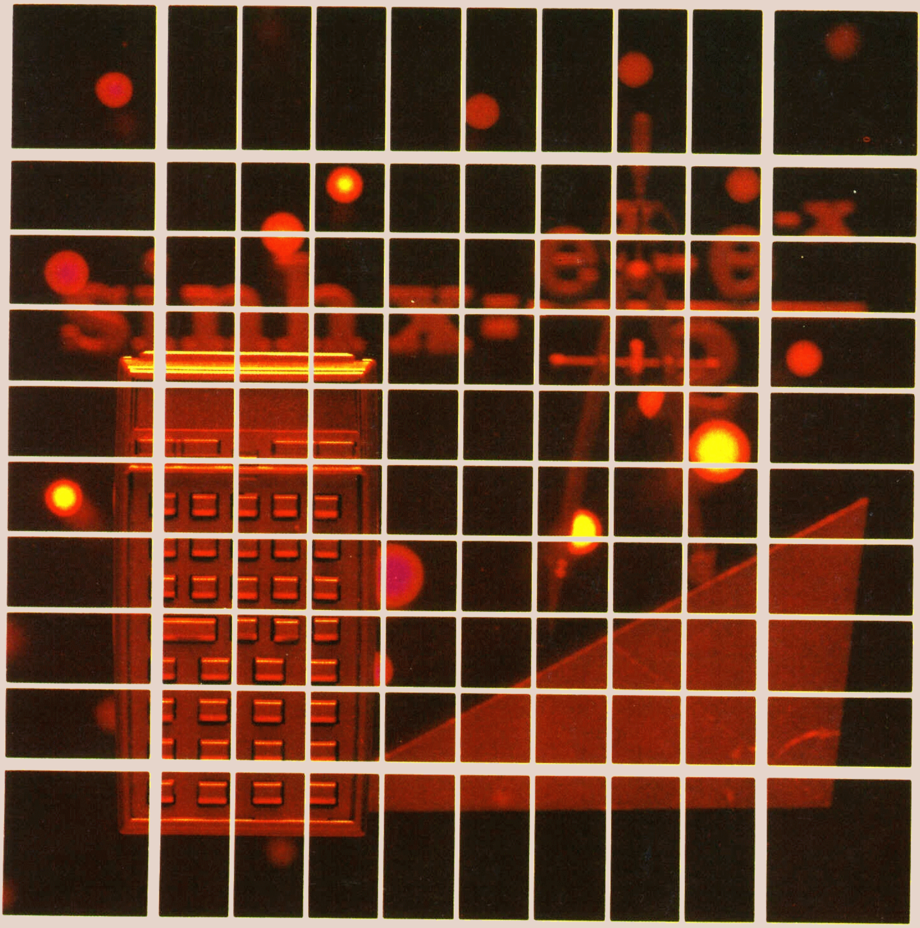
HEWLETT-PACKARD

HP-41C

PAQUETE DE MATEMATICAS



Contenido

Introducción

Los programas del Paquete Matemático (Math Pac) han sido diseñados para el campo del cálculo, análisis numérico, sistemas lineales, geometría analítica y funciones especiales. Cada programa de este paquete está representado por un programa en el módulo de aplicación y una sección en este manual. El manual suministra una descripción del programa con las ecuaciones más relevantes, un juego de instrucciones para utilizar el programa y uno o más ejemplos, cada uno de los cuales incluye una lista de las teclas necesarias para resolverlo.

Antes de conectar su módulo de aplicación, *apague el calculador,* y asegúrese que ha comprendido la sección inserción y extracción de los módulos de aplicación. Antes de utilizar un programa determinado, tómese unos minutos para leer el formato de instrucciones de usuario y unas palabras acerca de la utilización de programas.

Primero deberá familiarizarse con un programa haciéndole correr una o dos veces mientras sigue las instrucciones de usuario completas del manual. Después suministrará las instrucciones necesarias, incluyendo qué variables son las de entrada, qué teclas hay que pulsar, y qué valores son los de salida. Para mayor facilidad se suministra una tarjeta de consulta rápida con una breve descripción de las instrucciones de operación de cada programa.

Esperamos que el Paquete Matemático I, le ayudará en la solución de numerosos problemas de su asignatura.

Le agradeceremos sus comentarios a los programas de este paquete, y al final hay un cuestionario dentro de la tapa frontal del manual. ¿Le importaría tomarse unos minutos para darnos sus comentarios a estos programas? Gracias a sus comentarios es como aprendemos a incrementar la utilidad de nuestros programas.

Inserción y extracción de módulos de aplicación

Antes de introducir un módulo de aplicación por primera vez, debe familiarizarse con la siguiente información.
Hasta cuatro módulos de aplicación pueden conectarse en las ranuras del HP-41C. Mientras estén conectados, los nombres de los programas contenidos en el módulo pueden leerse pulsando ■ CATALOG 2.

Atención:
Apague siempre el HP-41C antes de introducir o extraer cualquier periférico o accesorio. En caso contrario pueden averiarse el calculador y el accesorio.

He aquí cómo deben introducirse los módulos de aplicación:

1. ¡Apague el HP-41C! En caso contrario pueden dañarse el módulo y el calculador.

2. Quite la tapa de la ranura. Recuerde guardar las tapas, deberán introducirse en las ranuras vacías, cuando no haya extensiones conectadas.

3. Con la etiqueta del módulo de aplicación mirando hacia abajo, introduzca el módulo de aplicación en cualquier ranura **después** del último módulo de memoria que se haya introducido. Las ranuras se muestran aquí numeradas, así como en la parte trasera del calculador.

4. Si tiene que introducir un módulo de aplicación adicional, conéctelo en cualquiera de las ranuras después del último módulo de memoria. Por ejemplo, si tiene un módulo de memoria en la ranura 1, puede introducir módulos de aplicación en cualquiera de las ranuras 2, 3 ó 4. **Nunca introduzca un módulo de aplicación en un número de ranura inferior al de un módulo de memoria.** Asegúrese de colocar las tapas en las ranuras no utilizadas.

5. Encienda el calculador y siga las instrucciones dadas en este libro para las funciones de aplicación deseadas.

Para extraer módulos de aplicación:

1. ¡Apague el HP-41C! En caso contrario pueden averiarse el calculador y el módulo.

2. Empuñe el mango del módulo deseado, y tire, tal como se muestra.

3. Coloque una tapa en la ranura vacía.

Mezcla de módulos de memoria y módulos de aplicación

Siempre que desee introducir otras extensiones (tal como el HP-82104A (lector de tarjetas), o el HP-82143A (impresora) el HP-41C ha sido diseñado para que los módulos de memoria estén en una ranura de numeración inferior.

Así, cuando se usen a la vez módulos de aplicación, los módulos de memoria deben introducirse siempre en las ranuras, con numeración más baja y los módulos de aplicación en cualquiera de las ranuras después del último módulo de memoria. Cuando mezcle módulos de memoria y aplicación, el HP-41C le permite dejar huecos en la secuencia de ranuras. Por ejemplo, puede conectar un módulo de memoria en la ranura 2 y un módulo de aplicación en la ranura 4, dejando las ranuras 2 y 3 vacías.

Formato de instrucciones de usuario

El formato de instrucciones de usuario completado, que acompaña a cada programa, es un guía para operar con los programas de este paquete.
El formato está compuesto de cinco columnas. Leyendo de izquierda a derecha, la primera columna, etiquetada *Nº*, da el número de paso de la instrucción.
La columna *Instrucciones* da las instrucciones y comentarios relativos a las operaciones a realizar.
La columna de *Datos* especifica los datos de entrada, las unidades de datos cuando se aplique, o la respuesta alfabética apropiada a una pregunta rápida. Las teclas de datos son las del 0 al 9 y la coma (teclas numéricas), [EEX] (entrada exponente) y [CHS] (cambio de signo).
La columna *Teclas* especifica las teclas que hay que pulsar después de teclear el correspondiente dato de entrada.
Siempre que una frase de la columna *Datos* o *Teclas* está impresa en dorado, la tecla [ALPHA] debe pulsarse antes que la frase se teclee. Después de teclear la frase, pulsar [ALPHA] de nuevo para poner al calculador en un modo operativo normal, o al empezar una ejecución de programa. Por ejemplo: [XEQ] FOUR significa pulsar las teclas: [XEQ] [ALPHA] FOUR [ALPHA].
La columna *Resultados* da las respuestas intermedias y finales, y sus unidades, cuando sea aplicable.
Por encima de la columna *Resultados* hay un recuadro que especifica el número mínimo de registros necesarios para ejecutar el programa, *Consulte las páginas 73 y 117 del Manual de Instrucciones* para una mejor descripción de cómo dimensionar la memoria del calculador.
El siguiente ejemplo ilustra el formato de instrucciones de usuario en el caso de series de fourier.

				Reg.: 027
Nº	**Instrucciones**	**Datos**	**Teclas**	**Resultados**
1	Iniciar programa.		[XEQ] FOUR	NO.SAMPLES= ?
2	Teclear número de muestras en un período.	# muestras	[R/S]	NO. FREQ. = ?
3	Teclear número de frecuencias deseadas.	# frec.	[R/S]	1ST COEFF = ?
4	Teclear el orden del primer coeficiente (J).	J	[R/S]	Y1 = ?
5	Entrar y_n, n=1, ..., N.	y_n	[R/S]	Y2 = ? ... RECT?
6	Repetir el paso 5 hasta que el resultado de RECT?			

				Reg.: 027
Nº	Instrucciones	Datos	Teclas	Resultados
7	Si la respuesta es sí, pulsar [R/S] para mostrar los coeficientes para J≤K≤J+#frec. en forma rectangular.		[R/S] [R/S]	a_k= b_k=
	Si la respuesta es no (N) muestra los coeficientes en forma polar. Pulsando [R/S] muestra los sucesivos coeficientes.	N	[R/S] [R/S]	c_k= ∢ k=
8	Para calcular el valor de la serie de Fourier en t, poner el modo USER y teclear t.	t	[USER] [E]	f(t)

Unas palabras acerca de la utilización de programas

Catálogo
Cuando un módulo de aplicación se conecta en una ranura del HP-41C, el contenido del módulo puede revisarse pulsando (catálogo de extensión) ■ CATALOG 2. Al ejecutar la tecla CATALOG lista el nombre de cada programa o teclas en el módulo, así como las teclas de cualquier otra extensión que haya sido conectada.

Carátulas de caracteres especiales
Han sido incluídos carátulas para algunos de los programas de este paquete.
Para correr el programa, escoja la apropiada carátula, y colóquela en el calculador. Las abreviaturas en la carátula se suministran para ayudarle a correr un programa. El nombre del programa viene dado verticalmente en el lado izquierdo. Las abreviaturas en azul se relacionan con la tecla inmediatamente inferior cuando la carátula está colocada, y el calculador está en modo USER. Las abreviaturas doradas son similares a las azules, excepto que están por encima de la tecla relativa y que debe pulsarse la tecla dorada antes de la tecla re-definida. De nuevo debe colocarse en modo USER.

Notación de modo ALPHA y USER
Este manual utiliza una notación especial para indicar el modo ALPHA (alfabético). Siempre que una frase del formato de instrucciones de usuarios esté impresa en dorado, la tecla ALPHA debe pulsarse antes de teclear la frase. Después de teclear la frase, pulsar ALPHA de nuevo para poner el calculador en su modo operativo normal, o al empezar una ejecución de programa. Por ejemplo, XEQ FOUR significa pulsar las teclas: XEQ ALPHA FOUR ALPHA.
En el modo USER, cuando se refiere a las dos filas superiores de teclas (las teclas han sido re-definidas), este manual usará los símbolos A – J y ■ A – ■ E en el formato de instrucciones de usuario y en las teclas de los ejemplos.

