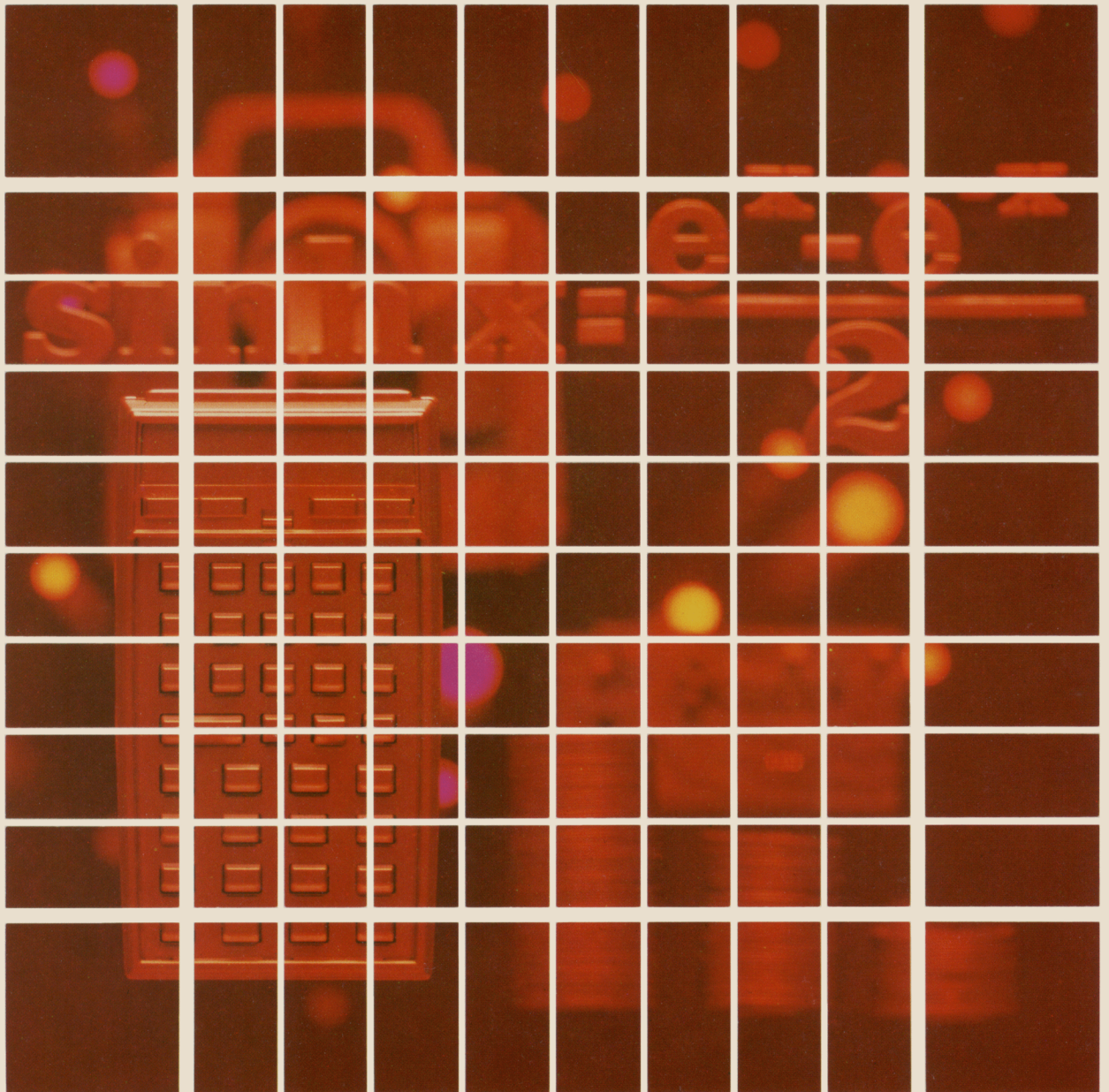


HEWLETT-PACKARD

# HP-41C

LIVRET D'APPLICATIONS

# MATHÉMATIQUES HAUT NIVEAU



Ces programmes seront disponibles plus tard sous forme de codes barres, et en anglais, nous avons donc laissé des termes en anglais dans les listages. Si vous souhaitez les traduire, il suffit d'aller à la ligne correspondante. Les traductions suggérées apparaissent en italique dans la colonne commentaires.

#### NOTE

**Les programmes de ce manuel sont fournis sans aucune garantie. La Société Hewlett-Packard n'assume donc aucune responsabilité quant aux conséquences directes ou non de l'utilisation de ces programmes.**

© Hewlett-Packard France, 1980

Texte protégé par la législation en vigueur en matière  
de propriété littéraire et dans tous les pays.

## PRESENTATION

Ce livret d'applications du HP-41C est destiné à vous aider à utiliser à fond les possibilités de votre calculateur. Les programmes choisis couvrent la plupart des problèmes que vous devez résoudre quotidiennement.

Ils vous offrent des possibilités de calcul immédiates et vous présentent des suggestions utiles pour la programmation de votre propre logiciel. Les commentaires accompagnant les listages des programmes décrivent l'approche adoptée pour parvenir à la solution ; ils vous aident à suivre la logique du programmeur et à maîtriser parfaitement votre calculateur Hewlett-Packard.

## INTRODUCTION D'UN PROGRAMME DANS LE HP-41C

Avant d'introduire dans votre HP-41C un des programmes contenus dans ce manuel, rappelez-vous quelques points importants. L'imprimante HP 82143A offre un moyen extrêmement pratique de lister des programmes et montre clairement la marche à suivre pour introduire un programme sans faire apparaître toutes les séquences de touches. C'est ce type de sortie qui a été présenté dans ce manuel. La méthode est simple et rapide puisqu'il suffit de suivre le listage pour comprendre les étapes de l'introduction du programme. La procédure est la suivante :

1. A la fin de chaque listage de programme se trouve une liste d'informations d'état nécessaires à la bonne exécution du programme. Cette liste comprend une indication de TAILLE (SIZE). Avant de commencer à introduire le programme, appuyer sur **[XEQ]** **[ALPHA]** **[SIZE]** **[ALPHA]** et spécifier la taille en trois chiffres. Par exemple, introduisez 010 pour spécifier 10.

Ces informations d'état comprennent également le format de l'affichage et l'état des indicateurs utilisés par le programme. Pour assurer la bonne exécution du programme, vérifier si l'état de l'affichage du HP-41C a été correctement programmé et si tous les indicateurs utilisés sont positionnés ou mis à zéro, suivant les besoins.

2. Mettez le HP-41C en mode PRGM (appuyer sur la touche **[PRGM]**) et appuyer sur **[GTO]** **[0]** **[0]** pour préparer le calculateur pour le nouveau programme.
3. Commencez à introduire le programme. Voici quelques conseils qui vous aideront dans cette opération en partant des listages de programmes contenus dans ce manuel.
  - a. Si un caractère ou un groupe de caractères est entouré de guillemets («) dans le programme, ce caractère ou groupe de caractères est alphabétique. Pour les caractères alphabétiques, il suffit d'appuyer sur **[ALPHA]**, de taper les caractères, puis d'appuyer à nouveau sur **[ALPHA]**. Par exemple, pour introduire "SAMPLE", la séquence est la suivante : **[ALPHA]** "SAMPLE" **[ALPHA]**.
  - b. Le losange qui précède chaque instruction LBL est un signe dont le seul but est de montrer l'emplacement des labels dans les listages. Ne tenez pas compte de ce signe quand vous introduisez votre programme.
  - c. Sur l'imprimante, le signe de la division est /. Quand vous voyez un / dans le listing, appuyer sur **[÷]**.
  - d. De même, l'imprimante remplace le signe normal de la multiplication par **[x]**. Quand vous voyez un **[x]**, appuyez sur **[x]**.
  - e. Dans le listing, le caractère **[K]** indique la fonction **[APPEND]**. Quand vous voyez **[K]**, appuyez sur **[APPEND]** en mode ALPHA (appuyez sur **[ALPHA]** puis sur la touche K).
  - f. Toutes les opérations faisant appel à des adresses de registres acceptent ces adresses sous la forme suivante :

nn (nombre de deux chiffres)

IND nn (INDIRECTE : **[IND]**, suivi d'un nombre de deux chiffres).

X, Y, Z, T, ou L (adresse de registre opérationnel : **[R/S]** suivi de X, Y, Z, T ou L)

IND X, Z, T ou L (INDIRECTE registre opérationnel : **[IND]** **[R/S]** suivi de X, Y, Z, T ou L)

Pour spécifier une adresse indirecte, appuyez sur **[IND]**, puis sur l'adresse indirecte. Pour spécifier une adresse de registre opérationnel, appuyez sur **[R/S]**, suivi de X, Y, Z, T ou L. Pour spécifier une adresse indirecte de registre opérationnel, appuyez sur **[IND]** **[R/S]**, puis sur X, Y, Z, T ou L.

## TABLE DES MATIÈRES

1. INTEGRALES DE SINUS, COSINUS ET EXPONENTIELLES . . . . .	1
Calcul de $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ , $\gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt$ , and $\int_0^x \frac{e^{-t}}{t} dt$ .	
2. SYSTEMES DE VALEURS ET DE VECTEURS PROPRES DE DEGRE 3. . .	6
Pour une matrice donnée de degré 3, avec des valeurs propres réelles distinctes, le programme calcule les valeurs et les vecteurs propres. La première valeur propre (le plus grande) et le premier vecteur propre sont calculés par la méthode des puissances, tandis que les 2ème et 3ème valeurs sont calculées par la méthode de déflation.	
3. VALEURS PROPRES POUR SYSTEMES DE DEGRE 3 . . . . .	13
Le programme calcule les valeurs propres d'un système de degré 3 décrit par $Az - \lambda x$ .	
4. POLYNOMES DE TCHEBYSCHEV, LEGENDRE, HERMITE ET LAGUERRE. .	19
Calcul des polynômes à l'aide d'équations de récurrence.	
5. QUADRATURE GAUSSIENNE A SEIZE POINTS . . . . .	25
Calcul d'approximations d'intégrales sur des intervalles finis ou infinis.	
6. FONCTION GAMMA. . . . .	32
Le programme approche la valeur de la fonction gamma $\Gamma(x)$ pour $1 \leq x \leq 70$ .	
7. FONCTIONS DE BESSEL, FONCTION D'ERREUR . . . . .	37
Calcul des fonctions de Bessel, $J_n(x)$ et $I_n(x)$ et de la fonction d'erreur.	
8. EQUATION CARACTERISTIQUE D'UNE MATRICE 4 X 4 . . . . .	45
Calcul des coefficients de l'équation caractéristique. $\lambda^4 + r_1\lambda^3 + r_2\lambda^2 + r_3\lambda + r_4 = 0$ (avec 1 module mémoire supplémentaire).	
9. OPERATIONS SUR MATRICE 4 X 4 . . . . .	52
Calcul du déterminant et de l'inverse d'une matrice 4 x 4, résolution de quatre équations simultanées à quatre inconnues par élimination gaussienne (avec un module mémoire supplémentaire).	



## INTÉGRALES DE SINUS, COSINUS ET EXPONENTIELLES

Ce programme calcule les intégrales suivantes :

### Intégrale du sinus

$$\begin{aligned} \text{Si}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)} \\ &= \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \\ \text{Si}(-x) &= \text{Si}(x) \end{aligned}$$

### Intégrale du cosinus

$$\begin{aligned} \text{Ci}(x) &= \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt \\ &= \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n)!} \\ \text{Ci}(-x) &= \text{Ci}(x) - i\pi \text{ for } x > 0 \end{aligned}$$

REMARQUE : Pour  $\text{Si}(x)$  et  $\text{Ci}(x)$ , la précision du résultat décroît si  $x$  croît. Pour  $x = 10$ , le résultat est précis jusqu'à la septième position décimale. Pour  $x$  égal à des valeurs voisines de 20, les résultats sont précis jusqu'à la deuxième position décimale.

