ENTER 1 CHS [GSB 0]  $\rightarrow$  (18.2000)  $\rightarrow$  17.6000 (la división)  
 [GSB 2]  $\rightarrow$  (3.2315)  $\rightarrow$  0.7686 (el logaritmo)

y ya tenemos el resultado final:  $= 3.2315 + 0.7686 i$

(3)- Ejemplo de operaciones en cadena, con memoria

HALLAR  $[(2+3i)+(6+2i)] \times [(3-5i)+(2-4i)]$ . Primero, **FIX 0**

-introducir  $z_1$ : 2 ENTER 3 [A]  $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow$  3  
 -introducir  $z_2$ : 6 ENTER 2 (sumar) [GSB 4]  $\rightarrow$  (8)  $\rightarrow$  5  
 -almacenar el resultado parcial: [GSB 8]  $\rightarrow$  (8)  $\rightarrow$  5  
 -introducir  $z_1$ : 3 ENTER 5 CHS [A]  $\rightarrow$  (3)  $\rightarrow$  -5  
 -introducir  $z_2$ : 2 ENTER 4 CHS (sumar) [GSB 4]  $\rightarrow$  (5)  $\rightarrow$  -9  
 -recuperar el resultado parcial: [B]  $\rightarrow$  (8)  $\rightarrow$  5  
 -multiplicar ambos resultados : [GSB 1]  $\rightarrow$  (85)  $\rightarrow$  -47

luego el resultado es :  $= 85 - 47i$

(4)- Evaluar  $P(z) = (2+i)z^5 - (3+2i)z^4 + (6-1)z^3 - (2+3i)z^2 - (1+i)z - (2+3i)$  para  $z = -1+2i$

-almacenar  $z$ : 1 CHS [ENTER] 2 [A]  $\rightarrow$  (-1)  $\rightarrow$  2 (z almacenado en "Y" y en "M", y en "X", claro)  
 -1º coefic: 2 ENTER 1 [GSB 1]  $\rightarrow$  (-4)  $\rightarrow$  3 (multiplicado)  
 -2º coefic: 3 ENTER 2 [GSB 7]  $\rightarrow$  (-7)  $\rightarrow$  1 (restado)  
 -recuperar  $z$ : [B]  $\rightarrow$  (-1)  $\rightarrow$  2  
 -multiplicar : [GSB 1]  $\rightarrow$  (5)  $\rightarrow$  -15  
 -3º coefic: 6 ENTER 1 CHS [GSB 4]  $\rightarrow$  (11)  $\rightarrow$  -16 (sumado)  
 -recuperar  $z$ : [B]  $\rightarrow$  (-1)  $\rightarrow$  2  
 -multiplicar : [GSB 1]  $\rightarrow$  (21)  $\rightarrow$  38  
 -4º coefic: 2 ENTER 3 [GSB 7]  $\rightarrow$  (19)  $\rightarrow$  35 (restado)  
 -recuperar  $z$ : [B]  $\rightarrow$  (-1)  $\rightarrow$  2  
 -multiplicar : [GSB 1]  $\rightarrow$  (-89)  $\rightarrow$  3  
 -5º coefic: 1 ENTER 1 [GSB 7]  $\rightarrow$  (-90)  $\rightarrow$  2 (restado)  
 -recuperar  $z$ : [B]  $\rightarrow$  (-1)  $\rightarrow$  2  
 -multiplicar : [GSB 1]  $\rightarrow$  (86)  $\rightarrow$  -182  
 -6º coefic: 2 ENTER 3 [GSB 7]  $\rightarrow$  (84)  $\rightarrow$  -185 (restado)

que es el resultado final:  $P(-1+2i) = 84 - 185 i$

HP 34 C

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY  | KEY CODE | COMMENTS                                | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY  | KEY CODE | COMMENTS                  |
|---------------|------------|----------|---|---------------|------------|----------|---------------------------|
| *             | LBL 7      | 25.13. 7 | resta:                                  |               | R ↓        | 15.22    | $z_1 x z_2 =$             |
|               | CHS        | 32       | $z_1 = a_1 + b_1 i$                     |               | x          | 61       | $= e^{\ln z_1 + \ln z_2}$ |
|               | $x \geq y$ | 21       | $z_2 = a_2 + b_2 i$                     |               | R ↓        | 15.22    |                           |
| 5             | CHS        | 32       | $z_1 - z_2 =$                           |               | +          | 51       |                           |
|               | $x \geq y$ | 21       | $=(a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$           |               | R ↑        | 14.22    |                           |
| *             | LBL 4      | 25.13. 4 | suma:                                   |               | P → R      | 14. 4    |                           |
|               | STO + 1    | 23.51. 1 | $z_1 + z_2 =$                           |               | GTO 6      | 22. 6    |                           |
|               | $x \geq y$ | 21       | $=(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$           | *             | LBL B      | 25.13.12 | recuperar memo            |
| 10            | STO + 0    | 23.51. 0 | elevación:                              |               | RCL 2      | 24. 2    |                           |
|               | RCL 0      | 24. 0    | $z_2 = e^{z_2 \ln z_1}$                 |               | RCL 3      | 24. 3    |                           |
|               | RCL 1      | 24. 1    |   | *             | LBL 8      | 25.13. 8 | almacenar z en memoria:   |
|               | GTO A      | 22.11    |   |               | STO 3      | 23. 3    |                           |
| *             | LBL 3      | 25.13. 3 |   |               | $x \geq y$ | 21       | a queda en R2             |
|               | SF 0       | 25.51. 0 |   |               | STO 2      | 23. 2    | b queda en R3             |
| 15            | RCL 0      | 24. 0    |   |               | PAUSE      | 25.74    |                           |
|               | RCL 1      | 24. 1    |   |               | $x \geq y$ | 21       |                           |
|               | GSB 2      | 13. 2    |   |               | RTN        | 25.12    |                           |
|               | STO 1      | 23. 1    |   | *             | LBL 9      | 25.13. 9 | seno de z :               |
|               | R ↓        | 15.22    |   |               | RAD        | 15.12    |                           |
| 20            | STO 0      | 23. 0    |   |               | $e^x$      | 15. 1    | $\text{sen}(z) =$         |
|               | R ↓        | 15.22    |   |               | ENTER      | 31       | $= e^{iz} - e^{-iz}$      |
|               | GSB 1      | 13. 1    |   |               | 1/X        | 25. 2    | 21                        |
| *             | LBL 5      | 25.13. 5 | exponenciación:                         |               | -          | 41       |                           |
|               | RAD        | 15.12    | $e^z = e^a \cdot (\cos b + i \sin b)$   |               | /          | 2        |                           |
| 25            | $x \geq y$ | 21       |   |               | STO 0      | 23. 0    | en todos los c            |
|               | $e^x$      | 15. 1    |   |               | $x \geq y$ | 21       | sos el resulta            |
|               | P → R      | 14. 4    |   |               | STO 1      | 23. 1    | do de la opera            |
|               | $x \geq y$ | 21       |   |               | COS        | 14. 8    | ción queda al             |
|               | GTO A      | 22.11    |   |               | $x$        | 61       | macenado para             |
| 30            | *          | LBL 2    | 25.13. 2                                | logaritmos:   | RCL 0      | 24. 0    | su utilización            |
|               | RAD        | 15.12    | $\ln z = \ln r + i\theta$               |               | 1          | 1        | en operaciones            |
|               | $x \geq y$ | 21       | donde $r = \text{módulo}$               |               | R → P      | 15. 4    | posteriorres              |
|               | R → P      | 15. 4    | $\theta = \text{argum.}$                |               | RCL 1      | 24. 1    |                           |
|               | LN         | 14. 1    |   |               | SIN        | 14. 7    |                           |
| 35            | *          | LBL 6    | 25.13. 6                                |               | $x$        | 61       |                           |
|               | $x \geq y$ | 21       |   |               | R ↑        | 14.22    |                           |
|               | F ? 0      | 25.71. 0 |   | *             | LBL A      | 25.13.11 | ENTER z :                 |
|               | RTN        | 25.12    |   |               | CF 0       | 25.61. 0 | prepara las               |
|               | GTO A      | 22.11    |   |               | STO 1      | 23. 1    | condiciones in            |
| 40            | *          | LBL 0    | 25.13. 0                                | división:     | $x \geq y$ | 21       | ciales, y alma            |
|               | $x \geq y$ | 21       | $z_1 / z_2 = z_1 x_1 / z_2$             |               | STO 0      | 23. 0    | cena                      |
|               | R → P      | 15. 4    | $1 / z_2 = e^{-\ln z_2}$                |               | PAUSE      | 25.74    | a en R0                   |
|               | 1/X        | 25. 2    |   |               | $x \geq y$ | 21       | b en R1                   |
|               | $x \geq y$ | 21       |   |               | RTN        | 25.12    |                           |
| 45            | CHS        | 32       |   |               |            |          |                           |
|               | $x \geq y$ | 21       |   |               |            |          |                           |
|               | GTO 6      | 22. 6    |   |               |            |          |                           |
| *             | LBL 1      | 25.13. 1 | multiplicación:                         |               |            |          |                           |
|               | $x \geq y$ | 21       |   |               |            |          |                           |
| 50            | R → P      | 15. 4    |   |               |            |          |                           |
| *             | LBL 6      | 25.13. 6 | - se utiliza el flag 0                  |               |            |          |                           |
|               | RCL 1      | 24. 1    | - id. registros 0,1,2,3                 |               |            |          |                           |
|               | RCL 0      | 24. 0    | - id. etiquetas A,B,O,1,2,3,4,5,6,7,8,9 |               |            |          |                           |
|               | R → P      | 15. 4    | - id. en total 100 pasos de programa    |               |            |          |                           |
| 55            | $x \geq y$ | 21       | - se recomienda moda FIX 4              |               |            |          |                           |
|               |            |          | - id. moda RAD                          |               |            |          |                           |

## REGISTERS

| REGISTERS |        |         |         |    |    |    |    |    |    |
|-----------|--------|---------|---------|----|----|----|----|----|----|
| 0         | 1      | 2       | 3       | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| p.real    | p.imag | p.realm | p.imagm |    |    |    |    |    |    |
| .6        | .1     | .2      | .3      | .4 | .5 | .4 | .7 | .8 | .1 |

## OPERACIONES VECTORIALES

1.- Descripción .- Con ayuda de este programa es posible realizar las operaciones vectoriales más corrientes , como son: suma y diferencia de vectores, productos escalar y vectorial, ángulo entre dos vectores, y módulo de un vector. Las operaciones están encadenadas, permitiendo un alto grado de complejidad.

Al igual que el programa "OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS ", éste permite simular un stack operativo vectorial, con 2 registros "X" e "Y" , aparte de una memoria vectorial "M" , capaz de almacenar y recuperar en un momento dado un vector.

Los vectores son de la forma  $\bar{V} = x \bar{I} + y \bar{J} + z \bar{K}$  es decir, tridimensionales. Vectores en dos dimensiones pueden ser tratados también, basta introducir  $z = 0$ . Las operaciones de dos variables operan sobre ambos "X" e "Y" y almacenan el resultado en "Y" para posteriores operaciones, amén de presentarlo en "X" para su visualización. Si el resultado es un escalar (un número, no un vector), no es almacenado en "Y". Veanse detalles a continuación:

|     |   |
|-----|---|
| "X" | está formado por X,Y,Z del stack operativo normal |
| "Y" | id. id. por R0,R1,R2                              |
| "M" | id. id. por R5,R6,R7                              |

- SUMA :  $\bar{V}_1 + \bar{V}_2$  - realiza la suma del vector en "Y" con el vector en "X", y deja el resultado en "X" y en "Y"
- RESTA:  $\bar{V}_1 - \bar{V}_2$  - al vector en "Y" le resta el vector en "X" ,y el resultado queda en "X" y en "Y"
- P. VECTORIAL:  $\bar{V}_1 \times \bar{V}_2$  - halla el producto vectorial del vector en "Y" por el vector en "X". (en este orden) , y deja el resultado en "X" y en "Y"
- P. ESCALAR :  $\bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2$  - Realiza el producto escalar del vector en "Y" por el vector en "X", y el resultado queda en X (del stack normal)
- ANGULO :  $\varphi(\bar{V}_1, \bar{V}_2)$  - Halla el ángulo entre el vector en "Y" y el vector en "X" y deja el resultado en X (del stack normal)
- MODULO: /V/ - halla el módulo del vector en "X" y deja el resultado en X (del stack normal)
- ENTER V : - Almacena el vector en "X" en el registro "Y" y deja "X" intacto
- STO V : - Almacena el vector en "X" en "M" y deja "X" intacto
- RCL V : - Recupera el vector almacenado en "M" , y lo deja en "X" , dejando "M" intacto

Notas .- -Todos los vectores se introducen como

x [ENTER] y [ENTER] z (y la tecla apropiada)

-todos los resultados vectoriales se obtienen como: (x)  $\rightarrow$  (y)  $\rightarrow$  z  
(z queda en X, y en Y , x en Z )

-las funciones han sido asignadas a etiquetas de acuerdo con reglas mnemotécnicas: ver el programa "OPERACIONES CON COMPLEJOS" .

## 2.- Utilización .-

(1) Introducir el programa

(2) para sumar vectores:  $\bar{V}_1 + \bar{V}_2$

-introducir  $\bar{V}_1$  :  $x_1 \text{ ENTER } y_1 \text{ ENTER } z_1 \text{ [A] } \rightarrow (x_1) \rightarrow (y_1) \rightarrow z_1$   
-introducir  $\bar{V}_2$  :  $x_2 \text{ ENTER } y_2 \text{ ENTER } z_2 \text{ [GSB4] } \rightarrow (X) \rightarrow (Y) \rightarrow Z$

(3) para restar vectores:  $\bar{V}_1 - \bar{V}_2$

-introducir  $\bar{V}_1$  :  $x_1 \text{ ENTER } y_1 \text{ ENTER } z_1 \text{ [A] } \rightarrow (x_1) \rightarrow (y_1) \rightarrow z_1$   
-introducir  $\bar{V}_2$  :  $x_2 \text{ ENTER } y_2 \text{ ENTER } z_2 \text{ [GSB7] } \rightarrow (X) \rightarrow (Y) \rightarrow Z$

(4) para producto vectorial:  $\bar{V}_1 \times \bar{V}_2$

-introducir  $\bar{V}_1$  :  $x_1 \text{ ENTER } y_1 \text{ ENTER } z_1 \text{ [A] } \rightarrow (x_1) \rightarrow (y_1) \rightarrow z_1$   
-introducir  $\bar{V}_2$  :  $x_2 \text{ ENTER } y_2 \text{ ENTER } z_2 \text{ [GSB1] } \rightarrow (X) \rightarrow (Y) \rightarrow Z$

(5) para producto escalar :  $\bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2$

-introducir  $\bar{V}_1$  :  $x_1 \text{ ENTER } y_1 \text{ ENTER } z_1 \text{ [A] } \rightarrow (x_1) \rightarrow (y_1) \rightarrow z_1$   
-introducir  $\bar{V}_2$  :  $x_2 \text{ ENTER } y_2 \text{ ENTER } z_2 \text{ [GSB0] } \rightarrow n$

(6) para hallar el ángulo entre  $\bar{V}_1$  y  $\bar{V}_2$  :  $\varphi(\bar{V}_1, \bar{V}_2)$

-introducir  $\bar{V}_1$  :  $x_1 \text{ ENTER } y_1 \text{ ENTER } z_1 \text{ [A] } \rightarrow (x_1) \rightarrow (y_1) \rightarrow z_1$   
-introducir  $\bar{V}_2$  :  $x_2 \text{ ENTER } y_2 \text{ ENTER } z_2 \text{ [GSB9] } \rightarrow \varphi$

(7) para hallar el módulo de un vector:  $/V/$

-introducir el vector:  $x \text{ ENTER } y \text{ ENTER } z \text{ [GSB 5] } \rightarrow /V/$

(8) para almacenar un vector en "M" : STO V

-introducir el vector:  $x \text{ ENTER } y \text{ ENTER } z \text{ [GSB 6] } \rightarrow (x) \rightarrow (y) \rightarrow z$

(9) para recuperar un vector almacenado en "M" : RCL V

-pulsar:  $\text{[B]} \rightarrow (x) \rightarrow (y) \rightarrow z$

(10) para duplicar en "Y" el vector en "X" : ENTER V

-introducir el vector:  $x \text{ ENTER } y \text{ ENTER } z \text{ [A] } \rightarrow (x) \rightarrow (y) \rightarrow z$

Estas son instrucciones para realizar operaciones separadas. Si las operaciones van en cadena, no es preciso reintroducir constantemente datos, ya que los resultados (si son vectores) quedan automáticamente almacenados en "Y", evitando su reintroducción. Igualmente, las operaciones de una sola variable (módulo, STO, RCL), operan sobre el vector en "A". Si éste ya está en "X" (porque es un resultado, o ha sido llevado allí mediante un RCL), no es necesario reintroducirlo, por supuesto. Los ejemplos aclararán esto.

