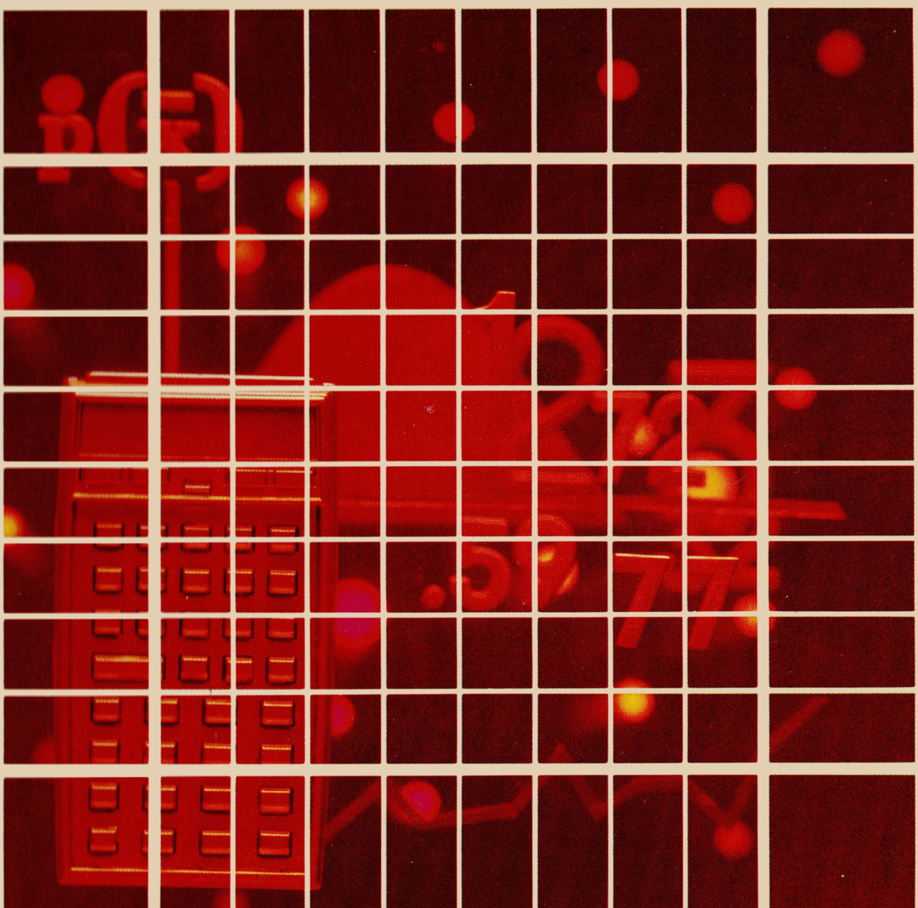
HEWLETT-PACKARD

HP-41C

Statistik-Paket



HEWLETT PACKARD

HEWLETT-PACKARD bittet um Ihre Aufmerksamkeit

Um die Software-Unterstützung zu verbessern, bitten Sie die HP-Applikationsingenieure um Ihre Hilfe. Ihre frühzeitige Antwort hilft uns, die Qualität der Software und existierende Programm-Pakete zu verbessern. Ihre Beantwortung dieses Fragebogens ist äußerst wertvoll für uns.

1. Name des Paketes: Statistik
2. Wie bedeutsam war die Verfügbarkeit dieses Paketes für den Kauf eines Hewlett-Packard Rechners?

   ☐ hätte ihn ohne dieses Programm-Paket nicht gekauft
   ☐ wichtig ☐ unwichtig
3. Was ist das Hauptanwendungsgebiet für dieses Paket?

___

4. Geben Sie bitte in der untenstehenden Liste den von Ihnen empfundenen Gebrauchswert der Programme an:

PROGRAMM-NUMMER	WESENTLICH	WICHTIG, ABER NICHT ERFORDERLICH	UNREGELMÄSSIG GEBRAUCHT	NIE VERWENDET
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				

PROGRAMM-NUMMER	WESENTLICH	WICHTIG, ABER NICHT ERFORDERLICH	UNREGELMÄSSIG GEBRAUCHT	NIE VERWENDET
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				

5. Haben Sie einen Drucker gekauft?

   ☐ ja ☐ nein

   Wenn ja, ist das Druckformat dieses Paketes zweckmäßig?

   ☐ ja ☐ nein
6. Welche Programme fehlen nach Ihrer Meinung in diesem Paket?

___

7 Welche weiteren Programm-Pakete wünschen Sie sich?

___

DANKE FÜR IHRE ZEIT UND MITARBEIT.

Name ____ Stellung ____

Firma ____

Straße ____ (Land) ____

Plz. Stadt ____ Telefon ____

Hewlett-Packard SA
PERSONAL CALCULATOR DIVISION
P.O. Box
CH-1217 Meyrin 2 – Geneva

EINLEITUNG

Die Programme des Statistik-Paketes stammen aus den Bereichen allgemeine Statistik, Varianzanalyse, Regressionsanalyse, Prüf- und Verteilungsstatistik.

Jedes Programm dieses Paketes besteht aus einem Programm im Anwender-Modul und einem Abschnitt in diesem Handbuch. In dem entsprechenden Abschnitt sind die Beschreibung des jeweiligen Verfahrens anhand der einschlägigen Gleichungen, die Anweisungsfolge zu seiner Benutzung und eines oder mehrere Beispiele angegeben. Jedes Beispiel ist mit der Tastenfolge zu seiner Lösung dargestellt.

Vor dem Einstecken des Anwender-Moduls: **Schalten Sie den Rechner aus;** vergewissern Sie sich bitte auch, daß Sie den Abschnitt „Einstecken und Entfernen der Anwender-Module" beherrschen. Nehmen Sie sich bitte auch die paar Minuten Zeit, die Abschnitte „Format der Benutzer-Anweisungen" und „Einige Bemerkungen zur Programmbenutzung" zu lesen, bevor Sie sich einem speziellen Programm zuwenden.

Zunächst sollten Sie sich mit einem Programm dadurch vertraut machen, daß Sie es ein- oder zweimal anhand der vollständigen Liste der Benutzer-Anweisungen durchlaufen lassen. Danach genügen Ihnen sicher die Anzeigen des Programms, um sicher zu wissen, welche Werte einzugeben, welche Tasten zu drücken sind oder was die ausgegebenen Werte bedeuten. Um Ihnen die Arbeit zu erleichtern, liegt dem Paket eine Karte mit Kurzbeschreibungen der Programme bei.

Wir hoffen, daß Sie durch das Statistik-Paket bei der Lösung einer Vielzahl von Problemen Ihres Fachgebietes unterstützt werden. Wir würden auch gerne Ihre Meinung zu den Programmen dieses Paketes erfahren, weshalb wir einen Fragebogen in der vorderen Umschlagdecke des Handbuches beigelegt haben. Würden Sie sich bitte die paar Minuten Zeit nehmen, um uns Ihre Kommentare zu diesen Programmen mitzuteilen? Denn nur aus Ihren Kommentaren können wir erfahren, wie wir den Gebrauchswert unserer Programme verbessern können.

EINLEITUNG 1
INHALT 2
EINSTECKEN UND ENTFERNEN DER ANWENDER-MODULE 4
FORMAT DER BENUTZER-ANWEISUNGEN 7
EINIGE BEMERKUNGEN ZUR PROGRAMM-ANWENDUNG 8

PROGRAMME

Allgemeine Statistik

Einfache Statistiken mit zwei Variablen 10
Einfache Statistiken mit zwei gruppierten oder ungruppierten Variablen

Verteilungsmomente, Schiefe und Exzess 14
Für gruppierte oder ungruppierte Meßwerte werden Momente, Schiefe und Exzess berechnet. Diese Werte können für eine allgemeine Beschreibung der Daten (Grafiken) verwendet werden; es sind dies Symmetrie, Gipfelhöhe etc.

Varianzanalyse

Einfaktorielle Varianzanalyse 18
Mit diesem Programm können die Unterschiede zwischen k Stichprobenmittelwerten geprüft werden.

Zweifaktorielle Varianzanalyse ohne Meßwiederholungen 22
Es werden Zeilen- und Spalteneffekte separat gegen die Gesamtvarianz geprüft.

Kovarianzanalyse 26
Mit diesem Programm kann die Wirkung einer Variablen x unabhängig von der Wirkung einer zweiten Variablen y geprüft werden.

Kurvenanpassung, Regressionsverfahren

Kurvenanpassung 32
Dieses Programm paßt eine Datenmenge an eine der folgenden Funktionsformen an: Gerade; exponentiale, logarithmische, oder Kurven mit Potenzen von x.

Multiple lineare Regression 38
Lineare Regression nach der Methode der kleinsten Quadrate für zwei oder drei unabhänige Variablen.

Polynomische Regression 44
Anhand der Methode der kleinsten Quadrate wird eine Datenmenge an ein kubisches oder parabolisches Polynom angepaßt.

Prüfgrößen

t-Statistik 50
Die Prüfgröße für die Gleichheit von Mittelwerten testet die Nullhypothese H_0: $\mu_1 = \mu_2$ für zwei Stichproben. Die Prüfgröße für Mittelwertsunterschiede untersucht die Nullhypothese H_0: $\mu_1 - \mu_2 = d$ für zwei unabhängige Zufallsstichproben.

Chi-Quadrat Prüfgröße 54
Mit diesem Programm wird die Güte der Anpassung einer beobachteten Verteilung an eine theoretische anhand der χ^2 -Prüfgröße untersucht.

Kontingenztabellen 58
Für 2 k- und 3 k-Kontingenztabellen wird die Nullhypothese über die Unabhängigkeit zweier Variablen untersucht.

Rang-Korrelations-Koeffizient nach SPEARMAN (ρ) 62
Dieses Programm schätzt ab, ob zwei unabhängige Rangreihen übereinstimmen.

Verteilungsfunktionen

Normalverteilung und inverse Normalverteilung 66
Durch Polynomapproximation werden Funktionswerte der Normal- und der inversen Normalverteilung berechnet.

Chi-Quadrat Verteilung 70
Dieses Programm bestimmt die Dichte der Chi-Quadrat Verteilung. Es wird eine Reihenentwicklung dazu benutzt, um die Funktionswerte der kumulativen Verteilung zu berechnen.

Anhang A 77

EINSTECKEN UND ENTFERNEN DER ANWENDER-MODULE

Bitte machen Sie sich mit folgendem vertraut, bevor Sie ein Anwender-Modul zum ersten Mal einstecken.

Bis zu vier Anwender-Module können in die Anschlußbuchsen des HP-41C eingesteckt werden. Solange die Module eingesteckt sind, können die Namen aller hierin enthaltenen Programme durch Drücken von ■ CATALOG 2 angezeigt werden.

VORSICHT

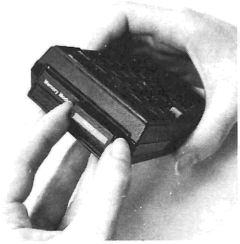
Schalten Sie jedesmal vor dem Einstecken oder Entfernen irgendeiner Erweiterung oder eines Zubehörs den HP-41C aus. Versäumen Sie dies, so können sowohl der Rechner als auch das Zubehör beschädigt werden.

So müssen Anwender-Module eingesteckt werden:

1. HP-41C **ausschalten!** Versäumen Sie dies, so können Module und Rechner beschädigt werden.

2. Entfernen Sie die Schutzkappen der Anschlußbuchsen; mit diesen sollten offene Anschlußbuchsen verschlossen werden, sofern diese nicht belegt werden.

3. Stecken Sie das Anwender-Modul mit dem Etikett nach unten in eine beliebige Buchse, wie nebenstehend gezeigt. Anwender-Module müssen immer **nach** dem letzten Speichererweiterungsmodul eingesteckt werden. Die Nummern der Anschlußbuchsen sind nebenstehend angegeben, außerdem noch, der Bequemlichkeit halber, auf der Rückseite des Rechners.



4. Sollen noch weitere Anwender-Module eingesteckt werden, so sind sie in eine beliebige Anschlußbuchse zu stecken, jedoch immer nach dem letzten Speichererweiterungsmodul. Steckt beispielsweise ein Speichererweiterungsmodul in Buchse 1, so können die Buchsen 2, 3 oder 4 für Anwender-Module verwendet werden.
   Stecken Sie niemals ein Anwender-Modul in eine Buchse mit niedrigerer Nummer, als es der Position eines Speichererweiterungs-Moduls entspricht. Vergewissern Sie sich, daß freie Anschlußbuchsen mit Schutzkappen verschlossen sind.

5. Schalten Sie den Rechner ein und verfahren Sie nach den Anweisungen für die gewünschte Anwender-Funktion in diesem Buch.

Entfernen von Anwender-Modulen:

1. HP-41C **ausschalten!** Versäumen Sie dies, so können Modul und Rechner beschädigt werden.

2. Fassen Sie das entsprechende Modul an seiner Grifflasche und ziehen Sie es heraus, wie es nebenstehend gezeigt ist.

3. Verschließen Sie die freie Anschlußbuchse mit einer Schutzkappe!

Gleichzeitiger Gebrauch von Speichererweiterungs-(RAM) und Anwender-Modulen (ROM).

Der HP-41C ist so ausgelegt, daß RAMs jeweils in den Anschlußbuchsen mit niedrigerer Nummer eingesteckt werden, als jedes andere Zubehör. Dies gilt auch für Ergänzungen wie den HP-82104A Kartenleser oder den HP-82143A Drucker.

Verwenden Sie also RAMs und ROMs gleichzeitig, so müssen die Speichererweiterungs-Module immer in die niedriger bezifferten Buchsen und die Anwender-Module in eine beliebige Buchse nach der letzten Speichererweiterung eingesteckt werden. Werden RAMs und ROMs zusammen verwendet, so können Anschlußbuchsen ausgelassen werden. Steckt zum Beispiel in Buchse 1 ein RAM, so kann ein Anwender-Modul in Buchse 4 stecken, wobei die Buchsen 2 und 3 frei bleiben.

