



Lösung von Differentialgleichungen mit programmierbaren Taschenrechnern

Verfahren für gewöhnliche
und partielle Differentialgleichungen

Von Prof. Dr.-Ing. Gerhard Venz

2. verbesserte und erweiterte Auflage

Mit 46 Abbildungen
und 20 Programmablaufplänen

R. Oldenbourg Verlag München Wien 1980

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Venz, Gerhard:

Lösung von Differentialgleichungen mit
programmierbaren Taschenrechnern : Verfahren
für gewönl. u. partielle Differentialgleichungen
/ von Gerhard Venz. – 2., verb. u. erw. Aufl. –
München, Wien : Oldenbourg, 1980.

ISBN 3-486-21792-5

© 1980 R. Oldenbourg Verlag GmbH, München

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege sowie der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben auch bei auszugsweiser Verwertung vorbehalten. Werden mit schriftlicher Einwilligung des Verlages einzelne Vervielfältigungsstücke für gewerbliche Zwecke hergestellt, ist an den Verlag die nach § 54 Abs. 2 Urh.G. zu zahlende Vergütung zu entrichten, über deren Höhe der Verlag Auskunft gibt.

Gesamtherstellung: Hofmann KG, Augsburg

ISBN 3-486-21792-5

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	7
Einleitung	9
Teil A Gewöhnliche Differentialgleichungen	11
1. Differentialgleichungen mit Anfangswerten	13
1.1 Differentialgleichungen erster Ordnung	13
1.1.1 Beispiel. Oberfläche von Flüssigkeitsströmung	18
1.1.2 Schrittsteuerung und Korrektur	21
1.1.3 Beispiel. Einschalten einer Spule mit Eisenkern	23
1.2 Gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung, Differentialgleichungen zweiter Ordnung.	26
1.2.1 Problemstellung und Lösungsweg	26
1.2.2 Beispiel. Einschalten eines Gleichstrom-Motors mit Ankerrückwirkung	32
1.3 Gekoppelte Differentialgleichung zweiter Ordnung, Differentialgleichung vierter Ordnung	36
1.3.1 Problemstellung und Lösungsweg	36
1.3.2 Beispiel. Wasserspiele	38
2. Differentialgleichungen mit Randwerten	43
2.1 Einführung	43
2.2 Differentialgleichung zweiter Ordnung	44
2.3 Beispiel. Seil mit Schneelast	47
2.4 Differentialgleichung vierter Ordnung	51
2.5 Beispiel. Belasteter Balken auf elastischer Unterlage	56
3. Differentialgleichungen mit Eigenwerten	60
3.1 Einführung	60
3.2 Differentialgleichung zweiter Ordnung	61
3.3 Beispiel. Schwingende Saite veränderlicher Stärke	63
3.4 Differentialgleichung vierter Ordnung	66
3.5 Beispiel. Knickung eines Stabes unter seinem Eigengewicht	70

Teil B Partielle Differentialgleichungen	73
4. Einführung, Gitterpunktmethode	75
5. Wärmeleitung	79
5.1 Problemstellung und Lösungsweg	79
5.2 Beispiel. Erwärmung der Bremsstrommel eines Pkw beim Anhalten . .	82
6. Wellengleichung	87
6.1 Problemstellung und Lösungsweg	87
6.2 Beispiel. Träger mit Rammbar, Kompressionswelle	91
7. Telegraphengleichung, Wanderwelle	96
7.1 Problemstellung und Lösungsweg	96
7.2 Beispiel. Speisung einer am Ende offenen Leitung über eine Induktivität	102
8. Stromverdrängung, Skineffekt	107
8.1 Problemstellung und Lösungsweg	107
8.2 Übergang auf Polarkoordinaten	109
8.3 Beispiel. Stromverdrängung in runden Drähten bei nichtsinusförmiger Spannung	115
9. Wanderwelle mit Stromverdrängung	120
9.1 Problemstellung und Lösungsweg	120
9.2 Beispiel. Einfluß der Stromverdrängung auf das Beispiel 7.2	126
10. Membranschwingung	129
10.1 Problemstellung und Lösungsweg	129
10.2 Übergang auf Polarkoordinaten	132
10.3 Beispiel. Schwingung einer quadratischen Membran	134
11. Poissonsche- und Potentialgleichung	138
11.1 Problemstellung und Lösungsweg	138
11.2 Beispiel. Temperaturverteilung in einem Wohnraum im Winter	142
12. Das Rechteckgitter mit beliebig geformten Rändern	145
12.1 Problemstellung und Lösungsweg	145
12.2 Beispiel. Biegung und Schwingung einer elliptischen Membran	148
Literaturverzeichnis	154
Stichwortverzeichnis	155

Vorwort

Kaum ein technisches Gerät hat sich so explosionsartig entwickelt wie der elektronische Taschenrechner. Innerhalb von fünf Jahren wuchs er von einem Investitionsgut für einen kleinen Kreis von Spezialisten zu einem Massenprodukt heran, das, in Kaufhäusern angeboten, einen völlig neuen und bisher unbekanntem Markt bedient. Doch ihre volle Ausnutzung und Bedeutung erlangen diese Geräte erst durch die Kenntnis der zugehörigen numerischen Verfahren. Nur langsam folgt hier die notwendige Literatur der all-zuraschen Entwicklung. So versucht dieses Buch, eine Lücke kurzfristig zu schließen. Dabei stellte sich die reizvolle Aufgabe, eine Brücke über mehrere Jahrhunderte hinweg zu schlagen, zwischen alten, sehr einfachen Rechensystemen und der neuen, elektronischen Rechentechnik.

Das Buch richtet sich an Schüler der gymnasialen Oberstufe, an Lehrende, Lernende und Praktizierende der Mathematik, Physik und Ingenieurwissenschaften und möchte bei der Lösung ihrer Probleme helfen. Deshalb wechselt bei den Zahlenbeispielen Bekanntes mit weniger Bekanntem und Neuem ab. Die Beispiele wurden auf einem Taschenrechner HP 67 der Firma Hewlett Packard gerechnet. Die Konzeption dieses Rechners eignet sich besonders zur Lösung partieller Differentialgleichungen.

Um den Text durch theoretische Erörterungen nicht zu belasten, wurden die wichtigsten mathematischen Existenzbedingungen - z.B. Lipschitzbedingung - stillschweigend vorausgesetzt. Dem Verlag danke ich für seine freundliche Hilfe bei der Arbeit an diesem Buch.