LBL A = ENTER V ; LBL B = RCL V ; LBL 8 = STO V ; LBL 5 = /V/

LBL 4 =  $\bar{V}_1 \bar{V}_2$  ; LBL 7 =  $\bar{V}_1 - \bar{V}_2$ ; LBL 1 =  $\bar{V}_1 \times \bar{V}_2$  ; LBL 0 =  $\bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2$

LBL 9 =  $\varphi(\bar{V}_1, \bar{V}_2)$

3.- Ejemplos :-

(1) Dados los vectores  $\bar{A} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}$ ,  $\bar{B} = -2\bar{i} + \bar{j} + 8\bar{k}$ , hallar:  
 a) su suma ; b) su diferencia ; c) su producto vectorial ; d)  
 su producto escalar ; e) módulo de cada uno ; f) ángulo que  
 forman entre sí .

**FIX 0** 3 **ENTER** 2 **ENTER** -4 **|A**  $\rightarrow$  (3)  $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow$  -4  
 -2 **ENTER** 1 **ENTER** 8 **GSB4**  $\rightarrow$  (1)  $\rightarrow$  (3)  $\rightarrow$  4

es decir,  $\bar{A} + \bar{B} = \bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$

3 **ENTER** 2 **ENTER** -4 **|A**  $\rightarrow$  (3)  $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow$  -4  
 -2 **ENTER** 1 **ENTER** 8 **GSB7**  $\rightarrow$  (5)  $\rightarrow$  (1)  $\rightarrow$  -12

tenemos,  $\bar{A} - \bar{B} = 5\bar{i} + \bar{j} - 12\bar{k}$

3 **ENTER** 2 **ENTER** -4 **|A**  $\rightarrow$  (3)  $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow$  -4  
 -2 **ENTER** 1 **ENTER** 8 **GSB1**  $\rightarrow$  (20)  $\rightarrow$  (-16)  $\rightarrow$  7

resulta,  $\bar{A} \times \bar{B} = 20\bar{i} - 16\bar{j} + 7\bar{k}$

3 **ENTER** 2 **ENTER** -4 **|A**  $\rightarrow$  (3)  $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow$  -4  
 -2 **ENTER** 1 **ENTER** 8 **GSB0**  $\rightarrow$  -36

así que  $\bar{A} \cdot \bar{B} = -36$

**FIX 4** 3 **ENTER** 2 **ENTER** -4 **GSB5**  $\rightarrow$  5.3852 (módulo de  $\bar{A}$ )  
 -2 **ENTER** 1 **ENTER** 8 **GSB5**  $\rightarrow$  8.3066 (id. de  $\bar{B}$ )

3 **ENTER** 2 **ENTER** -4 **|A**  $\rightarrow$  (3)  $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow$  -4  
 -2 **ENTER** 1 **ENTER** 8 **GSB9**  $\rightarrow$  143.5893

el ángulo entre  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$  es de 143.5893 grados

(2) Hallar el valor de :

$$K = (((2\bar{i} + 3\bar{j} - 5\bar{k}) + (-3\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k})) \times ((3\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}) \times (2\bar{i} + 3\bar{j} - (3\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k})))) \cdot (\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k})$$

**FIX 0** - introducir datos: 3 **ENTER** 1 **ENTER** -2 **|A**  $\rightarrow$  (3)  $\rightarrow$  (1)  $\rightarrow$  -2  
 2 **ENTER** 3 **ENTER** 0 **GSB1**  $\rightarrow$  (6)  $\rightarrow$  (-4)  $\rightarrow$  7  
 3 **ENTER** 2 **ENTER** 1 **GSB7**  $\rightarrow$  (3)  $\rightarrow$  (-6)  $\rightarrow$  6  
 - almacenar resultado parcial:  
 - introducir datos: 2 **ENTER** 3 **ENTER** -5 **|A**  $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow$  (3)  $\rightarrow$  -5  
 -3 **ENTER** 1 **ENTER** 4 **GSB4**  $\rightarrow$  (-1)  $\rightarrow$  (4)  $\rightarrow$  -1  
 - recuperar resultado parcial:  
 - producto vectorial:  
 - introducir datos: 1 **ENTER** 3 **ENTER** 6 **GSB1**  $\rightarrow$  (18)  $\rightarrow$  (3)  $\rightarrow$  -6  
 1 **ENTER** 3 **ENTER** 6 **GSB0**  $\rightarrow$  -9

es decir,  $K = -9$

(3) Demostrar que el producto vectorial de  $\bar{A} \times \bar{B}$  es ortogonal tanto a  $\bar{A}$  como a  $\bar{B}$ , en el caso  $\bar{A} = 1\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$ ,  $\bar{B} = 4\bar{i} + 5\bar{j} + 6\bar{k}$

**FIX 0** - introducir  $\bar{A}$ : 1 **ENTER** 2 **ENTER** 3 **|A**  $\rightarrow$  (1)  $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow$  3  
 - introducir  $\bar{B}$ : 4 **ENTER** 5 **ENTER** 6 **GSB8**  $\rightarrow$  (4)  $\rightarrow$  (5)  $\rightarrow$  6  
 - p.vectorial : **GSB1**  $\rightarrow$  (-3)  $\rightarrow$  (6)  $\rightarrow$  -3  
 - recuperar  $\bar{B}$  : **|B**  $\rightarrow$  (4)  $\rightarrow$  (5)  $\rightarrow$  6  
 - p.escalar : **GSB0**  $\rightarrow$  0  
 - reintroducir  $\bar{A}$ : 1 **ENTER** 2 **ENTER** 3 **GSB0**  $\rightarrow$  0

como los dos p. escalares son cero, el p.vectorial es  
 ortogonal a ambos vectores.

# HP 34 C

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS  | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY      | KEY CODE | COMMENTS                            |
|---------------|-----------|----------|---|---------------|----------------|----------|-------------------------------------|
| *             | LBL 1     | 25.13. 1 |   |               | GTO A          | 22.11    |                                     |
|               | STO I     | 23.14.23 |   | *             | LBL B          | 25.13.12 |                                     |
|               | RCL 1     | 24. 1    | realiza el producto vectorial                         |               | RCL 5          | 24. 5    |                                     |
| 5             | x         | 61       |   |               | RCL 6          | 24. 6    |                                     |
|               | x=y       | 21       | $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$                          | 60            | RCL 7          | 24. 7    |                                     |
|               | STO 3     | 23. 3    | donde :   | *             | LBL 8          | 25.13. 8 |                                     |
|               | RCL 2     | 24. 2    |   |               | STO 7          | 23. 7    |                                     |
| 10            | x         | 61       |   |               | R↑             | 15.22    |                                     |
|               | -         | 41       |   |               | STO 6          | 23. 6    |                                     |
| 15            | x=y       | 21       | $\vec{V}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$ | 65            | R↑             | 15.22    |                                     |
|               | STO 4     | 23. 4    |   |               | STO 5          | 23. 5    |                                     |
|               | RCL 2     | 24. 2    | $\vec{V}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$ |               | GTO 6          | 22. 6    |                                     |
| 20            | x         | 61       |   | *             | LBL 9          | 25.13. 9 |                                     |
|               | RCL 0     | 24. 0    | las componentes                                       |               | STO I          | 23.14.23 |                                     |
| 25            | RCL I     | 24.14.23 | del mismo son:  | 70            | R↑             | 15.22    |                                     |
|               | x         | 61       | X = $y_1 z_2 - y_2 z_1$                               |               | STO 3          | 23. 3    |                                     |
|               | -         | 41       | Y = $x_2 z_1 - x_1 z_2$                               |               | R↑             | 15.22    |                                     |
| 30            | RCL 3     | 24. 3    | Z = $x_1 y_2 - x_2 y_1$                               |               | STO 4          | 23. 4    |                                     |
|               | STO X 0   | 23.61. 0 |   | 75            | R↑             | 14.22    |                                     |
| 35            | R↑        | 15.22    | el nuevo vector                                       |               | GSB 5          | 13. 5    |                                     |
|               | RCL 4     | 24. 4    | (X, Y, Z)   |               | RCL 0          | 24. 0    |                                     |
|               | RCL 1     | 24. 1    | reemplaza al  |               | RCL 1          | 24. 1    |                                     |
| 40            | x         | 61       |   |               | RCL 2          | 24. 2    |                                     |
|               | STO - 0   | 23.41. 0 |   | 80            | GSB 5          | 13. 5    |                                     |
| 45            | R↑        | 15.22    |   |               | x              | 61       |                                     |
|               | RCL 0     | 24. 0    |   |               | RCL 4          | 24. 4    |                                     |
| *             | LBL A     | 25.13.11 |   |               | RCL 3          | 24. 3    |                                     |
|               | STO 2     | 23. 2    |   | 85            | RCL I          | 24.14.23 |                                     |
| 50            | R↑        | 15.22    |   |               | R↑             | 14.22    |                                     |
|               | STO 1     | 23. 1    |   |               | STO I          | 23.14.23 |                                     |
|               | R↓        | 15.22    |   | 90            | R↓             | 15.22    |                                     |
|               | STO 0     | 23. 0    |   |               | GSB 0          | 13. 0    |                                     |
| *             | LBL 6     | 25.13. 6 | LBL A .- almacena el vector                           |               | RCL 1          | 24.14.23 |                                     |
|               | PAUSE     | 25.74    | V <sub>1</sub> , para su uso en sucesivos cálculos.   | 95            | /              | 71       |                                     |
| 55            | R↑        | 14.22    | Es una especie de ENTER.                              |               | COS-1          | 15. 8    |                                     |
|               | PAUSE     | 25.74    |   |               | RTN            | 25.12    |                                     |
|               | R↑        | 14.22    |   | 100           | *              | LBL 5    | 25.13. 5                            |
|               | RTN       | 25.12    |   |               | x <sup>2</sup> | 15. 3    | calcula el módulo del vector en X . |
| 60            | *         | LBL 7    | 25.13. 7  | 95            | x=y            | 21       |                                     |
|               | CHS       | 32       | realiza $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$                       |               | x <sup>2</sup> | 15. 3    |                                     |
|               | R↑        | 15.22    |   |               | +              | 51       | el resultado queda en pantalla.     |
|               | CHS       | 32       | el resultado sustituye al antiguo V <sub>1</sub>      | 105           | x=y            | 21       |                                     |
| 65            | R↑        | 15.22    |   |               | x <sup>2</sup> | 15. 3    |                                     |
|               | CHS       | 32       |   |               | +              | 51       |                                     |
| 70            | R↑        | 14.22    |   | 110           | x <sup>2</sup> | 15. 3    |                                     |
|               | R↑        | 14.22    |   |               | +              | 51       |                                     |
| 75            | *         | LBL 4    | 25.13. 4  | 115           | RTN            | 25.12    |                                     |
|               | STO+ 2    | 23.51. 2 | realiza $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$                       | 120           | *              | LBL 0    | 25.13. 0                            |
|               | R↑        | 15.22    |   |               | RCL 2          | 24. 2    | calcula el pro-                     |
| 80            | STO+ 1    | 23.51. 1 |   |               |                |          | grama                               |
|               | R↑        | 15.22    | -no se utiliza ningun flag                            |               |                |          |                                     |
|               | STO+ 0    | 23.51. 0 | -se utilizan las etiquetas A,B,O,1,4,5,6,7,8,9        |               |                |          |                                     |
|               | RCL 0     | 24. 0    | - id. registros I,O,1,2,3,4,5,6,7                     |               |                |          |                                     |
|               | RCL 1     | 24. 1    | - id. en total 114 pasos de programa                  |               |                |          |                                     |
| 85            | RCL 2     | 24. 2    | -se recomiendan modas FIX 4 y DEG                     |               |                |          |                                     |

## REGISTERS

| 0 | x 1 | y 1 | z 1 | 3 | y 2 | x 2 | 5 | x  | 6  | y  | 7  | z | 8 | 9 |
|---|-----|-----|-----|---|-----|-----|---|----|----|----|----|---|---|---|
| 0 | .1  | .2  | .3  | 3 | .4  | .5  | 5 | .6 | .7 | .8 | .9 |   |   |   |

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS                              | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS |
|---------------|-----------|----------|---------------------------------------|---------------|-----------|----------|----------|
| 105           | x         | 61       |                                       | 160           |           |          |          |
|               | x ≠ y     | 21       | ducto escalar<br>V1.V2                |               |           |          |          |
| 4             | RCL 1     | 24. 1    |                                       |               |           |          |          |
|               | x         | 61       |                                       |               |           |          |          |
|               | +         | 51       | el resultado<br>queda en<br>pantalla. |               |           |          |          |
| 110           | x ≠ y     | 21       |                                       | 6             | 165       |          |          |
|               | RCL 0     | 24. 0    |                                       |               |           |          |          |
|               | x         | 61       |                                       |               |           |          |          |
|               | +         | 51       |                                       |               |           |          |          |
|               | RTN       | 25.12    |                                       |               |           |          |          |
| 115           |           |          |                                       | 5             |           |          |          |
| 120           |           |          |                                       |               |           |          |          |
| 125           |           |          |                                       | 4             |           |          |          |
| 130           |           |          |                                       |               |           |          |          |
| 135           |           |          |                                       | 3             |           |          |          |
| 140           |           |          |                                       |               |           |          |          |
| 145           |           |          |                                       | 2             |           |          |          |
| 150           |           |          |                                       |               |           |          |          |
| 155           |           |          |                                       | 1             | 195       |          |          |
| 7             |           |          |                                       |               | 200       |          |          |
|               |           |          |                                       |               |           |          |          |
|               |           |          |                                       | 0             | 205       |          |          |
|               |           |          |                                       |               |           |          |          |
|               |           |          |                                       | 1             | 210       |          |          |

#### REGISTERS

| 0 | x1 | 1 | y1 | 2 | z1 | 3 | y2 | 4 | x2 | 5 | X | 6 | Y | 7 | Z | 8 | 9 |
|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 |    | 1 |    | 2 |    | 3 |    | 4 |    | 5 |   | 6 |   | 7 |   | 8 |   |
| 1 |    | 2 |    | 3 |    | 4 |    | 5 |    | 6 |   | 7 |   | 8 |   | 9 |   |
| 2 |    | 3 |    | 4 |    | 5 |    | 6 |    | 7 |   | 8 |   | 9 |   | 0 |   |
| 3 |    | 4 |    | 5 |    | 6 |    | 7 |    | 8 |   | 9 |   | 0 |   | 1 |   |
| 4 |    | 5 |    | 6 |    | 7 |    | 8 |    | 9 |   | 0 |   | 1 |   | 2 |   |
| 5 |    | 6 |    | 7 |    | 8 |    | 9 |    | 0 |   | 1 |   | 2 |   | 3 |   |
| 6 |    | 7 |    | 8 |    | 9 |    | 0 |    | 1 |   | 2 |   | 3 |   | 4 |   |
| 7 |    | 8 |    | 9 |    | 0 |    | 1 |    | 2 |   | 3 |   | 4 |   | 5 |   |
| 8 |    | 9 |    | 0 |    | 1 |    | 2 |    | 3 |   | 4 |   | 5 |   | 6 |   |
| 9 |    | 0 |    | 1 |    | 2 |    | 3 |    | 4 |   | 5 |   | 6 |   | 7 |   |

## DETERMINANTE , ECUACION CARACTERISTICA

## AUTOVALORES , DE UNA MATRIZ 3 x 3

1.- Descripción .- Dada una matriz 3x3 , de la forma genérica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

el presente programa permite hallar su determinante, su ecuación característica, y sus 3 autovalores (que pueden ser los 3 reales ó 1 real y 2 imaginarios conjugados).

Se utilizan las siguientes fórmulas:

$$\text{determinante de } A = \det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

ecuación característica de A : es la ecuación  $|A - \lambda I| = 0$  , es decir

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 ; \text{ el programa halla los coeficientes } A_3, A_2, A_1, A_0 \text{ de la expansión de este determinante, que es una ecuación cónica de la forma:}$$

$$A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0 \quad (x = \lambda)$$

autovalores: son las raíces de la ecuación característica,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

el programa emplea la función **SOLVE** para hallar el autovalor real (siempre hay uno, por lo menos), buscando su valor en el intervalo  $(10^6, -10^6)$  lo cual garantiza prácticamente el éxito de la búsqueda. Una vez hallado este autovalor,  $\lambda_1$ , la ecuación se reduce a otra de segundo grado, que se resuelve con la fórmula:

$$ax^2 + bx + c = 0 ; \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

lo cual da los restantes autovalores, reales o imaginarios.

2.- Utilización .- Introducir el programa

- (1) introducir los  $a_{ij}$  :  $a_{11}$  **ENTER**  $a_{12}$  **ENTER**  $a_{13}$  **A**  $\rightarrow$  ignórese
- $a_{21}$  **ENTER**  $a_{22}$  **ENTER**  $a_{23}$  **R/S**  $\rightarrow$  ignórese
- $a_{31}$  **ENTER**  $a_{32}$  **ENTER**  $a_{33}$  **R/S**  $\rightarrow$  determinante
- R/S**  $\rightarrow A_3$  **R/S**  $\rightarrow A_2$  **R/S**  $\rightarrow A_1$  **R/S**  $\rightarrow A_0$
- R/S**  $\rightarrow \lambda_1$  **R/S**  $\rightarrow \lambda_2$  **R/S**  $\rightarrow \lambda_3$
- δ** **R/S**  $\rightarrow (1)$   $\rightarrow$  parte real **R/S**  $\rightarrow$  parte imaginaria
- (2) para otro caso , ir a (1)

- 3.- Notas .-
- los autovalores imaginarios son  $\lambda_{2,3} = p.\text{real} \pm i \text{ p.imag.}$
  - si solo se desean el determinante, o los  $A_i$ , ignórese el resto del proceso, una vez obtenidos .