FORMAT DER BENUTZER-ANWEISUNGEN

Die vollständige Tabelle der Benutzer-Anweisungen – die jedem Programm beigegeben ist – dient Ihnen als Hilfe beim Gebrauch der Programme aus diesem Paket.

Die Tabelle besteht aus fünf Spalten, die – von links nach rechts – mit den Bezeichnungen (Anweisungs-) NUMMER, ANWEISUNG, EINGABE, FUNKTION und ANZEIGE beschriftet sind.

Die Spalte NUMMER enthält die laufende Nummer der Anweisung.

Die Spalte ANWEISUNG enthält neben den Anweisungen, Kommentare zu den Handgriffen, die auszuführen sind.

Die Spalte EINGABE beschreibt die Eingabedaten, deren Maßeinheit (sofern vorhanden und sinnvoll) oder die entsprechende alphanumerische Antwort auf eine vom Rechner gestellte Frage. Eingabetasten sind die Tasten 0 bis 9 und der Dezimalpunkt (die numerischen Tasten), [EEX] (Eingabe des Exponenten) und [CHS] (Vorzeichenwechsel).

Die Spalte FUNKTION gibt an, welche Tasten nach der Eingabe der entsprechenden Daten zu drücken sind.

Immer dann, wenn eine Anweisung in den Spalten EINGABE oder FUNKTION goldfarben gedruckt ist, muß die Taste [ALPHA] vor der Eingabe dieser Anweisung gedrückt werden. Nach Eingabe ist wiederum [ALPHA] zu drücken, um den Rechner in den normalen Betriebsmodus zurückzuversetzen.
Beispielsweise bedeutet [XEQ] Σ BSTAT, daß folgende Tastenfolge zu drücken ist: [XEQ] [ALPHA] Σ BSTAT [ALPHA] .

Die Spalte ANZEIGE beschreibt neben Zwischen- und Endergebnissen und ggf. deren Maßeinheiten, vor allem Anzeigen, mit denen der Rechner Eingaben abfragt.

Oberhalb der Spalte ANZEIGE befindet sich ein Kasten, der die Mindestanzahl UMFANG von Registern angibt, die für die Ausführung des Programms notwendig sind. Informiren Sie sich bitte auf den Seiten 73 und 117 in dem Bedienungs-Handbuch darüber, wie der Umfang des Speichers verändert werden kann.

EINIGE BEMERKUNGEN ZUR VERWENDUNG DER PROGRAMME

Katalog

Sobald ein Anwender-Modul im HP-41C steckt, kann der Inhalt des Moduls durch Drücken von ■ [CATALOG] 2 (der Katalog der Erweiterungen) angezeigt werden. Die [CAT] -Funktion listet sowohl den Namen jeder globalen Marke im Modul, als auch die Funktionsnamen jeder anderen eingesteckten Erweiterung auf. Beachten Sie bitte dabei, daß die Katalog-Funktion zuerst die Erweiterungen in Anschlußbuchse 1, danach die der Buchsen 2 bis 4 anzeigt.

ALPHA- und USER-Modus

In diesem Handbuch ist eine besondere Schreibweise verwendet, um den ALPHA-Modus zu kennzeichnen. Sobald eine Anweisung in der Tabelle der Benutzer-Anweisungen goldfarben gedrückt ist, muß die [ALPHA] -Taste vor der Eingabe der Anweisung gedrückt werden. Nach der Eingabe muß die [ALPHA] -Taste ein weiteres Mal gedrückt werden, um den Rechner wieder in den normalen Betriebs-Modus umzuschalten. Zum Beispiel: [XEQ] Σ BSTAT bedeutet die Tastenfolge: [XEQ] [ALPHA] Σ BSTAT [ALPHA] .

Im USER-Modus werden, wenn die Tastenreihe ganz oben gemeint ist (die Tasten können umbenannt sein), in diesem Handbuch die Symbole [A] , [C] , [E] , ■ [A] und [R/S] verwendet. Dies gilt für die Tabelle der Benutzeranweisungen und die Lösungen der Aufgabenbeispiele.

Einsatz des zusätzlich verfügbaren Druckers

Wird der Drucker zusammen mit diesem Anwender-Modul im HP-41C verwendet, so werden alle Ergebnisse automatisch ausgedruckt. Wünschen Sie außerdem noch eine Liste der Eingabedaten, so wählen Sie einfach den Druck-Modus NORMAL, bevor Sie ein Programm starten. In diesem Modus werden alle Eingabewerte und die entsprechenden Tasten vom Drucker aufgelistet. Damit verfügen Sie über eine genaue Beschreibung des gesamten Programmlaufes.

Auslesen von Modul-Programmen (Umspeichern)

Möchten Sie die Ausführung eines Programms Schritt für Schritt verfolgen (trace), ein Programm modifizieren, auf Magnetkarten aufzeichnen oder ausdrucken, so muß dieses Programm vom Anwender-Modul in den Programmspeicher des HP-41C kopiert werden. Die Beschreibung der HP-41C COPY-Funktion finden Sie im Bedienungs-Handbuch. Für die Anwendung eines Programms braucht dieses **nicht** kopiert werden.

Programm-Unterbrechung

Diese Programme sind so ausgelegt, daß sie richtig arbeiten, wenn sie von Anfang bis zum Ende durchlaufen werden, ohne daß dabei der Rechner ausgeschaltet wird. (Beachten Sie bitte: Der Rechner kann sich selbsttätig abschalten.) Wird der HP-41C ausgeschaltet, so kann es notwendig sein, daß Flag 21 (SF 21) für eine korrekte Weiterführung des Programms gesetzt werden muß.

Gebrauch von Marken

Der Benutzer sollte sich möglicher Probleme bewußt sein, wenn in eigenen Programmen die gleichen Alpha-Marken verwendet werden wie im Anwender-Modul.

Tastenbelegungen

Falls Sie mit Hilfe von ASN Tastenbelegungen vorgenommen haben, ist zu beachten, daß diese den Vorrang vor dem in diesem Paket verwendeten lokalen Marken A, C und E haben.

Flag 03

Ist Flag 03 gesetzt, wenn ein Statistik-Paket-Programm ausgeführt wird, werden die Statistik-Register ggf. nicht gelöscht und es können fehlerhafte Ergebnisse auftreten.

EINFACHE STATISTIKEN MIT ZWEI VARIABLEN

Dieses Programm berechnet Mittelwerte, Standardabweichungen, Kovarianz, Korrelationskoeffizient, Variationskoeffizienten, Summen, Produkte und Quadratsummen von Meßwerten. Diese Meßreihen können ungruppiert $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$ oder gruppiert sein $\{(x_i, y_i, f_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$. f_i bezeichnet die Häufigkeit des Meßwertpaares (x_i, y_i).

Mittelwerte

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Standardabweichungen $\quad s_x = \sqrt{\dfrac{\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}}$

$$\left(\text{oder } s_x' = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2}{n}}\right)$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\Sigma y_i^2 - n\bar{y}^2}{n-1}}$$

$$\left(\text{oder } s_y' = \sqrt{\frac{\Sigma y_i^2 - n\bar{y}^2}{n}}\right)$$

Kovarianz $\quad S_{xy} = \dfrac{1}{n-1}\left(\Sigma x_i y_i - \dfrac{1}{n}\Sigma x_i \Sigma y_i\right)$

$$\left(\text{oder } s_{xy}' = \frac{1}{n}\left[\Sigma x_i y_i - \frac{1}{n}\Sigma x_i \Sigma y_i\right]\right)$$

Korrelationskoeffizient $\quad \gamma_{xy} = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}$

Variationskoeffizienten $\quad V_x = \dfrac{s_x}{\bar{x}} \cdot 100, \qquad V_y = \dfrac{s_y}{\bar{y}} \cdot 100$

Beachte: n ist ein positiver und ganzzahliger Wert mit $n > 1$.

Umfang: 012

Nr.	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
	Ungruppierte Daten			
1.	Programm initialisieren		XEQ ΣBSTAT	ΣBSTAT
2.	Schritte 2-3 für i=1, 2, ..., n eingeben: x_i	x_i	ENTER↑	
	y_i	y_i	A	(i)
3.	Falls Eingabefehler bei x_k oder y_k,	x_k	ENTER↑	
	mit korrigieren	y_k	C	(k−1)
4.	Weiter mit Schritt 8 für die statistischen Berechnungen			
	Gruppierte Daten			
5.	Programm initialisieren		XEQ ΣBSTG	ΣBSTG
6.	Schritte 6-7 für i = 1, 2,..., n eingeben: x_i	x_i	ENTER↑	
	y_i	y_i	ENTER↑	
	f_i	f_i	A	(Σf_i)
7.	Falls Eingabefehler bei x_k,	x_k	ENTER↑	
	y_k oder f_k,	y_k	ENTER↑	
	mit korrigieren.	f_k	C	$(\Sigma f_i - f_k)$
8.	Statistische Berechnungen:			
	$\bar{x}$		E	XBAR=$(\bar{x})$
	$\bar{y}$		R/S	YBAR=$(\bar{y})$
	s_x		R/S	SX=(s_x)
	s'_x		R/S	SX.=(s'_x)
	s_y		R/S	SY=(s_y)
	s'_y		R/S	SY.=(s'_y)
	v_x*		R/S	VX=(v_x)
	v_y*		R/S	VY=(v_y)
	s_{xy}		R/S	SXY=(s_{xy})
	s'_{xy}		R/S	SXY.=(s'_{xy})
	γ_{xy}		R/S	GXY=(γ_{xy})
	Σx_i		R/S	ΣX=(Σx_i)
	Σy_i		R/S	ΣY=(Σy_i)
	$\Sigma x_i y_i$		R/S	ΣXY=$(\Sigma x_i y_i)$
	Σx_i^2		R/S	ΣX2=(Σx_i^2)
	Σy_i^2		R/S	ΣY2=(Σy_i^2)
9.	Schritt 8 wiederholen, falls erneute Anzeige gewünscht.			
10.	Das gleiche Programm mit neuen Daten: initialisieren mit		A	ΣBSTAT or ΣBSTG
	dann weiter mit Schritt 2 oder 6			
11.	Um das andere Programm zu verw. weiter mit 1 oder 5			

Beachte: „DATA ERROR" wird angezeigt, falls $\bar{x}$ oder $\bar{y}$ Null ist.
R/S drücken und weitermachen

Beispiel 1:

Für den folgenden Datensatz sind zu berechnen: Mittelwerte, Standardabweichungen, Kovarianz, Korrelation, Variation und die Summen.

x_i	26	30	44	50	62	68	74
y_i	92	85	78	81	54	51	40

Tastenfolge:	**Anzeige:**
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 012	
[XEQ] [ALPHA] ΣBSTAT [ALPHA]	*ΣBSTAT*
26 [ENTER↑] 92 [A]	
100 [ENTER↑] 100 [A]	
100 [ENTER↑] 100 [C]	
30 [ENTER↑] 85 [A]	
44 [ENTER↑] 78 [A]	
50 [ENTER↑] 81 [A]	
62 [ENTER↑] 54 [A]	
68 [ENTER↑] 51 [A]	
74 [ENTER↑] 40 [A]	*7.00*
[E]	*XBAR=50.57*
[R/S]	*YBAR=68.71*
[R/S]	*SX=18.50*
[R/S]	*SX.=17.13*
[R/S]	*SY=20.00*
[R/S]	*SY.=18.51*
[R/S]	*VX=36.58*
[R/S]	*VY=29.10*
[R/S]	*SXY=-354.14*
[R/S]	*SXY.=-303.55*
[R/S]	*GXY=-0.96*
[R/S]	*ΣX=354.00*
[R/S]	*ΣY=481.00*
[R/S]	*ΣXY=22200.00*
[R/S]	*ΣX2=19956.00*
[R/S]	*ΣY2=35451.00*

Beispiel 2:

Das Programm ist auf folgenden gruppierten Datensatz anzuwenden:

x_i	4.8	5.2	3.8	4.4	4.1
y_i	15.1	11.5	14.3	13.6	12.8
f_i	1	3	1	6	2

Tastenfolge:	**Anzeige:**
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 012	
[XEQ] [ALPHA] ΣBSTG [ALPHA]	*ΣBSTG*
4.8 [ENTER↑] 15.1 [ENTER↑] 1 [A]	
5.2 [ENTER↑] 11.5 [ENTER↑] 3 [A]	
3.8 [ENTER↑] 14.3 [ENTER↑] 1 [A]	
4.4 [ENTER↑] 13.6 [ENTER↑] 6 [A]	
4.1 [ENTER↑] 12.8 [ENTER↑] 2 [A]	*13.00*
[E]	*XBAR=4.52*
[R/S]	*YBAR=13.16*
[R/S]	*SX=0.45*
[R/S]	*SX.=0.43*
[R/S]	*SY=1.11*
[R/S]	*SY.=1.07*
[R/S]	*VX=9.93*
[R/S]	*VY=8.42*
[R/S]	*SXY=-0.31*
[R/S]	*SXY.=-0.28*
[R/S]	*GXY=-0.62*
[R/S]	*ΣX=58.80*
[R/S]	*ΣY=171.10*
[R/S]	*ΣXY=770.22*
[R/S]	*ΣX2=268.38*
[R/S]	*ΣY2=2266.69*

VERTEILUNGSMOMENTE, SCHIEFE UND EXZESS
(FÜR GRUPPIERTE UND UNGRUPPIERTE DATEN)

Bei gruppierten und ungruppierten Daten werden die Verteilungsmomente zur Beschreibung (Verteilungsparameter) verwendet. Schiefe gilt als Maß für den Mangel an Symmetrie, während der Exzess die relative Höhe des Verteilungsgipfels angibt. Für einen gegebenen Datensatz von: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$:

1. Moment $\quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

2. Moment $\quad m_2 = \frac{1}{n}\Sigma x_i^2 - \bar{x}^2$

3. Moment $\quad m_3 = \frac{1}{n}\Sigma x_i^3 - \frac{3}{n}\bar{x}\,\Sigma x_i^2 + 2\bar{x}^3$

4. Moment $\quad m_4 = \frac{1}{n}\Sigma x_i^4 - \frac{4}{n}\bar{x}\,\Sigma x_i^3 + \frac{6}{n}\bar{x}^2\,\Sigma x_i^2 - 3\bar{x}^4$

Schiefe $\quad \gamma_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}$

Exzess $\quad \gamma_2 = \frac{m_4}{m_2^2}$

Dieses Programm kann auch wahlweise für die Berechnung mit gruppierten Daten eingesetzt werden, wobei ähnliche Formeln, wie für den Fall ungruppierter Daten gelten.