Bremen, im Frühjahr 1978

Gerhard Venz

Vorwort zur zweiten Auflage

Die freundliche Aufnahme, die dieses Buch gefunden hat, macht eine Neuauflage nach kurzer Zeit notwendig. Hierdurch bot sich die Gelegenheit, sowohl die festgestellten Druckfehler zu berichtigen als auch, bei Differentialgleichungen vierter Ordnung, die Programme mit kleinen Änderungen zu verbessern. Schließlich wurde mit dem Anfügen des 12. Kapitels dem Buch ein umfassenderer und abgeschlossener Charakter gegeben. Anlässlich dieser Neuauflage möchte ich dem Verlag für erfreuliche Zusammenarbeit und für das Eingehen auf meine Wünsche danken.

Bremen, im Dezember 1979

Einleitung

Differentialgleichungen sind bei der mathematischen Beschreibung von Naturvorgängen die wohl am häufigsten anzutreffende Gleichungsform, weil sich die physikalischen Gesetze am deutlichsten in ihnen ausdrücken lassen. So wird z.B. das Einschalten einer Spule mit der Induktivität L über einen Widerstand R durch die Differentialgleichung

$$u = i \cdot R + L \frac{di}{dt}$$

beschrieben. Um so erfolgreicher sträuben sich aber Differentialgleichungen gegen ihre formelmäßige Auflösung. Ja, das Auffinden einer analytischen Lösung mit Hilfe bekannter Funktionen, wie x^n , $\ln x$ oder $\sin x$, gehört zu den seltenen Ausnahmen. Hier helfen nur zeichnerische oder numerische Näherungslösungen weiter, wobei den numerischen Verfahren der Vorzug zu geben ist, wegen ihrer Vielseitigkeit und weil die Lösung der Differentialgleichung mit gewünschter Genauigkeit angegeben werden kann.

Die numerischen Verfahren beinhalten aber einen großen Rechenaufwand. Erst durch die Erstellung von Rechenautomaten, mit der Möglichkeit, sehr viele Rechenoperationen in kürzester Zeit auszuführen, wurden die numerischen Verfahren für den Praktiker interessant. Mit der Weiterentwicklung zu programmierbaren Rechnern im Taschenformat eröffnet sich nunmehr dem Interessierten die Möglichkeit, diesen reizvollen Zweig der Naturbeschreibung durch

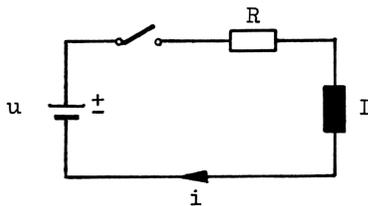


Abb. 1 Einschalten einer Spule

die Lösung vorliegender Differentialgleichungen auch außerhalb von Rechenzentren kennenzulernen.

Man unterscheidet gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen kommen nur Ableitungen (Differentialquotienten) nach einer Veränderlichen vor, z.B. der Zeit t oder einer Auslenkung x . Bei partiellen Differentialgleichungen finden sich dagegen Ableitungen nach mehreren Veränderlichen. Für beide Arten werden numerische Verfahren beschrieben, die sich für programmierbare Taschenrechner mit ihrer beschränkten Anzahl von Speicherplätzen besonders gut eignen. Die untere Grenze des notwendigen Programmierumfangs liegt bei etwa 250 Programmschritten (ROM Read Only Memory) und 25 Datenspeichern (RAM Random Access Memory); außerdem müssen indirektes Adressieren, Programmverzweigungen (Decision) nach Vergleichsoperationen und Unterprogramme (Subroutine) möglich sein.

Teil A

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Differentialgleichungen mit Anfangswerten

1.1 Differentialgleichungen erster Ordnung

Eine Differentialgleichung erster Ordnung ist eine Gleichung zwischen den Veränderlichen x und y und der ersten Ableitung y' nach x . Sie sei umstellbar in die explizite Form

$$y' = f(x,y) .$$

Gesucht wird die Kurve $y(x)$, die die Differentialgleichung erfüllt und durch einen vorgegebenen Anfangspunkt x_0, y_0 geht. Diese Kurve soll punktweise, jeweils im Abstand einer in x -Richtung gewählten Schrittweite h errechnet werden (Abb.2).

Aus der Vielzahl der bekannten numerischen Lösungswege eignet sich das Verfahren nach RUNGE und KUTTA für programmierbare Taschenrechner besonders gut, aus folgenden Gründen:

Es ist zuverlässig, arbeitet rein mechanisch und ist einfach zu programmieren.

Es arbeitet ohne Iteration und Anlaufrechnung.

Es zeichnet sich bei richtiger Schrittwahl h durch eine hohe Genauigkeit aus.

Es erlaubt im Bedarfsfall das Abändern der Schrittweite h nach jedem berechneten Punkt der Kurve $y(x)$.

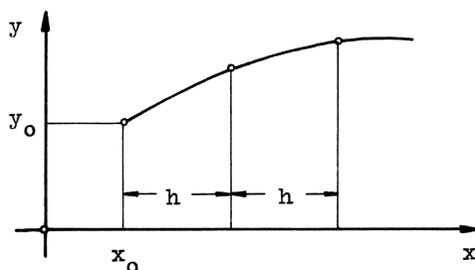


Abb. 2 Punktweise Berechnung einer Kurve

Es gestattet dadurch, bei geringem Mehraufwand, eine automatische Steuerung zur richtigen Schrittweite hin.

Es läßt ohne weiteres die Erweiterung auf Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung zu.

Auf die mathematische Begründung dieses Verfahrens wird hier verzichtet, weil sie einen erheblichen Aufwand erfordert. Man kann sie aber nachlesen, z.B. in dem Buch von C. Runge und H. König, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Berlin 1924.

Beschreibung des Verfahrens

Das Verfahren nach RUNGE-KUTTA beruht auf einem dreimaligen Sichtvortasten längs verschiedener Parabelbögen, beginnend mit dem Anfangspunkt x_0, y_0 , und zwar zweimal um $\frac{h}{2}$ bis zur Schrittmitte und einmal um h bis zum Schritttende (Abb.3). Hierbei werden an den Schrittstellen s_I vier verschiedene Zuwächse k_I ($I = 1$ bis 4) in y -Richtung berechnet, aus denen ein Mittelwert k gebildet wird. Mit h und k findet man das Wertepaar des nächsten Punktes

$$x_1 = x_0 + h \qquad y_1 = y_0 + k.$$

Dieses dient als neuer Anfangspunkt für die nächste Schrittbe-
rechnung usw.