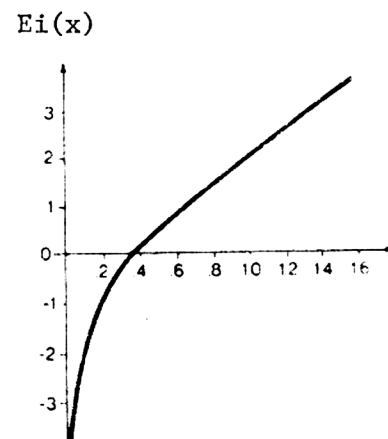
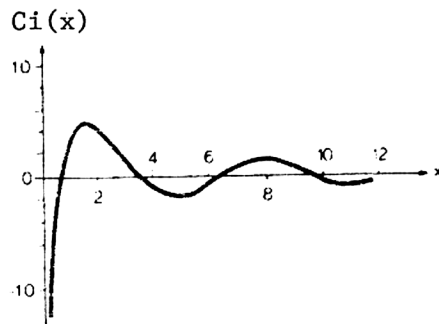
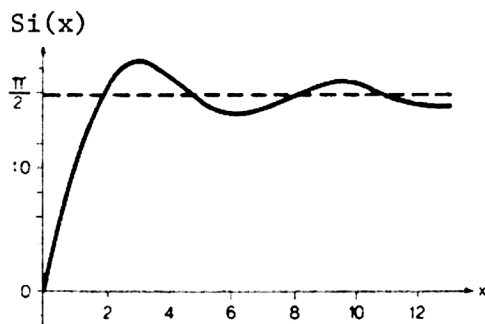
### Intégrale exponentielle

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n n!}$$

où  $x > 0$  et  $\gamma = 0.5772156649$  est la constante d'Euler.

REMARQUE : Pour  $\text{Ei}(x)$ , si  $x$  est trop grand, le calcul d'un nouveau terme de la série peut provoquer un dépassement de capacité. Dans ce cas, l'écran affiche "OUT OF RANGE" et le programme s'arrête.

Le programme calcule les sommes partielles successives de la série. Lorsque deux sommes partielles successives sont égales, la valeur obtenue est prise comme somme de la série.



Référence : Abramowitz, Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, 1968.

Exemples :

1. Calculer Si (0,69)
2. Calculer Si (9,8)
3. Calculer Ci (1,38)
4. Calculer Ci (5)
5. Calculer Ei (1,59)
6. Calculer Ei (0,61)

Appuyer sur :

Affichage

[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 004	
1. [XEQ] [ALPHA] SI [ALPHA]	X?
.69 [R/S]	SI(0.69)=0.67
2. [XEQ] [ALPHA] SI [ALPHA]	X?
9.8 [R/S]	SI(9.80)=1.67
3. [XEQ] [ALPHA] CI [ALPHA]	X?
1.38 [R/S]	CI(1.38)=0.46
4. [XEQ] [ALPHA] CI [ALPHA]	X?
5 [R/S]	CI(5.00)=-0.19
5. [XEQ] [ALPHA] EI [ALPHA]	X?
1.59 [R/S]	EI(1.59)=3.57
6. [XEQ] [ALPHA] EI [ALPHA]	X?
.61 [R/S]	EI(0.61)=0.80



## PROGRAM LISTING

PROGRAMMAUFLISTUNG

LISTAGE DU PROGRAMME

LISTATO DI PROGRAMMA

Line Zeile Ligne Linea	Keystrokes Tastenfolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti	Line Zeile Ligne Linea	Key pressed Tastenfolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti
01	LBL "CI"	Si (x)	52	LN	
02	"X?"		53	.5772156	
03	PROMPT		649		
04	STO 02		54	+	
05	STO 03		55	RTN	
06	X↑2		56	LBL "EI"	Ei(x)
07	CHS		57	"X?"	
08	STO 00		58	PROMPT	
09	1		59	STO 03	
10	STO 01		60	STO 00	
11	RCL 02		61	1	
12	"SI<"		62	STO 02	
13	LBL 00	Boucle pour	63	0	
14	RCL 00	addition des	64	STO 01	
15	RCL 01	termes de la	65	RCL 00	
16	1	série	66	XEQ 01	
17	+		67	LBL 03	
18	/		68	RCL 00	
19	LASTX		69	RCL 01	
20	XEQ 02		70	XEQ 02	
21	X*Y?		71	X*Y?	
22	GTO 00		72	GTO 03	
23	GTO d		73	"EI<"	
24	LBL 02	Sous-program-	74	LBL d	Affichage
25	1	me commun	75	FIX 2	
26	+		76	RCL 03	
27	STO 01		77	ARCL X	
28	/		78	"H>="	
29	RCL 02		79	ARCL Y	
30	*		80	AVIEW	
31	STO 02		81	STOP	
32	RCL 01		82	.END.	
33	/		80		
34	+				
35	RTN				
36	LBL "CI"	CI (x)			
37	"X?"		85		
38	PROMPT				
39	STO 03				
40	X↑2				
41	CHS				
42	STO 00				
43	1		90		
44	STO 02				
45	0				
46	STO 01				
47	LASTX				
48	XEQ 01		95		
49	"CI<"				
50	GTO 00				
51	LBL 01				
50			100		

# REGISTERS, STATUS, FLAGS

## REGISTERBELEGUNG, FLAGS, BETRIEBSARTEN

## REGISTRES, INDICATEURS, MODES OPÉRATOIRES

## REGISTRI, MODI OPERATIVI, FLAGS

Registers Datenspeicher Registres de données Registri				Status Betriebsart Modes opératoires Modi operativi			
00	-x <sup>2</sup> , x	50		Size	004	Total Reg.	24
01	temporaire			Eng	<input type="checkbox"/>	Fix	<input checked="" type="checkbox"/>
02	temporaire			Deg	<input checked="" type="checkbox"/>	Rad	<input type="checkbox"/>
03	x			Sci	<input type="checkbox"/>	Grad	<input type="checkbox"/>
				User Mode			
				On <input type="checkbox"/>			
				Off <input checked="" type="checkbox"/>			
				Purpose Bedeutung Signification Scopo			
05		55		Flags			
				SET CLEAR			
				00	positionnés		a zéro
				01			
				02			
10		60		03			
				04			
				05			
				06			
				07			
15		65		08			
				09			
				10			
				11	Audio execute		
				12			
20		70		13			
				14			
				15			
				16			
				17			
25		75		18			
				19			
				20			
				21	Printer Enable		
				22	Number Input		
30		80		23	Alpha Input		
				24	Range Ignore		
				25	Error Ignore		
				26	Audio Enable		
				27	User Mode		
35		85		28	Decimal Point		
				29	Digit Grouping		
				Assignments Tastenbelegung Assignations Assegnamenti			
				Function Funktion Fonction Funzione	Key Taste Touche Tasto	Function Funktion Fonction Funzione	Key Taste Touche Tasto
40		90					
45		95					
		99					



# SYSTEMES DE VALEURS ET DE VECTEURS PROPRES DE DEGRE 3 AVEC VALEURS PROPRES RELLES DISTINCTES

Pour une matrice A, les valeurs propres peuvent être obtenues à partir de  $Ax = \lambda x$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

## a) Méthode des puissances

Supposons que A ait pour valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  avec  $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$

Faisons agir A de manière récurrente sur un vecteur v qui peut être exprimé comme une combinaison linéaire de vecteurs propres  $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$

On a

$$Av = c_1 Av_1 + c_2 Av_2 + c_3 Av_3 = \lambda_1 (c_1 v_1 + c_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 + c_3 \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_3)$$

$$A^p v = \lambda_1^p [c_1 v_1 + c_2 (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^p v_2 + c_3 (\frac{\lambda_3}{\lambda_1})^p v_3]$$

donc 
$$\lambda_1 = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{(A^{p+1} v_1)}{(A^p v_1)}$$

b) Pour la méthode par déflation, se reporter à la référence (2).

REMARQUE : Le programme ne fonctionne que pour les systèmes ayant des valeurs propres distinctes et partant d'une "bonne" estimation du vecteur propre initial  $V_1$ . Si le premier composant des vecteurs propres est nul, l'utilisation de ce programme impose des transformations de similarité.

Référence : Charles Cullen, Matrices and Linear Transformations.  
Addison-Wesley Pub. Company, mars 1967

Carl-Erik Forberg, Intro. to Numerical Analysis.  
Addison-Wesley, Pub. Company 1969

Exemples :

Soit  $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$  et  $v_1$  estimé égal à  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , calculer  $\lambda_1, v_1, \lambda_2, v_2, \lambda_3$  et

Appuyer sur

Affichage

[USER]

(mettre le calculateur  
en mode USER)

[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 026

3 [CHS] [STO] 01

[STO] 05

[STO] 09

2 [STO] 02

[STO] 08

0 [STO] 03

[STO] 07

1 [STO] 04

[STO] 06

1 [STO] 20

[STO] 21

[STO] 22

[XEQ] [ALPHA] EVV [ALPHA]

 $-5.0000 (\lambda_1)$ 

[R/S]

1.0000

[R/S]

 $-2.0000$ 

[R/S]

1.0000

[R/S]

 $-3.0000 (\lambda_2)$ 

[R/S]

1.0000

[R/S]

1.0000

[R/S]

 $-1.0000$ 

[R/S]

 $-1.0000 (\lambda_3)$ 

[R/S]

1.0000

[R/S]

2.0000

[R/S]

1.0000

 $v_1$  $v_2$  $v_3$





**PROGRAMMAUFLISTUNG  
LISTAGE DU PROGRAMME  
LISTATO DI PROGRAMMA**

Line Zeile Ligne Linea	Keystrokes Tastentolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti	Line Zeile Ligne Linea	Key pressed Tastentolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti
01	LBL 9	- revoir la	50	STO 22	
02	1.009	matrice	51	GTO 03	
03	STO 25		52	LBL 00	Afficher $\lambda_1$ , $V^1$
04	LBL 01		53	STOP	
05	RCL IND		54	1	
25			55	STO 20	
06	STOP		56	STOP	
07	ISG 25		57	RCL 24	
08	GTO 01		58	RCL 23	
09	STOP		59	/	
10	LBL "EVV	- calculer $\lambda_1$ et $V^1$	60	STO 21	
11	CF 00		61	STOP	
12	LBL 03		62	RCL 25	
13	RCL 01		63	RCL 23	
14	RCL 04		64	/	
15	XEQ 08		65	STO 22	
16	RCL 07		66	STOP	
17	RCL 22		67	RCL 05	construire la matrice B
18	*		68	RCL 21	
19	+		69	RCL 04	
20	STO 23	- Itération :	70	*	
21	RCL 02	méthode des	71	-	
22	RCL 05	puissances	72	STO 16	
23	XEQ 08		73	RCL 06	solution pour $\lambda_2$ et $\lambda_3$
24	RCL 08		74	RCL 22	
25	RCL 22		75	RCL 04	
26	*		76	*	
27	+		77	-	
28	STO 24		78	STO 17	
29	RCL 03		79	RCL 08	
30	RCL 06		80	RCL 21	
31	XEQ 08		81	RCL 07	
32	RCL 09		82	*	
33	RCL 22		83	-	
34	*		84	STO 18	
35	+		85	RCL 09	
36	STO 25		86	RCL 22	
37	RCL 23		87	RCL 07	
38	RCL 20		88	*	
39	/		89	-	
40	RCL 00		90	STO 19	
41	X=Y?		91	RCL 16	
42	GTO 00		92	+	
43	X<>Y		93	STO 25	
44	STO 00		94	X↑2	
45	RCL 23		95	RCL 16	
46	STO 20		96	RCL 19	
47	RCL 24		97	*	
48	STO 21		98	RCL 18	
49	RCL 25		99	RCL 17	
			100	*	