Utilización opcional de impresora
Cuando la impresora opcional esté conectada en el HP-41C junto con el módulo de aplicaciones de Paquete Matemático, todos los resultados saldrán automáticamente impresos. Se puede así conservar un registro permanente de los datos de entrada de un determinado programa. Un modo conveniente para hacer esto, es colocar el interruptor Print Mode en NORMAL antes de correr el programa. De este modo todos los datos de entrada y las correspondientes teclas se listarán en la impresora, suministrando un registro de toda la operación del programa.

Utilización de programas como subrutinas

Los programas del Paquete Matemático pueden ser llamados como subrutinas de los programas de usuarios en la memoria del programa del HP-41C. Consulte el apéndice B para información sobre puntos de llamada de subrutina especial.

Descarga de programas de módulo

Si desea seguir una ejecución, modificar, grabar en tarjeta magnética o escribir un programa en este módulo de aplicación debe primero copiarse en la memoria del programa del HP-41C. Para información referente a la función COPY, ver el Manual de Instrucciones. *No* es necesario copiar un programa en el mismo orden que va a correr.

Interrupción del programa

Estos programas han sido diseñados para funcionar correctamente cuando corren desde el principio al final sin apagar el calculador (recuerde que el calculador puede apagarse solo). Si el HP-41C se apaga, es necesario activar la bandera 21 (SF21) para continuar con una ejecución normal.

Uso de etiquetas

El usuario debe tener en cuenta los posibles problemas cuando escriba programas en la memoria del calculador si utiliza etiquetas alfabéticas idénticas a las del módulo de aplicación.

Operaciones con matrices

Este programa calcula el determinante y la matriz inversa de una matriz de hasta 14×14 elementos, así como la resolución de un sistema de 14 ecuaciones con 14 incógnitas.
El método utilizado en este programa es el de la eliminación de Gauss con eje arbitrario. Razones de espacio no permiten un estudio a fondo de las ecuaciones correspondientes, para lo cual se suministran unas referencias sobre la teoría de matrices.
La eliminación de Gauss es una serie de operaciones con filas que se dividen en dos partes: la de eliminación y la de solución.
En la primera parte, el programa toma una matriz A de N x N y la transforma en una matriz triangular superior U, suponiendo que A no es singular. Los multiplicadores utilizados para efectuar esta transformación forman una matriz triangular inferior L, cuya diagonal está llena de 1. Si no se tiene en cuenta el giro, una técnica de permutación de filas puede mejorar la precisión en el caso de muchos sistemas de ecuaciones, la relación entre estas matrices es U=LA. Al final de la ejecución de la primera parte del programa, la bandera anunciadora 4 se apaga, y la matriz inicial A ya no está en memoria. La segunda parte, de la solución, utiliza las matrices transformadas U y L para calcular el determinante y la inversa de A, así como para resolver los sistemas de ecuaciones.

Ecuaciones:

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix}$$

El determinante de A, Det A, se halla después de su transformación en U por el producto de los elementos diagonales:

$$\text{Det } A = (-1)^k U_{11} U_{22} U_{33} U_{44} U_{55},$$

donde k es el número de permutaciones de filas exigidas por el giro.
Sea C la inversa de A, es decir la matriz 5x5, tal que AC = CA = I, donde I es la matriz 5x5 tal que:

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

C está determinando por columna por el procedimiento siguiente:
sea $c^{(j)}$ el jésimo vector columna de C, p.e.,

$$\mathbf{c}^{(j)} = \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ c_{3j} \\ c_{4j} \\ c_{5j} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5$$

Entonces $\mathbf{c}^{(j)}$ está determinado como solución de la ecuación

$$\mathbf{A}\mathbf{c}^{(j)} = \mathbf{I}^{(j)} \text{donde } \mathbf{I}^{(j)} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

Por ejemplo, $\mathbf{c}^{(j)}$ está determinado como solución de

$$\mathbf{A}\mathbf{c}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Un sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas, puede escribirse como

$$\begin{aligned}
A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + A_{14}x_4 + A_{15}x_5 &= B_1 \\
A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + A_{24}x_4 + A_{25}x_5 &= B_2 \\
A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + A_{34}x_4 + A_{35}x_5 &= B_3 \\
A_{41}x_1 + A_{42}x_2 + A_{43}x_3 + A_{44}x_4 + A_{45}x_5 &= B_4 \\
A_{51}x_1 + A_{52}x_2 + A_{53}x_3 + A_{54}x_4 + A_{55}x_5 &= B_5,
\end{aligned}$$

donde $\{x_i\}$ son incógnitas y $\{B_i\}$ constantes.

En notación matricial, $A\mathbf{x} = \mathbf{B}$, donde $\mathbf{x}$ y $\mathbf{B}$ son vectores columna

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{bmatrix}$$

respectivamente.

El problema se resuelve (despreciando el giro) como $U\mathbf{x} = \mathbf{LB}$.

Observaciones:

- Una parada durante la ejecución del programa con la pantalla **NO SOLUTION** índica que la matríz es singular.
- El programa está diseñado para una matríz de 14x14, sin embargo, a partir de matrices superiores a 6x6 se necesitan módulos de memoria Consulte el diagrama de registros matriciales para las necesidades de registros de las distintas matrices.
- El módulo matemático debe colocarse en una ranura después del último módulo de memoria.
- Si los elementos de la matríz A están ya almacenados en los registros apropiados, la orden en el registro 14 (R_{14}), la bandera 04 puesta, y las banderas 06–10 quitadas, el impulso inicial puede evitarse y la matriz girada pulsando XEQ PVT. Para resolver un sistema de ecuaciones, los registros de ecuaciones deben estar almacenados y la bandera 05 puesta.
- Si a DET se le llama como subrutina, el valor del determinante volverá al registro **Y**.
- Cuando se teclean los elementos de la matriz, no se puede actuar en el registro **Y**.
- Los mejores resultados se obtienen cuando la matriz está bien acondicionada.

Bibliografía:

Carnahan, Luther and Wilkes, *Applied Numerical Methods,* John Wiley and Sons, 1969.

George E. Forsythe, Michael A. Malcolm, and Cleve B. Moler, *Computer Methods in Mathematical Computation,* Computer Science Department, Stanford University, 1972.

G. Forsythe and C. Moler, *Computer Solution of Linear Algebraic Systems,* Prentice-Hall, 1967.

C. Moler, *"Matrix Computations with Fortran and Paging",* Comm. ACM, vol. 15, no. 4, pp. 268-270 (April, 1972).

				Reg.: 000
Nº	Instrucciones	Datos	Teclas	Resultados
1	Iniciar programa.		XEQ MATRIX	ORDER=?
2	Teclear orden (N) de la matriz (N 14).	N	R/S	SET SIZE nnn
3	Poner dimensión y continuar.		XEQ SIZE nnn R/S	 A1, 1=?
4	Entrada de elementos de la matriz por orden de filas (A_{11}, A_{12}, A_{13}, …, A_{21}, A_{22}, A_{23}, …, etc.).	A_{11} A_{12} . . .	R/S R/S . . .	A1, 2=? A1, 3=? . . .

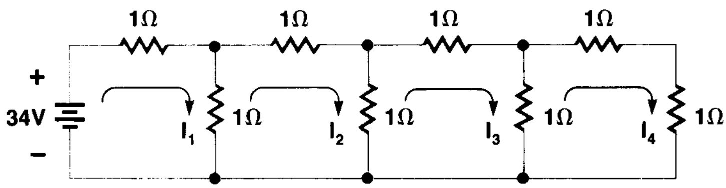
				Reg.: 000
Nº	**Instrucciones**	**Datos**	**Teclas**	**Resultados**
5	Repetir el paso 4 hasta teclear todos los elementos de la matriz.	A_{NN}	[R/S]	0.0000
6	(Opcional) Ver la matriz.		[XEQ] VMAT [R/S] . . . [R/S]	A1, 1= A1, 2= . . . AN, N=
7	(Opcional) Editar la matriz.		[XEQ] EDIT	ROW↑COL=?
7a	Entrada de la fila (I) y columna (J) del elemento a cambiar.	I J	[ENTER↑] [R/S]	 AI, J=?
7b	Teclear nuevo valor.	A_{IJ}	[R/S] * [R/S] *	AI, J= ROW↑COL=?
7c	Repetir 7a y 7b las veces necesarias.			
7d	Parar edición.		[R/S]	0.0000
8	Calcular el determinante.		[XEQ] DET	DET=
9	Encontrar la inversa (por orden de columna).		[XEQ] INV [R/S] . . . [R/S]	C1, 1= C2, 1= . . . CN, N=
10	Para resolver sistemas de ecuaciones, entrar la matriz columna.	 B_1 . . . B_N	[XEQ] SIMEQ [R/S] . . . [R/S]	B1=? B2=? . . . 0.0000
11	Resolver el sistema.		[R/S] . . . [R/S]	X1= . . . XN=
11	(Opcional) Ver la columna.		[XEQ] VCOL [R/S] . . . [R/S]	B1= B2= . . . BN=
	* Cuando no se utiliza la impresora, se necesita un [R/S] adicional.			

Ejemplo 1:
Hallar el determinante y la inversa de la matriz siguiente.

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -6 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Teclas:	Resultados:	
[XEQ] [ALPHA] MATRIX [ALPHA] →	**ORDER=?**	
5 [R/S] →	**SET SIZE 50**	(Asume que hay menos de 50 registros disponibles)
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 050		
[R/S] →	**A1, 1=?**	
6 [R/S] 3 [R/S] 2 [CHS] [R/S] 2 [R/S]		
3 [R/S] 1 [R/S] 4 [R/S] 3 [CHS] [R/S]		
4 [R/S] 2 [R/S] 2 [R/S] 3 [R/S]		
1 [CHS] [R/S] 2 [CHS] [R/S] 9 [R/S]		
4 [R/S] 3 [R/S] 0 [R/S] 2 [R/S] 1 [R/S]		
3 [R/S] 5 [R/S] 6 [CHS] [R/S]		
6 [R/S] 2 [R/S] →	**0.0000**	
[XEQ] [ALPHA] DET [ALPHA] →	**DET=–200,000**	(Det A)
[XEQ] [ALPHA] INV [ALPHA] →	**C1, 1=0,2000**	
[R/S] →	**C2, 1=–1,7500**	
[R/S] →	**C3, 1=0,7000**	
[R/S] →	**C4, 1=1,7250**	
[R/S] →	**C5, 1=1,0000**	
[R/S] →	**C1, 2=–0,1200**	
[R/S] →	**C2, 2=–2,0000**	
[R/S] →	**C3, 2=1,2800**	
[R/S] →	**C4, 2=2,5400**	
[R/S] →	**C5, 2=1,4000**	
[R/S] →	**C1, 3=–0,0400**	
[R/S] →	**C2, 3=0,5000**	
[R/S] →	**C3, 3=–0,2400**	
[R/S] →	**C4, 3=–0,5700**	
[R/S] →	**C5, 3=–0,2000**	
[R/S] →	**C1, 4=–6,0000 E–10**	
[R/S] →	**C2, 4=1,7500**	
[R/S] →	**C3, 4=–0,5000**	
[R/S] →	**C4, 4=–1,6250**	
[R/S] →	**C5, 4=–1,0000**	
[R/S] →	**C1, 5=–1,0000 E–10**	
[R/S] →	**C2, 5=1,5000**	
[R/S] →	**C3, 5=–1,0000**	
[R/S] →	**C4, 5=–1,7500**	
[R/S] →	**C5, 5=–1,0000**	

Ejemplo 2:
Por aplicación de las técnicas de las corrientes de bucle, en el circuíto inferior, hallar las corrientes I_1, I_2, I_3 e I_4.