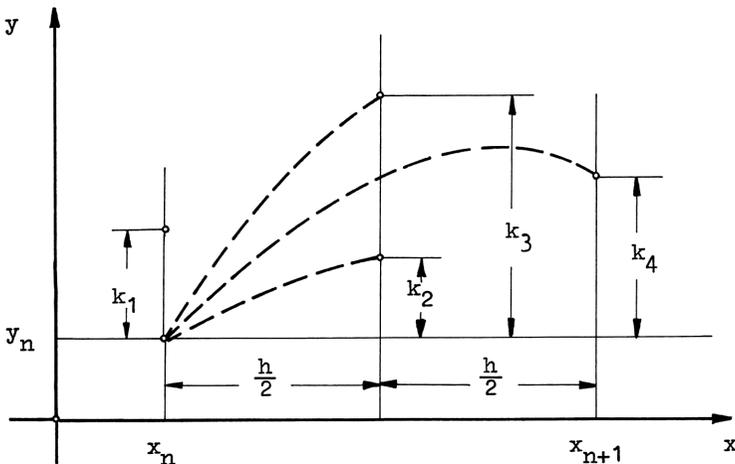


Abb. 3 RUNGE-KUTTA-Verfahren

Das Gleichungssystem für dieses Vorgehen wurde für die Zahlenrechnung auf eine besonders günstige Form gebracht und schreibt sich an einer beliebigen Stelle x_n, y_n :

Zuwachs

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{h}{2} \cdot f(s_1) & \text{mit } s_1: & x_n & ; & y_n \\ k_2 &= \frac{h}{2} \cdot f(s_2) & s_2: & x_n + \frac{h}{2} & ; & y_n + k_1 \\ k_3 &= \frac{h}{2} \cdot f(s_3) & s_3: & x_n + \frac{h}{2} & ; & y_n + k_2 \\ k_4 &= \frac{h}{2} \cdot f(s_4) & s_4: & x_n + h & ; & y_n + 2 k_3 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Mittelwert

$$k = \frac{1}{3} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) , \quad (1.2)$$

Wertepaar des nächsten Punktes

$$x_{n+1} = x_n + h \qquad y_{n+1} = y_n + k \quad . \quad (1.3)$$

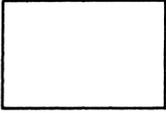
Programmablaufplan

Wie wir gesehen haben, besteht das RUNGE-KUTTA-Verfahren aus einer Reihe von Rechenoperationen und logischen Entscheidungen, die das Wertepaar x_n, y_n eines Punktes der Lösungskurve mit dem Wertepaar x_{n+1}, y_{n+1} des nächsten Punktes verknüpft. Ein wertvolles Hilfsmittel für die Umsetzung dieser einzelnen Rechenschritte in das Programm eines Taschenrechners ist der Programmablaufplan oder das Flußdiagramm. In ihm wird der Lösungsablauf graphisch dargestellt. So zeigt der Programmablaufplan insbesondere die

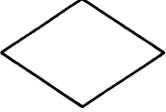
Ein- und Ausgabe von Zahlen,
Rechenoperationen,
logischen Entscheidungen,

und zwar in der Reihenfolge und Verknüpfung, in der sie bei der Zahlenrechnung ablaufen müssen. An Hand eines Flußdiagrammes, läßt sich das Programm für einen Taschenrechner Schritt für Schritt erstellen.

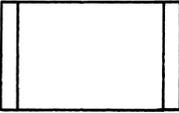
Für die graphische Darstellung des Lösungsablaufes wurden im DIN-Blatt 66001 verschiedene Symbole vereinbart, von denen neun in diesem Buch verwendet werden:



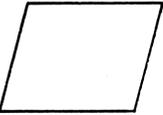
Das Rechteck hebt die Stellen hervor, an denen Rechenoperationen ausgeführt werden.



Ein Rhombus kennzeichnet eine Verzweigungsstelle



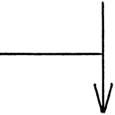
Dieses Zeichen bedeutet das Abarbeiten eines Unterprogrammes, ehe im Hauptprogramm weitergegangen wird.



Stellen, an denen Daten ein- oder ausgegeben werden, kennzeichnet das Parallelogramm.



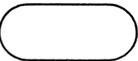
Der Strich bedeutet eine Ablaufflinie. Vorzugsrichtung ist von oben nach unten oder von links nach rechts.



So wird eine Zusammenführung gezeichnet. Zwei sich kreuzende Ablaufflinien bedeuten keine Zusammenführung.



Der Kreis steht für eine Übergangsstelle. Zusammgehörige Übergangsstellen müssen gleiche Bezeichnungen haben.



Mit diesem Zeichen werden Anfang und Ende, auch Zwischenhalte einer vollständigen Rechenarbeit markiert.



Dieses Zeichen wird für Bemerkungen an irgendein Symbol angefügt.