4.- Ejemplos .-

$$(1) \text{ Dada la matriz } A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

hallar: a) su determinante ; b) su ecuación característica  
c) sus autovalores

**FIX 9**

--introducimos la matriz: 3 **ENTER** -2 **ENTER** 1 **ENTER** A → 3.000000000  
4 **ENTER** -6 **ENTER** 3 **R/S** → -8.000000000  
1 **ENTER** 2 **ENTER** 7 **R/S** → -60.000000000 (d)

así que tenemos : det(A) = -80

--ahora, la ec. característica: R/S → 1.000000000 (A<sub>3</sub>)  
R/S → -4.000000000 (A<sub>2</sub>)  
R/S → -38.000000000 (A<sub>1</sub>)  
R/S → 80.000000000 (A<sub>0</sub>)

por consiguiente, la ecuación característica es

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 38\lambda + 80 = 0$$

--finalmente, los autovalores : R/S → 7.611566639 ( $\lambda_1$ )  
R/S → -5.516736465 ( $\lambda_2$ )  
R/S → 1.905169828 ( $\lambda_3$ )

y hemos obtenido los autovalores:

$$\begin{array}{l} \lambda = 7.611566639 \\ \lambda_1 = -5.516736465 \\ \lambda_2 = 1.905169828 \end{array}$$

(2) Como ejemplo de lo plomazo que pueden llegar a ser estos problemas (que por otra parte, los profesores de Algebra de 1<sup>º</sup> pa recen sentirse muy inclinados a ponerlos por doquier) ,resolver el siguiente: (a mano, claro)

$$\text{Dada la matriz } A = \begin{bmatrix} 3.4328 & -2.1862 & 9.1327 \\ -2.0063 & 4.3665 & 6.1206 \\ 1.9843 & 2.1427 & -3.1416 \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{FIX 4}}$$

Hallar su determinante, su ec. característica, y sus autovalores

-introducir a<sub>ij</sub> : 3.4328 **ENTER** -2.1862 **ENTER** 9.1327 **A**  
-2.0063 **ENTER** 4.3665 **ENTER** 6.1206 **R/S**  
1.9843 **ENTER** 2.1427 **ENTER** -3.1416 **R/S** →

→ -223.2727 es el valor del determinante

R/S → 1.0000 (A<sub>3</sub>) R/S → -4.6577 (A<sub>2</sub>) R/S → -45.1358 (A<sub>1</sub>)

R/E → 223.2727 (A<sub>0</sub>) , así que la ec. característica es:

$$\lambda^3 - 4.6577\lambda^2 - 45.1358\lambda + 223.2727 = 0$$

los autovalores, R/S → -6.8025 ( $\lambda_1$ )  
R/S → 5.6212 ( $\lambda_2$ )  
R/S → 5.8390 ( $\lambda_3$ )

han resultado ser  $\lambda_1 = -6.8025$

$\lambda_2 = 5.6212$

$\lambda_3 = 5.8390$

HP 34 C

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS   | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY      | KEY CODE | COMMENTS   |
|---------------|-----------|----------|--|---------------|----------------|----------|--|
| *             | LBL A     | 25.13.11 |  |               | 1              | 1        | muestra A <sub>3</sub>   |
|               | STO 3     | 23. 3    |  |               | R/S            | 74       |  |
|               | STO 4     | 23. 4    | almacena a <sub>11</sub> ,<br>a <sub>12</sub> , a <sub>13</sub>  |               | RCL 1          | 24. 1    | muestra A <sub>2</sub>   |
|               | STO 7     | 23. 7    |  |               | CHS            | 32       |  |
| 5             | R↓        | 15.22    |  |               | R/S            | 74       |  |
|               | STO 2     | 23. 2    |  |               | RCL 7          | 24. 7    | muestra A <sub>1</sub>   |
|               | STO 6     | 23. 6    |  |               | CHS            | 32       |  |
|               | R↓        | 15.22    |  |               | R/S            | 74       |  |
| 10            | STO 1     | 23. 1    |  |               | RCL 4          | 24. 4    | muestra A <sub>0</sub>   |
|               | STO 5     | 23. 5    |  |               | CHS            | 32       |  |
|               | R/S       | 74       |  |               | R/S            | 74       |  |
|               | STOx 6    | 23.61. 6 | almacena a <sub>21</sub> ,<br>a <sub>22</sub> , a <sub>23</sub>  |               | EEX            | 33       |  |
|               | R↓        | 15.22    |  |               | ENTER          | 31       |  |
| 15            | STOx 5    | 23.61. 5 |  |               | CHS            | 32       |  |
|               | STO+1     | 23.51. 1 | y va trabajan-<br>do con ellos<br>y los anterio-<br>res          |               | SOLVE O        | 14.73. 0 | calcula el 1 <sup>er</sup><br>autovalor,<br>que es una rai-<br>de                |
|               | R↓        | 15.22    |  |               | R/S            | 74       |  |
| 20            | STOx 4    | 23.61. 4 |  |               | STO 0          | 23. 0    | A <sub>3</sub> x <sup>3</sup> +A <sub>2</sub> x <sup>2</sup> +A <sub>1</sub> x+1 |
|               | STOx 2    | 23.61. 2 |  |               | RCL 1          | 24. 1    | la busca en el<br>intervalo  |
| 25            | R↓        | 15.22    |  |               | -              | 41       | (-10 <sup>6</sup> , 10 <sup>6</sup> )  |
|               | x= y      | 21       |  |               | STO 2          | 23. 2    |  |
|               | x         | 61       |  |               | x <sup>2</sup> | 15. 3    |  |
|               | STO- 4    | 23.41. 4 |  |               | RCL 2          | 24. 2    |  |
| 30            | RCL 3     | 24. 3    |  |               | RCL 0          | 24. 0    |  |
|               | STO- 6    | 23.41. 6 | almacena a <sub>31</sub> ,<br>a <sub>32</sub> , a <sub>33</sub>  |               | x              | 61       |  |
|               | RCL 2     | 24. 2    |  |               | RCL 7          | 24. 7    |  |
| 35            | STO- 5    | 23.41. 5 |  |               | -              | 41       |  |
|               | R/S       | 74       |  |               | 4              | 4        |  |
|               | STO 3     | 23. 3    |  |               | x              | 61       |  |
| 40            | R↓        | 15.22    |  |               | -              | 41       |  |
|               | STOx 4    | 23.61. 4 | y sigue tra-<br>bajando con es-<br>tos y todos los<br>anteriores |               | x < 0          | 15.41    |  |
|               | LAST X    | 25. 0    |  |               | GTO 1          | 22. 1    |  |
|               | x         | 61       |  |               | √x             | 14. 3    |  |
| 45            | x= y      | 21       |  |               | STO 3          | 23. 3    |  |
|               | STOx 6    | 23.61. 6 | calcula el de-<br>terminante y lo<br>deja en R <sub>4</sub>      |               | RCL 2          | 24. 2    |  |
|               | RCL 7     | 24. 7    |  |               | +              | 51       |  |
| 50            | x         | 61       |  |               | 2              | 2        |  |
|               | +         | 51       |  |               | /              | 71       |  |
|               | RCL 5     | 24. 5    |  |               | CHS            | 32       |  |
| 55            | -         | 41       |  |               | R/S            | 74       |  |
|               | STO 7     | 23. 7    | los coeficientes<br>de la ecuación                               |               | RCL 3          | 24. 3    |  |
|               | LAST X    | 25. 0    | característica   |               | RCL 2          | 24. 2    |  |
|               | RCL 1     | 24. 1    | quedan en R <sub>1</sub> ,                                       |               | -              | 41       |  |
| 60            | RCL 3     | 24. 3    | R <sub>7</sub> , y R <sub>4</sub> ,                              |               | 2              | 2        |  |
|               | STO+1     | 23.51. 1 | todos ellos  |               | /              | 71       |  |
|               | x         | 61       | cambiados de   |               | RTN            | 25.12    |  |
| 65            | STO- 7    | 23.41. 7 | signo  |               | * LBL 1        | 25.13. 1 |  |
|               | x= y      | 21       |  |               | 1              | 1        |  |
|               | LAST X    | 25. 0    |  |               | PAUSE          | 25.74    |  |
| 70            | x         | 61       |  |               |                |          |  |
|               | STO+4     | 23.51. 4 | -no se utiliza ningun flag                                       |               |                |          |  |
|               | RCL 6     | 24. 6    | -se utilizan las etiquetas A,0,1                                 |               |                |          |  |
|               | STO+4     | 23.51. 4 | registros 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9                                    |               |                |          |  |
| 75            | RCL 4     | 24. 4    | en total 126 pasos de programa                                   |               |                |          |  |
|               | R/S       | 74       | moda FIX 4   |               |                |          |  |
|               |           |          | cualquier moda angular   |               |                |          |  |

## REGISTERS

| <sup>0</sup> usado | <sup>1</sup> usado | <sup>2</sup> usado | <sup>3</sup> usado | <sup>4</sup> usado | <sup>5</sup> usado | <sup>6</sup> usado | <sup>7</sup> usado | <sup>8</sup> usado | <sup>9</sup> usado |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| .0                 | .1                 | .2                 | .3                 | .4                 | .5                 | .6                 | .7                 | .8                 | .9                 |

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY    | KEY CODE | COMMENTS | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS |
|---------------|--------------|----------|----------|---------------|-----------|----------|----------|
| 105           | R↓           | 15.22    |          | 160           |           |          |          |
|               | ABS          | 25.34    |          |               |           |          |          |
|               | - $\sqrt{x}$ | 14. 3    |          |               |           |          |          |
|               | 2            | 2        |          |               |           |          |          |
|               | /            | 71       |          |               |           |          |          |
| 110           | RCL 2        | 24. 2    |          | 165           |           |          |          |
|               | 2            | 2        |          |               |           |          |          |
|               | /            | 71       |          |               |           |          |          |
|               | CHS          | 32       |          |               |           |          |          |
|               | R/S          | 74       |          |               |           |          |          |
| 115           | x $\neq$ y   | 21       |          |               |           |          |          |
|               | RTN          | 25.12    |          |               |           |          |          |
| *             | LBL 0        | 25.13. 0 |          |               |           |          |          |
|               | RCL 1        | 24. 1    |          |               |           |          |          |
|               | -            | 41       |          |               |           |          |          |
| 120           | x            | 61       |          |               |           |          |          |
|               | RCL 7        | 24. 7    |          |               |           |          |          |
|               | -            | 41       |          |               |           |          |          |
|               | x            | 61       |          |               |           |          |          |
|               | RCL 4        | 24. 4    |          |               |           |          |          |
| 125           | -            | 41       |          |               |           |          |          |
|               | RTN          | 25.12    |          |               |           |          |          |
|               |              |          |          |               |           |          |          |
| 130           |              |          |          |               |           |          |          |
|               |              |          |          |               |           |          |          |
| 135           |              |          |          |               |           |          |          |
|               |              |          |          |               |           |          |          |
| 140           |              |          |          |               |           |          |          |
|               |              |          |          |               |           |          |          |
| 145           |              |          |          |               |           |          |          |
|               |              |          |          |               |           |          |          |
| 150           |              |          |          |               |           |          |          |
|               |              |          |          |               |           |          |          |
| 155           |              |          |          |               |           |          |          |
|               |              |          |          |               |           |          |          |
| 7             |              |          |          |               |           |          |          |
|               |              |          |          |               |           |          |          |

subrutina auxiliar empleada por la función SOLVE para hallar el primer autovalor

#### REGISTERS

|                    |                    |                    |                    |                    |                    |                    |                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| <sup>0</sup> usado | <sup>1</sup> usado | <sup>2</sup> usado | <sup>3</sup> usado | <sup>4</sup> usado | <sup>5</sup> usado | <sup>6</sup> usado | <sup>7</sup> usado | <sup>8</sup> usado | <sup>9</sup> usado |
| .0                 | .1                 | .2                 | .3                 | .4                 |                    |                    |                    |                    |                    |

## INTERPOLACION

1.- Descripción .- Dada una serie de puntos  $(x_i, y_i)$  cuyas abcisas están igualmente espaciadas, es decir, sean de la forma  $x_i = x_0 + k \cdot h$ , este programa calcula un polinomio que pasa por todos los puntos  $(x_i, y_i)$ , para, a partir de él, poder interpolar y hallar nuevos valores de  $y$  para valores de  $x$  distintos de los datos.

Utiliza el método de las diferencias finitas y la fórmula de Newton.

-primero, realiza un cambio de origen y escala :  $x' = (x - x_0)/h$  de forma que  $x'_k = k$

-despues, calcula una tabla de diferencias finitas:

| 0              | 1              | 2              | 3            | 4     | ...   |
|----------------|----------------|----------------|--------------|-------|---|
| $y_0$          | $y_1$          | $y_2$          | $y_3$        | $y_4$ | ...   |
| $\Delta y_0$   | $\Delta y_1$   | $\Delta y_2$   | $\Delta y_3$ | ...   |   |
| $\Delta^2 y_0$ | $\Delta^2 y_1$ | $\Delta^2 y_2$ | ...          |       |   |
| $\Delta^3 y_0$ | $\Delta^3 y_1$ | ...            |              |       | en general $\Delta^m y_k = \Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k$ |

-Una vez calculadas las diferencias, es posible interpolar, según la fórmula de Newton

$$\hat{y} = y_0 + x' \Delta y_0 + \frac{x'(x'-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{x'(x'-1)(x'-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots$$

donde  $x'$  se obtiene a partir de  $x$  con el cambio ya mencionado.

-el grado del polinomio es  $N-1$  si el nº de datos es  $N$ . En el caso de 2 datos se obtiene una recta: interpolación lineal.  $N$  debe ser :  $N \leq 16$

### 2.- Utilización .- Introducir el programa

- (1) Introducir:  $x_0$  (abcisa del 1<sup>er</sup> punto-dato)  
 $h$  (espaciado entre las abcisas de los puntos)  
 $N$  (nº de puntos)

$x_0$  [ENTER]  $h$  [ENTER]  $N$  [A]  $\rightarrow x_0$

- (2) Introducir los valores  $y_k$  ( $0 \leq k \leq N$ ) :  $y_k$  [R/S]  $\rightarrow x_{k+1}$

... ... .....

$y_N$  [R/S]  $\rightarrow 0.00$

- (3) Evaluar  $\hat{y}$  para un  $x$  dado:  $x$  [B]  $\rightarrow \hat{y}$

- (4) repetir el paso (3) cuantas veces se desee

- (5) para otro caso, ir a (1)

3.- Notas .- -un error cometido al entrar  $y_k$  puede ser corregido en todos los casos excepto si  $k = N$  (último dato). Simplemente almacenese el valor correcto  $y_k$  en el registro  $R_k$  durante una cualquiera de las paradas de introducción de datos.

-la subrutina LBL B puede ser utilizada conjuntamente con las funciones [SOLVE] e [INTEGRATE] para hallar los ceros de la función interpolada, o su integral.

-el número de datos no debe exceder 16

4.- Ejemplos .-

(1) Se tiene la siguiente serie de puntos : (N = 9 datos)

|   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 | 3.5 | 4.0 | 4.5 | 5.0 |
| y | 1   | 2   | 4   | 6   | 7   | 5   | 3   | 0   | -3  |

Se pide estimar el valor de  $y(2.2)$  e  $y(3.8)$  (Interpolación)  
el valor de  $y(0)$  e  $y(6)$  (Extrapolación)

-introducimos  $x_0, h, N$  : 1 [ENTER] 0.5 [ENTER] 9 [A]  $\rightarrow$  1.0000 ( $x_0$ )

-introducimos los  $y_k$  : 1 [R/S] 2 [R/S] 4 [R/S] 6 [R/S] 7 [R/S] 5 [R/S] 3 [R/S]  
0 [R/S] -3 [R/S]  $\rightarrow$  0.0000

-calculamos las interpolaciones: 2.2 [B]  $\rightarrow$  4.6883 =  $\hat{y}(2.2)$   
3.8 [B]  $\rightarrow$  3.6309 =  $\hat{y}(3.8)$

los valores interpolados son razonables

-calculamos las extrapolaciones: 0 [B]  $\rightarrow$  705.0000 =  $\hat{y}(0)$   
6 [B]  $\rightarrow$  854.0000 =  $\hat{y}(6)$

en cambio, las extrapolaciones son disparatadas  
¡ es muy peligroso extrapolar polinomios de interpolación !