Daten	x_1	x_2	...	x_m
Häufigkeit	f_1	f_2	...	f_m

Zur Beachtung: In diesem Fall gilt für das 1. Moment:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{m} f_i}$$

Literatur:

SPIEGEL, M. R. 1961. Theory and Problems of Statistics. Schaum's Outline, McGraw-Hill.

				Umfang: 012
Nr.	**Anzeige**	**Eingabe**	**Funktion**	**Anzeige**
	Ungruppierte Daten			
1.	Programm initialisieren		XEQ ΣMMTUG	ΣMMTUG
2.	Schritte 2-3 für i = 1,2,...,n eingeben: x_i	x_i	A	(i)
3.	Falls Eingabefehler bei x_k, korrigieren mit	x_k	C	(k−1)
4.	Momentberechnung: weiter mit Schritt 8			
	Gruppierte Daten			
5.	Programm initialisieren		XEQ ΣMMTGD	ΣMMTGD
6.	Schritte 6-7 für j=1,2,...,m eingeben: x_j	x_j	ENTER↑	
	f_j	f_j	A	(j)
7.	Falls Eingabefehler bei y_n und f_n korrigieren mit:	x_h	ENTER↑	
		f_h	C	(h−1)
8.	Berechnung der Momente etc.			
	$\bar{x}$		E	XBAR=($\bar{x}$)
	m_2		R/S	M2=(m_2)
	m_3		R/S	M3=(m_3)
	m_4		R/S	M4=(m_4)
	γ_1		R/S	GM1=(γ_1)
	γ_2		R/S	GM2=(γ_2)
9.	Schritt 8 wiederholen, wenn Ergebn. nochm. erwünscht			
10.	Das gleiche Programm mit einem neuen Datensatz: initialisieren ➢		■ A	ΣMMTUG or ΣMMTGD
	dann weiter m. Schr. 2 od. 6			
11.	Um mit dem anderen Programm weiterzuarbeiten: benutzen sie Schritt 1 od. 5			

Beispiel:

1. Ungruppierte Daten

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	2.1	3.5	4.2	6.5	4.1	3.6	5.3	3.7	4.9

$$\bar{x} = 4.21,\ m_2 = 1.39,\ m_3 = 0.39,\ m_4 = 5.49$$

$$\gamma_1 = 0.24,\ \gamma_2 = 2.84$$

Tastenfolge:	**Anzeige:**
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 012	
[XEQ] [ALPHA] ΣMMTUG [ALPHA]	*ΣMMTUG*
2.1 [A] 3.5 [A] 4.0 [A] 4.0 [C]	
4.2 [A] 6.5 [A] 4.1 [A] 3.6 [A]	
5.3 [A] 3.7 [A] 4.9 [A]	*9.00*
[E]	*XBAR=4.21*
[R/S]	*M2=1.39*
[R/S]	*M3=0.39*
[R/S]	*M4=5.49*
[R/S]	*GM1=0.24*
[R/S]	*GM2=2.84*

Beispiel:

2. Gruppierte Daten

i	1	2	3	4	5
x_i	3	2	4	6	1
f_i	4	5	3	2	1

$$\bar{x} = 3.13,\ m_2 = 1.98,\ m_3 = 2.14,\ m_4 = 11.05$$

$$\gamma_1 = 0.77,\ \gamma_2 = 2.81$$

Tastenfolge:	Anzeige:
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 012	
[XEQ] [ALPHA] ΣMMTGD [ALPHA]	*ΣMMTGD*
3 [ENTER↑] 4 [A] 2 [ENTER↑] 5 [A]	
4 [ENTER↑] 4 [A] 4 [ENTER↑] 4 [C]	
4 [ENTER↑] 3 [A] 6 [ENTER↑] 2 [A]	
1 [ENTER↑] 1 [A]	*5.00*
[E]	*XBAR=3.13*
[R/S]	*M2=1.98*
[R/S]	*M3=2.14*
[R/S]	*M4=11.05*
[R/S]	*GM1=0.77*
[R/S]	*GM2=2.81*

EINFAKTORIELLE VARIANZANALYSE

Die einfaktorielle Varianzanalyse prüft, ob die beobachteten Unterschiede zwischen k Stichprobenmittelwerten zufällig sind, oder ob die Mittelwertsdifferenzen in den Stichproben auf Mittelwertsunterschiede in den entsprechenden Populationen (Grundgesamtheiten) zurückzuführen sind.

Angenommen, die i-te Stichprobe umfaßt n_i Meßwerte, wobei die einzelnen Stichproben unterschiedlichen Umfang haben können. Die zu prüfende Nullhypothese behauptet, daß alle Mittelwerte in den Grundgesamtheiten, die alle durch eine Stichprobe repräsentiert sind, gleich sind. Dieses Programm bestimmt die vollständige Tabelle für die Varianzanalyse:

1. Mittelwert der i-ten Stichprobe, i = 1, . . . , k

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

2. Standardabweichung der i-ten Stichprobe:

$$s_i = \left[\left(\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - n_i \bar{x}_i^2 \right) \Big/ (n_i - 1) \right]^{1/2}$$

3. Summe der i-ten Stichprobe:

$$\mathrm{Sum}_i = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

4. Gesamtquadratsumme:

$$\mathrm{TSS} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right)^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

5. Quadratsumme in der i-ten Stichprobe (Stufen):

$$\mathrm{TrSS} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right)^2}{n_i} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right)^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

6. Fehlerquadratsumme:

$$ESS = TSS - TrSS$$

7. Freiheitsgrade (df_1) der Stufen:

$$df_1 = k - 1$$

8. Freiheitsgrade der Fehler:

$$df_2 = \sum_{i=1}^{k} n_i - k$$

9. Gesamtzahl der Freiheitsgrade:

$$df_3 = df_1 + df_2 = \sum_{i=1}^{k} n_i - 1$$

10. Mittlere Quadratsumme der Stufen:

$$TrMS = \frac{TrSS}{df_1}$$

11. Mittlere Quadratsumme der Fehler:

$$EMS = \frac{ESS}{df_2}$$

12. F-Quotient:

$$F = \frac{TrMS}{EMS}$$ (mit df_1 Freiheitsgraden im Zähler und df_2 Freiheitsgraden im Nenner.)

Literatur:

J. E. Freund, *Mathematical Statistics*, Prentice Hall, 1962.

Umfang: 020

Nr.	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
1.	Programm intitialisieren		[XEQ] ΣAOVONE	ΣAOVONE
2.	Schritte 2-5 für $i=1,2,\ldots,k$ wiederholen			
3.	Schritte 3-4 für $J=1,2,\ldots,n_i$ wiederholen. Eing. von x_{ij}	x_{ij}	[A]	(j)
4.	Falls Eingabefehler bei x_{im}, korrigieren mit	x_{im}	[C]	(m−1)
5.	Berechnen von: Mittelw. x_i Streuung s_i Summe sum_i		[R/S] [R/S] [R/S]	XBAR=($\bar{x}_i$) S=(s_i) SUM=(Sum_i)
6.	Varianzanal.-Tab. berechn. TSS TrSS ESS df_1 df_2 df_3 TrMS EMS F		 [E] [R/S] [R/S] [R/S] [R/S] [R/S] [R/S] [R/S] [R/S]	 TSS=(TSS) TRSS=(TrSS) ESS=(ESS) DF1=(df_1) DF2=(df_2) DF3=(df_3) TRMS=(TrMS) EMS=(EMS) F=(F)
7.	Schr. 6 wiederh., falls die Erg. ern. angez. werd. sollen			
8.	Für einen anderen Datens., Progr. mit initialisieren, dann weiter mit Schritt 2.		[A]	ΣAOVONE

Beispiel:

Die folgenden Werte wurden von Schülern in Zufallsstichproben aus vier verschiedenen Schulen bei Leistungstests erzielt:

i \ j	1	2	3	4	5	6	7
School 1	88	99	96	68	85		
School 2	78	62	98	83	61	88	
School 3	80	61	74	92	78	54	77
School 4	71	65	90	46			

Berechne die Tafel der Varianzanalyse und prüfe die Nullhypothese, so daß die Unterschiede der Stichprobenmittelwerte durch den Zufall erklärt werden können. Dabei ist eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}01$ anzunehmen.

Tastenfolge:	**Anzeige:**
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 020	
[XEQ] [ALPHA] ΣAOVONE [ALPHA]	***ΣAOVONE***
88 [A] 99 [A] 96 [A] 68 [A]	
85 [A]	***5.00***
[R/S]	***XBAR=87.20***
[R/S]	***S=12.15***
[R/S]	***SUM=436.00***
78 [A] 62 [A] 98 [A] 83 [A]	
61 [A] 88 [A]	***6.00***
[R/S]	***XBAR=78.33***
[R/S]	***S=14.62***
[R/S]	***SUM=470.00***
80 [A] 61 [A] 74 [A] 92 [A]	
78 [A] 54 [A] 77 [A]	***7.00***
[R/S]	***XBAR=73.71***
[R/S]	***S=12.61***
[R/S]	***SUM=516.00***
71 [A] 66 [A] 66 [C] 65 [A]	
90 [A] 46 [A]	***4.00***
[R/S]	***XBAR=68.00***
[R/S]	***S=18.13***
[R/S]	***SUM=272.00***
[E]	***TSS=4530.00***
[R/S]	***TRSS=930.44***
[R/S]	***ESS=3599.56***
[R/S]	***DF1=3.00***
[R/S]	***DF2=18.00***
[R/S]	***DF3=21.00***
[R/S]	***TRMS=310.15***
[R/S]	***EMS=199.98***
[R/S]	***F=1.55***

Tabelle der Varianzanalyse

	SS	df	MS	F
Treatments	930.44	3	310.15	1.55
Error	3599.56	18	199.98	
Total	4530.00	21		

Da der beobachtete F-Wert von F = 1.55 den kritischen (Tabellen-) Wert von $F_{.01,3,18}$ = 5.09 nicht übersteigt, kann die Nullhypothese nicht verworfen werden. Somit besteht kein (erfahrungswissenschaftlicher) Grund, die Testwerte aus den vier Schulen als signifikant verschieden zu bezeichnen.

ZWEIFAKTORIELLE VARIANZANALYSE OHNE MESSWIEDERHOLUNG

Diese Varianzanalyse dient dazu, die Gesamtvariation einer Menge von Meßwerten in Bestandteile zu zerlegen, deren Zustandekommen verschieden begründet werden kann. Die Gesamtvariation der Meßwerte wird durch die Summe der quadrierten Meßwerte dargestellt.

Die zweifaktorielle Varianzanalyse prüft Zeilen- und Spalteneffekte unabhängig voneinander. Dieses Programm berechnet die Tabelle der Varianzanalyse für den Fall, daß

(1) jede Zeile mehr als einen Wert enthält und
(2) die Interaktion zwischen den Faktoren vernachlässigt werden kann.

Formeln:

1. Summen

$$\text{Zeilen } RS_i = \sum_j x_{ij} \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

$$\text{Spalten } CS_i = \sum_i x_{ij} \qquad j = 1,2,\ldots,c$$

2. Quadratsummen:

$$\text{Total TSS} = \Sigma\Sigma x_{ij}^2 - (\Sigma\Sigma x_{ij})^2/rc$$

$$\text{Zeilen RSS} = \sum_i \left(\sum_j x_{ij}\right)^2 /c - (\Sigma\Sigma x_{ij})^2/rc$$

$$\text{Spalten CSS} = \sum_j \left(\sum_i x_{ij}\right)^2 /r - (\Sigma\Sigma x_{ij})^2/rc$$

$$\text{Fehler ESS} = \text{TSS} - \text{RSS} - \text{CSS}$$

3. Freiheitsgrade:

$$\text{Zeilen } df_1 = r - 1$$

$$\text{Spalten } df_2 = c - 1$$

$$\text{Fehler } df_3 = (r-1)(c-1)$$

4. F-Brüche

$$\text{Zeileneffekte } F_1 = \frac{RSS}{df_1} \Big/ \frac{ESS}{df_3}$$

$$\text{Spalteneffekte } F_2 = \frac{CSS}{df_2} \Big/ \frac{ESS}{df_3}$$

Literatur:

DIXON & MASSEY. *Introduction to Statistical Analysis.* McGRAW-HILL. 1969.