448

# REGISTERS, STATUS, FLAGS

## REGISTERBELEGUNG, FLAGS, BETRIEBSARTEN

## REGISTRES, INDICATEURS, MODES OPÉRATOIRES

## REGISTRI, MODI OPERATIVI, FLAGS

Registers Datenspeicher Registres de données Registri				Status Betriebsart Modes opératoires Modi operativi			
00	$\lambda 1$	50		Size <u>026</u> Total Reg. <u>63</u>		User Mode	
	a11			Eng <input type="checkbox"/>	Fix <input checked="" type="checkbox"/>	Sci <input type="checkbox"/>	On <input checked="" type="checkbox"/>
	a12			Deg <input type="checkbox"/>	Rad <input type="checkbox"/>	Grad <input type="checkbox"/>	Off <input type="checkbox"/>
	a13			<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div> <b>Purpose</b> Bedeutung Signification Scopo </div> <div> <b>Flags</b>  <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> <div>SET</div> <div>CLEAR</div> </div> </div> </div>			
	a21						
05	a22	55		00	C RETOUR		POURSUITE
	a23			01			
	a31			02			
	a32			03			
10	$\lambda^3$	60		04			
	$Z_2^3, v_2^3$			05			
	$Z_3^3, v_3^3$			06			
	$\lambda 2$			07			
	$Z_2^2, v_2^2$			08			
15	$Z_3^2, v_3^2$	65		09			
	b11			10			
	b21			11	Audio execute		
	b22			12			
20	temporaire ( $\lambda^2$ ) k	70		13			
	( $X_3^1$ ) k			14			
	temporaire			15			
	temporaire			16			
	temporaire			17			
25	temporaire	75		18			
				19			
				20			
				21	Printer Enable		
				22	Number Input		
30		80		23	Alpha Input		
				24	Range Ignore		
				25	Error Ignore		
				26	Audio Enable		
				27	User Mode		
35		85		28	Decimal Point		
				29	Digit Grouping		
				<b>Assignments</b> Tastenbelegung / Assignations / Assegnamenti			
40		90		<b>Function</b> Funktion Fonction Funzione	<b>Key</b> Taste Touche Tasto	<b>Function</b> Funktion Fonction Funzione	<b>Key</b> Taste Touche Tasto
45		95					
		99					

### VALEURS PROPRES POUR SYSTEME DE DEGRE 3

Ce programme calcule les valeurs propres d'un système de degré 3 décrit par  $Ax = \lambda x$ , notamment :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$ , et  $\lambda_3$  sont données par l'équation

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Les racines de l'équation cubique sont données par la formule exacte.

Exemple : soit à calculer les valeurs propres de la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -0.05 \end{bmatrix}$$

Appuyer sur :

Affichage :

[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 021

[XEQ] [ALPHA] EV [ALPHA]

1.0000

1 [R/S]

2.0000

0 [R/S]

3.0000

0 [R/S]

4.0000

0 [R/S]

5.0000

0 [R/S]

6.0000

1 [R/S]

7.0000

0 [R/S]

8.0000

1 [CHS] [R/S]

9.0000

.05 [CHS] [R/S]

1.0000  $\lambda_3$

[R/S]

-0.0250  $\lambda_1$  (réel)

[R↓]

-0.9997  $\lambda_1$  (imaginaire)

[R↓]

-0.0250  $\lambda_2$  (réel)

[R↓]

0.9997  $\lambda_2$  (imaginaire)

## USER INSTRUCTIONS

**PROGRAMMABLAUF  
INSTRUCTIONS D'EMPLOI  
NORME OPERATIVE**

[illegible]

## PROGRAM LISTING

PROGRAMMAUFLISTUNG

LISTAGE DU PROGRAMME

LISTATO DI PROGRAMMA

Line Zeile Linea	Keystrokes Tastenfolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti	Line Zeile Linea	Key pressed Tastenfolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti
01	*LBL "EY"	stockage de la	51	RCL 09	
02	CLRG	matrice	52	RCL 04	
03	10		53	RCL 02	
04	ENTER↑		54	XEQ 09	
05	1		55	ST+ 11	
06	*LBL A		56	RCL 01	
07	STOP		57	RCL 05	
08	STO IND		58	RCL 09	
Y			59	+	
09	RDN		60	+	
10	1		61	CHS	
11	+		62	STO 12	vérification
12	X=Y?		63	CF 00	si constante
13	GTO A		64	CF 01	nulle
14	RCL 08	calcul des	65	RCL 10	
15	RCL 06	coefficients	66	X=0?	
16	RCL 05	du polynôme de	67	GTO d	
17	RCL 09	degré 3	68	RCL 11	
18	XEQ 09		69	3	
19	RCL 01		70	*	
20	*		71	RCL 12	
21	STO 10		72	X↑2	
22	RCL 02		73	-	
23	RCL 09		74	9	
24	RCL 08		75	/	
25	RCL 03		76	STO 13	
26	XEQ 09		77	RCL 11	résolution
27	RCL 04		78	RCL 12	pour la racine
28	*		79	*	réelle $\lambda_3$
29	ST+ 10		80	9	
30	RCL 03		81	*	
31	RCL 05		82	RCL 10	
32	RCL 06		83	27	
33	RCL 02		84	*	
34	XEQ 09		85	-	
35	RCL 07		86	RCL 12	
36	*		87	3	
37	ST+ 10		88	Y↑X	
38	RCL 01		89	2	
39	RCL 05		90	*	
40	RCL 07		91	-	
41	RCL 03		92	54	
42	XEQ 09		93	/	
43	STO 11		94	STO 14	
44	RCL 01		95	X↑2	
45	RCL 09		96	RCL 13	
46	RCL 08		97	3	
47	RCL 06		98	Y↑X	
48	XEQ 09		99	+	
49	ST+ 11		100	0	
50	RCL 05		101	X<=Y?	
50					



## PROGRAM LISTING

PROGRAMMAUFLISTUNG  
LISTAGE DU PROGRAMME  
LISTATO DI PROGRAMMA

Line Zeile Ligne Linea	Keystrokes Tastenfolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti	Line Zeile Ligne Linea	Key pressed Tastenfolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti
102	GTO 03		153	4	
103	RCL 14		154	*	
104	RCL 13		155	-	
105	3	$\lambda_3$ pour $Q^3 +$	156	CHS	
106	Y↑X	$R^2 < 0$	157	X>0?	
107	CHS		158	SF 01	
108	SQRT		159	X=0?	
109	/		160	SF 00	
110	ACOS		161	ABS	
111	3		162	SQRT	
112	/		163	2	
113	COS		164	/	
114	RCL 13		165	STO 20	
115	CHS		166	RCL 18	
116	SQRT		167	CHS	
117	*		168	2	
118	2		169	/	
119	*		170	STO 00	
120	GTO 04	S + T	171	FS? 01	
121	♦LBL 03		172	GTO 01	
122	X<>Y		173	RCL 20	
123	SQRT		174	+	
124	STO 19		175	0	
125	RCL 14		176	X<>Y	
126	+		177	RCL 00	
127	XEQ 05		178	RCL 20	
128	RCL 14		179	-	
129	RCL 19		180	0	
130	-		181	X<>Y	
131	XEQ 05		182	STOP	
132	+		183	♦LBL 01	
133	♦LBL 04	$\lambda_3$	184	RCL 20	
134	RCL 12		185	X<>Y	
135	3		186	RCL 20	
136	/		187	CHS	
137	-		188	RCL 00	
138	STO 19		189	STOP	
139	STOP		190	♦LBL 09	ZT - XY
140	RCL 12	Réduction à	191	*	
141	RCL 19	un polynôme de	192	RDN	
142	+	degré 2 et cal-	193	*	
143	STO 18	cul de $\lambda_1 \lambda_2$	194	R↑	
144	RCL 10		195	-	
145	RCL 19		196	RTN	$\pm\sqrt[3]{}$
146	/		197	♦LBL 05	
147	CHS		198	X<0?	
148	STO 17		199	SF 02	
149	♦LBL 07		200	ABS	
150	RCL 18		201	1	
151	X↑2		202	ENTER↑	
152	RCL 17		203	3	
50			100		

## PROGRAM LISTING

PROGRAMMAUFLISTUNG  
LISTAGE DU PROGRAMME  
LISTATO DI PROGRAMMA

Line Zeile Ligne Linea	Keystrokes Tastentolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti	Line Zeile Ligne Linea	Key pressed Tastentolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti
204	/		51		
205	Y↑X				
206	FS?C 02				
207	CHS				
208	RTN				
209	◆LBL d	$\lambda_3 = 0$	55		
210	STOP				
211	RCL 11				
212	STO 17				
213	RCL 12				
214	STO 18		60		
215	GTO 07				
216	.END.				
15			65		
20			70		
25			75		
30			80		
35			85		
40			90		
45			95		
50			100		

# REGISTERS, STATUS, FLAGS

## REGISTERBELEGUNG, FLAGS, BETRIEBSARTEN

## REGISTRES, INDICATEURS, MODES OPÉRATOIRES

## REGISTRI, MODI OPERATIVI, FLAGS

<b>Registers</b> Datenspeicher Registres de données Registri				<b>Status</b> Betriebsart Modes opératoires Modi operativi			
00	-0 (or b b/2)	50		Size <u>021</u>	Total Reg. <u>61</u>	<b>User Mode</b>	
	a11			Eng <input type="checkbox"/>	Fix <input type="checkbox"/>	Sci <input type="checkbox"/>	On <input type="checkbox"/>
	a21			Deg <input type="checkbox"/>	Rad <input type="checkbox"/>	Grad <input type="checkbox"/>	Off <input checked="" type="checkbox"/>
	a31			<b>Purpose</b> Bedeutung Signification Scopo			
	a12						
05	a22	55		<b>Flags</b> SET CLEAR			
	a32			00			
	a13			01			
	a23			02			
	a33			03			
10	utilisé	60		04			
	utilisé			05			
	utilisé			06			
	utilisé			07			
15	utilisé	65		08			
	utilisé			09			
	utilisé			10			
	utilisé			11	Audio execute		
	utilisé			12			
20	utilisé	70		13			
				14			
				15			
				16			
				17			
25		75		18			
				19			
				20			
				21	Printer Enable		
				22	Number Input		
30		80		23	Alpha Input		
				24	Range Ignore		
				25	Error Ignore		
				26	Audio Enable		
				27	User Mode		
35		85		28	Decimal Point		
				29	Digit Grouping		
				<b>Assignments</b> Tastenbelegung / Assignations / Assegnamenti			
40		90		<b>Function</b> Funktion Fonction Funzione	<b>Key</b> Taste Touche Tasto	<b>Function</b> Funktion Fonction Funzione	<b>Key</b> Taste Touche Tasto
45		95					
		99					

# POLYNOMES DE TCHEBYSCHEV, LEGENDRE, HERMITE ET LAGUERRE

Le label T calcule la valeur du polynôme de Tchebyshev  $T_n(x)$  à l'aide de l'équation de récurrence :

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Les valeurs initiales étant :  $T_0(x) = 1$ ,  $T_1(x) = x$  et  $n$  étant un entier positif.

Le label P calcule la valeur du polynôme de Legendre  $P_n(x)$  à l'aide de l'équation de récurrence :

$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)}{n+1}$$

Les valeurs initiales étant :  $P_0(x)=1$ ,  $P_1(x)=x$  et  $n$  étant un entier positif.

Le label H calcule la valeur du polynôme de Hermite  $H_n(x)$  à l'aide de l'équation de récurrence

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

Les valeurs initiales étant  $H_0(x) = 1$ ,  $H_1(x) = 2x$  et  $n$  étant un entier positif.

Le label L calcule la valeur du polynôme de Laguerre  $L_n(x)$  à l'aide de l'équation de récurrence

$$L_{n+1}(x) = \frac{(2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)}{n+1}$$

Notons que les quatre fonctions laissent  $f(x)$  dans le registre  $x$  d'où elle peut être extraite pour affichage sur l'écran (voir ex. 4).