(2) Hallar el punto de corte con el eje de abcisas de la recta que pasa por (1,4) y (3,3)

-introducir  $x_0, h, N$  : 1 [ENTER] 2 [ENTER] 2 [A]  $\rightarrow$  1.0000 ( $x_0$ )

-introducir  $y_0, y_1$ : 4 [R/S] 3 [R/S]  $\rightarrow$  0.0000

-hallar el p. de corte : [SOLVE] [B]  $\rightarrow$  9.0000 ( $x_c$ ) [E]  $\rightarrow$  0.0000 ( $y_c$ )  
el punto de corte es  $(x_c, y_c) \equiv \underline{(9,0)}$

(3) Se pretende planimetrar una curva (esto es, hallar el área entre la curva y el eje de abcisas) de la cual sólo se conocen los siguientes puntos:

|   |        |        |        |        |        |        |               |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------------|
| x | 0.0    | 0.1    | 0.2    | 0.3    | 0.4    | 0.5    | 6 datos con   |
| y | 0.0000 | 0.1998 | 0.3987 | 0.5955 | 0.7894 | 0.9794 | espaciado 0.1 |

-introducir  $x_0, h, N$  : 0 [ENTER] 0.1 [ENTER] 6 [A]  $\rightarrow$  0.0000 ( $x_0$ )

-introducir los  $y_k$  : 0 [R/S] 0.1998 [R/S] 0.3897 [R/S]  $\rightarrow$  0.3000 ( $x_3$ )

hemos cometido un error:  $y_2$  es 0.3987, no 0.3897. Lo corregimos:

0.3987 [STO 2], y seguimos: 0.5955 [R/S] 0.7894 [R/S] 0.9794 [R/S]  $\rightarrow$  0.00

-calculamos el área  $A = \int_0^{0.5} f(x) dx$  :

0 [ENTER] 0.5 [S<sub>y</sub>] [B]  $\rightarrow$  0.2474 ; el área vale  $A = \underline{0.2474}$

(en realidad, los datos son de  $f(x) = x + \sin x$ , y el área vale

$$A = \int_0^{0.5} (x + \sin x) dx = 0.2474 )$$

# HP 34 C

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS   | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS                                    |
|---------------|-----------|----------|--|---------------|-----------|----------|---|
| *             | LBL A     | 25.13.11 | cálculo de los $\Delta$  |               | RCL .6    | 24..6    | tiene en pantalla, de la anterior iteración |
|               | 1         | 1        |  |               | RCL I     | 24.14.23 |   |
|               | -         | 41       |  |               | INT       | 25.32    |   |
| 5             | STO .6    | 23..6    | N-1 en R.6 (=n)  |               | -         | 41       |   |
|               | EEX       | 33       | h en R.7   | 60            | 1         | 1        | x(x-1)...(x-k+1)(k-1)!                      |
|               | 3         | 3        |  |               | +         | 51       |   |
|               | /         | 71       | prepara el registro I especificando el límite superior para futuras iteraciones. |               | x         | 61       |   |
| 10            | STO I     | 23.14.23 |  |               | RCL I     | 24.14.23 |   |
|               | R↓        | 15.22    |  |               | INT       | 25.32    |   |
| 15            | STO .7    | 23..7    |  | 65            | /         | 71       |   |
|               | R↓        | 15.22    |  |               | ENTER     | 31       |   |
| 20            | STO .8    | 23..8    |  |               | ENTER     | 31       |   |
|               | *         | LBL 1    | 25.13. 1   |               | R↑        | 15.22    |   |
|               | RCL I     | 24.14.23 | Entrada de los datos   |               | R↓        | 15.22    |   |
| 25            | INT       | 25.32    |  | 70            | RCL (1)   | 24.14.24 |   |
|               | RCL .7    | 24..7    |  |               | x         | 61       |   |
|               | x         | 61       |  |               | +         | 51       |   |
| 30            | RCL .8    | 24..8    |  |               | ISG       | 15.24    |   |
|               | +         | 51       |  |               | GTO 4     | 22..4    |   |
| 35            | R/S       | 74       |  | 75            | RTN       | 25.12    |   |
|               | STO (1)   | 23.14.24 | almacena y <sub>i</sub>  |               |           |          |   |
|               | ISG       | 15.24    |  |               |           |          |   |
|               | GTO 1     | 22. 1    | vuelve a LBL 1   |               |           |          |   |
| 40            | *         | LBL 2    | 25.13. 2   |               |           |          |   |
|               | RCL .6    | 24..6    | cálculo de las diferencias   | 80            |           |          |   |
|               | x = 0     | 15.71    |  |               |           |          |   |
| 45            | RTN       | 25.12    |  |               |           |          |   |
|               | 1         | 1        |  |               |           |          |   |
|               | -         | 41       | contador de j hace desde n-1 hasta 0   |               |           |          |   |
| 50            | STO .6    | 23..6    |  |               |           |          |   |
|               | RCL I     | 24.14.23 |  |               |           |          |   |
|               | FRAC      | 25.33    |  |               |           |          |   |
|               | +         | 51       |  |               |           |          |   |
| 55            | STO I     | 23.14.23 |  |               |           |          |   |
|               | CL X      | 34       |  |               |           |          |   |
| *             | LBL 3     | 25.13..3 | calculo de $\Delta^k_{y_j}$  | 60            |           |          |   |
|               | STO -(1)  | 23.41.24 |  |               |           |          |   |
|               | RCL (1)   | 24.14.24 |  |               |           |          |   |
|               | ISG       | 15.24    |  |               |           |          |   |
| 60            | GTO 3     | 22..3    |  | 65            |           |          |   |
|               | GTO 2     | 22..2    |  |               |           |          |   |
| *             | LBL B     | 25.13.12 |  |               |           |          |   |
|               | RCL .8    | 24..8    | evaluación $\hat{y}$   | 70            |           |          |   |
|               | -         | 41       |  |               |           |          |   |
| 65            | RCL .7    | 24..7    |  | 75            |           |          |   |
|               | /         | 71       |  |               |           |          |   |
| 70            | STO .6    | 23..6    |  | 80            |           |          |   |
|               | RCL I     | 24.14.23 |  |               |           |          |   |
|               | FRAC      | 25.33    |  |               |           |          |   |
| 75            | STO I     | 23.14.23 |  |               |           |          |   |
|               | ISG       | 15.24    | -no se utiliza ningun flag   |               |           |          |   |
|               | 1         | 1        | -se utilizan las etiquetas A,B,1,2,3,4   |               |           |          |   |
| 80            | RCL 0     | 24. 0    | - id. registros 1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,,0,.1                                      |               |           |          |   |
| *             | LBL 4     | 25.13..4 | - id. .2,.3,.4,.5,.6,.7,.8   |               |           |          |   |
| 85            | x ≈ y     | 21       | - id. en total 75 pasos de programa  |               |           |          |   |
|               |           |          | -se recomiendan modas FIX 4 y cualquiera angular                                 |               |           |          |   |

## REGISTERS

|                                 |                                 |                                 |                                 |                                 |                                 |                                |                             |                             |                             |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| <sup>0</sup> yo                 | <sup>1</sup> y1; $\Delta y_0$   | <sup>2</sup> y2; $\Delta^2$     | <sup>3</sup> y3; $\Delta^3$     | <sup>4</sup> y4; $\Delta^4$     | <sup>5</sup> y5; $\Delta^5$     | <sup>6</sup> y6; $\Delta^6$    | <sup>7</sup> y7; $\Delta^7$ | <sup>8</sup> y8; $\Delta^8$ | <sup>9</sup> y9; $\Delta^9$ |
| <sup>0</sup> ylo; $\Delta^{13}$ | <sup>1</sup> y11; $\Delta^{11}$ | <sup>2</sup> y12; $\Delta^{12}$ | <sup>3</sup> y13; $\Delta^{13}$ | <sup>4</sup> y14; $\Delta^{14}$ | <sup>5</sup> y15; $\Delta^{15}$ | <sup>6</sup> N; x <sup>1</sup> | <sup>7</sup> h              | <sup>8</sup> x0             | <sup>9</sup> X              |

## AJUSTE DE DATOS

### 1.- Descripción .-

Este programa permite ajustar una curva de 2º ó 3º grado a una serie de datos  $(x_i, y_i)$ .

Se tienen una serie de pares de datos  $(x_i, y_i)$ : el programa calcula los coeficientes  $A_0, A_1, A_2, A_3$  de un polinomio:

$$P(x) = A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$$

de forma que  $P(x_i) = y_i$ , es decir, que la curva representativa del polinomio  $P(x)$  pase a través de los puntos dados. Puede elegirse entre grado 2 o grado 3, dependiendo del nº de pares de datos  $(x_i, y_i)$  de que se disponga. Si son 3 pares de datos, el grado debe ser 2, y el polinomio será:

$$P(x) = A_2x^2 + A_1x + A_0$$

es decir, una parábola que pasa por los 3 puntos. Si son 4 pares de datos el polinomio será:

$$P(x) = A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$$

o sea, una parábola cúbica que incluye a los 4 puntos. Los datos no tiene que estar necesariamente equiespaciados, pueden ser puntos cualesquiera, con la condición de que no haya 2 con identica abcisa x.

Los puntos-dato permanecen almacenados en registros adecuados, y no se ven afectados por el programa, permitiendo así recalcular los coeficientes después de cambiar algún dato, sin tener que reintroducirlos todos de nuevo. Los coeficientes pueden ser mostrados en cualquier momento. Despues de hallarlos, es posible efectuar interpolaciones, o calcular un valor y para un x dado, basandose en el polinomio. Incluso puede hallarse los ceros reales del polinomio, o su integral utilizando las funciones incorporadas  $\int_y$  y  $SOLVE$ . (esto puede resultar muy útil, si es preciso calcular la integral de una función de la cual sólo se conocen valores en determinados puntos. Se escogen 4 pares de datos representativos, se halla el  $P(x)$  de 3er grado que los incluye, y se integra este  $P(x)$  utilizando  $\int_y$ ). El resultado será una buena aproximación de la  $f(x)$ )

### 2.- Utilización .- introducir el programa

(1) para 3er grado : -pulsar **[CF 0]**

-introducir datos: **[A] → 3.0000** (grado 3)

$x_0 \boxed{R/S}, y_0 \boxed{R/S}, x_1 \boxed{R/S}, y_1 \boxed{R/S} \dots, y_3 \boxed{R/S} \rightarrow A_3$   
 $\boxed{R/S} \rightarrow A_2$   
 $\boxed{R/S} \rightarrow A_1$   
 $\boxed{R/S} \rightarrow A_0$

(2) para calcular  $P(x)$ , para x dado:

**x [B] → P(x)**

(3) para revisar de nuevo los coefic. : **[GSB 7] → A<sub>3</sub> [R/S] → A<sub>2</sub>**, etc.

(4) para cambiar algun dato, y recalcular coeficientes:

-almacenar el dato en el reg.adecuado, y **[GSB 9] → A<sub>3</sub> [R/S] → A<sub>2</sub>**, etc

(5) para grado 2 : -pulsar **[SF 0]**

-introducir datos : **[A] → 2.0000** (grado 2)

$x_0 \boxed{R/S}, y_0 \boxed{R/S}, x_1 \boxed{R/S}, y_1 \boxed{R/S}, \dots, y_2 \boxed{R/S} \rightarrow A_2$   
 $\boxed{R/S} \rightarrow A_1$   
 $\boxed{R/S} \rightarrow A_0$

(6) para revisar de nuevo coef,  
calcular  $P(x)$  para un x dado, o cambiar algun dato, ir a (2), (3).

(7) para otro caso, ir a (1) ó (5)

3.- Ejemplos .-

- (1) Se tiene el siguiente conjunto de datos procedentes de un experimento. Basandose en ellos, se pide hallar una aproximación para la expresión de  $y = f(x)$  en el intervalo  $(0,1)$  mediante un polinomio cúbico. ¿Cuál será el valor de  $f(1)$ ,  $f(0.5)$ ? ¿Cuál será el valor de la integral de  $f(x)$  entre  $[0,1]$ ?

|   |        |        |        |        |
|---|--------|--------|--------|--------|
| x | 0.0200 | 0.3274 | 0.6923 | 0.9978 |
| y | 1.0202 | 1.3874 | 1.9983 | 2.7123 |

-son 8 datos, así que será grado

3. Pulsar **CFO**

-introducir datos:

**A**  $\rightarrow$  3.0000 ; 0.02 **R/S** 1.0202 **R/S** 0.3274 **R/S** 1.3874 **R/S**

0.6923 **R/S** 1.9983 **R/S** 0.9978 **R/S** 2.7123 **R/S**  $\rightarrow$  0.2818  $(A_3)$   
**R/S**  $\rightarrow$  0.4204  $(A_2)$   
**R/S**  $\rightarrow$  1.0163  $(A_1)$   
**R/S**  $\rightarrow$  0.9997  $(A_0)$

es decir,  $f(x) \approx P(x) = 0.2818x^3 + 0.4204x^2 + 1.0163x + 0.9997$

$f(1) \approx P(1) : 1 \boxed{B} \rightarrow 2.7182$  (comparar con  $f(x) = e^x$ ;  $f(1) = 2.7182$ )  
 $f(0.5) \approx P(0.5) : 0.5 \boxed{B} \rightarrow 1.6482$  ( $f(0.5) = 1.6487$ )

-para aproximar la integral entre 0 y 1 de  $f(x)$ :  $\int_0^1 f(x) dx$

0 **ENTER** 1 **SOLVE B**  $\rightarrow$  1.7185 (comparar con  $\int_0^1 e^x dx = 1.7182$ )

- (2) Diversas medidas de un proceso han dado la siguiente tabla de resultados. Deducir una expresión aproximada de  $f(x)$  basandose en los mismos. ¿Cuál es el valor de  $f(3.05)$ ? ¿Para qué valor de  $x$  es  $f(x) = 0$ ?

|   |        |        |         |
|---|--------|--------|---------|
| x | 3.0    | 3.1    | 3.2     |
| y | 0.1411 | 0.0416 | -0.0584 |

-son 6 datos, 2º grado : **SF 0**

-introducir datos: **A**  $\rightarrow$  2.0000 ; 3 **R/S** 0.1411 **R/S** 3.1 **R/S**

0.0416 **R/S** 3.2 **R/S** -0.0584 **R/S**  $\rightarrow$  -0.0250  $(A_3)$   
**R/S**  $\rightarrow$  -0.8425  $(A_2)$   
**R/S**  $\rightarrow$  2.8936  $(A_1)$

-es decir, tenemos por ahora  $f(x) \approx P(x) = -0.0250x^3 - 0.8425x + 2.8936$

-supongamos que se añade un nuevo dato,  $x = 3.3$ ,  $y = -0.1577$   
estos nos permite mejorar el ajuste, haciendolo de 3er grado: **CFO**

3.3 **STO 6** -0.1577 **STO 7** **GSB 9**  $\rightarrow$  +0.2000  $(A_3)$   
**R/S**  $\rightarrow$  -1.8850  $(A_2)$   
**R/S**  $\rightarrow$  4.9215  $(A_1)$   
**R/S**  $\rightarrow$  -3.0584

así que es  $f(x) \approx P(x) = 0.2000x^3 - 1.8850x^2 + 4.9215x - 3.0584$

$f(3.05) \approx P(3.05) : 3.05 \boxed{B} \rightarrow 0.0915$

y el valor  $x$  para el cual es  $f(x) = 0$ , obviamente está entre 3.1 y 3.2, así que :