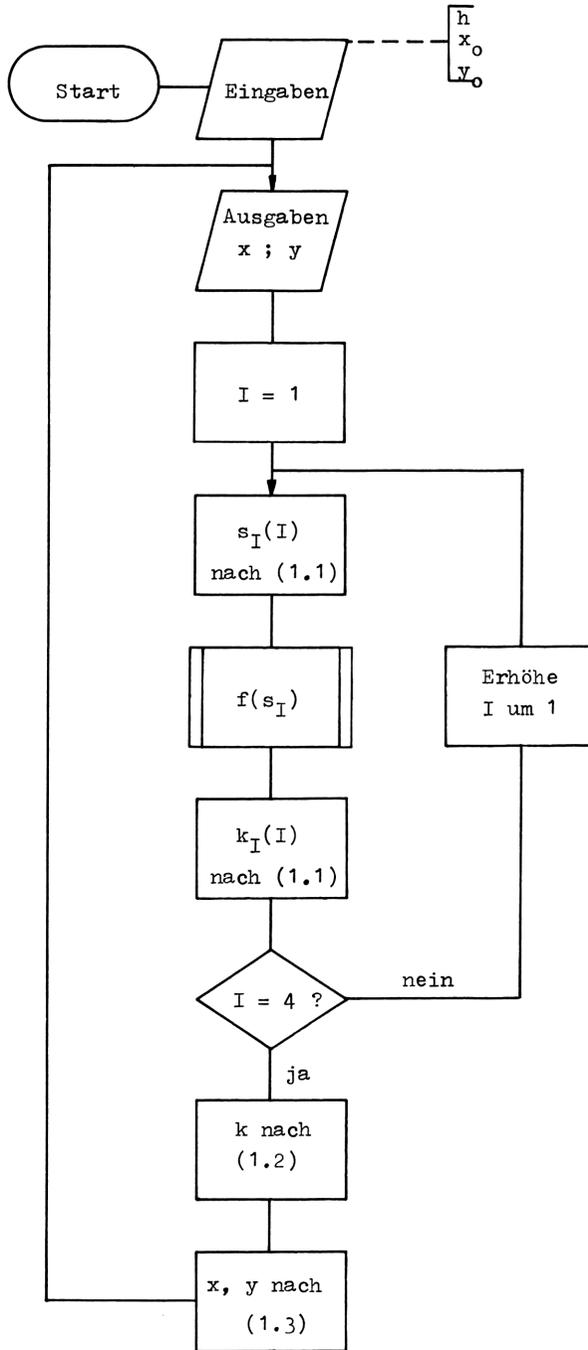


Abb. 4 Differentialgleichung erster Ordnung

Den Programmablaufplan für eine Differentialgleichung erster Ordnung mit Anfangswerten zeigt die Abb.4. Um mit dem gleichen Programm die unterschiedlichsten Differentialgleichungen

$$y' = f(x,y)$$

lösen zu können, ist im Ablaufplan für die Funktion $f(x,y)$ ein Unterprogramm vorgesehen. Ist das Hauptprogramm einmal erstellt, so genügt es, zur Lösung einer vorliegenden Differentialgleichung die Funktion $f(x,y)$ als Unterprogramm zu schreiben und das Hauptprogramm mit den Anfangswerten x_0 , y_0 zu starten.

1.1.1 Beispiel. Oberfläche von Flüssigkeitsströmung

Die Oberfläche einer gestauten Wasserströmung im Längsschnitt (Abb.5) wird durch die Differentialgleichung

$$y' = -\gamma \left[1 - \left(\frac{H}{y} \right)^4 \right]$$

beschrieben, sofern ein seichtes Bett von parabolischem Querschnitt vorliegt. Gesucht wird die Wasserhöhe y im Abstand von der Staumauer x für die folgenden Zahlenwerte:

$\gamma = 0,0873$ kleines Gefälle im Bogenmaß
 $H = 1$ m Wasserhöhe in größerer Entfernung x
 $y_0 = 1,5$ m für $x_0 = 0$ m Anfangswerte
 $h = 1$ m Schrittweite für das RUNGE-KUTTA-Verfahren.

Ergebnis:

x	y
m	m
0	1,500
1	1,432
2	1,367
3	1,307
4	1,253
5	1,204
6	1,161
7	1,125
8	1,095
9	1,072
10	1,053

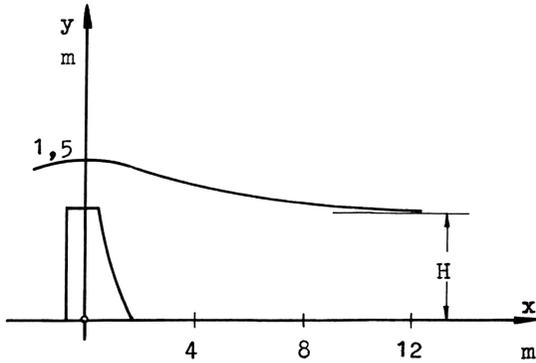


Abb. 5 Flüssigkeitsströmung

Die Zahlen wurden auf einem HP 67 mit dem folgenden Programm gerechnet:

Hauptprogramm

```

LBL A      GSB 0      RCL 3      GSB B
RCL 1      2          STO+2     RCL 0
STO A      x          GTO A      x
-X-        RCL 0
RCL 2      STO+1     LBL 0
STO B      R↓        RCL 2
-X-        GSB 0      +
GSB B      STO-3     STO B
RCL 0      3         RCL 1
x          STO:3     RCL 0
STO 3      RCL 0      +
GSB 0      STO+1     STO A
  