Las ecuaciones a resolver son:

$$
\begin{array}{ccccccc}
2I_1 & -I_2 & & & = & 34 \\
-I_1 & +3I_2 & -I_3 & & = & 0 \\
 & -I_2 & +3I_3 & -I_4 & = & 0 \\
 & & -I_3 & +3I_4 & = & 0
\end{array}
$$

En forma matricial,

$$
\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 34 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Teclas:	**Resultados:**	
[XEQ] [ALPHA] MATRIX [ALPHA] →	**ORDER=?**	
4 [R/S] →	**A1, 1=?**	(Asume que la dimensión esta todavía en 050)
2 [R/S] 1 [CHS] [R/S] 0 [R/S] 0 [R/S]		
1 [CHS] [R/S] 3 [R/S] 1 [CHS] [R/S]		
0 [R/S] 0 [R/S] 1 [CHS] [R/S] 3 [R/S]		
1 [CHS] [R/S] 0 [R/S] 0 [R/S]		
1 [CHS] [R/S] 3 [R/S] →	**0,0000**	
[XEQ] [ALPHA] SIMEQ [ALPHA] →	**B1=?**	
34 [R/S] 0 [R/S] 0 [R/S] 0 [R/S] →	**0,0000**	
[R/S] →	**X1=21,0000**	
[R/S] →	**X2=8,0000**	
[R/S] →	**X3=3,0000**	
[R/S] →	**X4=1,0000**	

Resolución de $f(x) = 0$ en un intervalo

Este programa utiliza una modificación del algoritmo iterativo de secante para hallar una raíz real de la ecuación $f(x) = 0$. El usuario debe suministrar la ecuación a resolver y puede dar también dos valores indicativos (x_1 y x_2) que se suponen se aproximan a la solución deseada. Si el intervalo inicial no viene especificado, el programa asume como valores iniciales los de 1 y 10. Si $f(x_1) \cdot f(x_2) \leqslant 0$ y la función es contínua en el intervalo, el programa hallará siempre una raíz. Si $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$, la obtención de la raíz no puede asegurarse. Cuando en un intervalo existe más de una raíz, una de ellas se hallará, y el usuario puede entonces elegir un intervalo menor y repetir el programa.

La función f(x) puede teclearse en la memoria del programa utilizando una etiqueta **alfanumérica** (máximo 6 caracteres), y tener en cuenta que al entrar x estará en el registro **X**. Pueden cargarse a la vez varias funciones en la memoria del programa, en el momento en que el programa pide al usuario el nombre de la función a evaluar. El programa utiliza los registros 00–06. Los registros libres y los operacionales están disponibles para definir f(x).

				Reg.: 007
Nº	Instrucciones	Datos	Teclas	Resultados
1	Prepararse a teclear la función (s).		[GTO] [•] [•]	
2	Seleccionar el modo PRGM, cargar la función bajo la etiqueta deseada; añadir [RTN]; anular el modo PRGM.		[PRGM] [LBL] __ . . . [RTN] [PRGM]	
3	Iniciar programa.		[XEQ] SOLVE	FUNCTION NAME?
4	Teclear el nombre de la función (el modo ALPHA se pone en el paso 3)	Name	[R/S]	GUESS 1=?
5	Si desea dar dos valores indicativos, teclee el primero. En caso contrario vaya al paso 7.	x_1	[R/S]	GUESS 2=?
6	Teclee el segundo valor indicativo.	x_2	[R/S]	(See Note)
7	Ejecute el programa.		[R/S]	(See Note)
8	Para hallar otra raíz, pulse [R/S]. Para un caso nuevo, vaya al paso 1 ó al 3. **Nota:** Hay tres formas de acabar normalmente el programa. Se muestran con los siguientes mensajes: 1) NO ROOT FOUND (sin encontrar raíz) 2) ROOT IS < Valor > (La raíz es:) 3) ROOT IS BETWEEN < Valor 1 > AND < Valor 2 > (La raíz está entre ... y ...)			
9	Para utilizarlo como subrutina (cuando los valores indicativos han sido ya almacenados) los pasos 3 al 9 pueden saltarse pulsando [XEQ] SOL.			

Ejemplo 1:
Hallar las raíces de $\ln x + 3x - 10.8074 = 0$. Utilizar LBL FF para definir f(x).

Teclas:	Resultados:
XEQ ALPHA SIZE ALPHA 007	
GTO • •	
PRGM	
LBL ALPHA FF ALPHA	
LN	
LAST x	
3 × +	
10.8074 −	
RTN	
PRGM	
XEQ ALPHA SOLVE ALPHA →	FUNCTION NAME?
FF R/S →	GUESS 1=?
R/S →	ROOT IS 3,2134

Ejemplo 2:
Hallar un ángulo α entre 100 y 101 radianes tal que $\text{sen}\,\alpha = 0.01$.
Sea $f(x) = \text{sen}\,x - 0.01$ y usar LBL ANGLE.

Teclas:	Resultados:
GTO • •	
PRGM	
LBL ALPHA ANGLE ALPHA	
XEQ ALPHA RAD ALPHA	
SIN	
.01 −	
XEQ ALPHA DEG ALPHA	
RTN	
PRGM	
XEQ ALPHA SOLVE ALPHA →	FUNCTION NAME?
ANGLE R/S →	GUESS 1=?
100 R/S →	GUESS 2=?
101 R/S →	ROOT IS BETWEEN 100,5410 AND 100,5410

Para ver la respuesta con más digítos significativos, pulsar FIX 9 y x≷y.

Ejemplo 3:
Hallar las raíces de $x^2 + 1 = 0$, utilizando LBL CC.

Teclas:	Resultados:
GTO • •	
PRGM	
LBL ALPHA CC ALPHA	
x^2 1 +	
RTN	
PRGM	
XEQ ALPHA SOLVE ALPHA →	FUNCTION NAME?
CC R/S →	GUESS 1=?
R/S →	NO ROOT FOUND

Raíces de un polinomio

Este programa halla todas las raíces con coeficientes reales de un polinomio de grado 5 y menor, cuyo coeficiente de mayor grado es 1. La ecuación es de la forma:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0, \qquad n = 2, 3, 4 \text{ ó } 5.$$

Si el primer coeficiente no es igual a 1, es necesario convertirlo en 1, dividiendo toda la ecuación por dicho coeficiente.
Los polinomios pueden evaluarse (ver el valor que toman) para valores arbitrarios de x. Es muy útil para el dibujo de curvas polinómicas y para el uso de correlaciones de datos basados en polinomios.
Cuando el programa se inicia, el usuario debe especificar el grado (n) del polinomio. El calculador pedirá los coeficientes a_{n-1}, . . ., a_1, a_0. El cero deberá introducirse en aquellos coeficientes que sean nulos. Los registros 00–04 se usan para almacenar los coeficientes.

Ecuaciones:
Los programas para las ecuaciones de tercer y quinto grado utilizan una rutina iterativa para hallar una raíz real de la ecuación. Esta rutina exige que el término constante a_0 no sea cero para estas ecuaciones. (Si $a_0 = 0$, entonces el cero es una raíz real y puede reducir la ecuación en un grado).
Una vez que se ha hallado una raíz, se efectúa una división para reducir la ecuación inicial a una de segundo o cuarto grado.
Para resolver una ecuación de cuarto grado, es necesario resolver previamente la siguiente ecuación de tercer grado:

$$y^3 + b_2y^2 + b_1y + b_0 = 0$$

donde $b_2 = -a_2$
$b_1 = a_3a_1 - 4a_0$
$b_0 = a_0\,(4a_2 - a_3^2) - a_1^2.$

Sea y_0 la mayor raíz real de la ecuación precedente.
Entonces la ecuación de cuarto grado se reduce a las dos ecuaciones de segundo grado siguientes:

$$x^2 + (A + C)x + (B + D) = 0$$
$$x^2 + (A - C)x + (B - D) = 0$$

donde $A = \frac{a_3}{2}$, $B = \frac{y_0}{2}$, $D = \sqrt{B^2 - a_0}$, $C = \sqrt{A^2 - a_2 + y_0}$

Las raíces de la ecuación de cuarto grado se calcula con la resolución de las dos ecuaciones de segundo grado.

Una ecuación de segundo grado $x^2 + a_1x + a_0 = 0$, admite como raíz, $x_{1,2} =$

$$- \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}. \text{ Si } D = \frac{a_1^2}{4} - a_0 > 0,$$

las raíces son reales; Si $D < 0$ las raíces son complejas, con

$$u \pm iv = - \frac{a_1}{2} \pm i\sqrt{-D}.$$

Una raíz real viene dada por un número único. Las raíces complejas aparecen siempre en paras de la forma $u \pm iv$, y van etiquetadas a la salida.

Observaciones:

- Para las raíces de grado 3, 4 ó 5 puede esperarse un tiempo largo de ejecución, ya que utilizan una rutina iterativa una o mas veces.
- El programa usa los registros 00–22.

				Reg.: 023
Nº	**Instrucciones**	**Datos**	**Teclas**	**Resultados**
1	Iniciar programa.		[XEQ] POLY	DEGREE=?
2	Teclear grado del polinomio (n=2, 3, 4, 5).	n	[R/S]	a(n–1)=?
3	Introducir coeficiente a_{n-1} del polinomio. Los coeficientes=0 deben asimismo introducirse. Repetir hasta que la pantalla pida el a_0.	a_{n-1} . . . a_1	[R/S] [R/S]	a(n)–2)=? a0=?
4	Introducir el coeficiente a_0.	a_0	[R/S]	ROOTS?
5	Para hallar las raíces del polinomio, pulsar [R/S] para ver las sucesivas raíces adecuadamente etiquetadas. Ir al paso 9.		[R/S] [R/S] [R/S] [R/S] [R/S]	ROOT= U= V= U= –V=
6	Para evaluar el polinomio responder no (N).	N	[R/S]	X=?
7	Introducir x y ver f(x).	x	[R/S]	F<X>=
8	Para una nueva x introducirla y pulsar [R/S].	x	[R/S]	F<X>=
9	Para un nuevo polinomio de igual grado, ir al paso 1 o cambiar los coeficientes necesarios (registros 00–04) y [XEQ] ROOTS.			

Ejemplo 1:

Hallar las raíces de $x^5 - x^4 - 101x^3 + 101x^2 + 100x - 100 = 0$.

Teclas:	Resultados:	
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 023		
[XEQ] [ALPHA] POLY [ALPHA] →	DEGREE=?	
5 [R/S] →	a4=?	
1 [CHS] [R/S] →	a3=?	
101 [CHS] [R/S] →	a2=?	
101 [R/S] →	a1=?	
100 [R/S] →	a0=?	
100 [CHS] [R/S] →	ROOTS?	
[R/S] →	ROOT=10,0000	(Raíz 1)
[R/S] →	ROOT=1,0000	(Raíz 2)
[R/S] →	ROOT=1,0000	(Raíz 3)
[R/S] →	ROOT=–1,0000	(Raíz 4)
[R/S] →	ROOT=–10,0000	(Raíz 5)

Ejemplo 2:

Resolver $4x^4 - 8x^3 - 13x^2 - 10x + 22 = 0$.