3.1 **ENTER** 3.2 **SOLVE B**  $\rightarrow$  3.1416 **FIX 6**  $\rightarrow$  3.141592

la función exacta es  $y = \sin(x)$ , luego el cero es  $\pi = 3.141592654$

HP 34 C

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS                     | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE                    | COMMENTS                 |
|---------------|-----------|----------|------------------------------|---------------|-----------|-----------------------------|--------------------------|
| *             | LBL A     | 25.13.11 | preparación para             |               | STO I     | 23.14.23                    |                          |
|               | 7         | 7        | la introducción              | *             | LBL 4     | 25.13. 4                    | $A_3 = y(x_0, x_1, x_2)$ |
| F?            | 0         | 25.71. 0 | de datos. En ca-             | RCL 1         | 24. 1     | $x_3), 6 cero$              |                          |
|               | 5         | 5        | so de 3º grado,              | RCL 9         | 24. 9     |                             |                          |
| 5             | ENTER     | 31       | hacen falta 8 da-            | RCL 4         | 24. 4     |                             |                          |
| EEX           |           | 33       | tos ( $x, y$ ), que          | RCL I         | 24.14.23  | $A_2 = y(x_0, x_1, x_2)$    |                          |
|               | 3         | 3        | serán almacenados            | x             | 61        | $-D_4(x_0+x_1+x_2)$         |                          |
|               | /         | 71       | en R0 a R7. Si es            | -             | 41        |                             |                          |
| 10            | STO I     | 23.14.23 | de grado 2, solo             | RCL 2         | 24. 2     | $A_1 = y(x_0, x_1)$         |                          |
|               | 3         | 3        | hacen falta 6 da-            | x             | 61        | $-D_3(x_0+x_1) +$           |                          |
| F?            | 0         | 25.71. 0 | tos, que se alma-            | RCL 8         | 24. 8     |                             |                          |
|               | 2         | 2        | cenan en R0 a R5             | -             | 41        |                             |                          |
| *             | LBL 1     | 25.13. 1 |                              | RCL 0         | 24. 0     | $+D_4(x_0x_1+x_1x_2)$       |                          |
| R/S           |           | 74       |                              | x             | 61        |                             |                          |
| 15            | STO (1)   | 23.14.24 |                              | +             | 51        |                             |                          |
| ISG           |           | 15.24    |                              | STO .0        | 23..0     | $+x x_0)$                   |                          |
| GTO 1         |           | 22. 1    |                              | RCL 0         | 24. 0     | $x^2$                       |                          |
| *             | LBL 9     | 25.13. 9 | cálculo de las               | RCL 2         | 24. 2     | $A_0 = y(x_0)$              |                          |
| RCL 3         |           | 24. 3    | diferencias                  | +             | 51        | $+D_3x_0x_1 - D_4x_0x_1x_2$ |                          |
| RCL 1         |           | 24. 1    | divididas: se                | RCL 4         | 24. 4     |                             |                          |
| RCL 2         |           | 24. 2    | calculan:                    | x             | 61        |                             |                          |
| RCL 0         |           | 24. 0    |                              | RCL 0         | 24. 0     | con esto el po              |                          |
| GSB 0         |           | 13. 0    |                              | RCL 2         | 24. 2     | linomio queda               |                          |
| STO 8         |           | 23. 8    |                              | x             | 61        | como                        |                          |
| RCL 5         |           | 24. 5    |                              | +             | 51        |                             |                          |
| RCL 3         |           | 24. 3    |                              | RCL I         | 24.14.23  | $P(x) = A_3x^3 +$           |                          |
| RCL 4         |           | 24. 4    |                              | x             | 61        | $+ A_2x^2 +$                |                          |
| RCL 2         |           | 24. 2    |                              | STO+ 8        | 23.51. 8  | $+ A_1x +$                  |                          |
| GSB 0         |           | 13. 0    |                              | RCL 9         | 24. 9     | $+ A_0$                     |                          |
| STO 9         |           | 23. 9    |                              | RCL 0         | 24. 0     | donde $A_3$ es ce           |                          |
| F?            | 0         | 25.71. 0 |                              | RCL 2         | 24. 2     | si el pol. es               |                          |
| GTO 2         |           | 22. 2    |                              | x             | 61        | 2º grado.                   |                          |
| RCL 7         |           | 24. 7    |                              | STO- 8        | 23.41. 8  |                             |                          |
| RCL 5         |           | 24. 5    |                              | LAST X        | 25. 0     |                             |                          |
| RCL 6         |           | 24. 6    |                              | RCL 4         | 24. 4     |                             |                          |
| RCL 4         |           | 24. 4    | y despues, el                | +             | 51        |                             |                          |
| GSB 0         |           | 13. 0    | polinomio se                 | RCL I         | 24.14.23  |                             |                          |
| RCL 9         |           | 24. 9    | reconvierte a                | x             | 61        |                             |                          |
| RCL 6         |           | 24. 6    | la forma stan-               | STO- 9        | 23.41. 9  |                             |                          |
| RCL 2         |           | 24. 2    | dard, cuyos                  | *             | LBL 7     | 25.13. 7                    |                          |
| GSB 0         |           | 13. 0    | coeficientes                 | F?            | 0         | se presentan                |                          |
| STO I         |           | 23.14.23 | son:                         | GTO 5         | 22. 5     | $A_3, A_2, A_1,$            |                          |
| *             | LBL 2     | 25.13. 2 |                              | RCL I         | 24.14.23  |                             |                          |
| RCL 9         |           | 24. 9    |                              | R/S           | 74        | $(A_3 \text{ no se pre-}$   |                          |
| RCL 8         |           | 24. 8    |                              | *             | LBL 5     | 25.13. 5                    |                          |
| RCL 4         |           | 24. 4    |                              | RCL 9         | 24. 0     | senta si es d               |                          |
| RCL 0         |           | 24. 0    |                              | R/S           | 74        |                             |                          |
| GSB 0         |           | 13. 0    |                              | RCL 8         | 24. 8     |                             |                          |
| STO 9         |           | 23. 9    |                              |               |           |                             |                          |
| 50            | F?        | 0        | 25.71. 0                     |               |           |                             |                          |
| GTO 3         |           | 22. 3    | -se utiliza el flag 0        |               |           |                             |                          |
| RCL I         |           | 24.14.23 | - id. etiquetas              |               |           |                             |                          |
| RCL 0         |           | 24. 0    | - id. registros              |               |           |                             |                          |
| RCL 6         |           | 24. 6    | - id. en total               |               |           |                             |                          |
| GSB 0         |           | 13. 0    | - se recomienda moda         |               |           |                             |                          |
|               |           |          | - id. cualquier moda angular |               |           |                             |                          |

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS         | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS |
|---------------|-----------|----------|------------------|---------------|-----------|----------|----------|
| 105           | R/S       | 74       | 2º grado )       | 160           |           |          |          |
|               | RCL .0    | 24..0    |                  |               |           |          |          |
|               | RTN       | 25.12    |                  |               |           |          |          |
| 4             | * LBL 0   | 25.13.0  | subrutina aux.   |               |           |          |          |
|               | -         | 41       |                  |               |           |          |          |
| 110           | R↓        | 15.22    | para el cálculo  | 165           |           |          |          |
|               | -         | 41       |                  |               |           |          |          |
|               | R↑        | 14.22    | de diferencias   |               |           |          |          |
|               | /         | 71       |                  |               |           |          |          |
|               | RTN       | 25.12    |                  |               |           |          |          |
| 3             | * LBL 3   | 25.13.3  | subrutina aux.   | 170           |           |          |          |
|               | 0         | 0        | si el polinomio  |               |           |          |          |
|               | STO I     | 23.14.23 | es de 2º grado   | 5             |           |          |          |
|               | GTO 4     | 22.14    |                  |               |           |          |          |
|               | * LBL B   | 25.13.12 | cálculo de P(x)  | 175           |           |          |          |
| 120           | ENTER     | 31       |                  |               |           |          |          |
|               | ENTER     | 31       | dado x           |               |           |          |          |
|               | ENTER     | 31       |                  |               |           |          |          |
|               | RCL I     | 24.14.23 | puede ser utili- |               |           |          |          |
|               | x         | 61       | zado para hallar |               |           |          |          |
| 125           | RCL 9     | 24.9     | la integral o    | 180           |           |          |          |
|               | +         | 51       | los ceros de     |               |           |          |          |
|               | x         | 61       | P(x), utilizan-  |               |           |          |          |
|               | RCL 8     | 24.8     | do las funciones |               |           |          |          |
|               | +         | 51       |                  |               |           |          |          |
| 130           | x         | 61       |                  | 185           |           |          |          |
|               | RCL .0    | 24..0    | INT[x] y SOLVE   |               |           |          |          |
|               | +         | 51       |                  |               |           |          |          |
|               | RTN       | 25.12    |                  |               |           |          |          |
| 135           |           |          |                  | 190           |           |          |          |
| 0             |           |          |                  |               |           |          |          |
| 140           |           |          |                  | 195           |           |          |          |
| 9             |           |          |                  |               |           |          |          |
| 145           |           |          |                  | 200           |           |          |          |
| 8             |           |          |                  |               |           |          |          |
| 150           |           |          |                  | 205           |           |          |          |
| 7             |           |          |                  |               |           |          |          |
| 155           |           |          |                  | 210           |           |          |          |

| I | A <sub>3</sub> | REGISTERS |                |   |                |   |                |   |                | A <sub>0</sub> | A <sub>1</sub> |   |                |   |                |   |                |   |                |
|---|----------------|-----------|----------------|---|----------------|---|----------------|---|----------------|----------------|----------------|---|----------------|---|----------------|---|----------------|---|----------------|
| 0 | X <sub>0</sub> | 1         | Y <sub>0</sub> | 2 | X <sub>1</sub> | 3 | Y <sub>1</sub> | 4 | X <sub>2</sub> | 5              | Y <sub>2</sub> | 6 | X <sub>3</sub> | 7 | Y <sub>3</sub> | 8 | A <sub>0</sub> | 9 | A <sub>1</sub> |
| 0 | A <sub>2</sub> | 1         |                | 2 |                | 3 |                | 4 |                | 5              |                | 6 |                | 7 |                | 8 |                | 9 |                |
| 1 |                | 1         |                | 2 |                | 3 |                | 4 |                | 5              |                | 6 |                | 7 |                | 8 |                | 9 |                |

## ANALISIS ARMONICO

1.- Descripción.- Dados N datos,  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{N-1}$ , correspondientes a

N abcisas igualmente espaciadas, el programa calcula los armónicos correspondientes a la representación de estos datos en serie de Fourier. Se distinguen dos casos:

a) N impar = 2L+1

-tenemos un nº impar de argumentos  $N = 2L+1$ ,  
 $x=0, 1, 2, \dots, 2L$

-los armónicos  $a_k, b_k$  vienen dados por:

$$a_k = \frac{2}{2L+1} \sum_{x=0}^{2L} y(x) \cos \frac{2\pi}{2L+1} kx, \quad k = 0, 1, \dots, L$$

$$b_k = \frac{2}{2L+1} \sum_{x=0}^{2L} y(x) \sin \frac{2\pi}{2L+1} kx, \quad k = 1, 2, \dots, L$$

$$y(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^L (a_k \cos \frac{2\pi}{2L+1} kx + b_k \sin \frac{2\pi}{2L+1} kx)$$

b) N par = 2L

-los argumentos son  $N = 2L$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots, 2L-1$

$$a_k = \frac{1}{L} \sum_{x=0}^{2L-1} y(x) \cos \frac{\pi}{L} kx, \quad k = 0, 1, \dots, L$$

$$b_k = \frac{1}{L} \sum_{x=0}^{2L-1} y(x) \sin \frac{\pi}{L} kx, \quad k = 1, 2, \dots, L-1$$

$$y(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^L (a_k \cos \frac{\pi}{L} kx + b_k \sin \frac{\pi}{L} kx) + \frac{1}{2} a_L \cos \pi x$$

-el valor de las ordenadas,  $x_k$ , no se tiene en cuenta en el programa, puesto que el valor de los armónicos es independiente de ellas, en tanto sean igualmente espaciadas. Para la síntesis armónica sería preciso tener en cuenta el cambio de escala adecuado.

-el programa calcula simultáneamente y almacena hasta un máximo de 5 armónicos ( $a_k, b_k$ ), además del valor medio  $a_0/2$ . El número necesario de armónicos es elegido por el programa, igual a  $\text{INT}(N/2)$ ; es decir, 6 datos requieren 3 armónicos ( $a_k, b_k$ ), 7 datos, también, 8 datos requieren 4 armónicos, etc. El nº de datos N puede ser cualquiera,  $N \geq 2$ . En caso de ser  $N > 11$ , se calculan un máximo de 5 armónicos.

-cualquier error cometido en la introducción de datos puede ser corregido excepto  $y_0$ . Los armónicos pueden revisarse después de presentados.

2.- Utilización .- introducir el programa

(1) -intr. nº de datos: N [A]  $\rightarrow$  N-1 ;  $y_{N-1}$  [R/S]  $\rightarrow$  N-2 ;  $y_{N-2}$  [R/S]  $\rightarrow$  N-

$\dots y_0$  [R/S]  $\rightarrow \frac{1}{2} a_0$  (valor medio en el periodo)

[R/S]  $\rightarrow$  (1)  $\rightarrow a_1$  [R/S]  $\rightarrow b_1$

[R/S]  $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow a_2$  [R/S]  $\rightarrow b_2$

$k = \text{nº de armónicos} =$   
 $= \text{INT}(N/2) \leq 5$

..... .....

[R/S]  $\rightarrow$  (k)  $\rightarrow a_k$  [R/S]  $\rightarrow b_k$  [R/S]  $\rightarrow 0.0000$

(2) para revisar los armónicos calculados: [B]  $\rightarrow \frac{1}{2} a_0$ , [R/S]  $\rightarrow$  etc,

(3) para corregir un error, ver este ejemplo:

$y_k$  erroneo [R/S]  $\rightarrow k-1$ , ¡ha habido un error!

-pulsar : **GSB 9**  $\rightarrow$  k

$y_k$  correcto **R/S**  $\rightarrow$  k-1 , etc.

### 3.- Ejemplos .-

(1) Tenemos los siguientes datos pertenecientes a una función periódica, de periodo  $T = 7$ . Realizar su análisis armónico:

|   |   |   |   |   |    |   |   |
|---|---|---|---|---|----|---|---|
| X | 0 | 1 | 2 | 3 | '4 | 5 | 6 |
| Y | 1 | 3 | 4 | 2 | 0  | 6 | 5 |

- son 7 datos: 7 **A**  $\rightarrow$  6.0000

5 **R/S**  $\rightarrow$  5.0000

6 **R/S**  $\rightarrow$  4.0000 ; 2 **R/S**  $\rightarrow$  3.0000 , error, no era 2, es 0

**GSB 9**  $\rightarrow$  4.0000 ; 0 **R/S**  $\rightarrow$  3.0000 ; 2 **R/S**  $\rightarrow$  2.0000

4 **R/S**  $\rightarrow$  1.0000 ; 3 **R/S**  $\rightarrow$  0.0000 ; 1 **R/S**  $\rightarrow$  3.0000 ( $\frac{1}{2}a_0 = v_{medic}$ )

**R/S**  $\rightarrow$  (1)  $\rightarrow$  0.5602 ( $a_1$ ) **R/S**  $\rightarrow$  -0.7559 ( $b_1$ )

**R/S**  $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow$  -2.4408 ( $a_2$ ) **R/S**  $\rightarrow$  -0.7559 ( $b_2$ )

**R/S**  $\rightarrow$  (3)  $\rightarrow$  -0.1194 ( $a_3$ ) **R/S**  $\rightarrow$  0.7559 ( $b_3$ ) **R/S**  $\rightarrow$  0.0000

es decir, hemos obtenido  $a_0/2 = 3.0000$

$$\begin{array}{lll} a_0 & = & 3.0000 \\ a_1 & = & 0.5602 \\ a_2 & = & -2.4408 \\ a_3 & = & -0.1194 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{lll} b_1 & = & -0.7559 \\ b_2 & = & -0.7559 \\ b_3 & = & 0.7559 \end{array}$$

(2) Tenemos la siguiente función definida en  $(0, 2\pi)$  como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi/2 & \text{si } \pi/2 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{si } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

y en cualquier otra parte,  $f(x+2\pi) = f(x)$ . Realizar su análisis armónico aproximado, tomando 16 puntos de la gráfica.

|   |   |         |         |          |         |          |          |          |         |          |          |
|---|---|---------|---------|----------|---------|----------|----------|----------|---------|----------|----------|
| x | 0 | $\pi/8$ | $\pi/4$ | $3\pi/8$ | $\pi/2$ | $5\pi/8$ | $3\pi/4$ | $7\pi/8$ | $\pi$   | $9\pi/8$ | $5\pi/4$ |
| y | 0 | $\pi/8$ | $\pi/4$ | $3\pi/8$ | $\pi/2$ | $\pi/2$  | $\pi/2$  | $\pi/2$  | $\pi/4$ | 0        | 0        |

|   |           |          |           |          |           |         |     |                       |
|---|-----------|----------|-----------|----------|-----------|---------|-----|-----------------------|
| x | $11\pi/8$ | $3\pi/2$ | $13\pi/8$ | $7\pi/4$ | $15\pi/8$ | 16      | A   | $\rightarrow$ 15.0000 |
| y | 0         | 0        | 0         | 0        | 0         | 0       | R/S | $\rightarrow$ 14.0000 |
|   |           |          |           |          |           | 0       | R/S | $\rightarrow$ 13.0000 |
|   |           |          |           |          |           | 0       | R/S | $\rightarrow$ 12.0000 |
|   |           |          |           |          |           | 0       | R/S | $\rightarrow$ 9.0000  |
|   |           |          |           |          |           | $\pi/2$ | R/S | $\rightarrow$ 6.0000  |
|   |           |          |           |          |           | $\pi/2$ | R/S | $\rightarrow$ 3.0000  |
|   |           |          |           |          |           | $\pi/8$ | R/S | $\rightarrow$ 0.0000  |

0 **R/S**  $\rightarrow$  11.0000 ; 0 **R/S**  $\rightarrow$  10.0000 ;  $\pi/2$  **R/S**  $\rightarrow$  9.0000

0 **R/S**  $\rightarrow$  8.0000 ;  $\pi/4$  **R/S**  $\rightarrow$  7.0000 ;  $\pi/2$  **R/S**  $\rightarrow$  6.0000

$\pi/2$  **R/S**  $\rightarrow$  5.0000 ;  $\pi/2$  **R/S**  $\rightarrow$  4.0000 ;  $\pi/2$  **R/S**  $\rightarrow$  3.0000

$3\pi/8$  **R/S**  $\rightarrow$  2.0000 ;  $\pi/4$  **R/S**  $\rightarrow$  1.0000 ;  $\pi/8$  **R/S**  $\rightarrow$  0.0000