```

Unterprogramm f(x,y)

```

LBL B
RCL 6
RCL B
:
4
yx
1
-
RCL 5
x
RTN
  
```

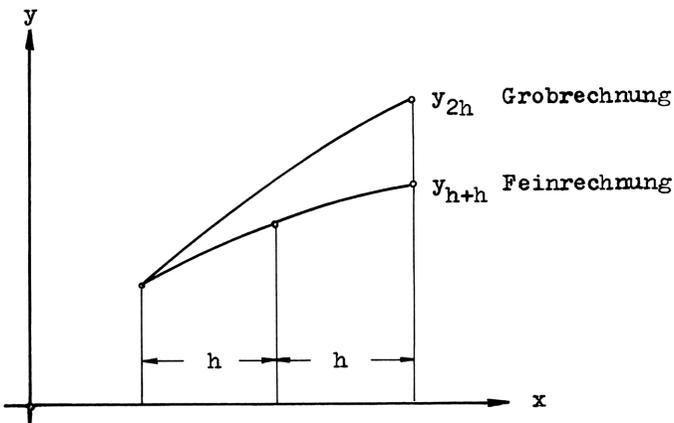
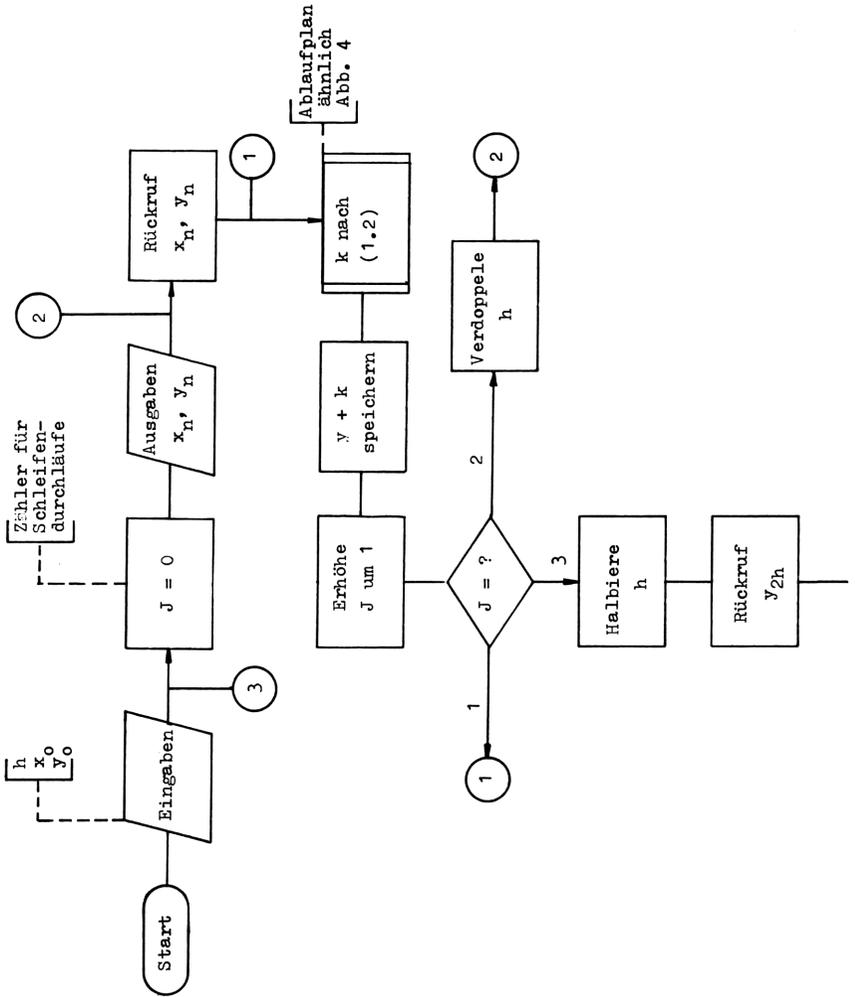


Abb. 6 Fehlerabschätzung



Speicherplan

Wertepaar		A	B	C	D	E		
		x	y	frei	frei	frei		
0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{h}{2}$	x_0	y_0	belegt	frei	γ	H	frei	frei

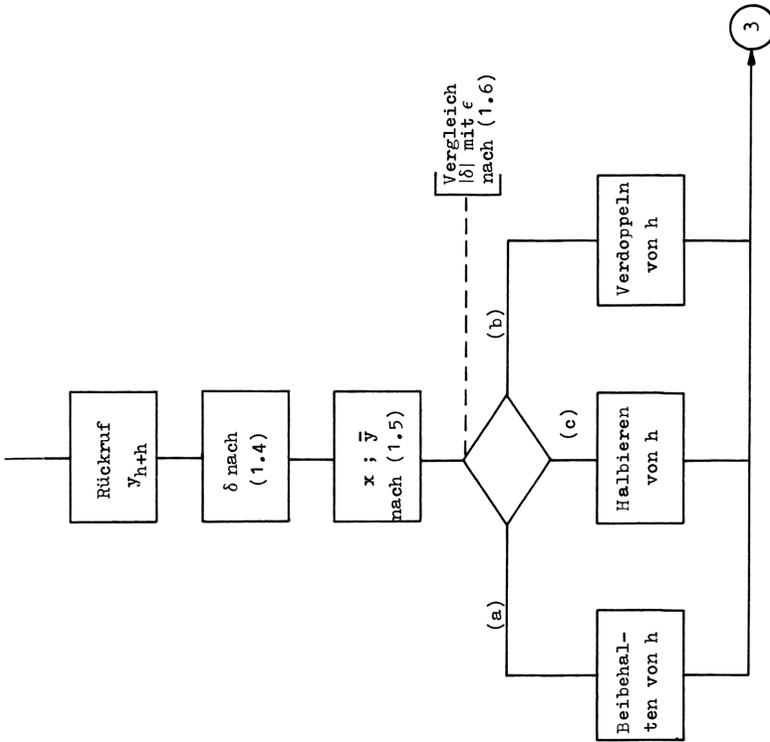


Abb. 7 Differentialgleichung erster Ordnung mit Korrektur und Schrittsteuerung

1.1.2 Schrittsteuerung und Korrektur

Das RUNGE-KUTTA-Verfahren ist hinsichtlich seiner Genauigkeit ein Verfahren vierter Ordnung, d.h. der Fehler ist von der Ordnung h^5 . Bei hinreichend kleiner Schrittweite wird daher der Benutzer durch eine hohe Genauigkeit belohnt. Umgekehrt verhält es sich

aber bei zu großer Schrittweite. Die richtige Schrittbemessung ist bei diesem Verfahren von entscheidender Bedeutung. Hier liegt eine Quelle der Unsicherheit, zumal sich eine Fehlerrechnung nur mit großer Schwierigkeit ausführen läßt.

Dagegen gibt es für ein angenähertes Abschätzen des Fehlers folgenden einfachen Weg:

Die Rechnung wird mit doppelter Schrittweite $2h$ wiederholt und das Ergebnis y_{2h} dieser groben Rechnung mit der zuvor durchgeführten Feinrechnung y_{h+h} verglichen. Dann läßt sich angenähert sagen, daß der Fehler bei der Schrittverdoppelung auf den $2^5 = 32$ -fachen Wert angestiegen ist. Da gleichzeitig zum Durchlaufen von $2h$ zwei Schritte $h + h$ der Feinrechnung nötig sind, wird sich hier der Fehler nahezu verdoppelt haben. So kann man den Fehler der Grobrechnung auf das 16fache der Feinrechnung schätzen. Die Differenz zwischen Grob- und Feinrechnung wird somit etwa das 15fache des Fehlers in der Feinrechnung betragen (Abb.6). Diese Fehlerabschätzung läßt sich sowohl zur automatischen Schrittsteuerung als auch zur Korrektur der Feinrechnung heranziehen.

Korrektur der Feinrechnung

$$\delta = \frac{1}{15} \cdot (y_{h+h} - y_{2h}). \quad (1.4)$$

Korrigierter Wert

$$\bar{y} = y_{h+h} + \delta \quad (1.5)$$

für $x = x_n + h + h$.