Exemple :

1. Calculer  $T_3(0,4)$
2. Calculer  $P_{10}(0,98)$
3. Calculer  $H_5(3)$
4. Calculer  $L_6(3)$

Appuyer sur

Affichage :

[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 007

[XEQ] [ALPHA] T [ALPHA]

N?

3 [R/S]

X?

.4 [R/S]

T3(0.40)=-0.94

[XEQ] [ALPHA] P [ALPHA]

N?

10 [R/S]

X?

0.98 [R/S]

P10(0.98)=0.16

[XEQ] [ALPHA] H [ALPHA]

N?

5 [R/S]

X?

3 [R/S]

H5(3.00)=3,816.00

[XEQ] [ALPHA] L [ALPHA]

N?

6 [R/S]

X?

3 [R/S]

L6(3.00)=-0.01

■ [FIX] 4

-0.0125



[illegible]

## PROGRAM LISTING

PROGRAMMAUFLISTUNG

LISTAGE DU PROGRAMME

LISTATO DI PROGRAMMA

Line Zeile Ligne Linea	Keystrokes Tastenfolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti	Line Zeile Ligne Linea	Key pressed Tastenfolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti
01	LBL "T"		52	STO 03	
02	XEQ A	Polynôme de	53	X<>Y	
03	STO 00	Tchebyshev	54	X<=Y?	
04	2		55	GTO 04	
05	STO 01		56	2	
06	*		57	STO 02	
07	STO 02		58	LBL 03	Boucle pour
08	CLX		59	RCL 04	équation de
09	X<>Y		60	RCL 01	récurrence
10	X<=Y?		61	*	
11	GTO 00		62	ENTER↑	
12	1		63	ENTER↑	
13	STO 03		64	RCL 03	
14	X=Y?		65	-	
15	GTO 01		66	+	
16	LBL 02	Boucle pour	67	LASTX	
17	CLX	équation de	68	RCL 04	
18	RCL 02	récurrence	69	STO 03	
19	RCL 00		70	CLX	
20	*		71	RCL 02	
21	RCL 03		72	/	
22	LASTX		73	-	
23	STO 03		74	STO 04	
24	RDN		75	RCL 00	
25	-		76	RCL 02	
26	STO 00		77	1	
27	CLX		78	+	
28	RCL 01		79	STO 02	
29	1		80	X<=Y?	Test
30	+		81	GTO 03	
31	STO 01		82	RCL 04	
32	X<=Y?		83	"P"	
33	GTO 02	Test; $r_1 \leq n_1$	84	GTO d	
34	LBL 01	donc retour	85	LBL 04	
35	RCL 00	dans la boucle	86	RCL 01	
36	"T"		87	RTN	
37	GTO d		88	LBL H	Polynôme
38	LBL 00		89	XEQ A	d'Hermite
39	1		90	STO 01	
40	"T"		91	2	
41	GTO d		92	*	
42	LBL "P"		93	STO 03	
43	XEQ A	Polynôme de	94	CLX	
44	STO 01	Legendre	95	X<>Y	
45	STO 04		96	X<=Y?	
46	CLX		97	GTO 00	
47	X<>Y		98	1	
48	STO 00		99	STO 00	
49	X<=Y?		100	STO 02	
50	GTO 00		101	X<>Y	
51	1		102	X<=Y?	

## PROGRAM LISTING

PROGRAMMAUFLISTUNG

LISTAGE DU PROGRAMME

LISTATO DI PROGRAMMA

Line Zeile Linea	Keystrokes Tastensequenz Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti	Line Zeile Linea	Key pressed Tastensequenz Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti
103	GTO 05		154	RCL 03	
104	•LBL 06		155	-	
105	RCL 00	Test pour	156	RCL 04	
106	RCL 03	équation de	157	+	
107	STO 00	récurrence	158	RCL 01	
108	RCL 01		159	RCL 04	
109	*		160	*	
110	X<>Y		161	RCL 03	
111	RCL 02		162	-	
112	*		163	RCL 02	
113	-		164	/	
114	2		165	RCL 04	
115	*		166	STO 03	
116	STO 03		167	RDN	
117	CLX		168	-	
118	RCL 02		169	STO 04	
119	1		170	RCL 00	
120	+		171	RCL 02	
121	STO 02		172	1	
122	X<>Y		173	+	
123	X≠Y?	Test	174	STO 02	
124	GTO 06		175	X<=Y?	Test
125	RCL 03		176	GTO 08	
126	"H"		177	•LBL 07	
127	GTO 3		178	RCL 04	
128	•LBL 05		179	"L"	
129	RCL 03		180	GTO 3	
130	RTH		181	STOP	
131	•LBL "L"	Polynôme de	182	•LBL A	Introduction
132	XEQ A	Laguerre	183	"H?"	n et x
133	ENTER↑		184	PROMPT	
134	1		185	STO 05	
135	STO 03		186	"X?"	
136	+		187	PROMPT	
137	STO 01		188	STO 06	
138	2		189	RTH	
139	STO 02		190	•LBL 3	
140	X<>Y		191	CF 29	Affichage
141	-		192	FIX 0	
142	STO 04		193	ARCL 05	
143	CLX		194	"F<"	
144	X<>Y		195	SF 29	
145	X<=Y?		196	FIX 2	
146	GTO 00		197	ARCL 06	
147	STO 00		198	"F>="	
148	1		199	ARCL X	
149	X<>Y		200	AVIEW	
150	X<=Y?		201	STOP	
151	GTO 07		202	.END.	
152	•LBL 03	Boucle pour			
153	RCL 04	équation de			
		récurrence			
50			101		

**REGISTERS, STATUS, FLAGS**  
**REGISTERBELEGUNG, FLAGS, BETRIEBSARTEN**  
**REGISTRES, INDICATEURS, MODES OPÉRATOIRES**  
**REGISTRI, MODI OPERATIVI, FLAGS**

Registers Datenspeicher Registres de données Registri				Status Betriebsart Modes opératoires Modi operativi			
00	modif.temporaire	50		Size 007 Total Reg. 45		User Mode	
	modif.temporaire			Eng <input type="checkbox"/>	Fix <input checked="" type="checkbox"/>	Sci <input type="checkbox"/>	On <input type="checkbox"/>
	modif.temporaire			Deg <input type="checkbox"/>	Rad <input type="checkbox"/>	Grad <input type="checkbox"/>	Off <input checked="" type="checkbox"/>
	modif.temporaire			<div> <div>Purpose Bedeutung Signification Scopo</div> <div>Flags SET CLEAR</div> </div>			
				00			
				01			
				02			
10		60		03			
				04			
				05			
				06			
				07			
15		65		08			
				09			
				10			
				11	Audio execute		
				12			
20		70		13			
				14			
				15			
				16			
				17			
25		75		18			
				19			
				20			
				21	Printer Enable		
				22	Number Input		
30		80		23	Alpha Input		
				24	Range Ignore		
				25	Error Ignore		
				26	Audio Enable		
				27	User Mode		
35		85		28	Decimal Point		
				29	Digit Grouping		
				<div> <div>Assignments Tastenbelegung / Assignations / Assegnamenti</div> <div> <div>Function Funktion Fonction Funzione</div> <div>Key Taste Touche Tasto</div> <div>Function Funktion Fonction Funzione</div> <div>Key Taste Touche Tasto</div> </div> </div>			
40		90					
45		95					
		99					

## QUADRATURE GAUSSIENNE A SEIZE POINTS

Ce programme effectue des approximations d'intégrales sur des intervalles finis ou infinis par la méthode des quadratures à seize points de Gauss-Legendre. Si  $f(x)$  est la fonction à intégrer, on peut calculer

$$\int_a^b f(x) \, dx \quad \text{or} \quad \int_a^\infty f(x) \, dx$$

La fonction  $f(x)$  doit être explicitement connue et introduite par l'utilisateur dans la mémoire des programmes sous LBL FX. Après introduction de FX, la valeur de  $x$  se trouve dans le registre X. Les registres  $R_1$  à  $R_6$ , ainsi que le registre opérationnel, permettent à l'utilisateur de définir  $f(x)$ .

$$\int_a^b f(x) \, dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{16} W_i f\left(\frac{Z_i(b-a) + b + a}{2}\right)$$

$$\int_a^\infty f(x) \, dx = 2 \sum_{i=1}^{16} \frac{W_i}{(1 + Z_i)^2} f\left(\frac{2}{1+Z_i} + a-1\right)$$

Les constantes ( $W_i$  et  $Z_i$ ) peuvent être stockées sur une carte de données ; leurs valeurs et leurs emplacements en mémoire sont donnés à la page suivante.

REMARQUE :

1. Pour éviter des oublis dans le calcul des intégrales faisant intervenir des fonctions trigonométriques, le sous-programme FX devra opérer le passage du mode trigonométrique au mode radians.
2. L'exécution de ce programme occupe au total 55 registres auxquels il faut ajouter l'espace mémoire nécessaire à la définition de  $f(x)$ .

# CONTENU DES REGISTRES DE DONNEES POUR QUADRATURE GAUSSIENNE A SEIZE POINTS

<u>Registre</u>	<u>Contenu</u>	<u>Z<sub>i</sub> ou W<sub>i</sub></u>
0	0	
1	0	
2	0	
3	0	
4	0	
5	0	
6	0	
7	0	
8	0	
9	.02715245941	W15, W16
10	.98940093500	Z15, -Z16
11	.06225352394	W13, W14
12	.94457502310	Z13, -Z14
13	.09515851168	W11, W12
14	.86563120240	Z11, -Z12
15	.12462897130	W9, W10
16	.75540440840	Z9, -Z10
17	.14959598880	W7, W8
18	.61787624440	Z7, -Z8
19	.16915651940	W5, W6
20	.45801677770	Z5, -Z6
21	.18260341500	W3, W4
22	.28160355080	Z3, -Z4
23	.18945061050	W1, W2
24	.09501250984	Z1, -Z2
25	0	

Exemples :

1. Calculer  $\int_1^4 1/x^2 \, dx$

2. Calculer  $\int_1^\infty 1/x^2 \, dx$

Appuyer sur :

Affichage :

1. [XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 026
  - 2.715245941 [EEX] 2 [CHS] [STO] 09
  - 9.894009350 [EEX] 1 [CHS] [STO] 10
  - 6.225352394 [EEX] 2 [CHS] [STO] 11
  - 9.445750231 [EEX] 1 [CHS] [STO] 12
  - 9.515851168 [EEX] 2 [CHS] [STO] 13
  - 8.656312024 [EEX] 1 [CHS] [STO] 14
  - 1.246289713 [EEX] 1 [CHS] [STO] 15
  - 7.554044084 [EEX] 1 [CHS] [STO] 16
  - 1.495959888 [EEX] 1 [CHS] [STO] 17
  - 6.178762444 [EEX] 1 [CHS] [STO] 18
  - 1.691565194 [EEX] 1 [CHS] [STO] 19
  - 4.580167777 [EEX] 1 [CHS] [STO] 20
  - 1.826034150 [EEX] 1 [CHS] [STO] 21
  - 2.816035508 [EEX] 1 [CHS] [STO] 22
  - 1.894506105 [EEX] 1 [CHS] [STO] 23
  - 9.501250984 [EEX] 2 [CHS] [STO] 24
  - [GTO] [ALPHA] FX [ALPHA]
  - [PGRM] ████ [ $X^2$ ] [1/X]
  - [PGRM]
  - [XEQ] [ALPHA] A-B [ALPHA] a?
  - 1 [R/S] b?
  - 4 [R/S] 7.5000      -01
2. [XEQ] [ALPHA] A- [ALPHA] a?
  - 1 [R/S] 1.0000      00

## USER INSTRUCTIONS

**PROGRAMMABLAUF  
INSTRUCTIONS D'EMPLOI  
NORME OPERATIVE**

[illegible]