Escribir de nuevo la ecuación bajo la forma

$$x^4 - 2x^3 - \frac{13}{4}x^2 - \frac{10}{4}x + \frac{22}{4} = 0.$$

Teclas:	Resultados:	
[XEQ] [ALPHA] POLY [ALPHA] →	DEGREE=?	
4 [R/S] →	a3=?	
2 [CHS] [R/S] →	a2=?	
13 [ENTER↑] 4 [÷] [CHS] [R/S] →	a1=?	
10 [ENTER↑] 4 [÷] [CHS] [R/S] →	a0=?	
22 [ENTER↑] 4 [÷] [R/S] →	ROOTS?	
[R/S] →	U=–1,0000	
[R/S] →	V=1,0000	(Las raíces 1 y 2 son
[R/S] →	U=–1,0000	–1.00 ±1.00i)
[R/S] →	–V=–1,0000	
[R/S] →	ROOT=3,1180	(Raíz 3)
[R/S] →	ROOT=0,8820	(Raíz 4)

Ejemplo 3:

En el ejemplo anterior, ¿cuales serían las raíces si el coeficiente de x^2 cambiase de $-13/4$ a -5?

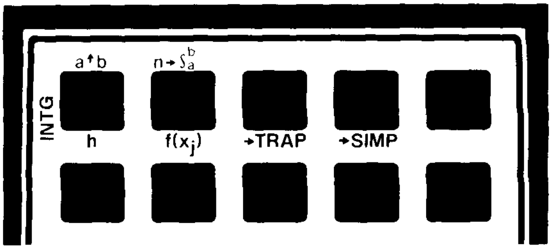
Teclas:	Resultados:	
5 [CHS] [STO] 02		
[XEQ] [ALPHA] ROOTS [ALPHA] →	U=–1,1386	(Las raíces 1 y 2 son
[R/S] →	V=0,8555	–1.1386 ±.8555i)
[R/S] →	U=–1,1386	
[R/S] →	–V=–0,8555	
[R/S] →	ROOT=3,5031	(Raíz 3)
[R/S] →	ROOT=0,7741	(Raíz 4)

Ejemplo 4:
Evaluar el siguiente polinomio para $x = 2.5$ y $x = -5$.

$$f(x) = x^5 + 5x^4 - 3x^2 - 7x + 11$$

Teclas:	Resultados:
XEQ ALPHA POLY ALPHA	DEGREE=?
5 R/S	a4=?
5 R/S	a3=?
0 R/S	a2=?
3 CHS R/S	a1=?
7 CHS R/S	a0=?
11 R/S	ROOTS?
N R/S	X=?
2.5 R/S	F<X>=267,7188
5 CHS R/S	F<X>=–29,0000

Integración numérica



Este programa realiza la integral numérica de una función cuando viene dada explícitamente, o simplemente dada en un número finito de puntos equidistantes (caso discreto).
Las integrales de las funciones explícitas se determinan utilizando la regla de Simpson; en el caso discreto pueden aproximarse tanto por la regla de los trapecios como por la de Simpson.

Caso discreto:
Sean x_0, x_1, ..., x_n, n puntos equidistantes ($x_j = x_0 + jh$, $j = 1, 2, \ldots, n$), para los cuales los valores correspondientes $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$ de la función f(x) son conocidos.
La función misma no es conocida necesariamente de un modo explicito. Después de la entrada del paso h y de los valores de $f(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, entonces la integral.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$$

puede aproximarse utilizando

1. La regla de los trapecios:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n)\right]$$

2. La regla de Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) +$$

$$\ldots + 4f(x_{n-3}) + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big]$$

Para aplicar la regla de Simpson, n debe ser par. Si n no es par, el calculador se detendrá indicando **N NOT EVEN** (n no es par) si D está pulsada.

Funciones explícitas

Si la función f(x) viene dada bajo forma explícita, entonces la función puede introducirse en memoria central e integrarse numéricamente por la regla de Simpson.

El usuario debe definir los extremos a y b del intervalo en los cuales la integración se realiza, asi como el número de pequeños intervalos en el cual el intervalo de integración debe dividirse. Este número n debe ser par, en caso contrario aparecerá en pantalla **N NOT EVEN.** El programa comienza por calcular.

$x_0 = a,\ x_j = x_0 + jh,\ j = 1, 2, \ldots, n - 1,\ x_n = b$ donde

$$h = \frac{b - a}{n}$$

La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ viene aproximada por la ecuación (2) anterior, que corresponde a la regla de Simpson.

La función f(x) puede introducirse en memoria central utilizando una etiqueta alfanumérica (máximo 6 caracteres), y tener en cuenta que x estará en el registro **X** al entrar.

Se pueden cargar varias funciones en memoria central a la vez, tan pronto como el programa solicita al usuario el nombre de la función a evaluar. El programa utiliza los registros 00–07; los registros libres están disponibles para definir $f_i(x)$.

				Reg.: 008
Nº	**Instrucciones**	**Datos**	**Teclas**	**Resultados**
1	Colocar la carátula en el calculador.			
2	Para funciones explícitas ir al paso 9, para el caso discreto al paso 3.			
	Caso discreto			
3	Iniciar programa.		[XEQ] INTG	0.0000
4	Teclear en el espacio intermedio los valores de x.	h	[A]	h
5	Meter el valor de la función x_j. Repetir este paso para j=0, 1, ..., n.	$f(x_j)$	[B]	j
6	Calcular el área por la regla de los trapecios.		[C]	TRAP$\int$
7	Calcular el área por la regla de Simpson (n debe ser par).		[D]	SIMP$\int$
8	Para un nuevo caso, ir al paso 2.			
	Funciones explicitas			
9	Preparar para cargar la función.		[GTO] [•] [•]	

Nº	Instrucciones	Datos	Teclas	Resultados
10	Seleccionar el modo PRGM; cargar la función bajo la etiqueta deseada; añadir [RTN], anular el modo PRGM.		[PRGM] [LBL] — . . . [RTN] [PRGM]	
11	Iniciar programa.		[XEQ] INTG	
12	Teclear el principio y el final de los extremos del intervalo de integración.	a b	[ENTER↑] ■ [A]	 a
13	Introducir el número de pequeños intervalos (deben ser par) y calcular el área por la regla de Simpson.	n	■ [B]	FUNCTION NAME?
14	Introducir el nombre de la función.	Nombre	[R/S]	$\int_a^b f_i(x)dx$
15	Para cambiar a, b ó n, ir al paso apropiado; para un caso nuevo ir al paso 2.			

Ejemplo 1:
Dados los valores, que más abajo se indican, para $f(x_j)$, $j=0, 1, \ldots, 8$. Calcular las aproximaciones a la integral.

$$\int_0^2 f(x)\,dx$$

por las reglas de los trapecios y la de Simpson.

El valor para h es 0.25.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0	.25	.5	.75	1	1.25	1.5	1.75	2
$f(x_i)$	2	2.8	3.8	5.2	7	9.2	12.1	15.6	20

Teclas:	Resultados:	
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 008		
[XEQ] [ALPHA] INTG [ALPHA] →	**0,0000**	
.25 [A] 2 [B]		
2.8 [B] 3.8 [B]		
5.2 [B] 7 [B]		
9.2 [B] 12.1 [B]		
15.6 [B] 20 [B]		
[C] →	**16,6750**	(Trapecios)
[D] →	**16,5833**	(Simpson)

Ejemplo 2:
Hallar el valor de

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - \cos x + 0.25}$$

para n = 10, después para n = 30. Tener en cuenta que x se supone en radianes. Para mayor seguridad, si se trabaja en grados, existe una buena costumbre en programación, que es transformar el ángulo en radianes al principio del programa, y después transformarlo en grados al final. Para ello introducir la función bajo [LBL] FF.

Teclas:	Resultados:	
[GTO] [•] [•]		
[PRGM]		
[LBL] [ALPHA] FF [ALPHA]		
[XEQ] [ALPHA] RAD [ALPHA]		
[COS]		
1 [x⇄y] [−]		
.25 [+] [1/X]		
[XEQ] [ALPHA] DEG [ALPHA]		
[RTN]		
[PRGM]		
[XEQ] [ALPHA] INTG [ALPHA]		
0 [ENTER↑] [π] [×] ■ [A]		
10 ■ [B] →	FUNCTION NAME?	
FF [R/S] →	8,2193	(n=10)
30 ■ [B] →	FUNCTION NAME?	
FF [R/S] →	8,3774	(n=30)

La solución exacta es $\frac{8\pi}{3} = 8.3776$

Ecuaciones diferenciales

Este programa resuelve las ecuaciones diferenciales de primer y segundo grado por el método de cuarto grado de Runge-Kutta. Una ecuación de primer grado es de la forma $y' = f(x, y)$, con valores iniciales x_0, y_0; una ecuación de segundo grado es de la forma $y'' = f(x, y, y')$, con valores iniciales x_0, y_0, y_0'.
En cada caso, la función f(x) se introduce en la memoria del programa utilizando cualquier etiqueta **alfanumérica** (máximo 6 caracteres), y se supone que x e y están en los registros **X** e **Y** respectivamente; y' estará en el registro **Z**, en el caso de las ecuaciones de segundo grado. El programa del Módulo utiliza los registros 00–07. Los registros libres están disponibles para definir la función.
La solución es una solución númerica que calcula y_i para $x_i = x_0 + ih$, $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ donde h es un incremento especificado por el usuario. El valor de h puede cambiarse en cualquier momento durante la ejecución del programa, almacenando h/2 en el Registro 01. Esto permite obtener una solución de la ecuación tan próxima como se quiera a un polo $(y \to \pm \infty)$.

Ecuaciones:

Primer grado:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4)$$

donde

$$c_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$c_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{c_1}{2}\right)$$

$$c_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{c_2}{2}\right)$$

$$c_4 = hf(x_i + h, y_i + c_3)$$

Segundo grado:

$$y_{i+1} = y_i + h\left[y_i' + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + k_3)\right]$$

$$y'_{i+1} = y_i' + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf\,(x_i,\ y_i,\ y_i')$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2}\,y_i' + \frac{h}{8}k_1,\ y_i' + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2}\,y_i' + \frac{h}{8}k_1,\ y_i' + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf\left(x_i + h,\ y_i + hy_i' + \frac{h}{2}k_3,\ y_i' + k_3\right)$$

Observaciones:

- Para la entrada de datos en el caso de una ecuación de segundo grado los valores de x_0 e y_0 deben introducirse antes del valor de y_0. Todos los valores deben introducirse incluso los que sean nulos.