0 **R/S**  $\rightarrow$  0.5890 ( $\frac{1}{2}a_0 = \text{valor medio}$ )

**R/S**  $\rightarrow$  (1)  $\rightarrow$  -0.3224 ( $a_1$ ) ; **R/S**  $\rightarrow$  0.8160 ( $b_1$ )

**R/S**  $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow$  -0.1676 ( $a_2$ ) ; **R/S**  $\rightarrow$  -0.2370 ( $b_2$ )

**R/S**  $\rightarrow$  (3)  $\rightarrow$  -0.0398 ( $a_3$ ) ; **R/S**  $\rightarrow$  0.1072 ( $b_3$ )

**R/S**  $\rightarrow$  (4)  $\rightarrow$  0.0000 ( $a_4$ ) ; **R/S**  $\rightarrow$  -0.0982 ( $b_4$ )

**R/S**  $\rightarrow$  (5)  $\rightarrow$  -0.0178 ( $a_5$ ) ; **R/S**  $\rightarrow$  0.0833 ( $b_5$ ) **R/S**  $\rightarrow$  0.0000

# HP 34 C

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS  | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS                  |  |
|---------------|-----------|----------|---|---------------|-----------|----------|---------------------------|--|
| *             | LBL A     | 25.13.11 | preparación de                                  |               |           | 1        | 1                         |  |
|               | CF 0      | 25.61. 0 | los cálculos:                                   |               | F? 0      | 25.71. 0 | actualiza el              |  |
|               | CF 2      | 25.61. 2 | quita los flags                                 |               | CL X      | 34       | número del dat            |  |
|               | CF 3      | 25.61. 3 | adecuados, pre-                                 |               | F? 0      | 25.71. 0 | siguiente que             |  |
| 5             | RAD       | 15.12    | para la moda en                                 |               | CF 0      | 25.61. 0 | hay que solicitar.        |  |
|               | CL REG    | 14.33    | radianes, y al-                                 |               | STO- 6    | 23.41. 6 | presentación d            |  |
|               | STO .3    | 23..3    | macena el nº de                                 |               | GTO 0     | 22. 0    | los armónicos:            |  |
|               | 1         | 1        | datos en R.3                                    | *             | LBL B     | 25.13.12 | primero, el va            |  |
|               | -         | 41       |   |               | RCL 0     | 24. 0    | lor medio, a <sub>0</sub> |  |
| 10            | STO 6     | 23. 6    |   |               | R/S       | 74       |                           |  |
| *             | LBL 0     | 25.13. 0 | decide si el                                    |               | GSB 4     | 13. 4    |                           |  |
|               | RCL 6     | 24. 6    | dato debe añadir                                |               | EEX       | 33       |                           |  |
|               | x =0      | 15.71    | se a las sumatorias                             |               |           | 3        |                           |  |
|               | SF 2      | 25.51. 2 | de cada armónico,                               |               |           | 3        |                           |  |
| 15            | F? 0      | 25.71. 0 | o bien debe su-                                 |               | /         | 71       |                           |  |
|               | RCL .2    | 24..2    | primirse de                                     |               | STO 1     | 23.14.23 |                           |  |
|               | F? 0      | 25.71. 0 | las mismas, de-                                 |               | ISG       | 15.24    |                           |  |
|               | CHS       | 32       | bido a un error                                 | *             | LBL 3     | 25.13. 3 |                           |  |
|               | F? 0      | 25.71. 0 | anterior.                                       |               | CF 3      | 25.61. 3 |                           |  |
| 20            | GTO 7     | 22. 7    |   |               | RCL 1     | 24.14.23 |                           |  |
|               | R/S       | 74       |   |               | FIX 0     | 14.11. 0 |                           |  |
|               | RCL .3    | 24..3    |   |               | PAUSE     | 25.74    |                           |  |
|               | /         | 71       |   |               | FIX 4     | 14.11. 4 |                           |  |
|               | 2         | 2        |   |               | RCL (1)   | 24.14.24 |                           |  |
| 25            | x         | 61       |   |               | GSB 2     | 13. 2    |                           |  |
| *             | LBL 7     | 25.13. 7 | realización de                                  |               | R/S       | 74       |                           |  |
|               | STO .2    | 23..2    | las sumatorias                                  |               | ISG       | 15.24    |                           |  |
|               | GSB 4     | 13. 4    | para cada ar-                                   |               | GTO 3     | 22. 3    |                           |  |
|               | STO 1     | 23.14.23 | mónico..  |               | CL X      | 34       |                           |  |
| 30            | *         | LBL 1    | 25.13. 1  |               | RTN       | 25.12    |                           |  |
|               | RCL 6     | 24. 6    | los términos                                    |               | LBL 4     | 25.13. 4 |                           |  |
|               | 2         | 2        | en seno y cosec-                                |               | 5         | 5        |                           |  |
|               | x         | 61       | no se generan                                   |               | RCL .3    | 24..3    |                           |  |
|               | /         | 71       | simultáneamen-                                  |               | 2         | 2        |                           |  |
| 35            | x         | 61       | te mediante la                                  |               | /         | 71       |                           |  |
|               | RCL .3    | 24..3    | conversión de                                   |               | INT       | 25.32    |                           |  |
|               | /         | 71       | polares a rec-                                  |               | x > y     | 14.51    |                           |  |
|               | RCL 1     | 24.14.23 | tangulares.                                     |               |           | 21       |                           |  |
|               | x         | 61       |   |               | RTN       | 25.12    |                           |  |
| 40            | RCL .2    | 24..2    | cada término se                                 |               | *         | LBL 9    | 25.13. 9                  |  |
|               | P → R     | 14. 4    | suma a su regis-                                |               | CF 2      | 25.61. 2 |                           |  |
|               | STO+(1)   | 23.51.24 | tro correspon-                                  |               | SF 0      | 25.51. 0 |                           |  |
|               | x ≥ y     | 21       | diente, utili-                                  |               |           | 1        |                           |  |
|               | GSB 2     | 13. 2    | zando direccio-                                 |               | STO+ 6    | 23.51. 6 |                           |  |
| 45            | STO+(1)   | 23.51.24 | namiento in-                                    |               | GTO 0     | 22. 0    |                           |  |
|               | GSB 2     | 13. 2    | directo   |               | *         | LBL 2    | 25.13. 2                  |  |
|               | CF 3      | 25.61. 3 |   |               | x ≥ I     | 14.21    |                           |  |
|               | DSE       | 15.23    |   |               |           |          |                           |  |
|               | GTO 1     | 22. 1    |   |               |           |          |                           |  |
| 50            | RCL .2    | 24..2    | - se utilizan los flags                         |               |           |          |                           |  |
|               | 2         | 2        | 0,2,3   |               |           |          |                           |  |
|               | /         | 71       | - id. etiquetas A,B,0,1,2,3,4,7,9               |               |           |          |                           |  |
|               | STO+ 0    | 23.51. 0 | - id. registros 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,.0,.1,.2,.. |               |           |          |                           |  |
|               | F? 2      | 25.71. 2 | - id. en total 111 pasos de programa            |               |           |          |                           |  |
| 55            | GTO B     | 22.12    | - id. modas FIX 0 y FIX 4                       |               |           |          |                           |  |
|               |           |          | - id. moda RAD                                  |               |           |          |                           |  |

## REGISTERS

|                                |                    |                    |                    |                    |                    |                |                    |                    |                    |
|--------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|----------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| <sup>0</sup> $\frac{1}{2} a_0$ | <sup>1</sup> $a_1$ | <sup>2</sup> $a_2$ | <sup>3</sup> $a_3$ | <sup>4</sup> $a_4$ | <sup>5</sup> $a_5$ | <sup>6</sup> k | <sup>7</sup> $b_1$ | <sup>8</sup> $b_2$ | <sup>9</sup> $b_3$ |
| <sup>10</sup> b4               | <sup>11</sup> b5   | <sup>12</sup> yk   | <sup>13</sup> n    | <sup>14</sup>      | <sup>15</sup>      | <sup>16</sup>  | <sup>17</sup>      | <sup>18</sup>      | <sup>19</sup>      |

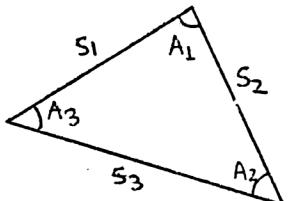
| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY  | KEY CODE | COMMENTS  | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS |
|---------------|------------|----------|---|---------------|-----------|----------|----------|
| 105           | 6          | 6        |   | 160           |           |          |          |
|               | F? 3       | 25.71. 3 |   |               |           |          |          |
| 4             | CHS        | 32       |   |               |           |          |          |
|               | +          | 51       |   |               |           |          |          |
|               | x $\geq$ I | 14.21    |   |               |           |          |          |
| 110           | SF 3       | 25.51. 3 |   | 165           |           |          |          |
|               | RTN        | 25.12    |   |               |           |          |          |
|               |            |          | sub. auxiliar,<br>permite direccio-<br>nar indirecta-<br>mente de R7 a<br>R.1, en vez de<br>R1 a R6 . |               |           |          |          |
|               |            |          |   |               |           |          |          |
|               |            |          |   |               |           |          |          |
| 115           |            |          |   | 170           |           |          |          |
|               |            |          |   | 5             |           |          |          |
|               |            |          |   | 175           |           |          |          |
| 120           |            |          |   | 4             |           |          |          |
| .2            |            |          |   | 180           |           |          |          |
|               |            |          |   |               |           |          |          |
| 125           |            |          |   | 185           |           |          |          |
|               |            |          |   | 3             |           |          |          |
| .1            |            |          |   | 190           |           |          |          |
| 130           |            |          |   | 2             |           |          |          |
|               |            |          |   | 195           |           |          |          |
|               |            |          |   | 1             |           |          |          |
| 135           |            |          |   | 200           |           |          |          |
| .0            |            |          |   | 0             |           |          |          |
|               |            |          |   | 205           |           |          |          |
| 140           |            |          |   |               |           |          |          |
| 9             |            |          |   |               |           |          |          |
| 145           |            |          |   |               |           |          |          |
|               |            |          |   |               |           |          |          |
| 150           |            |          |   |               |           |          |          |
|               |            |          |   |               |           |          |          |
| 155           |            |          |   |               |           |          |          |
| 7             |            |          |   |               |           |          |          |
|               |            |          |   |               |           |          |          |

### REGISTERS

|                                |                              |                              |                             |                             |                             |                |                             |                             |                             |
|--------------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|----------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| <sup>0</sup> $\frac{1}{2} a_0$ | <sup>1</sup> a <sub>1</sub>  | <sup>2</sup> a <sub>2</sub>  | <sup>3</sup> a <sub>3</sub> | <sup>4</sup> a <sub>4</sub> | <sup>5</sup> a <sub>5</sub> | <sup>6</sup> k | <sup>7</sup> b <sub>1</sub> | <sup>8</sup> b <sub>2</sub> | <sup>9</sup> b <sub>3</sub> |
| <sup>6</sup> b <sub>4</sub>    | <sup>11</sup> b <sub>5</sub> | <sup>12</sup> y <sub>k</sub> | <sup>13</sup> n             | <sup>14</sup> <del>X</del>  |                             |                |                             |                             |                             |

## RESOLUCION DE TRIANGULOS

1.- Descripción .- Este programa puede utilizarse para resolver cualquier caso de trigonometría plana: Dados 3 datos cualesquier que determinen totalmente un triangulo, pueden ser hallados los otros 3 restantes, así como el area.



Se distinguen 5 casos fundamentales: siguiendo el convenio de nomenclatura de la figura:

caso 1)  $S_1, A_3, A_1$  (conocidos 2 ángulos y el lado común)

caso 2)  $S_1, A_2, A_1$  (conocido 1 lado y los 2 ángulos siguientes)

caso 3)  $S_1, S_2, S_3$  (los tres lados conocidos)

caso 4)  $S_1, A_1, S_2$  (conocidos dos lados y el ángulo común)

caso 5)  $S_1, S_2, A_2$  (conocidos dos lados y el ángulo adyacente)

- las fórmulas empleadas son las siguientes:

$$\text{caso 1 .- } A_2 = \cos^{-1}(-\cos(A_3 + A_1)) ; S_2 = S_1 \frac{\sin A_3}{\sin A_2}$$

$$S_3 = S_1 \cos A_3 + S_2 \cos A_2$$

caso 2 .-  $A_3 = \cos^{-1}(-\cos(A_1 + A_2))$ , y queda reducido al caso 1

$$\text{caso 3 .- } A_3 = 2\cos^{-1}\sqrt{P(P-S_2)/S_1 S_3} ; A_1 = \cos^{-1}(-\cos(A_3 + A_2))$$

$$A_2 = 2\cos^{-1}\sqrt{P(P-S_1)/S_2 S_3} ; P = (S_1 + S_2 + S_3)/2$$

$$\text{caso 4 .- } S_3 = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 S_2 \cos A_1} , y \text{ queda reducido al caso 3}$$

$$\text{caso 5 .- } A_3 = \sin^{-1}\left(\frac{S_2}{S_1} \sin A_2\right) ; A_1 = \cos^{-1}(-\cos(A_2 + A_3))$$

y queda reducido al caso 1

### 2.- Utilización .-

(1) Introducir el programa; ejecutar uno de estos 5 casos:

(2)  $S_1$  [ENTER]  $A_3$  [ENTER]  $A_1$  [A] → (ver \*)

(3)  $S_1$  [ENTER]  $A_2$  [ENTER]  $A_1$  [B] → (ver \*)

(4)  $S_1$  [ENTER]  $S_2$  [ENTER]  $S_3$  [GSB 7] → (ver \*)

(5)  $S_1$  [ENTER]  $A_1$  [ENTER]  $S_2$  [GSB 8] → (ver \*)

(6)  $S_1$  [ENTER]  $S_2$  [ENTER]  $A_2$  [GSB 9] → (ver \*)

Nota: la moda angular puede ser cualquiera; en caso de grados, son grados decimales, no G

(\*) en todos los casos, los datos de salida son:

→  $S_1$  [R/S] →  $A_1$  [R/S] →  $S_2$  [R/S] →  $A_2$  [R/S] →  $S_3$  [R/S] →  $A_3$  [R/S] → AREA

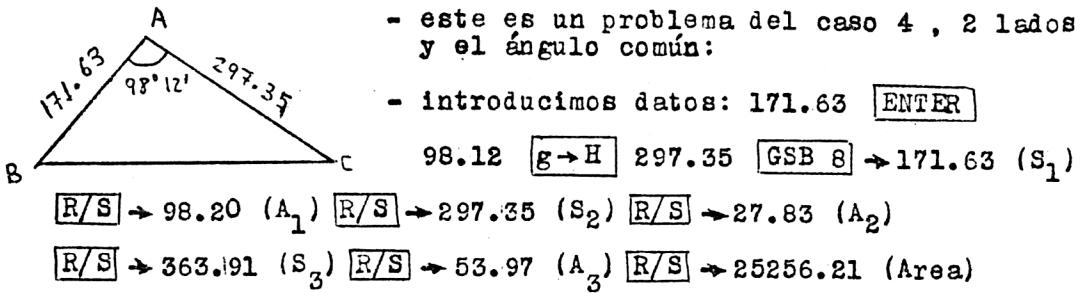
(7) Para revisar los datos calculados :

[GSB 2] → (ver \*)

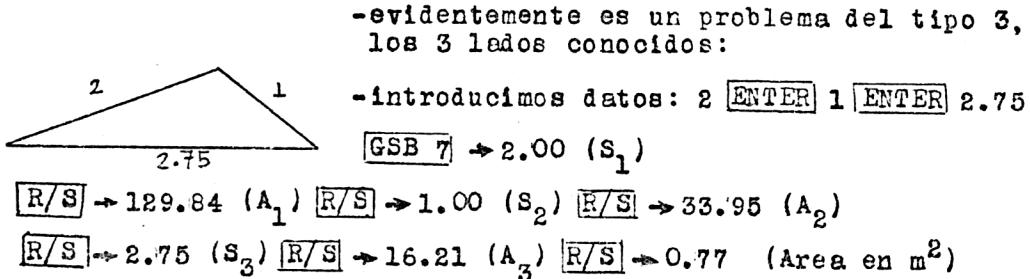
(8) Para otro caso, ir al paso adecuado.

3.- Ejemplos .-

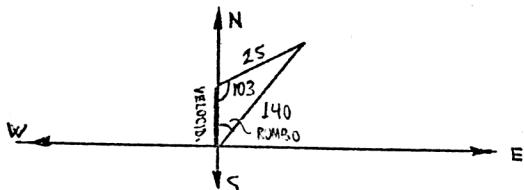
- (1) - Un agrimensor debe encontrar las dimensiones y area de una parcela de forma triangular. Se miden las distancias a B y C desde el punto A , utilizando un medidor electrónico. El ángulo entre AB y AC es medido asimismo. Se pide encontrar las restantes dimensiones y el area de la parcela.



- (2) - Hallar el area y los ángulos de un triángulo cuyos lados miden 2 m , 1 m , 2.75 m .