Umfang: 018

Nr.	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
1.	Programm initialisieren		XEQ ΣAOVTWO	ΣAOVTWO
	Zeilenweise			
2.	Schritte 2-5 für i=1,2,...,r wiederholen			
3.	Schritte 3-4 für j=1,2,..., c wiederholen. x_{ij} eingeben	x_{ij}	A	(j)
4.	Falls Eingabefehler bei x_{im}, korrigieren mit	x_{im}	C	(m−1)
5.	Zeilensumme ber. u. Progr. für die nächste Zeile vorber.		R/S	SUM=(RS_i)
6.	Nach der Eing. der letzten Zeile r: Vorber. des Progr. für die spaltenw. Eingabe		R/S	COLUMN-WISE
	Spaltenweise			
7.	Schritte 7-10 für j=1,2,..., c wiederholen			
8.	Schritte 8-9 für i=1,2,..., r wiederholen. xij eingeben	x_{ij}	A	(i)
9.	Falls Eingabefehler: bei x_{nj}, korrigieren mit	x_{hj}	C	(h−1)
10.	Spaltensum. ber. und Progr. f. d. nächste Spalte vorber.		R/S	SUM=(CS_j)
11.	Tab. d. Varianzanal. berech.:			
	RSS		E	RSS=(RSS)
	CSS		R/S	CSS=(CSS)
	TSS		R/S	TSS=(TSS)
	ESS		R/S	ESS=(ESS)
	df_1		R/S	DF1=(df_1)
	df_2		R/S	DF2=(df_2)
	df_3		R/S	DF3=(df_3)
	F_1		R/S	F1=(F_1)
	F_2		R/S	F2=(F_2)
12.	Schr. 11 wiederh., falls ern. Anz. d. Ergebn. gewünscht.			
13.	Für einen anderen Dat.Satz: Initial. Sie das Progr. mit → u. gehen Sie nach Schritt 2.		■ A	ΣAOVTWO

Beispiel:

Es soll das Programm auf folgende Wertetabelle angewendet werden:

i \ j	Spalten 1	2	3	4
Zeilen 1	7	6	8	7
2	2	4	4	4
3	4	6	5	3

Tastenfolge:	**Anzeige:**
XEQ ALPHA SIZE ALPHA 018	
XEQ ALPHA ΣAOVTWO ALPHA	***ΣAOVTWO***
7 A 6 A 8 A 7 A	***4.00***
R/S	***SUM=28.00***
2 A 4 A 4 A 4 A	***4.00***
R/S	***SUM=14.00***
4 A 7 A 7 C 6 A 5 A	
3 A	***4.00***
R/S	***SUM=18.00***
R/S	***COLUMN-WISE***
7 A 2 A 4 A	***3.00***
R/S	***SUM=13.00***
6 A 4 A 6 A	***3.00***
R/S	***SUM=16.00***
8 A 4 A 5 A	***3.00***
R/S	***SUM=17.00***
7 A 4 A 3 A	***3.00***
R/S	***SUM=14.00***
E	***RSS=26.00***
R/S	***CSS=3.33***
R/S	***TSS=36.00***
R/S	***ESS=6.67***
R/S	***DF1=2.00***
R/S	***DF2=3.00***
R/S	***DF3=6.00***
R/S	***F1=11.70***
R/S	***F2=1.00***

Tabelle der Varianzanalyse

	SS	df	F ratio
Zeile	26.00	2	11.70
Spalte	3.33	3	1.00
Fehler	6.67	6	
Summe	36.00		

EINFAKTORIELLE KOVARIANZANALYSE

Die einfaktorielle Kovarianzanalyse prüft den Effekt einer Variablen x unabhängig von der Wirkung einer zweiten Variablen y, sofern die Variable y eine Messung darstellt, die an jedem Stichprobenmitglied vollzogen wurde. (Im Gegensatz zur Varianzanalyse: dort handelt es sich bei den „zweiten" Variablen um Kategorisierungen wie Faktoren, Treatments etc.)

Es sei (x_{ij}, y_{ij}) die j-te Messung aus der i-ten Grundgesamtheit mit $i = 1,2, \ldots, k$ und $j = 1,2, \ldots, n_j$. Die i Stichproben können gleich oder verschieden viele Elemente umfassen. Mit der Kovarianzanalyse werden Mittelwertsunterschiede in den Residuen überprüft. Als Residuen gelten die Differenzen zwischen den Meßwerten und einem regressionsstatistischen Anteil; dieser Anteil wird aus der Regression von x auf y geschätzt. Die Kovarianzanalyse gliedert die Quadrat- und Produktsummen in verschiedene Anteile auf. Mit diesem Programm wird die vollständige Kovarianztafel berechnet.

Gleichungen:

1. Summen und Quadratsummen

$$Sx_i = \sum_j x_{ij} \; (i = 1,2,\ldots,k)$$

$$TSSx = \Sigma\Sigma x_{ij}{}^2 - \frac{(\Sigma\Sigma x_{ij})^2}{\sum_i n_i}$$

$$ASSx = \sum_i \frac{\left(\sum_j x_{ij}\right)^2}{n_i} - \frac{(\Sigma\Sigma x_{ij})^2}{\sum_i n_i}$$

$$WSSx = TSSx - ASSx$$

2. Freiheitsgrade

$$df_1 = k - 1$$

$$df_2 = \sum_i n_i - k$$

3. Mittlere Quadratsummen und F-Bruch

$$\mathrm{AMSx} = \frac{\mathrm{ASSx}}{df_1}$$

$$\mathrm{WMSx} = \frac{\mathrm{WSSx}}{df_2}$$

$$F_x = \frac{\mathrm{AMSx}}{\mathrm{WMSx}}$$ mit den Freiheitsgraden df_1 und df_2

Durch vertauschen von x_{ij} gegen y_{ij} erhält man die Formeln für y_{ij}.

4. Produktsummen

$$\mathrm{TSP} = \Sigma\Sigma x_{ij}\, y_{ij} - \frac{(\Sigma\Sigma x_{ij})\,(\Sigma\Sigma y_{ij})}{\sum_i n_i}$$

$$\mathrm{ASP} = \sum_i \frac{\left(\sum_j x_{ij}\right)\left(\sum_j y_{ij}\right)}{n_i} - \frac{(\Sigma\Sigma x_{ij})\,(\Sigma\Sigma y_{ij})}{\sum_i n_i}$$

$$\mathrm{WSP} = \mathrm{TSP} - \mathrm{ASP}$$

5. Residuale Quadratsummen

$$\mathrm{TSS}\hat{y} = \mathrm{TSSy} - \frac{(\mathrm{TSP})^2}{\mathrm{TSSx}}$$

$$\mathrm{WSS}\hat{y} = \mathrm{WSSy} - \frac{(\mathrm{WSP})^2}{\mathrm{WSSx}}$$

$$\mathrm{ASS}\hat{y} = \mathrm{TSS}\hat{y} - \mathrm{WSS}\hat{y}$$

6. Freiheitsgrade für die Residuen

$$df_3 = k - 1$$

$$df_4 = \sum_i n_i - k - 1$$

7. Mittlere Quadratsummen und F-Bruch

$$AMS\hat{y} = \frac{ASS\hat{y}}{df_3}$$

$$WMS\hat{y} = \frac{WSS\hat{y}}{df_4}$$

$$F = \frac{AMS\hat{y}}{WMS\hat{y}}$$, mit den Freiheitsgraden df_3 und df_4

Kovarianztabelle

	Freiheits-grade	SSx	SP	SSy	Freiheits-grade	Residuen SS$\hat{y}$	Residuen MS$\hat{y}$	F-Bruch
Zwischen	df_1	ASSx	ASP	ASSy	df_3	ASS$\hat{y}$	AMS$\hat{y}$	F
Innerhalb	df_2	WSSx	WSP	WSSy	df_4	WSS$\hat{y}$	WMS$\hat{y}$	
Total		TSSx	TSP	TSSy		TSS$\hat{y}$		

Anmerkungen:

- F_X kann zur Prüfung der Gleichheit der Mittelwerte von X verwendet werden (Varianzanalyse für X).
- F_Y kann zur Prüfung der Gleichheit der Mittelwerte von Y – unter Vernachlässigung von X – verwendet werden (Varianzanalyse für nicht angepaßte Y).

Literatur:

DIXON & MASSEY. 1969. *Introduction to Statistical Analysis.* New York: McGraw-Hill.

Umfang: 026

Nr.	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
1.	Programm initialisieren		XEQ ΣANOCOV	ΣANOCOV (pse) NEW I=1.00
2.	Schritte 2-6 für i=1,2,..., k wiederholen			
3.	Schritte 3-4 für j=1,2,..., n_i wiederholen; x_{ij} und y_{ij} eingeben	x_{ij} y_{ij}	ENTER↑ A	 (j)
4.	Falls Eingabefehler bei x_{im} oder y_{im}, korrigieren mit	x_{im} y_{im}	ENTER↑ C	 (m−1)
5.	i-te Summenpaare ber.: Sx_i Sy_i		R/S R/S	SX=(Sx_i) SY=(Sy_i)
6.	Für neues i initialisieren		R/S	NEW I=(i)
7.	Kovarianztafel berechnen: TSSx ASSx WSSx TSSy ASSy WSSy df_1 df_2 Fx Fy TSP ASP WSP TSS$\hat{y}$ WSS$\hat{y}$ ASS$\hat{y}$ df_3 df_4 AMS$\hat{y}$ WMS$\hat{y}$ F		 E R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S	 TSSX=(TSSx) ASSX=(ASSx) WSSX=(WSSx) TSSY=(TSSy) ASSY=(ASSy) WSSY=(WSSy) DF1=(df_1) DF2=(df_2) FX=(Fx) FY=(Fy) TSP=(TSP) ASP=(ASP) WSP=(WSP) TSSY.=(TSS$\hat{y}$) WSSY.=(WSS$\hat{y}$) ASSY.=(ASS$\hat{y}$) DF3=(df_3) DF4=(df_4) AMSY.=(AMS$\hat{y}$) WMSY.=(WMS$\hat{y}$) F=(F)
8.	Schritt 7 wiederholen, falls erneute Anzeige der Ergebnisse gewünscht.			
9.	Für einen weit. Datensatz, Programm mit initialisieren dann weiter mit Schritt 2		■ A	ΣANOCOV (pse) NEW I=1.00

Beispiel:

i			j=1	2	3	4
	1	x	3	2	1	2
		y	10	8	8	11
i	2	x	4	3	3	5
		y	12	12	10	13
	3	x	1	2	3	1
		y	6	5	8	7

($k = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 4$)

Tastenfolge:	Anzeige:
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 026	
[XEQ] [ALPHA] ΣANOCOV [ALPHA]	*ΣANOCOV (Pse)*
	NEW I=1.00
3 [ENTER↑] 10 [A] 2 [ENTER↑] 8 [A]	
5 [ENTER↑] 5 [A] 5 [ENTER↑] 5 [C]	
1 [ENTER↑] 8 [A] 2 [ENTER↑] 11 [A]	*4.00*
[R/S]	*SX=8.00*
[R/S]	*SY=37.00*
[R/S]	*NEW I=2.00*
4 [ENTER↑] 12 [A] 3 [ENTER↑] 12 [A]	
3 [ENTER↑] 10 [A] 5 [ENTER↑] 13 [A]	*4.00*
[R/S]	*SX=15.00*
[R/S]	*SY=47.00*
[R/S]	*NEW I=3.00*
1 [ENTER↑] 6 [A] 2 [ENTER↑] 5 [A]	
3 [ENTER↑] 8 [A] 1 [ENTER↑] 7 [A]	*4.00*
[R/S]	*SX=7.00*
[R/S]	*SY=26.00*
[R/S]	*NEW I=4.00*
[E]	*TSSX=17.00*
[R/S]	*ASSX=9.50*
[R/S]	*WSSX=7.50*
[R/S]	*TSSY=71.67*
[R/S]	*ASSY=55.17*
[R/S]	*WSSY=16.50*
[R/S]	*DF1=2.00*
[R/S]	*DF2=9.00*
[R/S]	*FX=5.70*

Tastenfolge (Forts.)	**Anzeige** (Forts.)
[R/S]	*FY=15.05*
[R/S]	*TSP=27.00*
[R/S]	*ASP=20.75*
[R/S]	*WSP=6.25*
[R/S]	*TSSY.=28.78*
[R/S]	*WSSY.=11.29*
[R/S]	*ASSY.=17.49*
[R/S]	*DF3=2.00*
[R/S]	*DF4=8.00*
[R/S]	*AMSY.=8.75*
[R/S]	*WMSY.=1.41*
[R/S]	*F=6.20*

Kovarianztabelle

					Residuen			
	df	SSx	SP	SSy	df	$SS\hat{y}$	$MS\hat{y}$	F
zwischen	2	9.50	20.75	55.17	2	17.49	8.75	6.20
innerhalb	9	7.50	6.25	16.50	8	11.29	1.41	
Total		17.00	27.00	71.67		28.78		

KURVENANPASSUNG

Dieses Programm kann dazu verwendet werden, eine Menge von Datenpunkten (x_i, y_j), mit $i = 1, 2, ..., n$ an eine der folgenden Kurven anzupassen:

1. Gerade (lineare Regression): $y = a + bx$
2. Exponentialfunktion: $y = ae^{bx}$ $(a > 0)$
3. Logarithmische Funktion: $y = a + b \ln (x)$
4. Potenzen von x: $y = ax^b$ $(a > 0)$

Die Regressionskoeffizienten a und b werden anhand des folgenden linearen Gleichungssystems geschätzt:

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma X_i \\ \Sigma X_i & \Sigma X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma Y_i \\ \Sigma Y_i X_i \end{bmatrix}$$

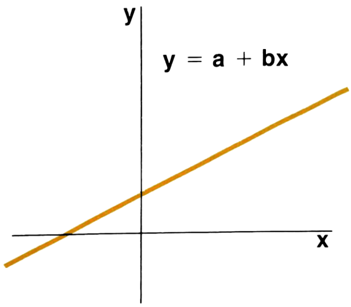
wobei die Variablen wie folgt definiert sind:

Regression	**A**	$\mathbf{X_i}$	$\mathbf{Y_i}$
Linear	a	x_i	y_i
Exponential	ln a	x_i	$\ln y_i$
Logarithmic	a	$\ln x_i$	y_i
Power	ln a	$\ln x_i$	$\ln y_i$

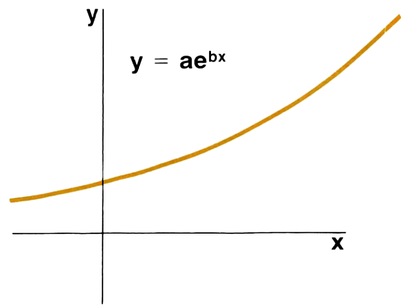
Der Determinationskoeffizient ist:

$$R^2 = \frac{A\Sigma Y_i + b\Sigma X_i\, Y_i - \frac{1}{n}(\Sigma Y_i)^2}{\Sigma(Y_i^2) - \frac{1}{n}(\Sigma Y_i)^2}$$

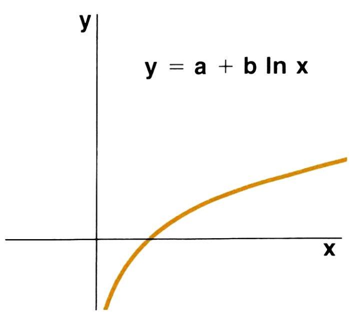
lineare Regression



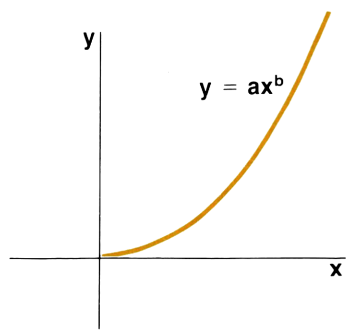
Exponentialkurve



logarithmische Funktion



Potenzen von x



Anmerkungen:

- Das Programm benutzt die Methode der kleinsten Quadrate sowohl für die ursprünglichen Gleichungen (Gerade und logarithmische Funktion) als auch für die transformierten Gleichungen (Exponentialfunktion und Potenzen von x).
- Fehlermeldungen ergeben sich: bei logarithmischer Anpassung durch Werte für $x_i = 0$; bei exponentieller Anpassung für Werte von $y_i = 0$; bei Anpassung an Potenzen von x müssen x_i und y_i positive Werte größer Null sein.
- Werden die Differenzen zwischen x- und/oder y-Werten klein, so nimmt die Genauigkeit der geschätzten Koeffizienten ab.