				Reg.: 008
Nº	**Instrucciones**	**Datos**	**Teclas**	**Resultados**
1	Preparar para cargar la función f(x, y, y').		[GTO] [•] [•]	
2	Seleccionar el modo PRGM; cargar la función bajo la etiqueta deseada; anadir [RTN]; anular el modo PRGM.		[PRGM] [LBL] — . . . [RTN] [PRGM]	
3	Iniciar el programa.		[XEQ] DIFEQ	FUNCTION NAME?
4	Poner el nombre de la función.	Nombre	[R/S]	ORDER=?
5	Poner el grado de la ecuación diferencial (1 ó 2).	1 ó 2	[R/S]	STEP SIZE=?
6	Poner valor del incremento (h).	h	[R/S]	X0=?
7	Entrar el valor inicial de x.	x_0	[R/S]	Y0=?
8	Entrar el valor inicial de y.	y_0	[R/S]	x_1 or Y0.=?
9	Para una ecuación de segundo grado, introducir el valor inicial de y'.	y_0'	[R/S]	x_1
10	Salidas sucesivas de los valores x e y.		[R/S] [R/S] [R/S]	y_1 x_2 y_2 etc.

Ejemplo 1:
Utilizando [LBL] FX, resolver numéricamente la ecuación diferencial de primer grado:

$$y' = \frac{\sin x + \tan^{-1}(y/x)}{y - \ln(\sqrt{x^2 + y^2})}$$

donde $x_0 = y_0 = 1$. Sea $h = 0.5$. El modo angular debe colocarse en radianes, y se necesitan tres registros de almacenamiento para definir la función.

Teclas:	Resultados:	
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 011		
[GTO] [•] [•]		
[PRGM]		
[LBL] [ALPHA] FX [ALPHA]		
[XEQ] [ALPHA] RAD [ALPHA]		
[STO] 08		
[x⇄y]		
[STO] 09		
[x⇄y]		
[R–P]		
[LN]		
[STO] 10		
[R↓]		
[RCL] 08		
[SIN]		
[+]		
[RCL] 09		
[RCL] 10		
[–]		
[÷]		
[XEQ] [ALPHA] DEG [ALPHA]		
[RTN]		
[PRGM]		
[XEQ] [ALPHA] DIFEQ [ALPHA] →	FUNCTION NAME?	
FX [R/S] →	ORDER=?	
1 [R/S] →	STEP SIZE=?	
.5 [R/S] →	X0=?	
1 [R/S] →	Y0=?	
1 [R/S] →	1,5000	(x_1)
[R/S] →	2,0553	(y_1)
[R/S] →	2,0000	(x_2)
[R/S] →	2,7780	(y_2)
[R/S] →	2,5000	(x_3)
[R/S] →	3,2781	(y_3)
	etc.	

Ejemplo 2:
Utilizando [LBL] DIF, resolver la ecuación de segundo grado

$$(1 - x^2)y'' + xy' = x$$

donde $x_0 = y_0 = y_0' = 0$ y $h = 0.1$.

Escribir la ecuación de nuevo bajo la forma:

$$y'' = \frac{x(1 - y')}{1 - x^2} = \frac{x(y' - 1)}{x^2 - 1} \qquad x \neq 1$$

Teclas:	Resultados:	
[GTO] [•] [•]		
[PRGM]		
[LBL] [ALPHA] DIF [ALPHA]		
[STO] 08		
[R↓] [R↓]		
1 [−]		
[RCL] 08		
[×]		
[LASTX]		
[x^2]		
1 [−] [÷]		
[RTN]		
[PRGM]		
[XEQ] [ALPHA] DIFEQ [ALPHA] →	**FUNCTION NAME?**	
DIF [R/S] →	**ORDER=?**	
2 [R/S] →	**STEP SIZE=?**	
.1 [R/S] →	**X0=?**	
0 [R/S] →	**YO =?**	
0 [R/S] →	**YO.=?**	
0 [R/S] →	**0,1000**	(x_1)
[R/S] →	**0,0002**	(y_1)
[R/S] →	**0,2000**	(x_2)
[R/S] →	**0,0013**	(y_2)
[R/S] →	**0,3000**	(x_3)
[R/S] →	**0,0046**	(y_3)
[R/S] →	**0,4000**	(x_4)
[R/S] →	**0,0109**	(y_4)
	etc.	

Series de Fourier

Cualquier función periódica puede escribirse como una serie de senos y cosenos por aplicación de las siguientes fórmulas:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi tk}{T} + b_k \sin\frac{2\pi tk}{T}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\left(\frac{2\pi tk}{T} - \theta_k\right)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi tk}{T}\,dt, k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi tk}{T}\,dt, k = 1, 2, \ldots$$

$$c_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}$$

$$\theta_k = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

T = período de f(x)

Este programa calcula los coeficientes de Fourier, en el caso discreto de las fórmulas anteriores, dado un gran número de muestras de la función periódica. Hasta diez pares consecutivos de coeficientes pueden calcularse a la vez con N puntos equidistantes. Los coeficientes se muestran tanto en forma rectangular como polar.
El valor de N debe elegirse de modo que sea más del doble del mayor armónico esperado de la frecuencia fundamental presente en la función que se va a analizar. Un valor bajo estimado para N producirá energía superior a un medio de la tasa de muestreo por aparecer a una frecuencia inferior (fenómeno conocido como «aliasing»).
El programa utíliza los registros 00–26.

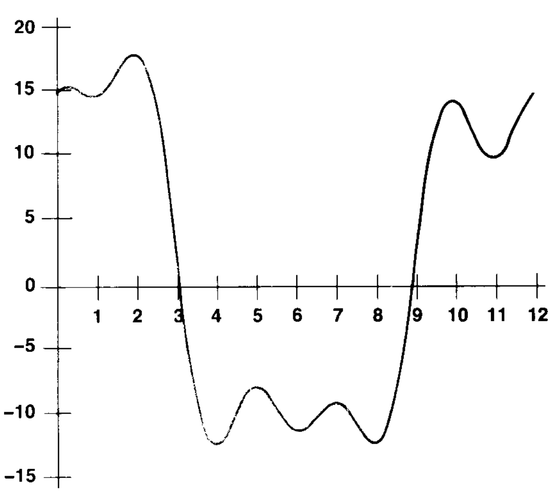
				Reg.: 027
Nº	Instrucciones	Datos	Teclas	Resultados
1	Iniciar programa.		XEQ FOUR	NO.SAMPLES=?
2	Dar el número de muestras en un período.	# muestras	R/S	NO.FREQ=?
3	Dar el número de frecuencias deseado.	# freq.	R/S	1ST COEFF=?
4	Dar el grado del primer coeficiente.	J	R/S	Y1=?
5	Entrar y_n, n=1, ..., N.	y_n	R/S	Y2=? ..., RECT?
6	Repetir el paso 5 hasta que la pantalla señale RECT?			
7	Si la respuesta es sí, pulsar R/S para mostrar los coeficientes para $J \leq k \leq J+\#$frec. en forma rectangular.		R/S R/S	a_k b_k
	Si la respuesta es no (N), dar los los coeficientes en forma polar.	N	R/S R/S	c_k= ∡k=
	Al pulsar R/S muestra los sucesivos coeficientes.			
8	Para calcular el valor de las series de Fourier en t, poner el modo USER y dar t.	t	USER E	f(t)

Ejemplo:

Calcular una representación de una serie de Fourier discreta para la onda de la figura.

Como hay 12 muestras, seleccionar 7 frecuencias (término de c.c. mas 6 armónicos).

Mostrar los coeficientes en forma rectangular.



t	f(t)
1	14.758
2	17.732
3	2
4	-12.
5	- 7.758
6	-11
7	- 9.026
8	-12.
9	2
10	14.268
11	10.026
12	15

Teclas:	Resultados:
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 027	
[XEQ] [ALPHA] FOUR [ALPHA] →	NO. SAMPLES = ?
12 [R/S] →	NO. FREQ = ?
7 [R/S] →	1ST COEFF = ?
0 [R/S] →	Y1 = ?
14.758 [R/S] →	Y2 = ?
17.732 [R/S] →	Y3 = ?
2 [R/S] →	Y4 = ?
12 [CHS] [R/S] →	Y5 = ?
7.758 [CHS] [R/S] →	Y6 = ?
11 [CHS] [R/S] →	Y7 = ?
9.026 [CHS] [R/S] →	Y8 = ?
12 [CHS] [R/S] →	Y9 = ?
2 [R/S] →	Y10 = ?
14.268 [R/S] →	Y11 = ?
10.026 [R/S] →	Y12 = ?
15 [R/S] →	RECT?
[R/S] →	a0 = 4,0000
[R/S] →	b0 = 0,0000
[R/S] →	a1 = 14,9998
[R/S] →	b1 = 1,0000
[R/S] →	a2 = 3,0000E–8
[R/S] →	b2 = 1,0000
[R/S] →	a3 = –5,0000
[R/S] →	b3 = 1,0000
[R/S] →	a4 = 3,3333E–9
[R/S] →	b4 = 3,2000E–9
[R/S] →	a5 = 3,0002
[R/S] →	b5 = 1,4673E–5
[R/S] →	a6 = 0,0000
[R/S] →	b6 = 2,3599E–8

Por tanto $f(t) = 2 + 15 \cos\frac{2\pi t}{12} + \sin\frac{2\pi t}{12}$

$$+ \sin\frac{4\pi t}{12}$$

$$- 5 \cos\frac{6\pi t}{12} + \sin\frac{6\pi t}{12}$$

$$+ 3 \cos\frac{10\pi t}{12}$$

Operaciones con números complejos

Estos programas permiten efectuar cálculos encadenados con números complejos en forma rectangular. Efectúa las cuatro operaciones aritméticas de los complejos (+, −, ×, ÷), así como varias de las funciones más usuales de las variables complejas z *y* w ($|z|$, $1/z$, z^n, $z^{1/n}$, e^z, lnz, senz, cosz, tanz, a^z, $\log_a z$, $z^{1/w}$ y z^w). Las funciones y las operaciones pueden mezclarse en la ejecución de un cálculo, lo cual permite obtener el cálculo de expresiones como $z_3/(z_1+z_2)$, $e^{z_1 z_2}$, $|z_1+z_2|+|z_2-z_3|$, etc. donde z_1, z_2, z_3 son números complejos de la forma x + iy.
En caso de utilización repetida de estas operaciones, el usuario puede asignar los programas individuales a teclas seleccionadas del calculador y crear su propia carátula. Una asignación razonable de todas podría incluir:

[ASN] SINZ [SIN]
[ASN] LNZ [LN]
[ASN] C+ [+]
[ASN] C− [−]
[ASN] CINV [1/X]

La lógica del sistema de estos programas procede de la Notación Polaca Inversa (RPN) con una pila cuya capacidad es de dos números complejos. Sea ξ el registro inferior de una pila compleja y τ su registro superior. Son análogos a los registros **X** y **T** de una pila de cuatro registros de su calculador*.

Un número complejo z_1 entra en el registro ξ por las teclas y_1 [ENTER↑] x_1. Para la entrada de un segundo número complejo z_2 (por [ENTER↑] y_2 [ENTER↑] x_2), z_1 se transfiere a τ y z_2 se coloca en ξ. El contenido precedente de z se pierde. Las funciones se calculan en el registro ξ y el resultado (salvo para z) se queda en ξ. Las operaciones aritméticas utilizan los dos registros ξ y τ; el resultado de la operación se coloca en ξ.
El programa del módulo de aplicación utiliza los registros 00–04.

Ecuaciones:

$$z_k = x_k + iy_k = r_k e^{i\theta_k}, k = 1, 2$$

$$z = x + iy = re^{i\theta}$$

*Cada registro de una pila compleja debe considerarse como dos números reales: las partes real e imaginaria de su contenido complejo. Así dos registros de su calculador constituyen un registro de una pila compleja. A continuación, hablaremos de un registro complejo como de un solo registro.