## PROGRAM LISTING

PROGRAMMAUFLISTUNG

LISTAGE DU PROGRAMME

LISTATO DI PROGRAMMA

Line Zelle Ligne	Keystrokes Tastensequenz Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti	Line Zelle Ligne	Key pressed Tastensequenz Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti
01	LBL "A-B"		50	/	
		A-B	51	XEQ "FX"	
02	SCI 4		52	DSE 25	
03	"a?"		53	RCL IND	
04	PROMPT	$\int_a^b f(x) dx$	25		
05	"b?"		54	DSE 25	
06	PROMPT		55	*	
07	STO 00		56	ST+ 00	
08	X<>Y		57	RTH	
09	STO 07		58	LBL "A-"	
10	0		59	SCI 4	A-
11	STO 00		60	"a?"	
12	CF 00		61	PROMPT	$\int_a^\infty f(x) dx$
13	LBL 01		62	STO 07	
14	24		63	0	
15	STO 25		64	STO 00	
16	XEQ 15		65	CF 00	
17	XEQ 15		66	LBL 03	
18	XEQ 15		67	24	
19	XEQ 15		68	STO 25	
20	XEQ 15		69	XEQ 16	
21	XEQ 15		70	XEQ 16	
22	XEQ 15		71	XEQ 16	
23	XEQ 15		72	XEQ 16	
24	FS? 00		73	XEQ 16	
25	GTO 02		74	XEQ 16	
26	SF 00		75	XEQ 16	
27	GTO 01		76	XEQ 16	
28	LBL 02		77	FS? 00	
29	RCL 00		78	GTO 04	
30	RCL 07		79	SF 00	
31	-		80	GTO 03	
32	2		81	LBL 04	
33	/		82	RCL 00	
34	RCL 00		83	2	
35	*		84	*	
36	RTH		85	RTH	
37	LBL 15		86	LBL 16	
38	RCL IND	$\sum_i W_i \frac{Z_i(b-a)+b+a}{2}$	87	RCL IND	$2 \sum \frac{W_i}{(1+Z_i)^2}$
25			25		
39	FS? 00		88	FS? 00	
40	CHS		89	CHS	$f(\frac{2}{1+Z_i} + a-1)$
41	RCL 00		90	1	
42	RCL 07		91	+	
43	-		92	2	
44	*		93	X<>Y	
45	RCL 00		94	/	
46	+		95	RCL 07	
47	RCL 07		96	+	
48	+		97	1	
49	2		98	-	

## PROGRAM LISTING

PROGRAMMAUFLISTUNG

LISTAGE DU PROGRAMME

LISTATO DI PROGRAMMA

Line Zeile Ligne Linea	Keystrokes Tastenfolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti	Line Zeile Ligne Linea	Key pressed Tastenfolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti
99	XEQ "FX"		51		
100	RCL IND				
25					
101	FS? 00				
102	CHS		55		
103	1				
104	+				
105	X↑2				
106	DSE 25				
107	RCL IND				
25			60		
108	DSE 25				
109	X<>Y				
110	/				
111	*				
112	ST+ 00		65		
113	RTN				
114	LBL "FX"				
115	RTN	f (x)			
116	.END.				
20			70		
25			75		
30			80		
35			85		
40			90		
45			95		
50			00		

# REGISTERS, STATUS, FLAGS

## REGISTERBELEGUNG, FLAGS, BETRIEBSARTEN

## REGISTRES, INDICATEURS, MODES OPÉRATOIRES

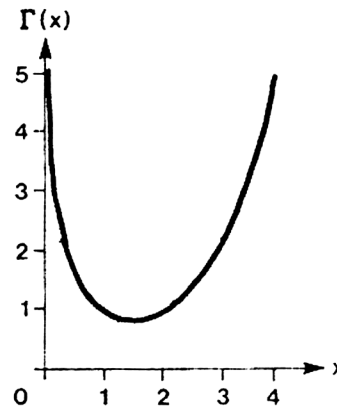
## REGISTRI, MODI OPERATIVI, FLAGS

Registers Datenspeicher Registres de données Registri				Status Betriebsart Modes opératoires Modi operativi			
	Registre de sommation	50		Size 026	Total Reg. 55+	User Mode	
				Eng <input type="checkbox"/>	Fix <input type="checkbox"/>	Sci <input type="checkbox"/>	On <input type="checkbox"/>
				Deg <input type="checkbox"/>	Rad <input type="checkbox"/>	Grad <input type="checkbox"/>	Off <input checked="" type="checkbox"/>
				<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div> <b>Purpose</b> Bedeutung Signification Scopo </div> <div> <b>Flags</b>  <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> <div>SET</div> <div>CLEAR</div> </div> </div> </div>			
5		55		00			
	a			01			
	b			02			
	W15, W16			03			
10	A15, -Z16	60		04			
	W 13, W14			05			
	Z 13, -Z14			06			
	W 11, W12			07			
	Z 11, -Z12			08			
15	W 9, W10	65		09			
	Z9, -Z10			10			
	W 7, W8			11	Audio execute		
	Z1, -Z8			12			
	W5, W6			13			
20	Z5, -Z6	70		14			
	W3, W4			15			
	Z3, -Z4			16			
	W1, W2			17			
	Z1, -Z2			18			
25	temporaire	75		19			
				20			
				21	Printer Enable		
				22	Number Input		
30		80		23	Alpha Input		
				24	Range Ignore		
				25	Error Ignore		
				26	Audio Enable		
				27	User Mode		
35		85		28	Decimal Point		
				29	Digit Grouping		
				<b>Assignments</b> Tastenbelegung / Assignations / Assegnamenti			
				<b>Function</b> Funktion Fonction Funzione	<b>Key</b> Taste Touche Tasto	<b>Function</b> Funktion Fonction Funzione	<b>Key</b> Taste Touche Tasto
40		90					
45		95					
		99					

## FONCTION GAMMA

Ce programme effectue une approximation de la valeur de la fonction gamma,  $1 \leq x \leq 70$ .

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$



1.  $\Gamma(x) = (x - 1) \Gamma(x-1)$  si  $x > 2$
2. Pour  $1 \leq x \leq 2$ , l'approximation polynomiale peut être utilisée.  

$$\Gamma(x) \cong 1 + b_1 (x - 1) + b_2 (x - 1)^2 + \dots + b_8 (x - 1)^8$$

avec

$b_1 = -0.577191652$ ,	$b_2 = 0.988205891$
$b_3 = -0.897056937$ ,	$b_4 = 0.918206857$
$b_5 = -0.756704078$ ,	$b_6 = 0.482199394$
$b_7 = -0.193527818$ ,	$b_8 = 0.035868343$

Remarques :

1. Ce programme permet de calculer la factorielle généralisée  $x!$  pour  $0 \leq x \leq 69$ , avec  $x! = \Gamma(x + 1)$ .
2. Si la valeur introduite pour  $x$  est un entier,  $\Gamma(x)$  est évaluée comme factorielle de  $(x-1)$ .
3. Si  $x < 1$ , le programme s'arrête et affiche "ILLEGAL X".

Références :

Handbook of Mathematical Functions, Abramowitz and Stegun, National Bureau of Standards, 1968.

Exemples : Calculer la fonction gamma pour les arguments  
5,25, 8 et 3,34.

Appuyer sur :

Affichage :

[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 001

[XEQ] [ALPHA] GAMMA [ALPHA]

X?

5.25 [R/S]

GAMMA=35.21

[XEQ] [ALPHA] GAMMA [ALPHA]

X?

8 [R/S]

GAMMA=5,040.00

[XEQ] [ALPHA] GAMMA [ALPHA]

X?

3.34 [R/S]

GAMMA=2.80

## USER INSTRUCTIONS

**PROGRAMMABLAUF  
INSTRUCTIONS D'EMPLOI  
NORME OPERATIVE**

[illegible]

## PROGRAM LISTING

PROGRAMMAUFLISTUNG  
LISTAGE DU PROGRAMME  
LISTATO DI PROGRAMMA

Line Zeile Ligne Linea	Keystrokes Tastensequenz Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti	Line Zeile Ligne Linea	Key pressed Tastensequenz Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti
01	*LBL "GAM	Introduire x	44	*	
MA"			45	.9882058	
02	FIX 2		91		
03	"X?"		46	+	
04	PROMPT		47	*	
05	1		48	-.577191	
06	-		652		
07	"ILLEGAL	(x-1) < 0, erreur	49	+	
X"			50	*	
08	X<0?		51	1	
09	PROMPT		52	+	
10	INT		53	RCL 00	
11	LASTX		54	*	
12	X=Y?		55	"GAMMA="	Affichage
13	GTO 16		56	ARCL X	
14	1		57	AVIEW	
15	STO 00		58	STOP	
16	X<>Y		59	*LBL 16	
17	*LBL 09		60	FACT	
18	X<=Y?		61	"GAMMA="	
19	GTO 00	(x-1)(x-2)	62	ARCL X	
20	ST* 00	(x-3)... jus-	63	AVIEW	
21	1	qu'à < 1	64	STOP	
22	-		65	.END.	
23	GTO 09				
24	*LBL 00				
25	ENTER↑	Approx. poly-	75		
26	ENTER↑	nômiale ici			
27	ENTER↑	0 < argument			
28	.0358683	≤ 1			
43					
29	*				
30	-.193527		80		
018					
31	+				
32	*				
33	.4821993				
94			85		
34	+				
35	*				
36	-.756704				
078					
37	+		90		
38	*				
39	.9182068				
57					
40	+				
41	*				
42	-.897056		95		
937					
43	+				
50			101		

[illegible]



## FONCTIONS DE BESSEL, FONCTION D'ERREUR

Le premier sous-programme calcule les fonctions de Bessel  $J_n(x)$  et  $I_n(x)$ ,  $n$  étant un entier positif et  $x > 0$ . Le second calcule la fonction d'erreur et la fonction d'erreur complémentaire pour des arguments positifs.

### Fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel  $J_n(x)$  et  $I_n(x)$  se calculent par une série d'estimations  $T_k$  obtenues à l'aide de relations de récurrence. La récurrence commence à un index  $m$  donné par

$$m = 2 \text{ INT} \left[ \frac{6 + \max(n, z) + \frac{9z}{z+2}}{2} \right]$$

avec  $z = \frac{3x}{2}$ .

Les valeurs initiales choisies pour la récurrence sont :  $T_{m+1} = 10^{-9}$ ,  $T_{m+2} = 0$

Pour les fonctions  $J_n(x)$ , chaque terme  $T_k$  ( $0 \leq k \leq m$ ) est calculé par la relation

$$T_k(x) = \frac{2(k+1)}{x} T_{k+1}(x) - T_{k+2}(x)$$

en partant de  $k = m$

$J_n(x)$  peut alors être calculé en divisant le terme  $T_n(x)$  par la constante de normalisation.

$$K = T_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{m/2} T_{2k}(x).$$

Après avoir calculé  $J_n(x)$ , on peut calculer les valeurs de  $J_0(x)$  et  $J_1(x)$  avec très peu de calculs supplémentaires.

Pour les fonctions  $I_n(x)$ , chaque  $T_k$  est calculé à partir de la relation de récurrence

$$T_k(x) = \frac{2(k+1)}{x} T_{k+1}(x) + T_{k+2}(x),$$

$0 \leq k \leq m$ , en partant de  $k = m$ .

$I_n(x)$  est alors donné par l'équation :

$$I_n(x) = e^x \frac{T_n(x)}{T_0(x) + 2 \sum_{k=1}^n T_k(x)}$$

Fonction d'erreur

La fonction d'erreur est définie par :  $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

et la fonction d'erreur complémentaire par :

$$\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x).$$

Si  $x$  a de grandes valeurs ( $\geq 3$ ), la fonction d'erreur est très proche de 1. Si  $\text{erfc}(x)$  est calculé par  $1 - \text{erf}(x)$ , la plupart des chiffres significatifs de  $\text{erfc}(x)$  sont perdus pour  $x > 3$ . Le programme emploie donc deux algorithmes, un pour  $x \leq 3$  et l'autre pour  $x > 3$ . Pour  $x \leq 3$ , la fonction d'erreur est calculée par une somme de séries.