Umfang: 016

Nr.	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
1.	Programm initialisieren ● für GERADE ● für EXPONENTIAL-KURVE ● für LOGARITHM. KURVE ● für POTENZEN von x		 XEQ ΣLIN XEQ ΣEXP XEQ ΣLOG XEQ ΣPOW	 ΣLIN ΣEXP ΣLOG ΣPOW
2.	Schritte 2 – 3 für i = 1, 2,..., n wiederholen; eingeben x_i y_i	 x_i y_i	 ENTER↑ A	 (i)
3.	falls Eingabefehler bei x_k oder y_k, korrigieren mit	 x_k y_k	 ENTER↑ C	 (k – 1)
4.	R^2 und Regressions-koeffizienten a und b berechnen		E R/S R/S	R2 = (R^2) a = (a) b = (b)
5.	Schätzungen ŷ aus der Regression berechnen; x eingeben	x	R/S	Y. = (ŷ)
6.	Schritt 5 für weitere x-Werte wiederholen.			
7.	Schritt 4 wiederholen, falls erneute Anzeige der Ergebnisse gewünscht.			
8.	für einen neuen Datensatz: Programm mit initialisieren, dann weiter mit Schritt 2		A	ΣLIN oder ΣEXP oder ΣLOG oder ΣPOW
9.	Um ein anderes Programm zu verwenden: weiter mit Schritt 1			

Beispiel 1:

Folgender Datensatz ist an eine Gerade anzupassen:

x_i	40.5	38.6	37.9	36.2	35.1	34.6
y_i	104.5	102	100	97.5	95.5	94

Lösungen:

$a = 33.53,\ b = 1.76$

$R^2 = 0.99$

i.e., $y = 33.53 + 1.76\,x$

Für $x = 37,\ \hat{y} = 98.65$

Für $x = 35,\ \hat{y} = 95.13$

Tastenfolge:	**Anzeige:**
XEQ ALPHA SIZE ALPHA 016	
XEQ ALPHA ΣLIN ALPHA	*ΣLIN*
40.5 ENTER↑ 104.5 A	
38.6 ENTER↑ 102 A	
37.9 ENTER↑ 100 A	
36.2 ENTER↑ 97.5 A	
35.2 ENTER↑ 95.5 A	
35.2 ENTER↑ 95.5 C	
35.1 ENTER↑ 95.5 A	
34.6 ENTER↑ 94 A	*6.00*
E	*R2=0.99*
R/S	*a=33.53*
R/S	*b=1.76*
37 R/S	*Y.=98.65*
35 R/S	*Y.=95.13*

Beispiel 2:

Der folgende Datensatz ist an eine Exponentialkurve anzupassen:

x_i	.72	1.31	1.95	2.58	3.14
y_i	2.16	1.61	1.16	.85	0.5

Lösungen:

$a = 3.45,\ b = -0.58$

$y = 3.45\,e^{-0.58x}$

$R^2 = 0.98$

Für $x = 1.5,\ \hat{y} = 1.44$

Für $x = 2,\ \hat{y} = 1.08$

Tastenfolge:	**Anzeige:**
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 016	
[XEQ] [ALPHA] ΣEXP [ALPHA]	***ΣEXP***
.72 [ENTER↑] 2.16 [A]	
1.31 [ENTER↑] 1.61 [A]	
1.95 [ENTER↑] 1.16 [A]	
2.58 [ENTER↑] .85 [A]	
3.15 [ENTER↑] .05 [A]	
3.15 [ENTER↑] .05 [C]	
3.14 [ENTER↑] 0.5 [A]	***5.00***
[E]	***R2=0.98***
[R/S]	***a=3.45***
[R/S]	***b=-0.58***
1.5 [R/S]	***Y.=1.44***
2.0 [R/S]	***Y.=1.08***

Beispiel 3:

Der folgende Datensatz ist einer logarithmischen Kurve anzupassen:

x_i	3	4	6	10	12
y_i	1.5	9.3	23.4	45.8	60.1

Lösungen:

$a = -47.02,\ b = 41.39$

$y = -47.02 + 41.39 \ln x$

$R^2 = 0.98$

Für $x = 8,\ \hat{y} = 39.06$

Für $x = 14.5,\ \hat{y} = 63.67$

Tastenfolge:	**Anzeige:**
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 016	
[XEQ] [ALPHA] ΣLOG [ALPHA]	***ΣLOG***
3 [ENTER↑] 1.5 [A]	
4 [ENTER↑] 9.3 [A]	
6 [ENTER↑] 23.4 [A]	
10 [ENTER↑] 45.8 [A]	
12 [ENTER↑] 6.01 [A]	
12 [ENTER↑] 6.01 [C]	
12 [ENTER↑] 60.1 [A]	***5.00***

E	*R2=0.98*
R/S	*a=-47.02*
R/S	*b=41.39*
8 R/S	*Y.=39.06*
14.5 R/S	*Y.=63.67*

Beispiel 4:

Der folgende Datensatz ist einer Potenz-Kurve anzupassen:

x_i	10	12	15	17	20	22	25	27	30	32	35
y_i	0.95	1.05	1.25	1.41	1.73	2.00	2.53	2.98	3.85	4.59	6.02

Lösungen:

$a = .03,\ b = 1.46$

$y = .03x^{1.46}$

$R^2 = 0.94$

Für $x = 18,\ \hat{y} = 1.76$

Für $x = 23,\ \hat{y} = 2.52$

Tastenfolge:	**Anzeige:**
XEQ ALPHA SIZE ALPHA 016	
XEQ ALPHA ΣPOW ALPHA	*ΣPOW*
10 ENTER↑ 0.95 A	
12 ENTER↑ 1.05 A	
15 ENTER↑ 1.25 A	
17 ENTER↑ 1.41 A	
20 ENTER↑ 1.73 A	
22 ENTER↑ 2.00 A	
25 ENTER↑ 2.53 A	
27 ENTER↑ 2.98 A	
30 ENTER↑ 3.85 A	
32 ENTER↑ 4.59 A	
35 ENTER↑ 60.2 A	
35 ENTER↑ 60.2 C	
35 ENTER↑ 6.02 A	*11.00*
E	*R2=0.94*
R/S	*a=0.03*
R/S	*b=1.46*
18 R/S	*Y.=1.76*
23 R/S	*Y.=2.52*

MULTIPLE LINEARE REGRESSION

Drei unabhängige Variablen

Dieses Programm paßt eine lineare Gleichung der Form

$$t = a + bx + cy + dz$$

an eine Datenmenge $\{(x_i, y_i, z_i, t_i), \text{ mit } i = 1, 2, ..., n\}$ nach der Methode der kleinsten Quadrate an.

Die Regressionskoeffizienten a, b, c und d werden durch die Lösung des folgenden Gleichungssystems geschätzt. Das Programm bedient sich des GAUSSschen Eliminationsverfahrens mit partieller Pivotierung.

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma y_i & \Sigma z_i \\ \Sigma x_i & \Sigma(x_i)^2 & \Sigma(x_i y_i) & \Sigma(x_i z_i) \\ \Sigma y_i & \Sigma(y_i x_i) & \Sigma(y_i)^2 & \Sigma(y_i z_i) \\ \Sigma z_i & \Sigma(x_i z_i) & \Sigma(y_i z_i) & \Sigma(z_i)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma t_i \\ \Sigma x_i t_i \\ \Sigma y_i t_i \\ \Sigma z_i t_i \end{bmatrix}$$

Der Determinationskoeffizient R^2 ist definiert als:

$$R^2 = \frac{a\Sigma t_i + b\Sigma x_i t_i + c\Sigma y_i t_i + d\Sigma z_i t_i - \frac{1}{n}(\Sigma t_i)^2}{\Sigma(t_i^2) - \frac{1}{n}(\Sigma t_i)^2}$$

Zwei unabhängige Variablen

Es wird eine lineare Gleichung der Form

$$t = a + bx + cy$$

nach der Methode der kleinsten Quadrate an einen Datensatz mit $\{(x_i, y_i, t_i), \text{ mit } i = 1, 2, ..., n)\}$ angepaßt.

Die Regressionskoeffizienten a, b und c werden durch die Lösung des folgenden Gleichungssystems geschätzt. Das Programm bedient sich des GAUSSschen Eliminationsverfahrens mit partieller Pivotierung.

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma y_i \\ \Sigma x_i & \Sigma (x_i)^2 & \Sigma x_i y_i \\ \Sigma y_i & \Sigma y_i x_i & \Sigma (y_i)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma t_i \\ \Sigma x_i t_i \\ \Sigma y_i t_i \end{bmatrix}$$

Der Determinationskoeffizient R^2 ist definiert als:

$$R^2 = \frac{a\Sigma t_i + b\Sigma x_i t_i + c\Sigma y_i t_i - \frac{1}{n}(\Sigma t_i)^2}{\Sigma(t_i^2) - \frac{1}{n}(\Sigma t_i)^2}$$

Anmerkungen:

- Ist der Wert der Determinante der Koeffizientenmatrix gleich Null, was die Existenz keiner oder mehrerer Lösungen bedeutet, so wird "DATA ERROR" angezeigt.
- Es gibt keine Obergrenze für die Anzahl von Datenpunkten, jedoch müssen folgende Mindestbedingungen erfüllt sein:

  $n \geqq 3$ für den Fall von zwei unabhängigen Variablen
  $n \geqq 4$ für den Fall von vier unabhängigen Variablen.

Quelle:

HP.67/97 Math Pac I, Programm MA1-07

				Umfang: 045
Nr.	**Anweisung**	**Eingabe**	**Funktion**	**Anzeige**
	Drei unabhängige Variablen			
1.	Programm initialisieren		XEQ ΣMLRXYZ	ΣMLRXYZ
2.	Schritte 2 – 3 für i = 1, 2, ..., n wiederholen: eingeben: x_i y_i z_i t_i	x_i y_i z_i t_i	ENTER↑ ENTER↑ ENTER↑ A	 (i)
3.	falls Eingabefehler bei x_k, y_k, z_k oder t_k: korrigieren mit	x_k y_k z_k t_k	ENTER↑ ENTER↑ ENTER↑ C	 (k − 1)
4.	R^2 und die Regressionskoeffizienten a, b, c und d berechnen.		E R/S R/S R/S R/S	R2 = (R^2) a = (a) b = (b) c = (c) d = (d)
5.	Schätzungen für t anhand der Regression bestimmen. Eingeben von x y z	x y z	ENTER↑ ENTER↑ R/S	 T. = ($\hat{t}$)
6.	Schritt 5 für beliebige andere Datenpunkte (x, y, z) wiederholen.			
7.	Um die verwendeten Zwischenergebnisse anzuzeigen: Σx_i Σy_i Σz_i Σt_i Σx_i^2 Σy_i^2 Σz_i^2 Σt_i^2 $\Sigma x_i y_i$ $\Sigma x_i z_i$ $\Sigma x_i t_i$ $\Sigma y_i z_i$ $\Sigma y_i t_i$ $\Sigma z_i t_i$		RCL 32 RCL 33 RCL 34 RCL 41 RCL 35 RCL 38 RCL 40 RCL 30 RCL 36 RCL 37 RCL 42 RCL 39 RCL 43 RCL 44	(Σx_i) (Σy_i) (Σz_i) (Σt_i) (Σx_i^2) (Σy_i^2) (Σz_i^2) (Σt_i^2) ($\Sigma x_i y_i$) ($\Sigma x_i z_i$) ($\Sigma x_i t_i$) ($\Sigma y_i z_i$) ($\Sigma y_i t_i$) ($\Sigma z_i t_i$)
8.	Schritt 4 wiederholen, falls erneute Anzeige der Ergebnisse gewünscht.			
9.	Für einen anderen Datensatz, Programm mit initialisieren, weiter mit Schritt 2.		A	ΣMLRXYZ

Beispiel:

Für den folgenden Datensatz soll eine Regressionsgerade der Form t = a + bx + cy + dz bestimmt werden:

i	1	2	3	4	5
x_i	7	1	11	11	7
y_i	25	29	56	31	52
z_i	6	15	8	8	6
t_i	60	52	20	47	33

Lösungen:

Die Regressionsgerade heißt t = 103,45 − 1,28x − 1,04y − 1.34z.