- (3) - Un piloto desea volar en dirección Norte. El servicio meteorológico reporta viento de velocidad 25 nudos en dirección 77°. Puesto que los vientos suelen indicarse en dirección contraria a la que soplan, esto se interpreta como  $77 + 180 = 257^\circ$ . La velocidad del avión es de 140 nudos. ¿Que rumbo debe tomar ? ¿Cuál es la velocidad respecto del suelo ?



Restando de 180 la dirección del viento, esto se reduce a un problema del tipo 5. ( $180 - 77 = 103$ )

- introducir datos: 140 [ENTER] 25 [ENTER] 103 [GSB 9]  $\rightarrow 140.00$  ( $S_1$ )  
 $\boxed{R/S} \rightarrow 66.98$  ( $A_1$ )  $\boxed{R/S} \rightarrow 25.00$  ( $S_2$ )  $\boxed{R/S} \rightarrow 103.00$  ( $A_2$ )  
 $\boxed{R/S} \rightarrow 132.24$  ( $S_3$ )  $\boxed{R/S} \rightarrow 10.02$  ( $A_3$ )  $\boxed{R/S} \rightarrow 1610.64$  (area)

es decir, el piloto debe tomar un rumbo de 10.02 ° hacia el NE, y su velocidad con respecto al suelo es de 132.24 nudos.

# HP 34 C

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY  | KEY CODE | COMMENTS  | STEP/<br>LINE   | KEY ENTRY  | KEY CODE | COMMENTS                              |
|---------------|------------|----------|---|-----------------|------------|----------|---------------------------------------|
| *             | LBL B      | 25.13.18 | caso S1, A2, A1                                   |                 | 2          | 2        | 2                                     |
|               | STO 4      | 23. 4    | $A_3 = \cos^{-1}(-\cos(A_1 + A_2))$               |                 | x          | 61       | $S_3 = (S_1 + S_2 - 2S_1S_2\cos A_1)$ |
|               | GSB 0      | 13. 0    |   |                 | RCL 5      | 24. 5    |                                       |
|               | RCL 4      | 24. 4    |   |                 | $x^2$      | 15. 3    |                                       |
| 5             | *          | LBL A    | 25.13.11  | caso S1, A3, A1 | RCL 3      | 24. 3    |                                       |
|               | STO 4      | 23. 4    | $A_2 = \cos^{-1}(-\cos(A_1 + A_3))$               |                 | $x^2$      | 15. 3    |                                       |
|               | $x \geq y$ | 21       |   |                 | +          | 51       |                                       |
|               | STO 0      | 23. 0    |   |                 | $x \geq y$ | 21       |                                       |
|               | GSB 0      | 13. 0    |   |                 | -          | 41       |                                       |
| 10            | STO 2      | 23. 2    |   |                 | $\sqrt{ }$ | 14. 3    |                                       |
|               | SIN        | 14. 7    | $S_2 = S_1 \sin A_3 / \sin A_2$                   |                 | STO 1      | 23. 1    |                                       |
|               | RCL 0      | 24. 0    |   |                 | RCL 5      | 24. 5    |                                       |
|               | SIN        | 14. 7    | $S_3 = S_1 \cos A_3 + S_2 \cos A_2$               |                 | RCL 3      | 24. 3    |                                       |
|               | $x \geq y$ | 21       |   |                 | RCL 1      | 24. 1    |                                       |
| 15            |            | 71       |   |                 | *          | LBL 7    | 25.13. 7                              |
|               | $x \geq y$ | 21       |   |                 | STO 1      | 23. 1    | caso S1, S2, S3                       |
|               | STO 5      | 23. 5    |   |                 | $x \geq y$ | 21       |                                       |
|               | x          | 61       |   |                 | STO 3      | 23. 3    |                                       |
|               | STO 3      | 23. 3    |   |                 | +          | 51       |                                       |
| 20            | RCL 2      | 24. 2    |   |                 | $x \geq y$ | 21       |                                       |
|               | COS        | 14. 8    |   |                 | STO 5      | 23. 5    |                                       |
|               | x          | 61       |   |                 | +          | 51       |                                       |
|               | RCL 5      | 24. 5    |   |                 | /          | 2        |                                       |
|               | RCL 0      | 24. 0    |   |                 | 71         |          |                                       |
| 25            | COS        | 14. 8    |   |                 | STO I      | 23.14.23 |                                       |
|               | x          | 61       |   |                 | RCL 3      | 24. 3    |                                       |
|               | +          | 51       |   |                 | -          | 41       |                                       |
|               | STO 1      | 23. 1    |   |                 | RCL I      | 24.14.23 |                                       |
| 30            | *          | LBL 2    | 25.13. 2  |                 | x          | 61       |                                       |
|               | 5          | 5        | subrutina de presentación:                        |                 | RCL 5      | 24. 5    |                                       |
|               | CHS        | 32       |   |                 | GSB 1      | 13. 1    |                                       |
|               | STO I      | 23.14.23 | presenta sucesivamente S1, A1                     |                 | STO 0      | 23. 0    |                                       |
| *             | LBL 3      | 25.13. 3 |   |                 | RCL I      | 24.14.23 |                                       |
|               | RCL (1)    | 24.14.24 | S2, A2, S3, A3                                    |                 | RCL 5      | 24. 5    |                                       |
| 35            | R/S        | 74       |   |                 | -          | 41       |                                       |
|               | ISG        | 15.24    | y finalmente calcula el area por la fórmula       |                 | RCL I      | 24.14.23 |                                       |
|               | GTO 3      | 22. 3    |   |                 | x          | 61       |                                       |
|               | RCL 5      | 24. 5    |   |                 | RCL 3      | 24. 3    |                                       |
|               | RCL 1      | 24. 1    |   |                 | GSB 1      | 13. 1    |                                       |
| 40            | x          | 61       | $A = \frac{S_1 S_3 \sin A_3}{2}$                  |                 | STO 2      | 23. 2    |                                       |
|               | RCL 0      | 24. 0    |   |                 | RCL 0      | 24. 0    |                                       |
|               | SIN        | 14. 7    |   |                 | GSB 0      | 13. 0    |                                       |
|               | x          | 61       |   |                 | STO 4      | 23. 4    |                                       |
|               | /          | 2        |   |                 | GTO 2      | 22. 2    |                                       |
| 45            | RTN        | 25.12    |   |                 | *          | LBL 9    | 25.13. 9                              |
| *             | LBL 8      | 25.13. 8 | caso S1, A1, S2                                   |                 | STO 2      | 23. 2    | caso S1, S2, A2                       |
|               | STO 3      | 23. 3    |   |                 | SIN        | 14. 7    |                                       |
|               | $x \geq y$ | 21       |   |                 | $x \geq y$ | 21       | $A_3 = \sin^{-1}((S_2 /$              |
| 50            | STO 4      | 23. 4    |   |                 | STO 3      | 23. 3    |                                       |
|               | COS        | 14. 8    | - se utilizan etiquetas A, B, 0, 1, 2, 3, 7, 8, 9 |                 |            |          |                                       |
|               | x          | 61       | - id. registros I, 0, 1, 2, 3, 4, 5               |                 |            |          |                                       |
|               | $x \geq y$ | 21       | - no id. ningun flag                              |                 |            |          |                                       |
|               | STO 5      | 23. 5    | - id. en total 132 pasos de programa              |                 |            |          |                                       |
| 55            | x          | 61       | - se recomienda moda FIX 2                        |                 |            |          |                                       |
|               |            |          | - id. moda DEG                                    |                 |            |          |                                       |

## REGISTERS

| 0 | A <sub>3</sub> | 1 | S <sub>3</sub> | 2 | A <sub>2</sub> | 3 | S <sub>2</sub> | 4 | A <sub>1</sub> | 5 | S <sub>1</sub> | 6 |  | 7 |  | 8 |  | 9 |
|---|----------------|---|----------------|---|----------------|---|----------------|---|----------------|---|----------------|---|--|---|--|---|--|---|
| 0 |                | 1 |                | 2 |                | 3 |                | 4 |                | 5 |                | 6 |  | 7 |  | 8 |  | 9 |

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS         | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS |
|---------------|-----------|----------|------------------|---------------|-----------|----------|----------|
| 105           | x         | 61       |                  | 160           |           |          |          |
|               | x>y       | 21       |                  |               |           |          |          |
|               | STO 5     | 23. 5    |                  |               |           |          |          |
| 4             | /         | 71       |                  |               |           |          |          |
|               | SIN-1     | 15. 7    |                  | 6             |           |          |          |
| 110           | STO 0     | 23. 0    |                  | 165           |           |          |          |
|               | RCL 2     | 24. 2    |                  |               |           |          |          |
|               | GSB 0     | 13. 0    |                  |               |           |          |          |
|               | STO 4     | 23. 4    |                  |               |           |          |          |
|               | RCL 5     | 24. 5    |                  |               |           |          |          |
| 115           | RCL 0     | 24. 0    |                  | 170           |           |          |          |
|               | RCL 4     | 24. 4    |                  |               |           |          |          |
|               | GTO A     | 22.11    |                  | 5             |           |          |          |
| *             | LBL 0     | 25.13. 0 |                  |               |           |          |          |
|               | +         | 51       |                  | 175           |           |          |          |
| 120           | COS       | 14. 8    |                  |               |           |          |          |
|               | CHS       | 32       |                  |               |           |          |          |
| .2            | COS-1     | 15. 8    |                  |               |           |          |          |
|               | RTN       | 25.12    |                  |               |           |          |          |
| 125           | LBL 1     | 25.13. 1 |                  |               |           |          |          |
|               | /         | 71       | subrutina auxil. |               |           |          |          |
|               | RCL 1     | 24. 1    |                  |               |           |          |          |
|               | /         | 71       |                  |               |           |          |          |
| ,1            | COS-1     | 14. 3    |                  |               |           |          |          |
|               |           | 15. 8    |                  |               |           |          |          |
| 130           | 2         | 2        |                  |               |           |          |          |
|               | x         | 61       |                  |               |           |          |          |
|               | RTN       | 25.12    |                  |               |           |          |          |
| 135           |           |          |                  |               |           |          |          |
| 0             |           |          |                  |               |           |          |          |
| 140           |           |          |                  |               |           |          |          |
| 9             |           |          |                  |               |           |          |          |
| 145           |           |          |                  |               |           |          |          |
| 2             |           |          |                  |               |           |          |          |
| 150           |           |          |                  |               |           |          |          |
| 155           |           |          |                  |               |           |          |          |
| 7             |           |          |                  |               |           |          |          |

REGISTERS

| 0 A <sub>3</sub> | 1 S <sub>3</sub> | 2 A <sub>2</sub> | 3 S <sub>2</sub> | 4 A <sub>1</sub> | 5 S <sub>1</sub> | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|---|---|---|---|
| 0                | 1                | 2                | 3                | 4                | 5                |   |   |   |   |

## TABLAS DE AMORTIZACION

1.- Descripción .- El programa puede imprimir una tabla completa de amortización de un préstamo, mostrando para cada periodo el monto correspondiente al interés , la parte correspondiente al capital, y el saldo pendiente.

Puede calcularse una tabla parcial entre dos periodos  $P_1, P_2$  , cualesquiera, e incluso para un único periodo . Al final del trabajo de tabulación se muestran los totales pagados en concepto de capital e intereses entre los dos periodos dados.

Conocido el tanto por ciento ,  $i\%$  , el pago periódico , PMT , y el monto del empréstito , PV , el programa genera una tabla de amortización entre dos periodos especificados ,  $P_1$  y  $P_2$  ( ó bien en un solo periodo, para lo cual basta hacer  $P_1 = P_2$  ) .

La tabla refleja para cada periodo  $P_i$  , comprendido entre  $P_1$  y  $P_2$  (ambos inclusivos) , el monto correspondiente al interés, el pagado en concepto de capital , así como el saldo pendiente, y una vez que todos los periodos han sido mostrados , aparece en pantalla el total pagado en conceptos de capital e intereses durante esos periodos.

### 2.- Utilización .-

(1) -introducir  $i\%$  , PMT , PV :

$i$  [ENTER] PMT [ENTER] PV [A]  $\rightarrow i$

(2) -introducir los periodos extremos, y calcular la tabla:

$P_1$  [ENTER]  $P_2$   $\rightarrow$  tabla de amortización

desde  $P_1 \leq P_k \leq P_2$  {

|              |                              |
|--------------|------------------------------|
| $P_k$        | (periodo k-ésimo)            |
| $\Sigma INT$ | (monto correspo. al interés) |
| $\Sigma PRN$ | ( id. id. al capital)        |
| $\Sigma BAL$ | (saldo pendiente)            |

y finalmente  $\rightarrow \Sigma INT$  (importe total pagado como interés)

$\rightarrow \Sigma PRN$  ( id. id. id. como capital)

- 3.- Notas .-
- para otros periodos con los mismos  $i\%$ ,PMT,PV, ir a (2) puesto que estos valores permanecen inalterados
  - para un único periodo  $P$  , hacer  $P_1 = P_2 = P$  . Entonces  $\Sigma INT$  y  $\Sigma PRN$  no tienen interés.
  - $i\%$  debe introducirse como tanto por 1 : es decir, 9% se introduce así: 0.09 . Igualmente , 148% se introduce como 1.48 ,etc.
  - para cambiar  $i\%$  , PMT , PV , ir a (1) ó almacenar el nuevo valor (o valores) en el registro(s) adecuado. (ver listados)

4.- Ejemplos .-

(1) (ejemplo tomado del folleto publicitario de la HP-92 INVESTCR)

Un inversionista desea comprar un almacén , y para ello recibe un préstamo de 100000 dólares , a un plazo de 20 años al 9 % de interés . Pretende generar una tabla de amortización para los primeros 5 años , suponiendo pagos anuales de 10954.65 dólares.

SOLUCION : - introducir el tipo de interés , el pago anual, y el valor del préstamo :

0.09 [ENTER] 10954.65 [ENTER] 100000 [A] → 0.09

-introducir periodos extremos:

|            |                          |       |           |   |
|------------|--------------------------|-------|-----------|---|
| 1 [ENTER]  | 5 [B]                    | → 1   | Periodo 1 | P |
| → 9000.00  | mondo corresp.al interés | INT   |           |   |
| → 1954.65  | mondo corresp.al capital | PRN   |           |   |
| → 98045.35 | saldo pendiente          | BAL   |           |   |
| → 2        | Periodo 2                | P     |           |   |
| → 8824.08  | mondo corresp.al interés | INT   |           |   |
| → 2130.57  | mondo corresp.al capital | PRN   |           |   |
| → 95914.78 | saldo pendiente          | BAL   |           |   |
| → 3        | Periodo 3                | P     |           |   |
| → 8632.33  | mondo corresp.al interés | INT   |           |   |
| → 2322.32  | mondo corresp.al capital | PRN   |           |   |
| → 93592.46 | saldo pendiente          | BAL   |           |   |
| → 4        | Periodo 4                | P     |           |   |
| → 8423.32  | mondo corresp.al interés | INT   |           |   |
| → 2531.33  | mondo corresp.al capital | PRN   |           |   |
| → 91061.13 | saldo pendiente          | BAL   |           |   |
| → 5        | Periodo 5                | P     |           |   |
| → 8195.50  | mondo corresp.al interés | INT   |           |   |
| → 2759.15  | mondo corresp.al capital | PRN   |           |   |
| → 88301.99 | saldo pendiente          | BAL   |           |   |
| → 43075.24 | total corresp.al interés | Σ INT |           |   |
| → 11698.01 | total corresp.al capital | Σ PRN |           |   |

Ahora, supongamos que el inversionista desea conocer los datos correspondientes al periodo 15. Pulsar:

|               |                          |       |            |   |
|---------------|--------------------------|-------|------------|---|
| -> 15 [ENTER] | [B]                      | → 15  | Periodo 15 | P |
| → 4422.74     | mondo corresp.al interés | INT   |            |   |
| → 6531.91     | mondo corresp.al capital | PRN   |            |   |
| → 42609.69    | saldo pendiente          | BAL   |            |   |
| → 4422.74     | total corresp.al interés | Σ INT |            |   |
| → 6531.91     | total corresp.al capital | Σ PRN |            |   |

Como puede verse , el programa duplica la función [AMORT] de la HP-92 INVESTOR . Las instrucciones PAUSE en los pasos 029, 034, 039, 044, 048 pueden duplicarse para una mayor permanencia del resultado en pantalla, o bien sustituirse por R/S