Sea en cada caso el resultado de la forma $u+iv$.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$z_1/z_2 = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$1/z = \frac{x}{r^2} - i\frac{y}{r^2}$$

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

$$z^{1/n} = r^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{360k}{n}\right)}, k = 0, 1, \ldots, n-1$$

(Todas las n raíces saldrán, $k=0, 1, \ldots, n-1$.)

$e^z = e^x (\cos y + i\sin y)$, donde y viene en radianes

$\ln z = \ln r + i\,\theta$, donde $z \neq 0$

$a^z = e^{z\ln a}$, donde $a>0$ y real

$\log_a z = \dfrac{\ln z}{\ln a}$, donde $a > 0$ y real, $z \neq 0$

$z^w = e^{w\ln z}$, donde $z \neq 0$, w es complejo

$z^{1/w} = e^{\ln z/w}$, donde $z \neq 0$, w es complejo y $w \neq 0$

$\sin z = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$, ángulos en radianes

$\cos z = \cos x \cosh y - i\sin x \sinh y$, ángulos en radianes

$\tan z = \dfrac{\sin 2x + \sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$, ángulos en radianes

				Reg.: 005
Nº	Instrucciones	Datos	Teclas	Resultados
	Aritmética			
1	Introducir el primer número complejo (x_1+iy_1).	y_1 x_1	[ENTER↑] [ENTER↑]	
2	Introducir el segundo número complejo (x_2+iy_2).	y_2 x_2	[ENTER↑]	
3	Seleccionar una de las cuatro operaciones:			
	• Adición (+)		[XEQ] C [R/S]	U= V=
	• Sustracción (−)		[XEQ] C [R/S]	U= V=
	• Multiplicación (×)		[XEQ] C [R/S]	U= V=
	• División (÷)		[XEQ] C [R/S]	U= V=
4	El resultado de la operación ha sido memorizado; ir al paso 5 ó al paso 2 para otras operaciones aritméticas.			
	Funciones			
5	Seleccionar una de estas funciones:			
	• Módulo (|z|)	y_1 x_1	[ENTER↑] [XEQ] MAGZ	 R=
	• Inversa ($1/z$) x_1	y_1 x_1	[ENTER↑] [XEQ] CINV [R/S]	 U= V=
	• Potencia n-sima (z^n)	y_1 x_1 n	[ENTER↑] [ENTER↑] [XEQ] Z↑N [R/S]	 U= V=
	• Raíz n-sima de z ($z^{1/n}$)	y_1 x_1 n	[ENTER↑] [ENTER↑] [XEQ] Z↑1/N [R/S]	 U= V=
	Nota: Se hallarán n raíces ($u+iv$).			
	• Exponencial de z (e^z)	y_1 x_1	[ENTER↑] [XEQ] e↑Z [R/S]	 U= V=
	• Logaritmo natural de z (lnz)	y_1 x_1	[ENTER↑] [XEQ] LNZ [R/S]	 U= V=
	• Potencia z-sima de un número real (a^z)	y_1 x_1 a	[ENTER↑] [ENTER↑] [XEQ] a↑Z [R/S]	 U= V=

Nº	Instrucciones	Datos	Teclas	Resultados
	• Logaritmo en base a de z ($\log_a z$)	y_1	ENTER↑	
		x_1	ENTER↑	
		a	XEQ LOGZ	U=
			R/S	V=
	• Potencia de base compleja y exponente complejo.	y_2	ENTER↑	
		x_2	ENTER↑	
		y_1	ENTER↑	
		x_1	XEQ Z↑W	U=
			R/S	V=
	• Hallar la raíz compleja de z. ($z^{1/w}$)	y_2	ENTER↑	
		x_2	ENTER↑	
		y_1	ENTER↑	
		x_1	XEQ Z↑1/W	U=
			R/S	V=
	• Hallar sen z	y_1	ENTER↑	
		x_1	XEQ SINZ	U=
			R/S	V=
	• Hallar cos z	y_1	ENTER↑	
		x_1	XEQ COSZ	U=
			R/S	V=
	• Hallar tan z	y_1	ENTER↑	
		x_1	XEQ TANZ	U=
			R/S	V=
6	Ir al paso 2 para operaciones aritméticas o al paso 5 para otras funciones.			

Ejemplo 1:
Hallar el valor de la expresión

$$\frac{z_1}{z_2 + z_3},$$

doude $z_1 = 23 + 13i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = 4 - 3i$.

(Recomendación: como el programa no puede memorizar simultáneamente más que dos enteros, efectuar el cálculo de la forma

$z_1 \times [1/(z_2 + z_3)]$.)

Teclas:	Resultados:	
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 005		
1 [ENTER↑] 2 [CHS] [ENTER↑]		
3 [CHS] [ENTER↑] 4		
[XEQ] [ALPHA] C+ [ALPHA] →	U=2,0000	real (z_2+z_3)
[R/S] →	V=–2,0000	imag (z_2+z_3)
[XEQ] [ALPHA] CINV [ALPHA] →	U=0,2500	$1/(z_2+z_3)$
[R/S] →	V=0,2500	
13 [ENTER↑] 23		
[XEQ] [ALPHA] C× [ALPHA] →	U=2,500	$(z_1/[z_2+z_3])$
[R/S] →	V=9,0000	

Ejemplo 2:
Hallar las 3 raíces cúbicas de 8.

Teclas:	Resultados:
0 [ENTER↑] 8 [ENTER↑] 3	
[XEQ] [ALPHA] Z↑1/N [ALPHA] →	U=2,0000
[R/S] →	V=0,0000
[R/S] →	U=–1,0000
[R/S] →	V=1,7321
[R/S] →	U=–1,0000
[R/S] →	V=–1,7321

Ejemplo 3:
Hallar el valor de $e^{z^{-2}}$, donde $z=(1+i)$

Teclas:	Resultados:	
1 [ENTER↑] 1 [ENTER↑] 2		
[XEQ] [ALPHA] Z↑N [ALPHA] →	U=0,0000	(z^2)
[R/S] →	V=2,0000	
[XEQ] [ALPHA] CINV [ALPHA] →	U=0,0000	(z^{-2})
[R/S] →	V=0,5000	
[XEQ] [ALPHA] e↑Z [ALPHA] →	U=0,8776	$(e^{z^{-2}})$
[R/S] →	V=–0,4794	

Ejemplo 4:
Hallar el valor de sen (2 + 3i).

Teclas:	**Resultados:**
3 [ENTER↑] 2	
[XEQ] [ALPHA] SINZ [ALPHA] ⟶	**U=9,1545**
[R/S] ⟶	**V=–4,1689**

Funciones hiperbólicas

Este programa calcula las funciones hiperbólicas y sus inversas. El usuario puede asignar los programas individuales a teclas seleccionadas del calculador, y crear su propia carátula. Una asignación razonable de teclas podría ser:

ASN SINH SIN
ASN COSH COS
ASN TANH TAN
ASN ASINH ■ SIN
ASN ACOSH ■ COS
ASN ATANH ■ TAN

Ecuaciones:
Funciones hiperbólicas

$$\sinh x = \tfrac{1}{2}\left[e^x - 1 + \frac{e^x - 1}{e^x}\right]$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Funciones hiperbólicas inversas

$$\sinh^{-1}x = \ln\left[x + (x^2 + 1)^{1/2}\right]$$

$$\cosh^{-1}x = \ln\left[x + (x^2 - 1)^{1/2}\right] \qquad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1}x = \tfrac{1}{2}\ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right] \qquad x^2 < 1$$

Observaciones:
- El programa del módulo utiliza el registro 00.
- La bandera de impresora (bandera 21) no la pone el programa del módulo.

				Reg.: 001
Nº	Instrucciones	Datos	Teclas	Resultados
1	Para funciones hiperbólicas ir al paso 2; para funciones hiperbólicas inversas, ir al paso 3.			
	Funciones hiperbólicas			
2	Introducir el argumento y calcular:			
	• Seno hiperbólico	x	[XEQ] SINH	sinh x
	• Coseno hiperbólico	x	[XEQ] COSH	cosh x
	• Tangente hiperbólica	x	[XEQ] TANH	tanh x
	Funciones hiperbólicas inversas			
3	Introducir el argumento y calcular:			
	• Seno hiperbólico inverso	x	[XEQ] ASINH	$sinh^{-1}x$
	• Coseno hiperbólico inverso	x	[XEQ] ACOSH	$cosh^{-1}x$
	• Tangente hiperbólica inversa	x	[XEQ] ATANH	$tanh^{-1}x$

Ejemplo 1:
Hallar el valor de las funciones hiperbólicas siguientes:

sinh 2.5; cosh 3.2; tanh 1.9.

Teclas:	Resultados:	
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 001		
2.5 [XEQ] [ALPHA] SINH [ALPHA] ⟶	**6,0502**	(sinh 2.5)
3.2 [XEQ] [ALPHA] COSH [ALPHA] ⟶	**12,2866**	(cosh 3.2)
1.9 [XEQ] [ALPHA] TANH [ALPHA] ⟶	**0,9562**	(tanh 1.9)

senh 2.5; cosh 3.2; tanh 1.9.

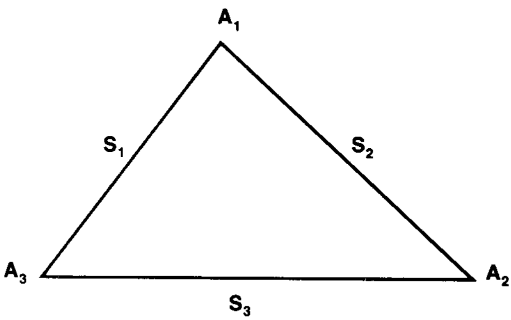
Ejemplo 2:
Hallar el valor de las funciones hiperbólicas inversas siguientes:

$senh^{-1}$ 2.4; $cosh^{-1}$ 90; $tanh^{-1}$ –0.65.

Teclas:	Resultados:	
2.4 [XEQ] [ALPHA] ASINH [ALPHA] ⟶	**1,6094**	($sinh^{-1}$ 2.4)
90 [XEQ] [ALPHA] ACOSH [ALPHA] ⟶	**5,1929**	($cosh^{-1}$ 90)
.65 [CHS]		
[XEQ] [ALPHA] ATANH [ALPHA] ⟶	**–0,7753**	($tanh^{-1}$ –0.65)

Resolución de triángulos

Estos programas pueden usarse para hallar el área, las dimensiones de los lados (S_1, S_2, S_3) y los ángulos (A_1, A_2, A_3) de un triángulo.



Introduzca, simplemente, los tres valores conocidos y ejecute el programa adecuado. El calculador dará los valores de los lados, los ángulos y el área. El orden de aparición viene determinado por el orden de entrada. Si los valores de entrada se seleccionan en el sentido de las agujas del reloj alrededor del triángulo, los valores de salida seguirán el mismo sentido alrededor del triángulo. El orden es el siguiente:
Entrada del primer lado (S_1)
Angulo adyacente (A_1)
Lado adyacente (S_2)
Angulo adyacente (A_2)
Lado adyacente (S_3)
Angulo adyacente (A_3)
Area.