$R^2 = 1.00$

Für $x = 7,\ y = 25,\ z = 6,\ \hat{t} = 60.50$

Für $x = 1,\ y = 29,\ z = 15,\ \hat{t} = 52.00$

Tastenfolge:	Anzeige:
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 045	
[XEQ] [ALPHA] ΣMLRXYZ [ALPHA]	*ΣMLRXYZ*
7 [ENTER↑] 25 [ENTER↑]	
6 [ENTER↑] 60 [A]	
1 [ENTER↑] 29 [ENTER↑]	
15 [ENTER↑] 52 [A]	
11 [ENTER↑] 56 [ENTER↑]	
8 [ENTER↑] 20 [A]	
11 [ENTER↑] 31 [ENTER↑]	
8 [ENTER↑] 47 [A]	
7 [ENTER↑] 53 [ENTER↑]	
6 [ENTER↑] 33 [A]	
7 [ENTER↑] 53 [ENTER↑]	
6 [ENTER↑] 33 [C]	
7 [ENTER↑] 52 [ENTER↑]	
6 [ENTER↑] 33 [A]	*5.00*
[E]	*R2=1.00*
[R/S]	*a=103.45*
[R/S]	*b=-1.28*
[R/S]	*c=-1.04*
[R/S]	*d=-1.34*
7 [ENTER↑] 25 [ENTER↑] 6 [R/S]	*T.=60.50*
1 [ENTER↑] 29 [ENTER↑] 15 [R/S]	*T.=52.00*

				Umfang: 045
Nr.	**Anweisung**	**Eingabe**	**Funktion**	**Anzeige**
	Zwei unabhäng. Variablen			
1.	Programm initialisieren		XEQ ΣMLRXY	ΣMLRXY
2.	Schritte 2 – 3 für i = 1, 2, ..., n wiederholen; eingeben x_i	x_i	ENTER↑	
	y_i	y_i	ENTER↑	
	t_i	t_i	A	(i)
3.	Falls Eingabefehler bei x_k, y_k oder t_k: korrigieren mit	x_k	ENTER↑	
		y_k	ENTER↑	
		t_k	C	(k−1)
4.	R^2 und die Regressions-koeffizienten a, b und c berechnen.		E	R2=(R^2)
			R/S	a=(a)
			R/S	b=(b)
			R/S	c=(c)
5.	Schätzungen für t anhand der Regression: x eingeben	x	ENTER↑	
	y	y	R/S	T.=($\hat{t}$)
6.	Schritt 5 für beliebig viele Datenpunkte (x, y) wiederholen.			
7.	Um die Zwischenergebnisse anzuzeigen:			
	Σx_i		RCL 32	(Σx_i)
	Σy_i		RCL 33	(Σy_i)
	Σt_i		RCL 41	(Σt_i)
	Σx_i^2		RCL 35	(Σx_i^2)
	Σy_i^2		RCL 38	(Σy_i^2)
	Σt_i^2		RCL 30	(Σt_i^2)
	$\Sigma x_i y_i$		RCL 36	($\Sigma x_i y_i$)
	$\Sigma x_i t_i$		RCL 42	($\Sigma x_i t_i$)
	$\Sigma y_i t_i$		RCL 43	($\Sigma y_i t_i$)
8.	Schritt 4 wiederholen, falls erneute Anzeige der Ergebnisse gewünscht.			
9.	Für einen anderen Datensatz, Programm mit initialisieren, dann weiter mit Schritt 2.		■ A	ΣMLRXY

Beispiel 2:

Für den folgenden Datensatz sind die Koeffizienten der Regressionsgleichung t für zwei unabhängige Variablen gesucht: $t = a + bx + cy$

i	1	2	3	4
x_i	1.5	0.45	1.8	2.8
y_i	0.7	2.3	1.6	4.5
t_i	2.1	4.0	4.1	9.4

Lösungen:

Die Regressionsgleichung lautet: $t = -0{,}10 + 0{,}79x + 1{,}63y$

$R^2 = 1{,}00$

Für $x = 2$, $y = 3$, $\hat{t} = 6{,}37$

Für $x = 1{,}5$, $y = 0{,}7$, $\hat{t} = 2{,}23$

Tastenfolge:	Anzeige:
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 045	
[XEQ] [ALPHA] ΣMLRXY [ALPHA]	*ΣMLRXY*
1.5 [ENTER↑] 0.7 [ENTER↑] 2.1 [A]	
0.46 [ENTER↑] 2.3 [ENTER↑] 4.0 [A]	
0.46 [ENTER↑] 2.3 [ENTER↑] 4.0 [C]	
0.45 [ENTER↑] 2.3 [ENTER↑] 4.0 [A]	
1.8 [ENTER↑] 1.6 [ENTER↑] 4.1 [A]	
2.8 [ENTER↑] 4.5 [ENTER↑] 9.4 [A]	***4.00***
[E]	***R2=1.00***
[R/S]	***a=-0.10***
[R/S]	***b=0.79***
[R/S]	***c=1.63***
2 [ENTER↑] 3 [R/S]	***T.=6.37***
1.5 [ENTER↑] 0.7 [R/S]	***T.=2.23***

POLYNOM-REGRESSION

Kubische Regression

Das Programm paßt eine kubische Funktion der Form

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

nach der Methode der kleinsten Quadrate an einen Datensatz mit (x_i, y_j) für $i = 1, 2, ..., n$ an.

Die Regressionskoeffizienten a, b, c und d werden durch die Lösung des untenstehenden Gleichungssystems geschätzt. Das Programm bedient sich des GAUSSschen Eliminationsverfahrens mit teilweiser Pivotierung.

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^5 \\ \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^5 & \Sigma x_i^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2 y_i \\ \Sigma x_i^3 y_i \end{bmatrix}$$

Der Determinationskoeffizient R^2 ist definiert als:

$$R^2 = \frac{a\Sigma y_i + b\Sigma x_i y_i + c\Sigma x_i^2 y_i + d\Sigma x_i^3 y_i - \frac{1}{n}(\Sigma y_i)^2}{\Sigma(y_i^2) - \frac{1}{n}(\Sigma y_i)^2}$$

Parabolische Regression

Das Programm paßt einen Datensatz mit (x_i, y_j) und $i = 1,2, \ldots, n$ an eine Parabel der Form

$$y = a + bx + cx^2$$

nach der Methode der kleinsten Quadrate an.

Die Regressionskoeffizienten a, b und c werden durch die Lösung des untenstehenden Gleichungssystems geschätzt. Das Programm bedient sich des GAUSSschen Eliminationsverfahrens mit teilweiser Pivotierung.

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

Der Determinationskoeffizient R^2 ist definiert als:

$$R^2 = \frac{a\Sigma y_i + b\Sigma x_i y_i + c\Sigma x_i^2 y_i - \frac{1}{n}(\Sigma y_i)^2}{\Sigma(y_i^2) - \frac{1}{n}(\Sigma y_i)^2}$$

Anmerkungen:

- Ist die Determinante der Koeffizientenmatrix gleich Null, so wird „DATA ERROR" angezeigt; dies entspricht der Situation, daß entweder keine oder mehrere Lösungen existieren.
- Es gibt keine Obergrenze für die Anzahl n der Datenpunkte, jedoch sind folgende Mindestbedingungen zu erfüllen:

  $n \geqslant 3$ für parabolische Regression
  $n \geqslant 4$ für kubische Regression.

Quelle:

HP-67/97 Math Pac I. Programm MA1-07

Umfang: 045

Nr.	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
	kubische Regression			
1.	Programm initialisieren		XEQ ΣPOLYC	ΣPOLYC
2.	Schritte 2-3 für $i = 1,2,\dots,n$ wiederholen: x_i eingeben	x_i	ENTER↑	
	y_i	y_i	A	(i)
3.	falls Eingabefehler bei x_k oder y_k: korrigieren mit	x_k	ENTER↑	
		y_k	C	(k−1)
4.	R^2 und die Regressionskoeffizienten a, b, c und d berechnen		E	R2 = (R^2)
			R/S	a = (a)
			R/S	b = (b)
			R/S	c = (c)
			R/S	d = (d)
5.	Schätzung $\hat{y}$ für y aus der Regression berechnen. x eingeben	x	R/S	Y. = ($\hat{y}$)
6.	Schritt 5 für beliebige x-Werte wiederholen.			
7.	Zur Anzeige der Zwischenergebnisse:			
	Σx_i		RCL 32	(Σx_i)
	Σx_i^2		RCL 33	(Σx_i^2)
	Σx_i^3		RCL 34	(Σx_i^3)
	Σx_i^4		RCL 37	(Σx_i^4)
	Σx_i^5		RCL 39	(Σx_i^5)
	Σx_i^6		RCL 40	(Σx_i^6)
	Σy_i		RCL 41	(Σy_i)
	$\Sigma x_i y_i$		RCL 42	($\Sigma x_i y_i$)
	$\Sigma x_i^2 y_i$		RCL 43	($\Sigma x_i^2 y_i$)
	$\Sigma x_i^3 y_i$		RCL 44	($\Sigma x_i^3 y_i$)
8.	Schritt 4 zur erneuten Anzeige der Ergebnisse wiederholen.			
9.	für einen neuen Datensatz: das Programm mit initialisieren, dann weiter mit Schritt 2.		A	ΣPOLYC

Beispiel 1:

Für den folgenden Datensatz soll eine kubische Regression errechnet werden, es sind Koeffizienten a, b, c und d zu schätzen:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

i	1	2	3	4	5
x	.8	1	1.2	1.4	1.6
y	24	20	10	13	12

Lösungen:

$y = 47{,}94 - 9{,}76x - 41{,}07x^2 + 20{,}83x^3$

$R^2 = 0{,}87$

Für $x = 1$, $\hat{y} = 17{,}94$

Für $x = 1{,}4$, $\hat{y} = 10{,}94$

Tastenfolge:	**Anzeige:**
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 045	
[XEQ] [ALPHA] ΣPOLYC [ALPHA]	*ΣPOLYC*
.8 [ENTER↑] 24 [A]	
1 [ENTER↑] 20 [A]	
1.3 [ENTER↑] 10 [A]	
1.3 [ENTER↑] 10 [C]	
1.2 [ENTER↑] 10 [A]	
1.4 [ENTER↑] 13 [A]	
1.6 [ENTER↑] 12 [A]	*5.00*
[E]	*R2=0.87*
[R/S]	*a=47.94*
[R/S]	*b=-9.76*
[R/S]	*c=-41.07*
[R/S]	*d=20.83*
1 [R/S]	*Y.=17.94*
1.4 [R/S]	*Y.=10.94*

Umfang: 045

Nr.	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
	Parabolische Regression			
1.	Programm initialisieren		XEQ ΣPOLYP	ΣPOLYP
2.	Schritte 2–3 für i = 1, 2, ..., n wiederholen; x_i eingeben	x_i	ENTER↑	
	y_i	y_i	A	(i)
3.	falls Eingabefehler bei x_k oder y_k: korrigieren mit	x_k	ENTER↑	
		y_k	C	(k−1).
4.	R^2 und Regressionskoeffizienten a, b und c berechnen		E	R2=(R^2)
			R/S	a=(a)
			R/S	b=(b)
			R/S	c=(c)
5.	Schätzungen ŷ für y aus der Regression berechnen, x eingeben.	x	R/S	Y.=(ŷ)
6.	Schritt 5 für beliebig viele x-Werte wiederholen.			
7.	Zur Anzeige der Zwischenergebnisse:			
	Σx_i		RCL 32	(Σx_i)
	Σx_i^2		RCL 33	(Σx_i^2)
	Σx_i^3		RCL 34	(Σx_i^3)
	Σx_i^4		RCL 37	(Σx_i^4)
	Σy_i		RCL 41	(Σy_i)
	$\Sigma x_i y_i$		RCL 42	($\Sigma x_i y_i$)
	$\Sigma x_i^2 y_i$		RCL 43	($\Sigma x_i^2 y_i$)
8.	Schritt 4 zur erneuten Anzeige der Ergebnisse wiederholen.			
9.	für einen neuen Datensatz, Programm mit initialisieren.		A	ΣPOLYP

Beispiel 2:

Für den folgenden Datensatz soll eine parabolische Regression bestimmt werden; es sollen geeignete Koeffizienten a, b und c für $y = a + bx + cx^2$ geschätzt werden

i	1	2	3	4	5	6	7
x	1	2	3	4	5	6	7
y	5	12	34	50	75	84	128

Lösungen:

$y = -4{,}00 + 6{,}64x + 1{,}64x^2$

$R^2 = 0{,}98$

Für $x = 2$, $\hat{y} = 15{,}86$

Für $x = 4$, $\hat{y} = 48{,}86$

Tastenfolge:	**Anzeige:**
XEQ ALPHA SIZE ALPHA 045	
XEQ ALPHA ΣPOLYP ALPHA	ΣPOLYP
1 ENTER↑ 5 A	
2 ENTER↑ 12 A	
3 ENTER↑ 34 A	
4 ENTER↑ 50 A	
5 ENTER↑ 75 A	
6 ENTER↑ 84 A	
7 ENTER↑ 128 A	7.00
E	R2=0.98
R/S	a=-4.00
R/S	b=6.64
R/S	c=1.64
2 R/S	Y.=15.86
4 R/S	Y.=48.86

t – VERTEILTE PRÜFSTATISTIKEN

Paarweise Mittelwertsvergleiche für abhängige Stichproben

Gegeben sei eine Menge von Meßwertpaaren aus normalverteilten Grundgesamtheiten mit unbekannten Parametern μ_1 und μ_2 (Populationsmittelwerte).

x_i	x_1	x_2	...	x_n
y_i	y_1	y_2	...	y_n

Es seien

$$D_i = x_i - y_i$$

$$\overline{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} D_i$$

$$s_D = \sqrt{\frac{\Sigma D_i^2 - \frac{1}{n}(\Sigma D_i)^2}{n-1}}$$

Die t-Prüfgröße (t-Statistik) ist:

$$t = \frac{\overline{D}}{s_D} \cdot \sqrt{n}$$

mit n–1 Freiheitgraden (df). Damit kann die Nullhypothese

$$H_0\colon \mu_1 = \mu_2$$

über die Gleichheit der Mittelwerte in der Grundgesamtheit überprüft werden.