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)} x^{2n+1}$$

et la fonction d'erreur complémentaire

$$\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x).$$

Pour  $x > 3$ , le programme commence par calculer la fonction d'erreur complémentaire à l'aide du développement asymptotique

$$\text{erfc}(x) = \frac{1}{x \sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2x^2)^n} \right]$$

Puis il calcule la fonction d'erreur à l'aide de l'équation :

$$\text{erf}(x) = 1 - \text{erfc}(x).$$

La précision du calcul de  $\text{erf}(x)$  et  $\text{erfc}(x)$  à partir de sommes de séries peut être contrôlée par l'utilisateur. Pour  $x \leq 3$ , une précision maximale de 9 est dans les limites du raisonnable ; pour  $x > 3$ , la série risque de ne jamais converger avec 9 et il est plus prudent de choisir une précision de 6 chiffres.

Remarque :

1. Le domaine des valeurs  $0 \leq x \leq 10^{-6}$  est trop grand pour les fonctions de Bessel calculées par ce programme. Dans ce domaine, on peut prendre, au contraire :  $J_0(x) = J_0(0) = I_0(x) = I_0(0) = 1$  et  $J_n(x) = J_n(0) = I_n(x) = I_n(0) = 0$   $n \neq 0$ .
2. Le calcul de  $\text{erfc}(x)$  s'arrête sur un dépassement de capacité à  $x \geq 15$ .

Référence : Abramowitz and Stegun, handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, 1968.

Exemples :

1. Calculer  $J_5$  (9.2)
2. Calculer  $J_0$  (9.2)
3. Calculer  $J_1$  (9.2)
4. Calculer  $I_3$  (4.7)
5. Calculer erf et erfc 4.55 sur 6 positions

Appuyez sur

Affichage

[USER]	(mode USER)
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 007	
[XEQ] [ALPHA] INIT [ALPHA]	
[J]	N?
5 [R/S]	X?
1) 9.2 [R/S]	J=-0.1005
2) [R/S]	J0=-0.1367
3) [R/S]	J1=0.2174
[I]	N?
3 [R/S]	X?
4) 4.7 [R/S]	I=7.4195
[E]	ACCURACY?
6 [R/S]	X?
5) 4.55 [R/S]	ERF=1.000000
[R/S]	ERFC=1.237405E-10

## USER INSTRUCTIONS

**PROGRAMMABLAUF  
INSTRUCTIONS D'EMPLOI  
NORME OPERATIVE**

[illegible]

## PROGRAM LISTING

PROGRAMMAUFLISTUNG  
LISTAGE DU PROGRAMME  
LISTATO DI PROGRAMMA

Line Ligne Linea	Keystrokes Tastenfolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti	Line Zeile Linea	Key pressed Tastenfolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti
01	LBL "INI	"INIT"	51	+	
02	CLRG		52	2	
03	RTN		53	+	
04	LBL J		54	STO 06	
05	XEQ a		55	3	
06	SF 00		56	RCL 03	
07	LBL 09		57	/	
08	XEQ b		58	STO 02	
09	CF 02		59	0	
10	ST+ 00		60	STO 05	
11	XEQ b		61	STO 00	
12	FS?C 02		62	E-9	
13	GTO 09		63	STO 04	
14	RCL 03		64	RTN	
15	RCL 00		65	LBL b	Calcul d'un
16	ENTER↑		66	DSE 06	terme - FZ
17	+		67	SF 02	positionné
18	RCL 05		68	RCL 06	sauf pour F=0
19	-		69	RCL 01	
20	/		70	X*Y?	
21	"J="		71	GTO 00	
22	XEQ d		72	RCL 04	
23	GTO C	Introduire	73	STO 03	
24	LBL a	n + x	74	LBL 00	
25	FIX 4		75	RDN	
26	"N?"		76	RCL 05	
27	PROMPT		77	FS? 00	
28	STO 01		78	CHS	
29	"X?"		79	X<>Y	
30	PROMPT		80	RCL 02	
31	1.5		81	*	
32	*	initialisation	82	RCL 04	
33	STO 03	pour Bessel	83	STO 05	
34	RCL 01	(Jn + In)	84	*	
35	X<=Y?		85	+	
36	X<>Y		86	STO 04	
37	6		87	RTN	
38	+		88	LBL C	Calcul de J <sub>0</sub>
39	RCL 03		89	RCL 05	(x) + J <sub>1</sub> (x)
40	9		90	RCL 00	
41	*		91	ENTER↑	
42	RCL 03		92	+	
43	2		93	RCL 05	
44	+		94	-	
45	/		95	/	
46	+		96	"J0="	
47	2		97	XEQ d	
48	/		98	RCL 04	
49	INT		99	CHS	
50	ENTER↑		100	RCL 00	
			101	ENTER↑	
			102	+	

## PROGRAM LISTING

PROGRAMMAUFLISTUNG  
LISTAGE DU PROGRAMME  
LISTATO DI PROGRAMMA

Line Zeile Ligne Linea	Keystrokes Tastensequenz Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti	Line Zeile Ligne Linea	Key pressed Tastensequenz Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti
103	RCL 05		152	X>Y?	
104	-		153	GTO 03	
105	/		154	♦LBL 07	
106	"J1="		155	RCL 02	Boucle pour erf
107	GTO d		156	RCL 03	
108	♦LBL I	"I"	157	2	
109	CF 00		158	+	
110	XEQ a		159	STO 03	
111	♦LBL 08		160	/	
112	ST+ 00		161	RCL 01	
113	XEQ b		162	+	
114	FS?C 02		163	STO 01	
115	GTO 08		164	+	
116	RCL 03		165	X<>Y	
117	RCL 00		166	RND	
118	ENTER↑		167	X<>Y	
119	+		168	RND	
120	RCL 05		169	X=Y?	
121	-		170	GTO 00	
122	/		171	LASTX	
123	2		172	GTO 07	
124	RCL 02		173	♦LBL 00	Sortie de erf
125	/		174	LASTX	
126	E↑X		175	RCL 04	
127	*		176	/	
128	"I="		177	2	
129	GTO d		178	*	
130	♦LBL E		179	1	
131	"ACCURAC	"PRECISION"	180	X<>Y	
Y?"		Calcul de	181	-	
132	PROMPT	l'erreur	182	LASTX	
133	FIX IND		183	GTO 02	
X			184	♦LBL 03	
134	"X?"		185	RCL 02	Calcul de erfc
135	PROMPT		186	1/X	x > 3
136	STO 01		187	STO 02	
137	X↑2		188	RCL 01	
138	STO 04		189	1/X	
139	2		190	STO 01	
140	*		191	♦LBL 06	
141	STO 02		192	RCL 02	Boucle pour
142	1		193	RCL 03	erfc
143	STO 03		194	2	
144	RCL 04		195	-	
145	E↑X		196	STO 03	
146	PI		197	*	
147	SQRT		198	RCL 01	
148	*		199	*	
149	STO 04		200	STO 01	
150	3		201	+	
151	RCL 01		202	X<>Y	
			203	RND	
50			00		

## PROGRAM LISTING

PROGRAMMAUFLISTUNG  
LISTAGE DU PROGRAMME  
LISTATO DI PROGRAMMA

Line Zeile Ligne Linea	Keystrokes Tastenfolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti	Line Zeile Ligne Linea	Key pressed Tastenfolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti
204	X<>Y		51		
205	RND				
206	X=Y?				
207	GTO 00				
208	LASTX		55		
209	GTO 06				
210	♦LBL 00				
211	LASTX				
212	RCL 04	erfc(x)			
213	/				
214	1		60		
215	X<>Y				
216	-				
217	LASTX	erfc(x)			
218	X<>Y				
219	♦LBL 02		65		
220	"ERF="				
221	XEQ d				
222	X<>Y				
223	"ERFC="				
224	♦LBL d	affichage			
225	ARCL X		70		
226	AVIEW				
227	STOP				
228	.END.				
25			75		
30			80		
35			85		
40			90		
45			95		
50			100		

Registers				Status			
Datenspeicher Registres de données Registri				Betriebsart Modes opératoires Modi operativi			
00	$\Sigma T_k$	50		Size 007		Total Reg. 53	User Mode
	n; terme de erf			Eng <input type="checkbox"/>	Fix 09	Sci <input type="checkbox"/>	On <input checked="" type="checkbox"/>
	2/x			Deg <input type="checkbox"/>	Rad <input type="checkbox"/>	Grad <input type="checkbox"/>	Off <input type="checkbox"/>
	1.5x, Tn			<b>Purpose</b> Bedeutung Signification Scopo			
	$T_k; (e^{x2\sqrt{\pi}})^{-1}$						
05	Tk+1	55		<b>Flags</b> SET CLEAR			
	K ; positions						
				00			
				01			
				02			
10		60		03			
				04			
				05			
				06			
				07			
15		65		08			
				09			
				10			
				11	Audio execute		
				12			
20		70		13			
				14			
				15			
				16			
				17			
25		75		18			
				19			
				20			
				21	Printer Enable		
				22	Number Input		
30		80		23	Alpha Input		
				24	Range Ignore		
				25	Error Ignore		
				26	Audio Enable		
				27	User Mode		
35		85		28	Decimal Point		
				29	Digit Grouping		
				<b>Assignments</b> Tastenbelegung / Assignations / Assegnamenti			
40		90		Function	Key	Function	Key
				Funktion	Taste	Funktion	Taste
				Funzione	Touche	Funzione	Touche
					Tasto		Tasto
45		95					
		99					



## EQUATION CARACTERISTIQUE D'UNE MATRICE 4 X 4

( CE PROGRAMME DEMANDE UN MODULE MEMOIRE SUPPLEMENTAIRE)

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique est  $\lambda^4 + r_1\lambda^3 + r_2\lambda^2 + r_3\lambda + r_4 = 0$ 

avec

$$r_1 = -(a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16})$$

$$r_2 = (a_1 + a_{11})a_6 + (a_1 + a_{16})a_{11} + (a_1 + a_6)a_{16} - a_8a_{14} - a_{12}a_{15} - a_7a_{10} - a_2a_5 - a_3a_4 - a_4a_{13}$$

$$r_3 = -\det(A_1) - a_1(a_6a_{11} + a_6a_{16} + a_{11}a_{16} - a_8a_{14} - a_{12}a_{15} - a_7a_{10}) + a_2[a_5(a_{11} + a_{16}) -$$

$$a_8a_{13} - a_7a_9] - a_3[-a_9(a_6 + a_{16}) + a_5a_{10} + a_{12}a_{13}] + a_4[a_{13}(a_6 + a_{11}) - a_9a_{15} - a_5a_{14}]$$

$$r_4 = a_1\det(A_1) - a_2\det(A_2) + a_3\det(A_3) - a_4\det(A_4)$$

et

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_6 & a_7 & a_8 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_5 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{15} & a_{16} \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_5 & a_6 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{16} \end{pmatrix}$$

et

$$A_4 = \begin{pmatrix} a_5 & a_6 & a_7 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{pmatrix}$$

NOTA : Analysez (A) -  $-r_1 \det(A) = -r_4$ 

Exemples : Calculez l'équation caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \left( \text{réponse : } \lambda^4 - \lambda^3 + 7\lambda + 2 = 0 \right)$$

Appuyer sur :

Affichage :

[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 026

[XEQ] [ALPHA] CEM [ALPHA]

A1?

1 [R/S]

A2?

0 [R/S]

A3?

1 [R/S]

A4?

0 [R/S]

A5?

1 [R/S]

A6?

0 [R/S]

A7?

2 [R/S]

A8?

1 [CHS] [R/S]

A9?

3 [R/S]

A10?

1 [CHS] [R/S]

A11?

0 [R/S]

A12?

2 [R/S]

A13?

2 [CHS] [R/S]

A14?

1 [CHS] [R/S]

A15?

1 [CHS] [R/S]

A16?