HP 34 C

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS   | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY      | KEY CODE | COMMENTS           |
|---------------|-----------|----------|--|---------------|----------------|----------|--------------------|
| *             | LBL A     | 25.13.11 |  |               | CHS            | 32       |                    |
|               | STO 3     | 23. 3    | almacena PV                                      |               | y <sup>X</sup> | 25. 3    | subrutina auxiliar |
|               | R↓        | 15.22    |  |               | STO 5          | 23. 5    |                    |
|               | STO 2     | 23. 2    | almacena PMT                                     |               | 1              | 1        |                    |
| 5             | R↓        | 15.22    |  | 60            | STO- 4         | 23.41. 4 |                    |
|               | STO 1     | 23. 1    | almacena i                                       |               | -              | 41       |                    |
|               | RTN       | 25.12    |  |               | RCL 1          | 24. 1    |                    |
| *             | LBL B     | 25.13.12 |  |               | /              | 71       |                    |
|               | EEX       | 33       | introduce P <sub>1</sub> .COP <sub>2</sub> en el |               | RCL 2          | 24. 2    |                    |
| 10            | 3         | 3        | registro índice                                  | 65            | x              | 61       |                    |
|               | /         | 71       | para llevar cuenta de los periodos               |               | RCL 3          | 24. 3    |                    |
|               | +         | 51       |  |               | +              | 51       |                    |
|               | STO I     | 23.14.23 |  |               | RCL 5          | 24. 5    |                    |
|               | 0         | 0        |  |               | /              | 71       |                    |
| 15            | STO 0     | 23. 0    |  | 70            | RTN            | 25.12    |                    |
|               | STO 6     | 23. 6    |  |               |                |          |                    |
| *             | LBL O     | 25.13. 0 |  |               |                |          |                    |
|               | RCL 1     | 24.14.23 |  |               |                |          |                    |
|               | INT       | 25.32    |  |               |                |          |                    |
| 20            | STO 4     | 23. 4    |  |               |                |          |                    |
|               | GSB 1     | 13. 1    |  |               |                |          |                    |
|               | ENTER     | 31       |  |               |                |          |                    |
|               | GSB 1     | 13. 1    |  |               |                |          |                    |
|               | -         | 41       |  |               |                |          |                    |
| 25            | RCL 2     | 24. 2    |  |               |                |          |                    |
|               | +         | 51       |  |               |                |          |                    |
|               | RCL I     | 24.14.23 |  |               |                |          |                    |
|               | FIX 0     | 14.11. 0 |  |               |                |          |                    |
|               | PAUSE     | 25.74    | presenta P                                       |               |                |          |                    |
| 30            | FIX 2     | 14.11. 2 |  |               |                |          |                    |
|               | RCL 2     | 24. 2    |  |               |                |          |                    |
|               | R↑        | 14.22    |  |               |                |          |                    |
|               | R↑        | 14.22    |  |               |                |          |                    |
|               | PAUSE     | 25.74    | presenta INT                                     |               |                |          |                    |
| 35            | STO+ 6    | 23.51. 6 |  |               |                |          |                    |
|               | x≥y       | 21       |  |               |                |          |                    |
|               | R↓        | 15.22    |  |               |                |          |                    |
|               | -         | 41       |  |               |                |          |                    |
|               | PAUSE     | 25.74    | presenta PRN                                     |               |                |          |                    |
| 40            | STO+ 0    | 23.51. 0 |  |               |                |          |                    |
|               | x≤y       | 21       |  |               |                |          |                    |
|               | LAST X    | 25. 0    |  |               |                |          |                    |
|               | R↑        | 14.22    |  |               |                |          |                    |
|               | PAUSE     | 25.74    | presenta BAL                                     |               |                |          |                    |
| 45            | ISG       | 15.24    |  |               |                |          |                    |
|               | GTO 0     | 22. 0    |  |               |                |          |                    |
|               | RCL 6     | 24. 6    |  |               |                |          |                    |
|               | PAUSE     | 25.74    | presenta ΣINT                                    |               |                |          |                    |
|               | RCL 0     | 24. 0    |  |               |                |          |                    |
| 50            | RTN       | 25.12    |  |               |                |          |                    |
| *             | LBL 1     | 25.13. 1 | -no se utiliza ningun flag                       |               |                |          |                    |
|               | RCL 1     | 24. 1    | -se utilizan las etiquetas A,B,O,1               |               |                |          |                    |
|               | 1         | 1        | id.  |               |                |          |                    |
|               | +         | 51       | id.  |               |                |          |                    |
| 55            | RCL 4     | 24. 4    | -se recomienda                                   |               |                |          |                    |
|               |           |          | id.  |               |                |          |                    |

## **REGISTERS**

| <sup>0</sup> Σ PRN | <sup>1</sup> <b>1</b> | <sup>2</sup> PMT | <sup>3</sup> PV | <sup>4</sup> P | <sup>5</sup> usado | <sup>6</sup> Σ INT | <sup>7</sup> | <sup>8</sup> | <sup>9</sup> |
|--------------------|-----------------------|------------------|-----------------|----------------|--------------------|--------------------|--------------|--------------|--------------|
| .6                 | .1                    | .2               | .3              | .4             | .5                 | .6                 | .7           | .8           | .9           |

## CALENDARIO

### 1.- Descripción .-

Este programa permite resolver la mayor parte de los problemas relacionados con fechas. Su rango de validez abarca desde el 1 de marzo de 1900 hasta el 28 de febrero de 2100. El programa tiene en consideración los años bisiestos y la diferente duración de los meses.

Sus funciones son las siguientes:

- dadas dos fechas cualesquiera , expresadas como DD.MMYYYY , halla el número de días que hay entre las dos.
- dada una fecha, y el número de días que la separan de otra fecha pasada o futura, halla esta segunda fecha.
- dada una fecha cualquiera, indica que día de la semana es, de acuerdo a la convención que se indicará:

#### convenciones:

-las fechas se introducen y se calculan como DD.MMYYYY donde:

DD = dia (1 a 31)  
MM = mes (01 a 12)  
YYYY = año (1900 a 2100)

-el día de la semana se representa con un nº de 1 a 7:

1 = LUNES, 2 = MARTES, ... , 7 = DOMINGO

### 2.- Utilización .-

(1) Introducir el programa ; ejecutar uno de estos 3 casos:

(2) para hallar los días entre fechas:

-introducir fechas: fecha<sub>1</sub> **ENTER** fecha<sub>2</sub> **A** → Δ (nº de días)

(3) para hallar una fecha a partir de otra y un nº de días entre ell:

-introducir datos: fecha<sub>1</sub> **ENTER** Δ **B** → fecha<sub>2</sub>

(4) para hallar que día de la semana es determinada fecha:

-introducir datos: fecha **GSB 7** → día de la semana (1=LUNES,etc)

(5) para otro caso, ir al paso adecuado

### 3.- Notas .-

- despues de (2) ó (3) los datos y resultados quedan almacenados así:

|    |                             |
|----|-----------------------------|
| R0 | Δ (nº de días entre fechas) |
| R1 | fecha <sub>1</sub>          |
| R2 | fecha <sub>2</sub>          |

-los datos se presentan siempre con la moda FIX adecuada: FIX 0 para nº de días y FIX 6 para fecha<sub>2</sub>.

-el Δ (nº de días) puede ser negativo, permitiendo el cálculo de fechas pasadas. Si fecha<sub>1</sub> es posterior a fecha<sub>2</sub>, el nº de días resultará negativo, y en caso contrario, positivo.

-es importante expresar los meses como 01, 02, ... 12. Suprimir el cero inicial será causa de error.

4.- Ejemplo.-

¿Cuantos dias hay de diferencia entre el 28 de febrero del 80 y el 1 de marzo del mismo año? &y si el año fuese el 79, en vez del 80 ?

28.021980 [ENTER] 1.031980 [A] → 2 dias (el 80 es bisiesto)

28.021979 [ENTER] 1.031979 [A] → 1 dia (el 79 , no )

¿Cuantos dias faltan para el año 2000 (hoy es 2 de nov. 79)?

2.111979 [ENTER] 1.012000 [A] - 7365 (faltan 7365 dias para el 2000)

¿Que fecha es 5000 dias a partir de hoy?

[RCL 1] 5000 [B] → 11.071993 , el 11 de julio de 1993

¿ Y 5000 dias hacia el pasado ?

[RCL 1] -5000 [B] → 23.021966 , el 23 de febrero de 1966

por cierto, el siglo XX acabara en: 31.121999 [GSB 7] → 5 (viernes)

HP 34 C

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS         | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS                      |
|---------------|-----------|----------|------------------|---------------|-----------|----------|-------------------------------|
| *             | LBL A     | 25.13.11 |                  | -             |           | 41       |                               |
|               | STO 2     | 23. 2    |                  | GSB 4         |           | 13. 4    | entre dos fechas es           |
|               | x ≥ y     | 21       |                  | x             |           | 61       |                               |
| 5             | STO 1     | 23. 1    |                  | INT           |           | 25.32    |                               |
|               | x ≥ y     | 21       |                  | 60            | +         | 51       |                               |
|               | GSB 0     | 13. 0    | se hallan D(1) y |               | +         | 51       |                               |
|               | STO 0     | 23. 0    | D(2), donde      |               | CF 0      | 25.61. 0 |                               |
|               | RCL 1     | 24. 1    | D=INT(365.25A)+  |               | RTN       | 25.12    |                               |
| 10            | GSB 0     | 13. 0    | + INT(30.6001M)+ | 65            | * LBL 1   | 25.13. 1 | subrutina aux.                |
|               | STO- 0    | 23.41. 0 | +D               |               | 1         | 1        |                               |
|               | RCL 0     | 24. 0    |                  |               | 2         | 2        | suma 12                       |
|               | FIX 0     | 14.11. 0 |                  |               | +         | 51       |                               |
|               | RTN       | 25.12    |                  |               | RTN       | 25.12    |                               |
| *             | LBL 7     | 25.13. 7 | calcula el dia   | *             | LBL B     | 25.13.12 | para calcular                 |
| 15            | GSB 0     | 13. 0    | de la semana:    | 70            | STO 0     | 23. 0    | una fecha pasada o futura, de |
|               | GSB 1     | 13. 1    |                  |               | x ≥ y     | 21       | da una fecha i                |
|               | 7         | 7        | hallar D(D), y   |               | STO 1     | 23. 1    | já y el incremen-             |
|               |           | 71       | entonces         |               | GSB 0     | 13. 0    | tamiento de días              |
| 20            | FRAC      | 25.33    |                  |               | RCL 0     | 24. 0    | entre ellas, s                |
|               | 7         | 7        | DDS=7xFRAC(D(D)  | 75            | +         | 51       | procede así:                  |
|               | x         | 61       |                  |               | STO 2     | 23. 2    |                               |
|               | x = 0     | 15.71    | +12)/7)          |               |           | 1        |                               |
|               | LAST X    | 25. 0    |                  |               |           | 2        |                               |
|               | FIX 0     | 14.11. 0 | y si DDS=0 → 7   |               |           | 2        |                               |
| 25            | RTN       | 25.12    |                  | 70            | .         | 73       | hallamos D(1)                 |
| *             | LBL 0     | 25.13. 0 | calcula D(D)     |               | 1         | 1        | por las fórmu-                |
|               | CF 0      | 25.61. 0 |                  |               | 2         | 2        | las anteriores                |
|               | INT       | 25.32    |                  |               | 2         | 2        | Sumamos el in-                |
|               | LAST X    | 25. 0    | por la formula   | 75            | -         | 41       | cremento y ten-               |
| 30            | FRAC      | 25.33    | expresada más    |               | GSB 4     | 13. 4    | mos D(2). Ahor                |
|               | EEX       | 33       | arriba, donde:   |               | STO 1     | 23.14.23 | hay que hallar                |
|               | 2         | 2        | A' = ANO-1 si    |               | /         | 71       | la fecha que                  |
|               | x         | 61       | m=1 ó 2          |               | INT       | 25.32    | 2                             |
| 35            | INT       | 25.32    | A' = ANO si m>2  |               | ENTER     | 31       | corresponde a                 |
|               | LAST X    | 25. 0    | M' = MES + 13 si |               | x ≥ 1     | 14.21    | ese D(2). Para                |
|               | FRAC      | 25.33    | m=1 ó 2          |               | x         | 61       | ello:                         |
|               | EEX       | 33       | M' = MES + 1 si  | 70            | INT       | 25.32    |                               |
|               | 4         | 4        |                  |               | STO- 2    | 23.41. 2 | A' = INT((D(2)-               |
| 40            | x         | 61       |                  |               | RCL 2     | 24. 2    | -122.1)/365.2                 |
|               | x ≥ y     | 21       |                  |               | GSB 3     | 13. 3    | M' = ((D(2)-INT               |
|               | 1         | 1        |                  | 75            | /         | 71       |                               |
|               | +         | 51       |                  |               | INT       | 25.32    |                               |
|               | 4         | 4        |                  |               | ENTER     | 31       |                               |
|               | x > y     | 14.51    |                  |               | GSB 3     | 13. 3    |                               |
| 45            | SF 0      | 25.51. 0 |                  |               | x         | 61       | 365.25A')/30.60               |
|               | R↓        | 15.22    |                  |               | INT       | 25.32    |                               |
|               | F? 0      | 25.71. 0 | entonces, el     | 100           | STO- 2    | 23.41. 2 | D = D(2)-INT(                 |
|               | GSB 1     | 13. 1    | número de dias   |               | x ≥ y     | 21       |                               |
|               | GSB 3     | 13. 3    |                  |               | 1         | 1        | 365.25A') - INT               |
| 50            | x         | 61       |                  |               | -         | 41       |                               |
|               | INT       | 25.32    |                  |               | 1         | 1        |                               |
|               | x ≥ y     | 21       |                  |               | -         | 41       |                               |
|               | 0         | 0        |                  |               | 1         | 1        | 30.6001M')                    |
|               | F? 0      | 25.71. 0 |                  |               |           |          |                               |
| 55            | eX        | 15. 1    |                  |               |           |          |                               |

## REGISTERS

| STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS | STEP/<br>LINE | KEY ENTRY | KEY CODE | COMMENTS |
|---------------|-----------|----------|----------|---------------|-----------|----------|----------|
| 105           | 3         | 3        |          | 160           |           |          |          |
|               | x≤y       | 14.41    |          |               |           |          |          |
|               | SF 0      | 25.51. C |          |               |           |          |          |
| 4             | R↓        | 15.22    |          |               |           |          |          |
|               | F? 0      | 25.71. C |          |               |           |          |          |
| 10            | GSB 2     | 13. 2    |          |               |           |          |          |
|               | F? 0      | 25.71. C |          |               |           |          |          |
|               | ISG       | 15.24    |          |               |           |          |          |
|               | ABS       | 25.34    |          |               |           |          |          |
|               | RCL I     | 24.14.23 |          |               |           |          |          |
| 115           | EEX       | 33       |          |               |           |          |          |
|               | 4         | 4        |          |               |           |          |          |
|               | /         | 71       |          |               |           |          |          |
|               | +         | 51       |          |               |           |          |          |
|               | EEX       | 33       |          |               |           |          |          |
| 120           | 2         | 2        |          |               |           |          |          |
|               | /         | 71       |          |               |           |          |          |
| 12            | STO+ 2    | 23.51. 2 |          |               |           |          |          |
|               | RCL 2     | 24. 2    |          |               |           |          |          |
|               | FIX 6     | 14.11. 6 |          |               |           |          |          |
| 125           | RTN       | 25.12    |          |               |           |          |          |
| *             | LBL 2     | 25.13. 2 |          |               |           |          |          |
|               | 1         | 1        |          |               |           |          |          |
|               | 2         | 2        |          |               |           |          |          |
|               | -         | 41       |          |               |           |          |          |
| 130           | RTN       | 25.12    |          |               |           |          |          |
| *             | LBL 3     | 25.13. 3 |          |               |           |          |          |
|               | 3         | 3        |          |               |           |          |          |
|               | 0         | 0        |          |               |           |          |          |
|               | .         | 73       |          |               |           |          |          |
| 135           | 6         | 6        |          |               |           |          |          |
|               | 0         | 0        |          |               |           |          |          |
|               | 0         | 0        |          |               |           |          |          |
|               | 1         | 1        |          |               |           |          |          |
|               | RTN       | 25.12    |          |               |           |          |          |
| 140           | *         | LBL 4    | 25.13. 4 |               |           |          |          |
|               | 3         | 3        |          |               |           |          |          |
|               | 6         | 6        |          |               |           |          |          |
|               | 5         | 5        |          |               |           |          |          |
|               | .         | 73       |          |               |           |          |          |
| 145           | 2         | 2        |          |               |           |          |          |
|               | 5         | 5        |          |               |           |          |          |
|               | RTN       | 25.12    |          |               |           |          |          |
| 150           |           |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |
|               |           |          |          |               |           |          |          |
| 155           |           |          |          |               |           |          |          |
| 7             |           |          |          |               |           |          |          |

REGISTERS

|   |   |   |         |   |         |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---------|---|---------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | Δ | 1 | Fecha 1 | 2 | Fecha 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 |   |   |         | 2 |         | 3 | 4 |   |   |   |   |   |



## **MATEMATICA AVANZADA**

CAMBIOS DE BASE  
FACTORES PRIMOS, MCD, DECIMAL A FRACCION  
ECUACION DE 4.<sup>o</sup> GRADO  
SISTEMAS DE ECUACIONES  
AREAS, LONGITUDES, VOLUMENES  
INTEGRALES DOBLES  
SUMA DE SERIES INFINITAS ALTERNADAS  
ECUACIONES DIFERENCIALES  
SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES  
OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS  
OPERACIONES VECTORIALES  
DETERMINANTE, ECUACION CARACTERISTICA  
INTERPOLACION  
AJUSTE DE DATOS  
ANALISIS ARMONICO  
RESOLUCION DE TRIANGULOS