Literatur:

OSTLE, B. 1963. Statistics in Research. Iowa State University Press.

t-Test für Mittelwerte aus unabhängigen Stichproben

Angenommen $(x_1, x_2, \ldots, x_{n1})$ und $(y_1, y_2, \ldots, y_{n2})$ sind unabhängige Zufallsstichproben aus zwei normalverteilten Grundgesamtheiten mit unbekannten Mittelwerten μ_1 und μ_2, sowie gleicher, aber unbekannter Varianz σ^2.

Es soll die Nullhypothese H_0

$$H_0\colon \mu_1 - \mu_2 = d$$

untersucht werden.

Es sind

$$\bar{x} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} y_i$$

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - d}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \; \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2 - n_1\bar{x}^2 + \Sigma y_i^2 - n_2\bar{y}^2}{n_1 + n_2 - 2}}}$$

Die obige t-Statistik kann zur Prüfung der Nullhypothese H_0 verwendet werden; sie ist (Student's-) t-verteilt mit $n_1 + n_2 - 2$ Freiheitsgraden (df).

Quelle:

BROWNLEE, K. A. 1965. Statistical Theory an Methodology in Science and Engineering. New York: John Wiley & Sons.

				Umfang: 015
Nr.	**Anweisung**	**Eingabe**	**Funktion**	**Anzeige**
	abhängige Stichproben			
1.	Programm initialisieren		XEQ ΣPTST	ΣPTST
2.	Schritte 2–3 für i = 1, 2, ..., n wiederholen: x_i eingeben	x_i	ENTER↑	
	y_i	y_i	A	(i)
3.	falls Eingabefehler bei x_k oder y_k korrigieren mit	x_k	ENTER↑	
		y_k	C	(k−1)
4.	Prüfgröße berechnen:			
	$\bar{D}$		E	DBAR = ($\bar{D}$)
	s_D		R/S	SD = (s_D)
	t		R/S	T = (t)
	df		R/S	DF = (df)
5.	Schritt 4 zur erneuten Anzeige der Ergebnisse wiederholen.			
6.	für einen neuen Datensatz: mit Schritt 2 fortsetzen		■ A	ΣPTST
	unabhängige Stichproben			
7.	Programm initialisieren		XEQ ΣTSTAT	ΣTSTAT
8.	Schritte 8–9 für i = 1, 2, ..., n_1 wiederholen; x_i eingeben	x_i	A	(i)
9.	falls Eingabefehler: Korrektur	x_k	C	(k−1)
10.	Für 2. Datenvektor vorbereiten		R/S	0.00
11.	Schritt 11–12 für j = 1, 2, ..., n_2 wiederholen; y_j eingeben	y_j	A	(j)
12.	Falls Eing.-fehler: Korrektur	y_h	C	(h−1)
13.	d eingeben und t-Statistik berechnen	d	E	T = (t)
	df		R/S	DF = (df)
14.	Schritt 13 für ein anderes d wiederholen.			
15.	für einen neuen Datensatz: mit initialisieren und weiter mit 8.		■ A	ΣTSTAT

Beispiel 1:

x_i	14	17.5	17	17.5	15.4
y_i	17	20.7	21.6	20.9	17.2

$\overline{D} = -3.20$

$s_D = 1.00$

$t = -7.16$

$df = 4.00$

Tastenfolge:	Anzeige:
XEQ ALPHA SIZE ALPHA 015	
XEQ ALPHA ΣPTST ALPHA	*ΣPTST*
14 ENTER↑ 17 A	
17.5 ENTER↑ 20.7 A	
17 ENTER↑ 21.6 A	
17 ENTER↑ 15 A	
17 ENTER↑ 15 C	
17.5 ENTER↑ 20.9 A	
15.4 ENTER↑ 17.2 A	*5.00*
E	*DBAR=-3.20*
R/S	*SD=1.00*
R/S	*T=-7.16*
R/S	*DF=4.00*

Beispiel 2:

x	79	84	108	114	120	103	122	120		
y	91	103	90	113	108	87	100	80	99	54

$n_1 = 8$

$n_2 = 10$

Für d = 0 (i.e., H_0: $\mu_1 = \mu_2$)

folgt t = 1,73, df = 16,00

Tastenfolge:	Anzeige:
XEQ ALPHA SIZE ALPHA 015	
XEQ ALPHA ΣTSTAT ALPHA	*ΣTSTAT*
79 A 84 A	
99 A 99 C 108 A	
114 A 120 A	
103 A 122 A 120 A	*8.00*
R/S	*0.00*
91 A 103 A 90 A 113 A	
108 A 87 A 100 A 80 A	
99 A 54 A	*10.00*
0 E	*T=1.73*
R/S	*DF=16.00*

CHI-QUADRAT-PRÜFGRÖSSE

Dieses Programm berechnet die χ^2-Statistik für die Güte der Anpassung einer empirischen Verteilung an eine theoretische nach folgender Formel:

$$\chi_1^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad \text{mit df} = n - 1$$

wobei O_i = beobachtete Häufigkeit

E_i = erwartete Häufigkeit

n = Anzahl der Klassen.

Sind alle Klassen gleich häufig besetzt, nämlich mit

$$\left(E = E_i = \frac{\Sigma O_i}{n} \quad \text{für jedes i}\right)$$

vereinfacht sich χ_i^2 zu

$$\chi_2^2 = \frac{n\Sigma O_i^2}{\Sigma O_i} - \Sigma O_i$$

Anmerkungen:

- Um die theoretischen Voraussetzungen der χ^2-Verteilung zu erfüllen, muß in manchen Fällen eine Zusammenlegung von Klassen erfolgen, damit jede (theoretische) erwartete Häufigkeit dem Mindestwert von 5 übersteigt.

Literatur:

FREUND, J. E. 1962. Mathematical Statistics.

				Umfang: 008
Nr.	**Anweisung**	**Eingabe**	**Funktion**	**Anzeige**
	Ungleiche Erwartungs-häufigkeiten			
1.	Programm initialisieren		XEQ ΣXSQEV	ΣXSQEV
2.	Schritte 2–3 für i = 1, 2, ..., n wiederholen: O_i eingeben E_i	O_i E_i	ENTER↑ A	 (i)
3.	falls Eingabefehler bei O_k oder E_k: korrigieren mit	O_k E_k	ENTER↑ C	 (k−1)
4.	Wert von χ^2-Test berechnen.		E	XSQ=(χ_1^2)
5.	für einen neuen Datensatz, mit initialisieren, dann weiter mit Schritt 2.		■ A	ΣXSQEV
	Gleiche Erwartungs-häufigkeiten			
6.	Programm initialisieren		XEQ	ΣEEFXSQ
7.	Schritte 7–8 für i = 1, 2, ..., n wiederholen: O_i eingeben	O_i	A	(i)
8.	falls Eingabefehler: bei O_h, korrigieren mit	O_h	C	(h−1)
9.	χ^2 und E berechnen:		E R/S	XSQ=(χ_2^2) E=(E)
10.	Schritt 9 für erneute Anzeige der Ergebnisse wiederholen.			
11.	für einen anderen Datensatz, mit initialisieren, dann weiter mit Schritt 7.		■ A	ΣEEFXSQ

Beispiel 1:

Gesucht ist der χ^2 Wert für die Anpassung der Verteilung von O_i an E_i:

O_i	8	50	47	56	5	14
E_i	9.6	46.75	51.85	54.4	8.25	9.15

$$\chi_1^2 = 4.84$$

Tastenfolge:	**Anzeige:**
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 008	
[XEQ] [ALPHA] ΣXSQEV [ALPHA]	**ΣXSQEV**
8 [ENTER↑] 9.6 [A]	
50 [ENTER↑] 46.75 [A]	
47 [ENTER↑] 51.85 [A]	
56 [ENTER↑] 54.4 [A]	
5 [ENTER↑] 8.25 [A]	
88 [ENTER↑] 88 [A]	
88 [ENTER↑] 88 [C]	
14 [ENTER↑] 9.15 [A]	**6.00**
[E]	**XSQ=4.84**

Beispiel 2:

Die folgende Häufigkeitstabelle entstammt einer Serie von 120 Würfen eines Würfels. Es soll untersucht werden, ob der Würfel fehlerhaft ist (Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$).

Beachte: Die erwarteten Häufigkeiten sind gleich.

Anzahl	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit O_i	25	17	15	23	24	16

$$\chi_2^2 = 5.00$$
$$E = 20.00$$

Da der empirische χ^2-Wert von 5,00 kleiner als der kritische Tabellenwert für $\alpha = 0{,}05$ von 11,07 ist, muß die Hypothese, daß der Würfel fehlerfrei ist, beibehalten werden.

Tastenfolge:	**Anzeige:**
XEQ ALPHA SIZE ALPHA 008	
XEQ ALPHA ΣEEFXSQ ALPHA	***ΣEEFXSQ***
25 A 17 A 15 A 22 A	
22 C	
23 A 24 A 16 A	***6.00***
E	***XSQ=5.00***
R/S	***E=20.00***

KONTINGENZ-TAFELN

Kontingenz-Tafeln dienen zur Probe, ob zwei Variablen voneinander unabhängig sind.

Dieses Programm berechnet die χ^2-Statistik, für die Hypothese der Unabhängigkeit beider Variablen. Daneben wird der Kontingenzkoeffizient CC von PEARSON bestimmt, welcher den Grad des Zusammenhangs zwischen beiden Variablen widerspiegelt.

2 x k Kontingenztafel

i \ j	1	2	...	k	Summen
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1k}	R_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2k}	R_2
Summen	C_1	C_2	...	C_k	T

3 x k Kontingenztafel

i \ j	1	2	...	k	Summen
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1k}	R_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2k}	R_2
3	x_{31}	x_{32}	...	x_{3k}	R_3
Summen	C_1	C_2	...	C_k	T

Formeln:

Zeilensumme $$R_i = \sum_{j=1}^{k} x_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2 \text{ (for } 2 \times k) \\ i = 1, 2, 3 \text{ (for } 3 \times k) \end{array}$$

Spaltensumme $$C_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \qquad \begin{array}{l} j = 1, 2, \ldots, k \\ n = 2 \text{ (for } 2 \times k) \\ n = 3 \text{ (for } 3 \times k) \end{array}$$

Gesamtsumme $$T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} x_{ij} \qquad \begin{array}{l} n = 2 \text{ (for } 2 \times k) \\ n = 3 \text{ (for } 3 \times k) \end{array}$$

χ^2-Prüfgröße:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{(x_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \quad \text{mit df} = (n-1)(k-1)$$

$$= T\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{x_{ij}^2}{R_i\, C_j}\right) - T \qquad \begin{array}{l} n = 2 \text{ (für } 2 \times k) \\ n = 3 \text{ (für } 3 \times k) \end{array}$$

Kontingenzkoeffizient CC:

$$C_c = \sqrt{\frac{\chi^2}{T + \chi^2}}$$

Literatur:

OSTLE, B. 1972. Statistics in Research. Iowa State University Press.

				Umfang: 015
Nr.	**Anweisung**	**Eingabe**	**Funktion**	**Anzeige**
	2 x k			
1.	Programm initialisieren		XEQ ΣCTKK	ΣCTKK
2.	Schritte 2–5 für j = 1, 2, ..., k wiederholen; x_{1j} eingeben	x_{1j}	ENTER↑	
	x_{2j}	x_{2j}	A	(j)
3.	Auf Wunsch: Spaltensumme:		R/S	$CS=(C_j)$
4.	falls Eingabefehler: korrigieren mit	x_{1h}	ENTER↑	
		x_{2h}	C	(h−1)
5.	Auf Wunsch: verbesserte Spaltensumme O_h		R/S	$CS=(-C_h)$
6.	weiter mit Schritt 12 zur Berechnung der Kontingenztafel			
	3 x k			
7.	Programm initialisieren		XEQ ΣCTKKK	ΣCTKKK
8.	Schritte 8–11 für j = 1, 2, ..., k wiederholen: x_{1j} eingeben	x_{1j}	ENTER↑	
	x_{2j}	x_{2j}	ENTER↑	
	x_{3j}	x_{3j}	A	(j)
9.	Auf Wunsch: Spaltensumme C_i		R/S	$CS=(C_j)$
10.	Falls Eingabefehler: bei r korrigieren mit	x_{1h}	ENTER↑	
		x_{2h}	ENTER↑	
		x_{3h}	C	(h−1)

Nr.	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
11.	Auf Wunsch: korrigierte Spaltensumme C_r berechnen		[R/S]	CS=(−C_h)
12.	Berechnen: χ^2-Statistik Kontingenzkoeffizient CC Spaltensumme 1 Spaltensumme 2 Spaltensumme 3 (nur bei 3 x k) Gesamt T		[E] [R/S] [R/S] [R/S] [R/S] [R/S]	XSQ=(χ^2) CC=(C_c) R1=(R_1) R2=(R_2) R3=(R_3) T=(T)
13.	Schritt 12 wiederholen, falls erneute Anzeige gewünscht			
14.	für einen neuen Datensatz dann weiter mit Schritt 2 oder 6.		■ [A]	ΣGTKK oder ΣGTKKK
15.	um das andere Programm zu verwenden: weiter mit Schritt 1 oder 7.			