Nach der Wahl einer Genauigkeitsschranke ϵ , z.B. vier Stellen nach dem Komma, hat sich für die Schrittsteuerung folgende Festlegung als brauchbar herausgestellt /9/ :

$$\frac{10 \epsilon}{66} \leq |\delta| \quad (a) \text{ beibehalten von } h$$

$$\frac{10 \epsilon}{66} > |\delta| \quad (b) \text{ verdoppeln von } h \quad (1.6)$$

$$10 \epsilon \leq |\delta| \quad (c) \text{ halbieren von } h .$$

Im Programmablaufplan (Abb.7) für eine Rechnung mit Schrittsteuerung und Korrektur ist zur Vereinfachung die Berechnung des Mittelwertes k als Unterprogramm gezeichnet.

1.1.3 Beispiel. Einschalten einer Spule mit Eisenkern

Bei einer Spule mit Eisenkern hängt die Induktivität L vom Sättigungsgrad des magnetischen Flusses Φ ab, der vom Strom i bestimmt wird. Dann erhält die Differentialgleichung zur Abb. 1 die Form

$$u = i \cdot R + N \cdot \frac{d}{dt} \Phi(i) \quad . \quad N \text{ Windungszahl der Spule}$$

Zur analytischen Nachbildung der Magnetisierungskurve Φ in einem magnetischen Kreis aus Eisen und Luftspalt ist die Funktion

$$F(z) = \coth(z) - \frac{1}{z}$$

gut geeignet, deren Kurvenverlauf die Abb. 8 zeigt. Für die weitere Rechnung wird auch noch ihre Ableitung benötigt

$$\frac{dF}{dz} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{\sinh^2(z)}$$

für $z = 0 \quad \frac{dF}{dz} = \frac{1}{3} \quad .$

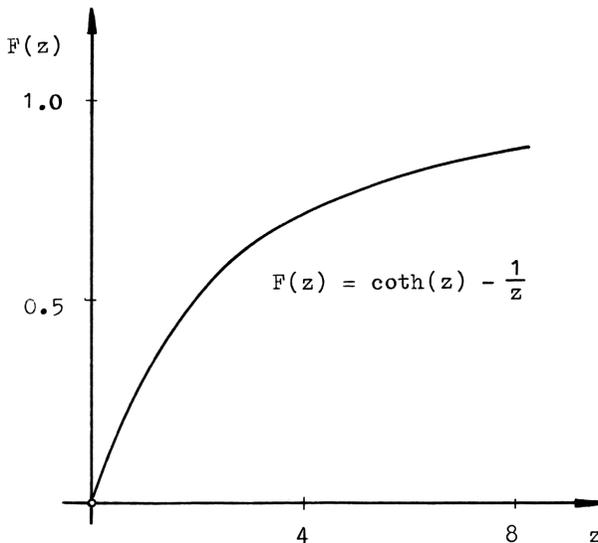


Abb. 8 Nachbildung der Eisen-Magnetisierungskurve

Mit $\Phi = \Phi_0 \cdot F(z)$ und $z = \alpha \cdot i$ erhält man eine veränderliche Induktivität

$$L(i) = N \Phi_0 \alpha \frac{dF}{dz} ,$$

mit der sich die Differentialgleichung schreibt

$$u = i \cdot R + L(i) \cdot \frac{di}{dt} .$$

Umgestellt für das RUNGE-KUTTA-Verfahren

$$\frac{di}{dt} = \frac{u - i R}{L(i)} .$$

Die Induktivität $L(i)$ beinhaltet selber eine Funktion, die nicht ganz einfach aufgebaut ist. Für die Rechnung nach RUNGE-KUTTA bedeuten nichtkonstante Faktoren aber keine zusätzliche Erschwerung.

Die Lösung wird für folgende Zahlenwerte gesucht:

$$\frac{U}{R} = 1 \text{ A} ; \quad \frac{N \cdot \Phi_0 \cdot \alpha}{R} \frac{1}{3} = 5 \text{ s} ; \quad \alpha = 0 \frac{1}{\text{A}} \quad \text{und} \quad \alpha = 5 \frac{1}{\text{A}} ;$$

$i_0 = 0 \text{ A}$ für $t_0 = 0 \text{ s}$ Anfangswerte; $h = 0,5 \text{ s}$ erste Schrittweite.

Ergebnis:

$\alpha = 0$		$\alpha = 5$	
t	i	t	i
s	A	s	A
0	0,00	0	0,00
1	0,18	1	0,19
3	0,45	3	0,65
7	0,75	5	0,97
11	0,89	6	0,99
		7	1,00

Aus den Zahlenreihen für die Zeit t ist die automatische Schrittsteuerung deutlich ablesbar. Aus der Abb. 9 ist ersichtlich, daß der Einschaltstrom i bei höherem Sättigungsgrad schneller seinen Endwert erreicht.

Die Zahlen wurden auf einem HP 67 mit dem folgenden Programm gerechnet:

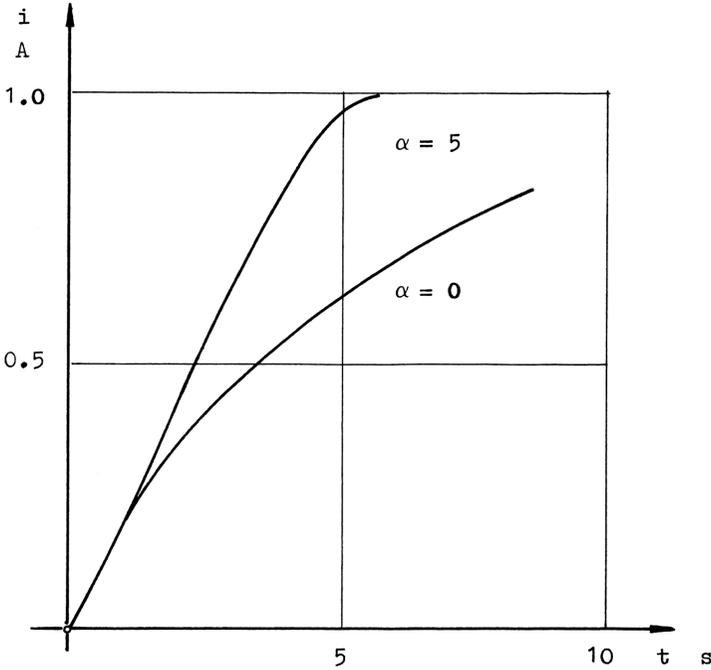


Abb. 9 Einschaltstrom einer Spule mit Eisenkern

Hauptprogramm

```

LBL A      LBL 2      DSZ
3          RCL 1      GTO(i)
ST I       STO A      RCL 2
RCL 1      RCL 2      RCL 4
STO A      STO B      STO 2
-X-        GSB B      -
RCL 2      RCL 0      1
STO B      x          5
STO 4      STO 3      :
-X-        GSB 0      STO-2
GTO 2      GSB 0      ABS
LBL 1      2          EEX
RCL 0      x          CHS
2          RCL 0      3
x          STO+1      x ≤ y
STO-1      R ↓      GTO 3
STO-1      GSB 0      6
STO 0      STO-3      6
RCL 4      3          :
RCL 2      STO:3      x > y
STO 4      RCL 0      GTO A
R ↓        STO+1      2
STO 2      RCL 3      STO:0
           STO+2      GTO A

```

Unterprogramm f(x,y)

```

LBL B      LBL 7      1/x
RCL 2      RAD      -
+          RCL B      RCL 7
STO B      RCL 5      x
RCL 1      x          RCL 6
RCL 0      x=0       :
+          GTO b      1/x
STO A      ENTER     RCL 8
GSB B      1/x       RCL B
RCL 0      x^2       -
x          x         x
STO+3      x ↻ y     RTN
STO+3      e^x       LBL b
RTN        ENTER     RCL 8
LBL 3      1/x       RCL B
4          -         -
STO:0      2         RCL 7
GTO A      :         :
           x^2       RTN

```

Speicherplan

Wertepaar		A	B	C	D	E			
		x	y	frei	frei	frei			
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{h}{2}$	x_0	y_0	belegt	belegt	α	$\frac{1}{3}$	5 s	$\frac{U}{R}$	frei
10 bis 19		frei							

1.2 Gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung, Differentialgleichungen zweiter Ordnung

1.2.1 Problemstellung und Lösungsweg

Häufig wird ein physikalischer Vorgang nicht durch eine einzige Differentialgleichung beschrieben, sondern durch ein System von zwei oder mehreren Differentialgleichungen, die miteinander zusammenhängen, gekoppelt sind. Ein solches System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung hat die Form

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y, z) \\z' &= g(x, y, z) .\end{aligned}$$

Für die beiden Gleichungen werden jetzt zwei Anfangsbedingungen benötigt: $y = y_0$ und $z = z_0$ für $x = x_0$. Gesucht werden die Kurven $y(x)$ und $z(x)$, die dem Differentialgleichungssystem genügen und außerdem die beiden Anfangsbedingungen erfüllen. Ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung kann in einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zusammengefaßt werden, in der neben der ersten Ableitung auch noch die zweite vorkommt. Der höchste Differentialquotient bestimmt immer die Ordnung einer Differentialgleichung. Umgekehrt läßt sich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung durch zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung ersetzen. Durch die einfache Substitution $y' = z$ geht nämlich eine Dif-

ferentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = f(x, y, y')$ über in die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}y' &= z \\z' &= f(x, y, z) .\end{aligned}$$

Es genügt also, das Lösungsverfahren für zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung zu kennen.

Beschreibung des Verfahrens

Zur Lösung der Doppelgleichung wird das Verfahren nach RUNGE-KUTTA jetzt aus zwei parallel verlaufenden, gekoppelten Rechnungsgängen aufgebaut. Es werden also je vier Zuwächse, k_I und l_I ($I = 1$ bis 4), in y - und in z -Richtung errechnet und daraus zwei Mittelwerte k und l bestimmt. Das Gleichungssystem an einer beliebigen Stelle x_n, y_n, z_n schreibt sich:

Zuwachs

$$\begin{aligned}k_1 &= \frac{h}{2} \cdot f(s_1) & l_1 &= \frac{h}{2} \cdot g(s_1) \\s_1 &: x_n ; y_n ; z_n \\k_2 &= \frac{h}{2} \cdot f(s_2) & l_2 &= \frac{h}{2} \cdot g(s_2) \\s_2 &: x_n + \frac{h}{2} ; y_n + k_1 ; z_n + l_1 & (1.7) \\k_3 &= \frac{h}{2} \cdot f(s_3) & l_3 &= \frac{h}{2} \cdot g(s_3) \\s_3 &: x_n + \frac{h}{2} ; y_n + k_2 ; z_n + l_2 \\k_4 &= \frac{h}{2} \cdot f(s_4) & l_4 &= \frac{h}{2} \cdot g(s_4) \\s_4 &: x_n + h ; y_n + 2 \cdot k_3 ; z_n + 2 \cdot l_3 ,\end{aligned}$$

Mittelwert

$$k = \frac{1}{3} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) \quad (1.8)$$

$$l = \frac{1}{3} \cdot (l_1 + 2 \cdot l_2 + 2 \cdot l_3 + l_4) ,$$

die Wertepaare für den nächsten Punkt

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \\ y_{n+1} &= y_n + k \\ z_{n+1} &= z_n + l \end{aligned} \quad (1.9)$$

dienen als Anfang für die nächste Schrittberechnung usw.

Schrittsteuerung und Korrektur

Auch für Systeme von Differentialgleichungen bleibt beim RUNGE-KUTTA-Verfahren die richtige Schrittbemessung von entscheidender Bedeutung. Der in 1.1.2 beschriebene Weg einer näherungsweisen Fehlerabschätzung ist auch hier gangbar:

Korrektur der Feinrechnung für $x = x_n + h + h$

in y-Richtung

$$\delta_y = \frac{1}{15} \cdot (y_{h+h} - y_{2h}) , \quad (1.10)$$

in z-Richtung

$$\delta_z = \frac{1}{15} \cdot (z_{h+h} - z_{2h}) ,$$

korrigierte Werte

$$\bar{y} = y_{h+h} + \delta_y \quad (1.11)$$

$$\bar{z} = z_{h+h} + \delta_z .$$

Zur Schrittsteuerung wird der größere Betrag der beiden Korrekturwerte herangezogen

$$\delta = \text{Max}(|\delta_y| , |\delta_z|) \quad (1.12)$$

und mit ihm nach (1.6) verfahren.