0 [R/S]

R1=-1.000

[R/S]

R2=0.000

[R/S]

R3=7.000

[R/S]

R4=2.000

## USER INSTRUCTIONS

## PROGRAMMABLAUF

## INSTRUCTIONS D'EMPLOI

## NORME OPERATIVE

[illegible]

## PROGRAM LISTING

PROGRAMMAUFLISTUNG  
LISTAGE DU PROGRAMME  
LISTATO DI PROGRAMMA

Line Zeile Ligne Linea	Keystrokes Tastentolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti	Line Zeile Ligne Linea	Key pressed Tastentolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti
01	LBL 00	Calcul du dé-	50	1	
02	RCL 05	terminant de :	51	ST- 25	
03	RCL 09		52	RCL 10	
04	*		53	STO 00	
05	RCL 06	$R_1 \quad R_2 \quad R_3$	54	RCL 15	
06	RCL 08	$R_4 \quad R_5 \quad R_6$	55	+	
07	*		56	RCL 20	
08	-		57	+	
09	RCL 01	$R_7 \quad R_8 \quad R_9$	58	RCL 25	
10	*		59	+	
11	RCL 06		60	CHS	
12	RCL 07		61	"R1="	Affichage de
13	*		62	XEQ d	r1
14	RCL 04		63	RCL 10	
15	RCL 09		64	RCL 20	
16	*		65	+	
17	-		66	RCL 15	
18	RCL 02		67	*	
19	*		68	RCL 10	
20	+		69	RCL 25	
21	RCL 04		70	+	
22	RCL 08		71	RCL 20	
23	*		72	*	
24	RCL 05		73	+	
25	RCL 07		74	RCL 10	
26	*		75	RCL 15	
27	-		76	+	
28	RCL 03		77	RCL 25	
29	*		78	*	
30	+		79	+	
31	RTN		80	RCL 17	
32	LBL "CEM"	Initialisation	81	RCL 23	
		et chargement	82	*	
		de la matrice	83	-	
33	10.025		84	RCL 21	
34	STO 25		85	RCL 24	
35	LBL 01		86	*	
36	RCL 25		87	-	
37	9.025		88	RCL 16	
38	-		89	RCL 19	
39	CF 29		90	*	
40	FIX 0		91	-	
41	"A"		92	RCL 11	
42	ARCL X		93	RCL 14	
43	"F?"		94	*	
44	PROMPT		95	-	
45	STO IND		96	RCL 12	
25			97	RCL 18	
46	ISG 25		98	*	
47	GTO 01		99	-	
48	SF 29		100	RCL 13	
49	FIX 3		101	RCL 22	
50					

Line Zeil Ligne	Keystrokes Tastentolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti	Line Zeil Ligne	Key pressed Tastentolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti
102	*		153	+	
103	-		154	RCL 14	
104	"R2="		155	*	
105	XEQ d		156	RCL 17	
106	RCL 15		157	RCL 21	
107	STO 01		158	*	
108	RCL 16	Affichage de	159	-	
109	STO 02	r <sub>2</sub>	160	RCL 16	
110	RCL 17		161	RCL 18	
111	STO 03		162	*	
112	RCL 19		163	-	
113	STO 04		164	RCL 11	
114	RCL 20		165	*	
115	STO 05		166	+	
116	RCL 21		167	RCL 15	
117	STO 06		168	RCL 25	
118	RCL 23		169	+	
119	STO 07		170	RCL 18	
120	RCL 24		171	*	
121	STO 08		172	RCL 19	
122	RCL 25		173	RCL 14	
123	STO 09		174	*	
124	XEQ 00		175	-	
125	ST* 00		176	RCL 21	
126	CHS		177	RCL 22	
127	RCL 25		178	*	
128	RCL 20		179	-	
129	+		180	RCL 12	
130	RCL 20		181	*	
131	*		182	+	
132	RCL 20		183	RCL 15	
133	RCL 25		184	RCL 20	
134	*		185	+	
135	+		186	RCL 22	
136	RCL 17		187	*	
137	RCL 23		188	RCL 18	
138	*		189	RCL 24	
139	-		190	*	
140	RCL 21		191	-	
141	RCL 24		192	RCL 14	
142	*		193	RCL 23	
143	-		194	*	
144	RCL 16		195	-	
145	RCL 19		196	RCL 13	
146	*		197	*	
147	-		198	+	
148	RCL 10		199	"R3="	
149	*		200	XEQ d	Affichage de
150	-		201	RCL 14	r <sub>3</sub>
151	RCL 20		202	STO 01	
152	RCL 25		203	RCL 18	

## PROGRAM LISTING

PROGRAMMAUFLISTUNG

LISTAGE DU PROGRAMME

LISTATO DI PROGRAMMA

Line Zeile Ligne Linea	Keystrokes Tastenfolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti	Line Zeile Ligne Linea	Key pressed Tastenfolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti
204	STO 04		51		
205	RCL 22				
206	STO 07				
207	XEQ 00				
208	RCL 11		55		
209	*				
210	ST- 00				
211	RCL 15				
212	STO 02				
213	RCL 19				
214	STO 05		60		
215	RCL 23				
216	STO 08				
217	XEQ 00				
218	RCL 12				
219	*		65		
220	ST+ 00				
221	RCL 16				
222	STO 03				
223	RCL 20				
224	STO 06				
225	RCL 24		70		
226	STO 09				
227	XEQ 00				
228	RCL 13				
229	*				
230	ST- 00		75		
231	RCL 00				
232	"R4="	Affichage de r <sub>4</sub>			
233	LBL d				
234	ARCL X				
235	AVIEW				
236	STOP		80		
237	RTN				
238	.END.				
35			85		
40			90		
45			95		
50			00		



## OPERATIONS SUR UNE MATRICE 4 x 4

( CE PROGRAMME DEMANDE UN MODULE DE MEMOIRE SUPPLEMENTAIRE)

Ce programme permet de calculer le déterminant et l'inverse d'une matrice 4 x 4 et de résoudre un système d'équations simultanées à 4 inconnues.

La méthode utilisée dans ce programme est celle d'une élimination gaussienne avec un pivotage partiel. Faute de place, les équations intervenant dans cette opération ne pourront pas être traitées en détail ici, cependant, chaque étape du calcul est indiquée dans la partie Commentaires du listage du programme.

En résumé, le programme permet d'introduire la matrice A et de transformer A en une matrice triangulaire supérieure U en supposant que A soit non singulière. Les multiplicateurs utilisés pour cette transformation forment une matrice triangulaire inférieure, L, qui a des 1 le long de sa diagonale. Si nous faisons abstraction du pivotage (technique de permutation de lignes qui peut améliorer la précision et introduire une ou plusieurs matrices de permutation), la relation entre ces matrices est  $U = LA$ . La matrice originale est perdue. Les éléments initiaux  $a_{ij}$  ont été remplacés par les éléments de U ( $i \leq j$ ) et de L ( $i > j$ ). (Les éléments de U continueront à être appelés  $a_{ij}$ , tandis que ceux de L seront appelés  $m_{ij}$  dans les commentaires du listage du programme). La deuxième partie du programme utilise les matrices transformées U et L pour calculer le déterminant et l'inverse de A et pour résoudre les systèmes d'équations simultanées.

équations

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} a_1 & a_5 & a_9 & a_{13} \\ a_2 & a_6 & a_{10} & a_{14} \\ a_3 & a_7 & a_{11} & a_{15} \\ a_4 & a_8 & a_{12} & a_{16} \end{bmatrix} \text{ en entrée et } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Pour les calculs

Le déterminant de A, Det A, est donné, après sa transformation en U, par le produit des éléments de la diagonale :

$$\text{Det } A = (-1)^k a_{11} a_{22} a_{33} a_{44},$$

k étant le nombre de permutations de lignes imposé par le pivotage.



Un ensemble de 4 équations simultanées à 4 inconnues peut s'écrire comme suit :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4$$

$\{x_i\}$  étant les inconnues et  $\{b_i\}$  les constantes.

En notation matricielle, on obtient  $Ax = b$ ,  $x$  et  $b$  étant respectivement les vecteurs colonne

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Le problème est résolu (sans pivotage) puisque  $Ux = Lb$ .

Soit  $C$  l'inverse de  $A$ , c.à.d. la matrice  $4 \times 4$ , de telle sorte que  $AC = CA = I$ , où  $I$  est la matrice identité  $4 \times 4$ .

$C$  est calculé colonne par colonne de la manière suivante :

Soit  $c^{(j)}$  le  $j^{\text{ème}}$  vecteur colonne de  $C$ . On a :

$$c^{(j)} = \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ c_{3j} \\ c_{4j} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

$c^{(j)}$  est donné par la solution de l'équation :

$$Ac^{(j)} = I^{(j)}$$

Par exemple,  $c^{(1)}$  est donné par la solution de

$$A c^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si les opérations doivent être effectuées sur la même matrice pendant une certaine période de temps, il pourrait être utile d'enregistrer les éléments de la matrice sur une carte magnétique afin de pouvoir les réintroduire rapidement plus tard.

#### Références :

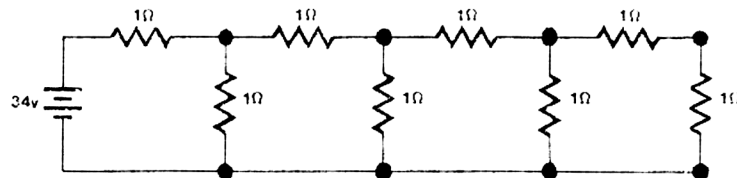
George E. Forsythe, Michael A. Malcolm, and Cleve B. Moler, computer Methods in Mathematical Computation, Computer Science Department, Stanford University 1972.

G. Forsythe and C. Moler, Computer Solution of Linear Algebraic Systems, Prentice-Hall, 1967.

C. Moler, "Matrix Computations with Fortran and Paging", Comm, ACM, vol. 15, no. 4 pages 268 à 270 (avril 1972).

#### Exemple 1 :

En appliquant la technique des boucles de courants au circuit suivant, calculer  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  et  $I_4$ .



Les équations à résoudre sont :

$$\begin{array}{rrcrcl} 2I_1 & -I_2 & & & = & 34 \\ -I_1 & +3I_2 & -I_3 & & = & 0 \\ & -I_2 & +3I_3 & -I_4 & = & 0 \\ & & -I_3 & +3I_4 & = & 0 \end{array}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Appuyer sur :

Affichage :

[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 026

[XEQ] [ALPHA] 4\*4 [ALPHA]

A1?

2 [R/S]

A2?

1 [CHS] [R/S]

A3?

0 [R/S]

A4?

0 [R/S]

A5?

1 [CHS] [R/S]

A6?

3 [R/S]

A7?

1 [CHS] [R/S]

A8?

0 [R/S]

A9?

0 [R/S]

A10?

1 [CHS] [R/S]

A11?

3 [R/S]

A12?

1 [CHS] [R/S]

A13?

0 [R/S]

A14?

0 [R/S]

A15?

1 [CHS] [R/S]

A16?

3 [R/S]

20

[R/S]

2.62

[XEQ] [ALPHA] SYS [ALPHA]

b1?

34 [R/S]

b2?

0 [R/S]

b3?

0 [R/S]

b4?

0 [R/S]

21.00 ( $I_1$ )

Appuyer sur :

Affichage :

[R/S]	8.00	(I <sub>2</sub> )
[R/S]	3.00	(I <sub>3</sub> )
[R/S]	1.00	(I <sub>4</sub> )

Exemple 2 :

Calculez le déterminant et l'inverse de la matrice 4x4 dans le problème précédent.