Beispiel 1:

Gesucht sind χ^2-Wert und Kontingenzkoeffizient CC der folgenden Daten:

	1	2	3
A	2	5	4
B	3	8	7

Tastenfolge:	Anzeige:
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 015	
[XEQ] [ALPHA] ΣCTKK [ALPHA]	***ΣCTKK***
2 [ENTER↑] 3 [A]	***1.00***
[R/S]	***CS=5.00***
5 [ENTER↑] 8 [A] 4 [ENTER↑] 7 [A]	***3.00***
[E]	***XSQ=0.02***
[R/S]	***CC=0.03***
[R/S]	***R1=11.00***
[R/S]	***R2=18.00***
[R/S]	***T=29.00***

Beispiel 2:

Gesucht sind χ^2-Wert und CC für folgenden Datensatz:

i \ j	1	2	3	4
1	36	67	49	58
2	31	60	49	54
3	58	87	80	68

Tastenfolge:	Anzeige:
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 015	
[XEQ] [ALPHA] ΣCTKKK [ALPHA]	***ΣCTKKK***
36 [ENTER↑] 31 [ENTER↑] 58 [A]	***1.00***
[R/S]	***CS=125.00***
67 [ENTER↑] 60 [ENTER↑] 87 [A]	
4 [ENTER↑] 49 [ENTER↑] 80 [A]	
4 [ENTER↑] 49 [ENTER↑] 80 [C]	
49 [ENTER↑] 49 [ENTER↑] 80 [A]	
58 [ENTER↑] 54 [ENTER↑] 68 [A]	***4.00***
[E]	***XSQ=3.36***
[R/S]	***CC=0.07***
[R/S]	***R1=210.00***
[R/S]	***R2=194.00***
[R/S]	***R3=293.00***
[R/S]	***T=697.00***

RANG-KORRELATIONS-KOEFFIZIENT NACH SPEARMAN (SPEARMANS RHO)

SPEARMANs Rang-Korrelations-Koeffizient ist ein Maß für den Zusammenhang von Rangreihen: Werden beispielsweise n Personen von 2 Beurteilern auf Rangreihen von 1 bis n verteilt, so kann der Zusammenhang mit dem Korrelationsmaß von SPEARMAN beurteilt werden.

SPEARMANs Rang-Korrelations-Koeffizient ist definiert als

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{n} D_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

wobei: n = Anzahl der Rangplatzpaare (x_i, y_i)

D_i = Rangplatzdifferenz $x_i - y_i = R_i - S_i$

Wenn die Zufallsvariablen X und Y, die die n Beobachtungspaare bilden, unabhängig sind, ist r_s um Null mit Varianz

$$\frac{1}{n - 1}$$

verteilt. Die Nullhypothese H_0, daß X und Y unabhängige Zufallsvariablen sind, kann mit

$$z = r_s \sqrt{n - 1}$$

geprüft werden. Z ist standard normal verteilt (N(0,1)) für großes n (mindestens jedoch für $n \geqslant 10$).

Wird die Nullhypothese über die Unabhängigkeit von X und Y nicht verworfen, so darf angenommen werden, daß der Korrelations-Koeffizient in der Population ρ (x, y) = 0 ist, jedoch bedeutet Abhängigkeit zwischen den Variablen nicht notwendigerweise, daß ρ (x, y) ≠u 0.

Beachte:

- $-1 \leqq r_s \leqq 1$
- r_s = 1.00 bedeutet vollständige Übereinstimmung der Rangreihen,
  r_s = −1.00 heißt vollständige Übereinstimmung der Rangreihen in umgekehrter Folge.

Quelle:

GIBBONS, J. D. 1971. Nonparametric Statistical Inference. New York: McGraw-Hill.

				Umfang: 003
Nr.	**Anweisung**	**Eingabe**	**Funktion**	**Anzeige**
1.	Programm initialisieren		XEQ ΣSPEAR	ΣSPEAR
2.	Schritte 2-3 für i=1,2,..., n wiederholen; R_i eingeben S_i	R_i S_i	ENTER↑ A	 (i)
3.	Falls Eingabefehler: korrigieren mit	R_k S_k	ENTER↑ C	 (k−1)
4.	R r_s berechnen z berechnen		E R/S	RS=(r_s) Z=(z)
5.	Schritt 4 f. erneute Anzeige der Ergebnisse wiederholen			
6.	Für einen anderen Datensatz, Programm mit initialisieren, dann weiter mit Schritt 2		■ A	ΣSPEAR

Beispiel:

Der folgende Datensatz repräsentiert die Ergebnisse zweier Tests in einer Klasse. Gesucht sind r_s und z.

Student	x_i Math. Note	y_i Stat. Note	R_i Rang x_i	S_i Rang y_i
1	82	81	6	7
2	67	75	14	11
3	91	85	3	4
4	98	90	1	2
5	74	80	11	8
6	52	60	15	15
7	86	94	4	1
8	95	78	2	9
9	79	83	9	6
10	78	76	10	10
11	84	84	5	5
12	80	69	8	13
13	69	72	13	12
14	81	88	7	3
15	73	61	12	14

Tastenfolge:	**Anzeige:**
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 003	
[XEQ] [ALPHA] ΣSPEAR [ALPHA]	***ΣSPEAR***
6 [ENTER↑] 7 [A]	
14 [ENTER↑] 11 [A]	
3 [ENTER↑] 4 [A]	
1 [ENTER↑] 2 [A]	
11 [ENTER↑] 8 [A]	
5 [ENTER↑] 5 [A]	
5 [ENTER↑] 5 [C]	
15 [ENTER↑] 15 [A]	
4 [ENTER↑] 1 [A]	
2 [ENTER↑] 9 [A]	
9 [ENTER↑] 6 [A]	
10 [ENTER↑] 10 [A]	
5 [ENTER↑] 5 [A]	
8 [ENTER↑] 13 [A]	
13 [ENTER↑] 12 [A]	
7 [ENTER↑] 3 [A]	
12 [ENTER↑] 14 [A]	***15.00***
[E]	***RS=0.76***
[R/S]	***Z=2.85***

Notizen

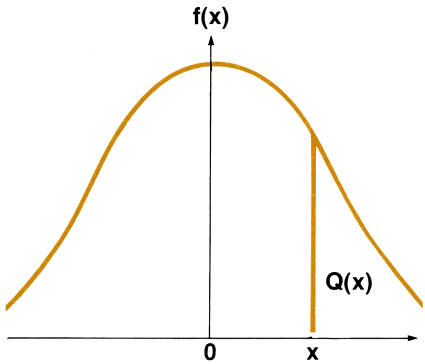
NORMAL- UND INVERSE NORMAL-VERTEILUNG

Dieses Programm berechnet die Dichtefunktion f(x) der Standardnormalverteilung und das normalisierte Integral Q(x) für gegebenes x. Ebenso kann x bestimmt werden, wenn Q(x) bekannt ist. Die Standardnormalverteilung hat den Mittelwert 0 und die Streuung 1.

Gleichungen:

1. Dichtefunktion der Standardnormalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



2. Normiertes Integral

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Zur Berechnung von Q(x) für gegebenes x wird eine Polynomapproximation verwendet.

Es sei $R = f(x)\,(b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5) + \epsilon(x)$

wobei $|\epsilon(x)| < 7.5 \times 10^{-8}$

$$t = \frac{1}{1 + r\,|x|}, \qquad r = 0.2316419$$

$b_1 = .319381530, \quad b_2 = -.356563782$

$b_3 = 1.781477937, \quad b_4 = -1.821255978$

$b_5 = 1.330274429$

Dann ist $Q(x) = \begin{cases} R & \text{wenn } x \geqslant 0 \\ 1 - R & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$ mit Fehler $|\epsilon(x)| < 7.5 \times 10^{-8}$

3. Inverse Normalverteilung

Für $Q > 0$, gibt es ein x, so daß

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Dabei wird die folgende rationale Näherung verwendet:

es sei $y = t - \dfrac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}{1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3} + \epsilon(Q)$

mit $|\epsilon(Q)| < 4.5 \times 10^{-4}$

$$t = \begin{cases} \sqrt{\ln \dfrac{1}{Q^2}} & \text{wenn } 0 < Q \leqslant 0.5 \\ \sqrt{\ln \dfrac{1}{(1-Q)^2}} & \text{wenn } 0.5 < Q < 1 \end{cases}$$

$c_0 = 2.515517 \qquad d_1 = 1.432788$

$c_1 = 0.802853 \qquad d_2 = 0.189269$

$c_2 = 0.010328 \qquad d_3 = 0.001308$

dann ist $x = \begin{cases} y & \text{wenn } 0 < Q \leqslant 0.5 \\ -y & \text{wenn } 0.5 < Q < 1 \end{cases}$ mit Fehler $|\epsilon(Q)| < 4.5 \times 10^{-4}$

Quelle:

Abramowitz und Stegun, *Handbook of Mathematical Functions,* National Bureau of Standards, 1970.

				Umfang: 019
Nr.	**Anweisung**	**Eingabe**	**Funktion**	**Anzeige**
1.	Programm initialisieren		[XEQ] ΣNORMD	ΣNORMD
2.	x für f(x) eingeben	x	[C]	F=(f(x))
3.	x für Q(x) eingeben	x	[E]	Q=(Q(x))
4.	Q(x) eingeben	Q(x)	[A]	X=(x)
5.	Falls nötig: kann jeder der obigen Schritte wiederholt werden			

Beispiel 1:

Gesucht sind f(x) und Q(x) für x = 1.18 und x = −2.28.

Tastenfolge:	**Anzeige:**
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 019	
[XEQ] [ALPHA] ΣNORMD [ALPHA]	***ΣNORMD***
1.18 [C]	***F=0.20***
1.18 [E]	***Q=0.12***
2.28 [CHS] [E]	***Q=0.99***
2.28 [CHS] [C]	***F=0.03***

Beispiel 2:

Gegeben ist Q(x) = 0.12 und Q = 0.95, gesucht ist x.

(haben Sie eben Beispiel 1 durchgerechnet, so können Sie einfach weitermachen; andernfalls muß das Programm initialisiert werden.)

Tastenfolge:	**Anzeige:**
0.12 [A]	***X=1.18***
0.95 [A]	***X=-1.65***

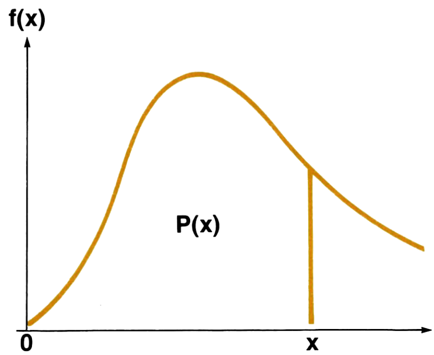
Notizen

CHI-QUADRAT-VERTEILUNG

Dieses Programm berechnet die χ^2-Dichtefunktion nach

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

mit $x \geqslant 0$, ν ist die Anzahl der Freiheitsgrade.



Anhand der Reihenentwicklung wird die kumulative Verteilung von

$$P(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(\nu+2)(\nu+4)\ldots(\nu+2k)}\right]$$

berechnet.

Das Programm berechnet nacheinander Teilsummen der obigen Serie. Sind zwei aufeinanderfolgende Teilsummen gleich, wird dieser Wert als die Summe der Reihe betrachtet.

Anmerkungen:

- ν muß kleiner als 141 sein, andernfalls entsteht Überlauf.
- sind x und ν groß, so kann f(x) zum Überlauf führen.
- Fallunterscheidung: bei geradem ν

$$\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \left(\frac{\nu}{2} - 1\right)!$$

bei ungeradem ν:

$$\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \left(\frac{\nu}{2} - 1\right)\left(\frac{\nu}{2} - 2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Quelle:

ABRAMOWITZ & STEGUN. 1970, *Handbook of Mathematical Formulas.* Bureau of Standards.

Umfang: 007

Nr.	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
1.	Programm initialisieren		XEQ ΣCHISQD	ΣCHISQD
2.	Freiheitsgrade eingeben	ν	A	$(\Gamma(\nu/2))$
3.	x eingeben und f(x) berech.	x	C	F=(f(x))
4.	x eingeben und P(x) berech.	x	E	P=(P(x))
5.	Wiederh. Sie die Schritte 3 und 4 für die Summe			
6.	Gehen Sie für einen anderen Wert ν nach Schritt 2.			

Beispiele:

1. Für ν = 20 Freiheitsgrade sind f(x), P(x) für x = 9.6 und x = 15.0 gesucht.
2. Für ν = 3 sind f(x) und P(x) für x = 82 zu bestimmen.

Tastenfolge:	Anzeige:
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 007	
[XEQ] [ALPHA] ΣCHISQD [ALPHA]	*ΣCHISQD*
20 [A]	*362880.00*
9.6 [C]	*F=0.02*
9.6 [E]	*P=0.03*
15 [E]	*P=0.22*
15 [C]	*F=0.06*
3 [A]	*0.89*
7.82 [C]	*F=0.02*
7.82 [E]	*P=0.95*

Notizen

ANHANG A

PROGRAMM-DATEN

PROGRAMM	Anzahl Reg. für COPY	Daten-Register	Flags	Anzeigeformat
1. Einfache Statistiken mit zwei Variablen	50	00 ~ 11	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
2. Verteilungsmomente, Schiefe und Exzeß	36	00 ~ 11	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
3. Einfaktorielle Varianzanalyse	29	00 ~ 19	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
4. Zweifaktorielle Varianzanalyse ohne Meßwiederholungen	33	00 ~ 17	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
5. Kovarianzanalyse	60	00 ~ 25	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
6. Kurvenanpassung	34	00 ~ 15	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
7. Multiple lineare Regression	102	00 ~ 44	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
8. Polynomische Regression	102	00 ~ 44	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
9. t-Statistik	29	00 ~ 14	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
10. χ^2-Prüfgröße	21	00 ~ 07	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
11. Kontingenztabellen	33	00 ~ 14	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
12. Rang-Korrelations-Koeffizient	13	00 ~ 02	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
13. Normalverteilung und inverse Normalverteilung	47	00 ~ 18	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
14. χ^2-Verteilung	21	00 ~ 06	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2

Deutschland
Hewlett-Packard GmbH/Vertriebszentrale
Berner Str. 117, Postfach 560140, 6000 Frankfurt/M. 56, Tel. (0611) 5004-1

Schweiz:
Hewlett-Packard (Schweiz) AG, Zürcherstraße 20, Postfach 307,
8952 Schlieren-Zürich, Telefon (01) 7305240

Österreich/Sozialistische Staaten
Hewlett-Packard Ges.m.b.H., Wehlistraße 29
Postfach 7, 1205 Wien, Österreich, Telefon (0222) 351621 bis 27

Europazentrale
Hewlett-Packard S.A., 7, rue du Bois-du-Lan,
Postfach, CH-1217 Meyrin 2-Genf, Schweiz, Telefon (022) 827000

00041-90031

Printed in SGP