Ecuaciones:
S_1, S_2, S_3 (se conocen todos los lados)

$$A_3 = 2 \cos^{-1} \sqrt{\frac{P(P - S_2)}{S_1 S_3}}$$

donde $P = (S_1 + S_2 + S_3)/2$

$$A_2 = 2 \cos^{-1} \sqrt{\frac{P(P - S_1)}{S_2 S_3}}$$

$$A_1 = \cos^{-1} (-\cos(A_3 + A_2))$$

A_3, S_1, A_1 (se conocen dos ángulos y el lado comprendido).

$$A_2 = \cos^{-1}(-\cos(A_3 + A_1))$$

$$S_2 = S_1 \frac{\operatorname{sen} A_3}{\operatorname{sen} A_2}$$

$$S_3 = S_1 \cos A_3 + S_2 \cos A_2$$

S_1, A_1, A_2 (se conocen un lado y los ángulos siguientes)

$$A_3 = \cos^{-1}(-\cos(A_1 + A_2))$$

El problema se ha reducido al anterior, A_3, S_1, A_1.

S_1, A_1, S_2 (se conocen dos lados y el ángulo comprendido)

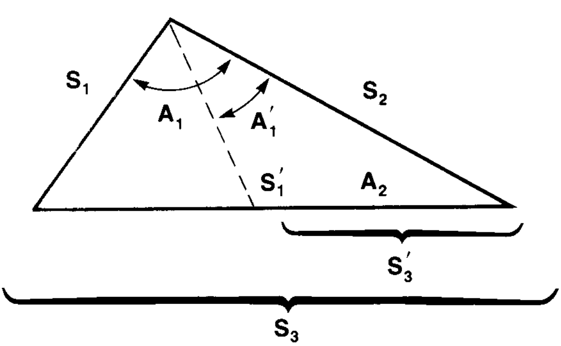
$$S_3 = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2 S_1 S_2 \cos A_1}$$

(El problema se ha reducido al anterior, S_1, S_2, S_3.)
S_1, S_2, A_2 (se conocen dos lados y un ángulo adyacente)

$$A_3 = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{S_2}{S_1} \operatorname{sen} A_2\right]^*$$

$$A_1 = \cos^{-1}[-\cos(A_2 + A_3)]$$

El problema se ha reducido al anterior A_3, S_1, A_1.



Area = 1/2 S_1 S_3 sin A_3

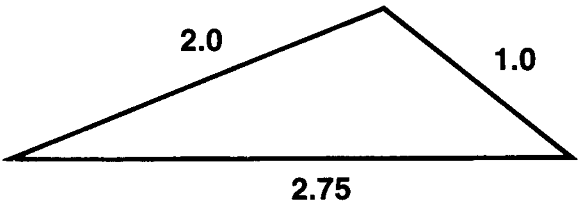
* Nótese que existen dos soluciones posibles si S_2 es mayor que S_1 y A_3 no vale 90°. Ambas soluciones se calculan.

Observaciones:

- El programa usa los registros R_{00}–R_{07}.
- Los ángulos deben ir en unidades que se correspondan con el modo angular de la máquina.
- Nótese que el triángulo descrito por el programa no está de acuerdo con la notación normalizada de los triángulos, es decir A_1 no está opuesto a S_1.
- Los ángulos deben entrar en decimales. La conversión HR puede usarse para convertir grados, minutos y segundos en grados decimales.
- La precisión de las soluciones puede deteriorarse en los triángulos que tengan ángulos muy pequeños.

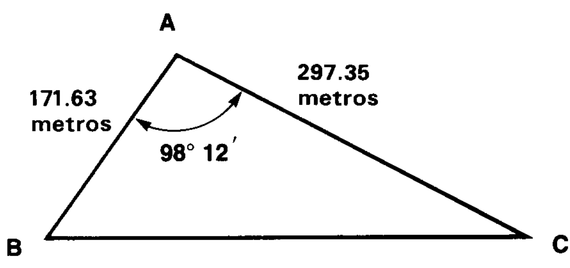
Nº	Instrucciones	Datos	Teclas	Reg.: 008 Resultados
1	Elegir el modo angular adecuado.			
2	Buscar el caso adecuado de la lista que viene a continuación, e introducir los datos indicados:		[XEQ] SSS	S1 = ?
		S_1	[R/S]	S2 = ?
		S_2	[R/S]	S3 = ?
		S_3	[R/S]	S1 =
	• Se conocen todos los lados.			
	• Se conocen dos ángulos y el lado comprendido.		[XEQ] ASA	A3 = ?
		A_3	[R/S]	S1 = ?
		S_1	[R/S]	A1 = ?
		A_1	[R/S]	S1 =
	• Se conocen un lado y los ángulos siguientes.		[XEQ] SAA	S1 = ?
		S_1	[R/S]	A1 = ?
		A_1	[R/S]	A2 = ?
		A_2	[R/S]	S1 =
	• Se conocen dos lados y el ángulo comprendido.		[XEQ] SAS	S1 = ?
		S_1	[R/S]	A1 = ?
		A_1	[R/S]	S2 = ?
		S_2	[R/S]	S1 =
	• Se conocen dos lados y un ángulo adyacente.		[XEQ] SSA	S1 = ?
		S_1	[R/S]	S2 = ?
		S_2	[R/S]	A2 = ?
		A_2	[R/S]	S1 =
3	Después del paso 2, los valores de los lados y los ángulos aparecerán sucesivamente pulsando [R/S]. El último valor es el área. En el último caso (SSA), pueden existir dos soluciones y ambas saldrán.		[R/S]	A1 =
			[R/S]	S2 =
			[R/S]	A2 =
			[R/S]	S3 =
			[R/S]	A3 =
			[R/S]	AREA =

Ejemplo 1:
Hallar los ángulos (en grados) y el área del siguiente triángulo.



Teclas:	**Resultados:**
XEQ ALPHA SIZE ALPHA 088	
XEQ ALPHA DEG ALPHA	
XEQ ALPHA SSS ALPHA →	**S1 = ?**
2 R/S →	**S2 = ?**
1 R/S →	**S3 = ?**
2.75 R/S →	**S1 =2,0000**
R/S →	**A1 =129,8384**
R/S →	**S2=1,0000**
R/S →	**A2=33,9479**
R/S →	**S3=2,7500**
R/S →	**A3=16,2136**
R/S →	**AREA=0,7679**

Ejemplo 2:
Un topógrafo tiene que hallar el área y las dimensiones de una parcela de terreno triangular. Desde el punto A, se miden las distancias a B y C con un medidor de distancias electrónico. Se mide también el ángulo entre AB y AC. Hallar el área y las otras dos dimensiones del triángulo.



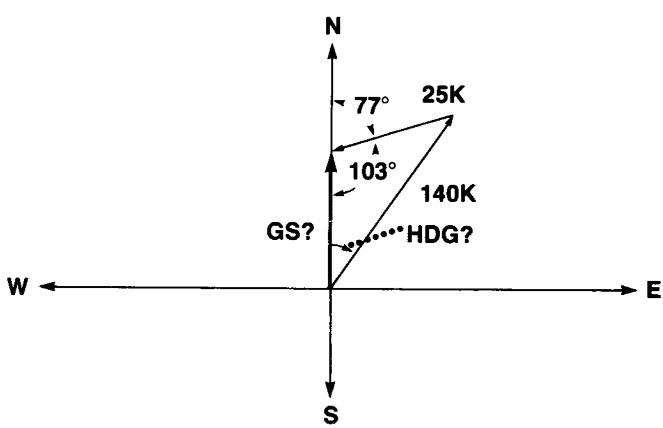
El problema es de la forma lado-ángulo-lado, donde:

$S_1 = 171.63, A_1 = 98°12'$ and $S_2 = 297.35$.

Teclas:	**Resultados:**
[XEQ] [ALPHA] SAS [ALPHA] →	**S1 = ?**
171.63 [R/S] →	**A1 = ?**
98.12 [XEQ] [ALPHA] HR [ALPHA]	
[R/S] →	**S2 = ?**
297.35 [R/S] →	**S1 =171,6300**
[R/S] →	**A1 =98,2000**
[R/S] →	**S2=297,3500**
[R/S] →	**A2=27,8270**
[R/S] →	**S3=363,9118**
[R/S] →	**A3=53,9730**
[R/S] →	**AREA=25.256,2094**

Ejemplo 3:

Un piloto desea volar directo al norte. Le comunican que el viento sopla a 25 nudos en 77º. Como le han comunicado una dirección de los vientos contraria a la que soplan, se ha interpretado el ángulo como 77 + 180 ó 257º. La verdadera velocidad del avión con respecto al aire es de 140 nudos. ¿En qué dirección (HDG) debe volar? ¿Cuál es la velocidad con respecto a tierra (GS)?

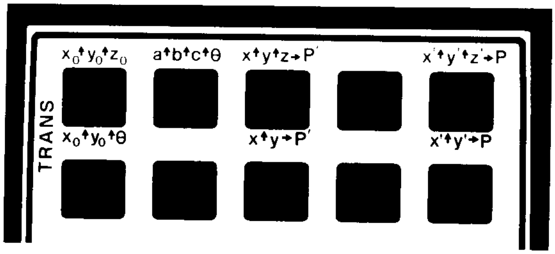


Sustrayendo la dirección del viento de 180 (lo que da un ángulo de 103º), el problema se reduce a resolver un triángulo, conocidos S_1, S_2, A_2.

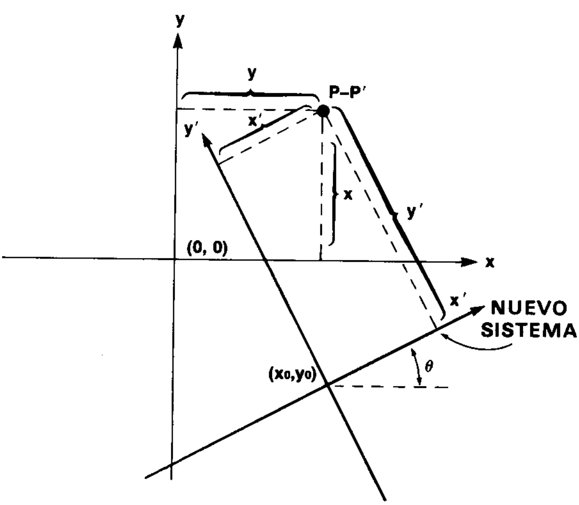
Teclas:	Resultados:	
[XEQ] [ALPHA] SSA [ALPHA] →	**S1=?**	
140 [R/S] →	**S2=?**	
25 [R/S] →	**A2=?**	
103 [R/S] →	**S1=140,0000**	(TAS)
[R/S] →	**A1=66,9798**	
[R/S] →	**S2=25,0000**	velocidad del viento
[R/S] →	**A2=103,0000**	
[R/S] →	**S3=132,2407**	(GS)
[R/S] →	**A3=10,0202**	(HDG)
[R/S] →	**AREA=1.610,6428**	

Por lo tanto, el piloto debe volar con una dirección 10.02º Este. Su velocidad con respecto a tierra es de 132.24 nudos.

Cambios de coordenadas



Este programa efectúa una traslación y/o una rotación de ejes de coordenadas en los espacios de 2 y 3 dimensiones.
En el caso del espacio de dos dimensiones, las coordenadas del origen del sistema trasladado (x_0, y_0) y el ángulo de rotación (θ) de este sistema con respecto al sistema inicial definen los nuevos ejes de coordenadas. Estas cantidades han entrado gracias a la tecla $\boxed{A}$. A continuación, los puntos difinidos en el primer sistema (x, y) pueden transformarse en el nuevo sistema (x', y') utilizando la tecla $\boxed{C}$, y los puntos en el nuevo sistema (x', y') pueden convertirse en puntos del sistema inicial (x, y) utilizando la tecla $\boxed{E}$.