Suite du programme précédent :

[XEQ] [ALPHA] DET [ALPHA]	DET=34.00
[XEQ] [ALPHA] INV [ALPHA]	0.62 c <sub>1</sub>
[R/S]	0.24 c <sub>2</sub>
[R/S]	0.09 c <sub>3</sub>
[R/S]	0.03 c <sub>4</sub>
[R/S]	0.24 c <sub>5</sub>
[R/S]	0.47 c <sub>6</sub>
[R/S]	0.18 c <sub>7</sub>
[R/S]	0.06 c <sub>8</sub>
[R/S]	0.09 c <sub>9</sub>
[R/S]	0.18 c <sub>10</sub>
[R/S]	0.44 c <sub>11</sub>
[R/S]	0.15 c <sub>12</sub>
[R/S]	0.03 c <sub>13</sub>
[R/S]	0.06 c <sub>14</sub>
[R/S]	0.15 c <sub>15</sub>
[R/S]	0.38 c <sub>16</sub>

## USER INSTRUCTIONS

**PROGRAMMABLAUF  
INSTRUCTIONS D'EMPLOI  
NORME OPERATIVE**

[illegible]

## PROGRAM LISTING

PROGRAMMAUFLISTUNG

LISTAGE DU PROGRAMME

LISTATO DI PROGRAMMA

Line Zeile Ligne Linea	Keystrokes Tastentolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti	Line Zeile Ligne Linea	Key pressed Tastentolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti
01♦	LBL "4*4"	Initialisation	50	XEQ c	Permutation
"		et mémorisation	51	2	de la ligne n
02	FIX 0	de la matrice	52	XEQ c	avec la ligne
03	CF 29	$a_{11} a_{12} a_{13} a_{14}$	53	3	1
04	4		54	XEQ c	
05	STO 00	$a_{21} a_{22} a_{23} a_{24}$	55	4	Mémorisation
06♦	LBL A	$a_{31} a_{32} a_{33} a_{34}$	56	XEQ c	du multiplica-
07	1	$a_{41} a_{42} a_{43} a_{44}$	57♦	LBL 00	teur
08	ST+ 00		58	RCL 05	
09	"A"		59	CHS	$M_{j+1} = \frac{-a_{15}}{a_{11}}$
10	RCL 00		60	ST/ 06	
11	4		61	ST/ 07	
12	-		62	ST/ 08	
13	ARCL X		63	9	
14	"F?"		64	STO 25	
15	PROMPT		65	XEQ d	
16	STO IND		66	XEQ d	
00			67	XEQ d	Commencement
17	RCL 00		68	2	de 3x3. Re-
18	20		69	STO 21	cherche pivot,
19	X=Y?		70	STO 23	colonne 2
20	GTO A		71	RCL 10	
21	STOP		72	ABS	
22♦	LBL "GO"	Lancement du	73	STO 22	
23	CLD	programme.	74	3	
24	FIX 2	Nota : le pi-	75	RCL 11	
25	SF 29	vot est l'élé-	76	XEQ D	
26	0	ment ayant la	77	4	
27	STO 00	valeur absolue	78	RCL 12	
28	1	la plus grande	79	XEQ D	
29	STO 21	dans la colon-	80	2	Si n=2, aucune
30	STO 23	ne	81	RCL 21	permutation
31	STO 24		82	X=Y?	
32	RCL 05	$n \leftarrow k \leftarrow 1$	83	GTO 00	
33	ABS	recherche du	84	10	
34	STO 22	pivot, colonne	85	*	
35	2	1	86	XEQ b	
36	RCL 06		87	2	Permutation de
37	XEQ D		88	XEQ c	la ligne n
38	3		89	3	avec la ligne
39	RCL 07		90	XEQ c	2
40	XEQ D		91	4	
41	4		92	XEQ c	
42	RCL 08		93♦	LBL 00	
43	XEQ D		94	RCL 10	
44	1		95	CHS	Mémorisation
45	RCL 21		96	ST/ 11	du multiplica-
46	X=Y?	Si n=1, aucune	97	ST/ 12	teur
47	GTO 00	permutation de	98	RCL 11	
48	XEQ b	ligne	99	RCL 14	
49	1		100	*	

## PROGRAM LISTING

PROGRAMMAUFLISTUNG

LISTAGE DU PROGRAMME

LISTATO DI PROGRAMMA

Line Ligne Linea	Keystrokes Tastensequenz Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti	Line Zeile Linea	Key pressed Tastensequenz Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti
101	ST+ 15	Ajustement des	152	RDN	
102	RCL 12	éléments res-	153	STO 21	
103	RCL 14	tants à l'aide	154	RTN	
104	*	de multiplica-	155	LBL b	
105	ST+ 16	teurs	156	ST+ 00	
106	RCL 11		157	RCL 24	
107	RCL 10		158	CHS	
108	*		159	STO 24	
109	ST+ 19		160	RTN	
110	RCL 12		161	LBL c	
111	RCL 10		162	STO 20	
112	*		163	RCL 23	
113	RCL 20		164	RCL 22	
114	+		165	XEQ E	
115	STO 20		166	RCL 21	
116	RCL 15	Début de 2 x 2	167	RCL 22	
117	ABS		168	XEQ E	
118	RCL 16	si a <sub>23</sub> < a <sub>33</sub>	169	X<>Y	
119	ABS		170	STO IND	
120	X<=Y?		25		
121	GTO 00	aucune permu-	171	X<>Y	
122	RCL 15	tation n'a	172	RCL 23	
123	RCL 16	lieu	173	RCL 22	
124	STO 15	permutation	174	4	
125	X<>Y		175	*	
126	STO 16		176	+	
127	RCL 19		177	STO 25	
128	RCL 20		178	RDN	
129	STO 19		179	STO IND	
130	X<>Y		25		
131	STO 20		180	RTN	
132	.4	Incrémentation	181	LBL E	
133	XEQ b	de R <sub>00</sub> par 0,4	182	4	
134	LBL 00		183	*	
135	RCL 15		184	+	i étant dans Y
136	CHS		185	STO 25	ij dans X ra-
137	ST/ 16		186	CLX	pelle Aij
138	RCL 19		187	RCL IND	
139	RCL 16		25		
140	*		188	RTN	
141	RCL 20		189	LBL d	
142	+		190	RCL IND	Sert à ajouter
143	STO 20		25		chaque colonne
144	STOP		191	STO 21	de la sous-ma-
145	LBL D	Sert à trouver	192	ISG 25	trice 3 x 3 à
146	ABS	les pivots.	193	"A"	l'aide de mul-
147	RCL 22	R <sub>22</sub> contient	194	RCL 06	tiplicateurs
148	X>Y?	le plus grand	195	XEQ e	dans R <sub>06</sub> , R <sub>07</sub>
149	RTN	élément trouvé	196	RCL 07	
150	RDN	dans la colon-	197	XEQ e	R <sub>08</sub> .
151	STO 22	ne, le signe	198	RCL 08	
		est ignoré.	199	XEQ e	

## PROGRAM LISTING

PROGRAMMAUFLISTUNG  
LISTAGE DU PROGRAMME  
LISTATO DI PROGRAMMA

Line Zeile Ligne Linea	Keystrokes Tastensequenz Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti	Line Zeile Ligne Linea	Key pressed Tastensequenz Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti
200	RTN		25		
201	♦LBL €		248	RCL 01	
202	RCL 21		249	STO IND	
203	*		25		
204	ST+ IND		250	X<>Y	
25			251	STO 01	
205	ISG 25		252	♦LBL 00	
206	RTN		253	RCL 01	
207	RTN		254	RCL 06	
208	♦LBL "DET	Recherche du	255	*	
"		déterminant	256	ST+ 02	
209	RCL 24		257	RCL 01	
210	RCL 05		258	RCL 07	
211	*		259	*	
212	RCL 10		260	ST+ 03	
213	*		261	RCL 01	
214	RCL 15		262	RCL 08	
215	*		263	*	
216	RCL 20		264	ST+ 04	
217	*		265	RCL 00	
218	"DET="		266	RCL 23	Début k = 2
219	ARCL X		267	/	
220	AVIEW		268	INT	
221	STOP		269	X=0?	n=0, pas de
222	♦LBL "SYS	Résolution	270	GTO 00	permutation
"		d'un système	271	STO 25	
223	"b1?"	4 x 4	272	RCL IND	
224	PROMPT		25		
225	STO 01		273	RCL 02	
226	"b2?"	Introduire b	274	STO IND	
227	PROMPT		25		
228	STO 02		275	X<>Y	
229	"b3?"		276	STO 02	
230	PROMPT		277	♦LBL 00	
231	STO 03		278	RCL 12	
232	"b4?"		279	RCL 11	
233	PROMPT		280	RCL 02	
234	STO 04		281	*	
235	♦LBL a		282	ST+ 03	
236	RCL 00		283	CLX	
237	10		284	RCL 02	
238	STO 23		285	*	
239	/		286	ST+ 04	
240	FRC		287	RCL 00	
241	RCL 23		288	FRC	
242	*		289	RCL 23	Début k = 3
243	INT	Si n=0, pas de	290	*	
244	X=0?	permutation	291	X=0?	
245	GTO 00		292	GTO 00	
246	STO 25		293	STO 25	
247	RCL IND		294	RCL IND	
			25		
50			00		



## PROGRAM LISTING

PROGRAMMAUFLISTUNG  
LISTAGE DU PROGRAMME  
LISTATO DI PROGRAMMA

Line Ligne Linia	Keystrokes Tastenfolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti	Line Zeile Ligne Linia	Key pressed Tastenfolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti
295	RCL 03		345	CHS	
296	STO IND		346	*	
297	X<>Y		347	ST+ 01	
298	STO 03		348	RCL 05	
299	♦LBL 00		349	ST/ 01	
300	RCL 16		350	RCL 01	
301	RCL 03		351	STOP	
302	*		352	RCL 02	Affichage des
303	ST+ 04		353	STOP	valeurs
304	RCL 20		354	RCL 03	
305	ST/ 04	Résolution de	355	STOP	
306	RCL 04	$u_x = L_b$	356	RCL 04	
307	CHS		357	STOP	
308	STO 21		358	RTN	
309	RCL 15		359	♦LBL "INV	
310	STO 22		"		Inverse
311	RCL 19		360	XEQ c	
312	RCL 18		361	1	
313	RCL 17		362	STO 01	
314	RCL 21		363	XEQ a	
315	*		364	XEQ c	
316	ST+ 01		365	1	
317	CLX		366	STO 02	
318	RCL 21		367	XEQ a	
319	*		368	XEQ c	
320	ST+ 02		369	1	
321	CLX		370	STO 03	
322	RCL 21		371	XEQ a	
323	*		372	XEQ c	
324	ST+ 03		373	1	
325	RCL 22		374	STO 04	
326	ST/ 03		375	XEQ a	
327	RCL 03		376	CLX	
328	CHS		377	RTN	
329	STO 21		378	♦LBL c	
330	RCL 10		379	CLX	
331	STO 22		380	STO 01	
332	RCL 14		381	STO 02	
333	RCL 13		382	STO 03	
334	RCL 21		383	STO 04	
335	*		384	RTN	
336	ST+ 01		385	♦LBL "REV	
337	CLX		"		
338	RCL 21		386	5	Examen de la
339	*		387	STO 00	matrice
340	ST+ 02		388	♦LBL F	
341	RCL 22		389	RCL 00	
342	ST/ 02		390	4	
343	RCL 09		391	-	
344	RCL 02		392	"A"	
			393	FIX 0	

## PROGRAM LISTING

PROGRAMMAUFLISTUNG  
LISTAGE DU PROGRAMME  
LISTATO DI PROGRAMMA

Line Zeile Ligne Linea	Keystrokes Tastentolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti	Line Zeile Ligne Linea	Key pressed Tastentolge Touches Tasti	Comments Kommentar Commentaires Commenti
394	CF 29		51		
395	ARCL X				
396	"I="				
397	SF 29				
398	FIX 2		55		
399	ARCL IND				
400	AVIEW				
401	PSE				
402	1				
403	ST+ 00		60		
404	21				
405	RCL 00				
406	X=Y?				
407	GTO "GO"				
408	GTO F		65		
409	.END.				
20			70		
25			75		
30			80		
35			85		
40			90		
45			95		
50			100		