El caso del espacio de tres dimensiones es análogo al precedente. La única diferencia notable aparece en la definición de la rotación. El eje de rotación pasa por el nuevo origen (x_0, y_0, z_0) y es paralelo a un vector en el cual se puede anotar la dirección por $(a\vec{i}, b\vec{j}, c\vec{k})$. El signo del ángulo de rotación (θ) está determinado por la regla de los tres dedos y por la dirección del vector rotación. Por ejemplo, el caso particular de la rotación en dos dimensiones (rotación en el plano [x, y]) puede obtenerse considerando un vector de dirección (0, 0, 1) y un ángulo de rotación positivo para las rotaciones en sentido contrario a las agujas de un reloj. Las coordenadas del nuevo origen (x_0, y_0, z_0) han entrado por medio de las teclas ■ A. La dirección del vector y el ángulo han entrado utilizando ■ B. Las conversiones del sistema inicial (x, y, z) en el nuevo sistema (x′, y′, z′) se han iniciado con ■ C, mientras que la transformación inversa se obtiene con ■ E.

Ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \\ \ell_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

donde

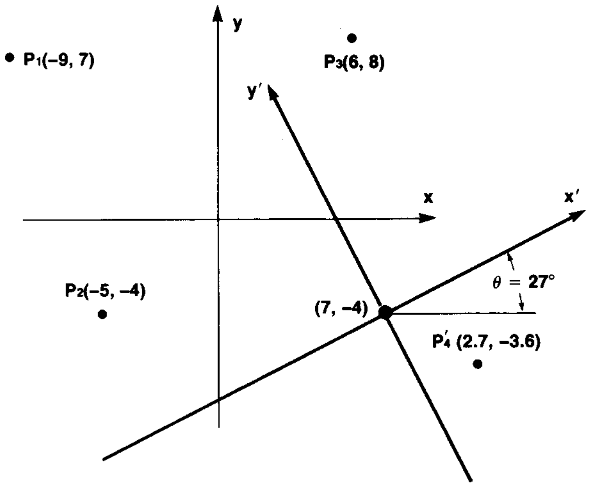
$$\begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & ab(1-\cos\theta)-c\sin\theta & ac(1-\cos\theta)+b\sin\theta \\ ba(1-\cos\theta)+c\sin\theta & b^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & bc(1-\cos\theta)-a\sin\theta \\ ca(1-\cos\theta)-b\sin\theta & cb(1-\cos\theta)+a\sin\theta & c^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix}$$

Las transformaciones de dos dimensiones se tratan como un caso particular de las transformaciones de tres dimensiones, donde (a, b, c) = (0, 0, 1).

Observaciones:
- Para una traslación, poner cero a θ.
- Para una rotación, poner ceros a x_0, y_0 y z_0.
- El programa usa los registros 00–25.

				Reg.: 026
Nº	**Instrucciones**	**Datos**	**Teclas**	**Resultados**
1	Iniciar el programa y poner la carátula.		[XEQ] TRANS	0.0000
2	Para espacios de 2 dimensiones, ir al paso 3. Para espacios de 3 dimensiones, ir al paso 6.			
3	Introducir el origen del sistema trasladado y el ángulo de rotación.	x_0 y_0 θ	[ENTER↑] [ENTER↑] [A]	 1.0000
4	Transformar las coordenadas del antiguo sistema en el nuevo.	x y	[ENTER↑] [C] [R/S]	 x' y'
	ó			
	del nuevo sistema en el antiguo.	x' y'	[ENTER↑] [E] [R/S]	 x y
5	Para una nueva relación de coordenadas, ir al paso 4. Para una nueva transformación en un espacio de 2 dimensiones, ir al paso 3.			
6	Introducir el origen del sistema trasladado.	x_0 y_0 z_0	[ENTER↑] [ENTER↑] ■ [A]	 x_0
	y			
	meter la dirección del vector rotación.	a b c θ	[ENTER↑] [ENTER↑] [ENTER↑] ■ [B]	 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
7	Transformar las coordenadas del antiguo sistema en el nuevo.	x y Z	[ENTER↑] [ENTER↑] ■ [C] [R/S] [R/S]	 x' y' z'
	ó			
	del nuevo sistema en el antiguo.	x' y' z'	[ENTER↑] [ENTER↑] ■ [E] [R/S] [R/S]	 x y z
8	Para un nuevo juego de coordenadas, ir al paso 7. Para una nueva transformación en un espacio de 3 dimensiones, ir al paso 6. (x_0, y_0, z_0) ó (a, b, c, θ) pueden cambiarse independientemente.			

Ejemplo 1:
Los sistemas de coordenadas (x, y) y (x′, y′) se muestran según la figura:



Encontrar las coordenadas de los puntos P_1, P_2 y P_3 en el sistema (x′, y′) nuevo.
Encontrar las coordenadas del punto P'_4 en el sistema (x, y) primero. (Se ha utilizado el modo grados).

Teclas:	Resultados:	
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 026		
[XEQ] [ALPHA] TRANS [ALPHA] ⟶	0,0000	
7 [ENTER↑] 4 [CHS] [ENTER↑]		
27 [A] ⟶	1,0000	
9 [CHS] [ENTER↑] 7 [C] ⟶	−9,2622	(x_1')
[R/S] ⟶	17,0649	(y_1')
5 [CHS] [ENTER↑] 4 [CHS] [C] ⟶	−10,6921	(x_2')
[R/S] ⟶	5,4479	(y_2')
6 [ENTER↑] 8 [C] ⟶	4,5569	(x_3')
[R/S] ⟶	11,1461	(y_3')
2.7 [ENTER↑] 3.6 [CHS] [E] ⟶	11,0401	(x_4)
[R/S] ⟶	−5,9818	(y_4)

Ejemplo 2:
Un sistema de coordenadas de 3 dimensiones se ha trasladado a un vector (2.45, 4.00, 4.25).
Después de la traslación, se ha efectuado una rotación de 62,5 grados a partir del eje (0, −1, −1).
En el primer sistema, un punto tiene por coordenadas (3.9, 2.1, 7.0). ¿Cuáles son las coordenadas de este punto en el nuevo sistema?

Teclas:	Resultados:	
[XEQ] [ALPHA] TRANS [ALPHA]		
2.45 [ENTER↑] 4 [ENTER↑]		
4.25 ■ [A] →	**2,4500**	
0 [ENTER↑] 1 [CHS] [ENTER↑]		
1 [CHS] [ENTER↑] 62.5 ■ [B] →	**1,4142**	
3.9 [ENTER↑] 2.1 [ENTER↑]		
7 ■ [C] →	**3,5861**	(x′)
[R/S] →	**0,2609**	(y′)
[R/S] →	**0,5891**	(z′)

En el nuevo sistema, un punto tiene por coordenadas (1, 1, 1). ¿Cuales son sus coordenadas en el sistema inicial?

Teclas:	Resultados	
1 [ENTER↑] 1 [ENTER↑]		
1 ■ [E] →	**2,9117**	(x)
[R/S] →	**4,3728**	(y)
[R/S] →	**5,8772**	(z)

Apéndice A

Programas	Reg. para copiar	Registros de datos	Banderas	Formato resultado	Modo angular
Operaciones con matrices	138	(ver diagrama de registros)	02-10 21-22 25 29		
Resolución de f(x) = 0	43	00-06	00 21-22		
Raíces de un polinomio	84	00-22	00 02-03 21	FIX 4	
Integración numérica	27	00-07	21 27		
Ecuaciones diferenciales	35	00-07	01 21		
Series de Fourier	50	00-26	01-02 21 29	FIX 4	
Operaciones con complejos	59	00-04	21		Rad/Grad.
Funciones hiperbólicas	17	00			
Resolución de triángulos	46	00-07	21		
Cambios de coordenadas	50	00-23	00-02 21 27		

Orden	Número de módulos de memoria (M)	Número de registros	Situación de registros	Situación de matrices	Situación de giros	Situación de columnas	Registros para grabar
N	INT $\frac{N^2+2N+15}{64}$	$N^2+2N+15$	00 to $N^2+2N+14$	15 to N^2+14	N^2+15 to N^2+N+14	N^2+N+15 to $N^2+2N+14$	13 to N^2+N+14
1	0	18	00- 17	15- 15	16- 16	17- 17	13- 16
2	0	23	00- 22	15- 18	19- 20	21- 22	13- 20
3	0	30	00- 29	15- 23	24- 26	27- 29	13- 26
4	0	39	00- 38	15- 30	31- 34	35- 38	13- 34
5	0	50	00- 49	15- 39	40- 44	45- 49	13- 44
6	0	63	00- 62	15- 50	51- 56	57- 62	13- 56
7	1	78	00- 77	15- 63	64- 70	71- 77	13- 70
8	1	95	00- 94	15- 78	79- 86	87- 94	13- 86
9	1	114	00-113	15- 95	96-104	105-113	13-104
10	2	135	00-134	15-114	115-124	125-134	13-124
11	2	158	00-157	15-135	136-146	147-157	13-146
12	2	183	00-182	15-158	159-170	171-182	13-170
13	3	210	00-209	15-183	184-196	197-209	
14	3	239	00-238	15-210	211-224	225-238	

* La matriz se almacena ordenada por filas. Cualquier elemento A(I, J) puede situarse utilizando la siguiente formula: dirección del registro = N(I−1) + J + 14.

Apéndice B
Subrutinas

Esta tabla suministra información necesaria para utilizar partes diversas del Módulo de Aplicación Matemático como subrutinas

Subrutina	Etiqueta	Registros iniciales	Banderas	Registros finales	Observaciones
Giro de matriz	PVT	15 a N^2+14 (Ver Diag. de Regist.) Orden R14	SF 04 CF 06 CF 07 CF 08 CF 09 CF 10 SF 21	00 a $N^2+2N+14$ (Ver Diag. de Regist.)	Permite al usuario saltar la matriz inicial.
Sistemas de ecuaciones	SIMEQ	15 a N^2+14 y N^2+N+15 a $N^2+2N+14$ (Ver Diag. de Regist.) Orden R14	SF 04 SF 05 CF 06 CF 07 CF 08 CF 09 CF 10 SF 21	00 a $N^2+2N+14$ (Ver Diag. de Regist.)	Permite saltar la matriz inicial. Asume que el vector columna ya está almacenado.
Resolución de f(x) en un intervalo	SOL	R_{01} Aprox. 1 R_{02} Aprox. 2 R_{06} Nombre Función	SF 21	Se usan R_{00}–R_{06}	Recuerde introducir la función de la cual se halla su valor. La bandera 00 se utiliza en el programa.
Raíces de un polinomio	ROOTS	R_{00} a_0 R_{01} a_1 R_{02} a_2 R_{03} a_3 R_{04} a_4 R_{22} Grado	SF 21 SF 00	Se usan R_{00}–R_{22}	Hallar las raíces de un polinomio con coeficientes reales; el coeficiente de mayor grado tiene que ser 1.

HEWLETT PACKARD

Central en España:
Jerez 3
Madrid-16
Teléf. 458 26 00

Hewlett-Packard Co.
Intercontinental Operation
3495 Deer Creek Road
Palo Alto, Calif. 94304 USA

00041-90160 Spanish

Printed in SGP