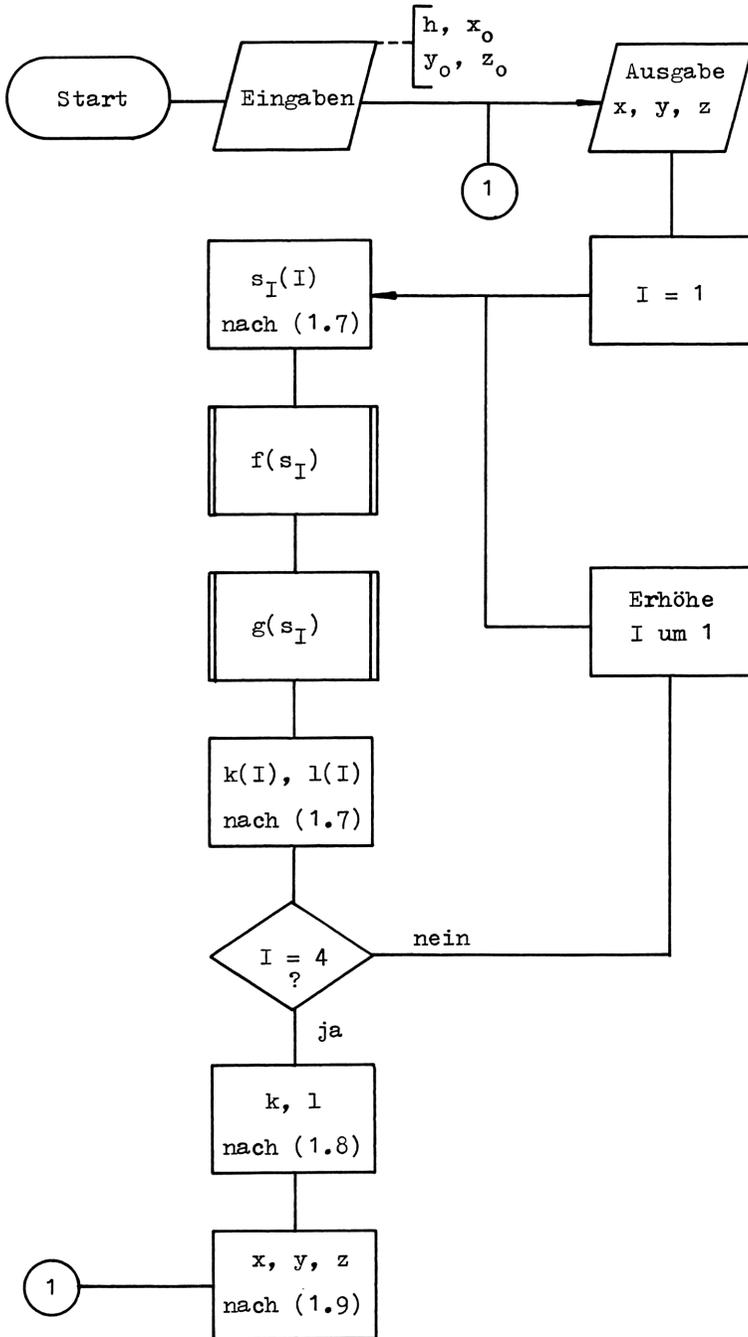
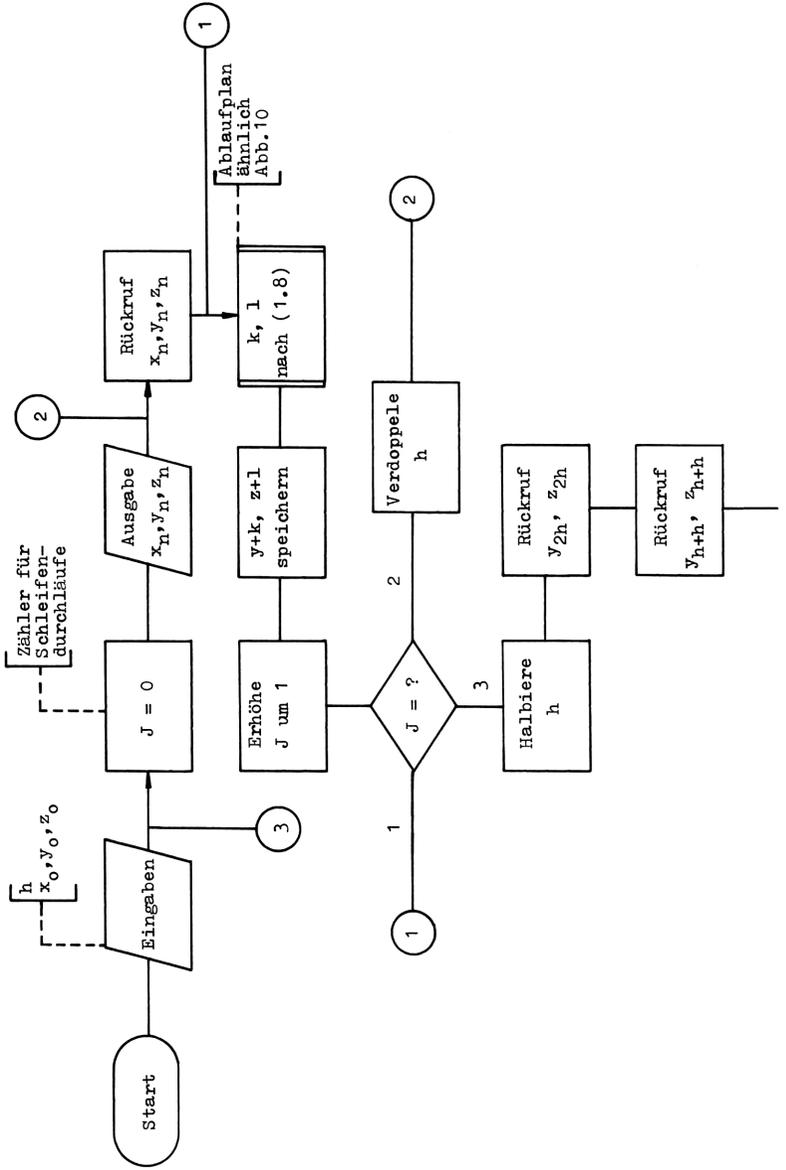


Abb. 10 Differentialgleichung zweiter Ordnung



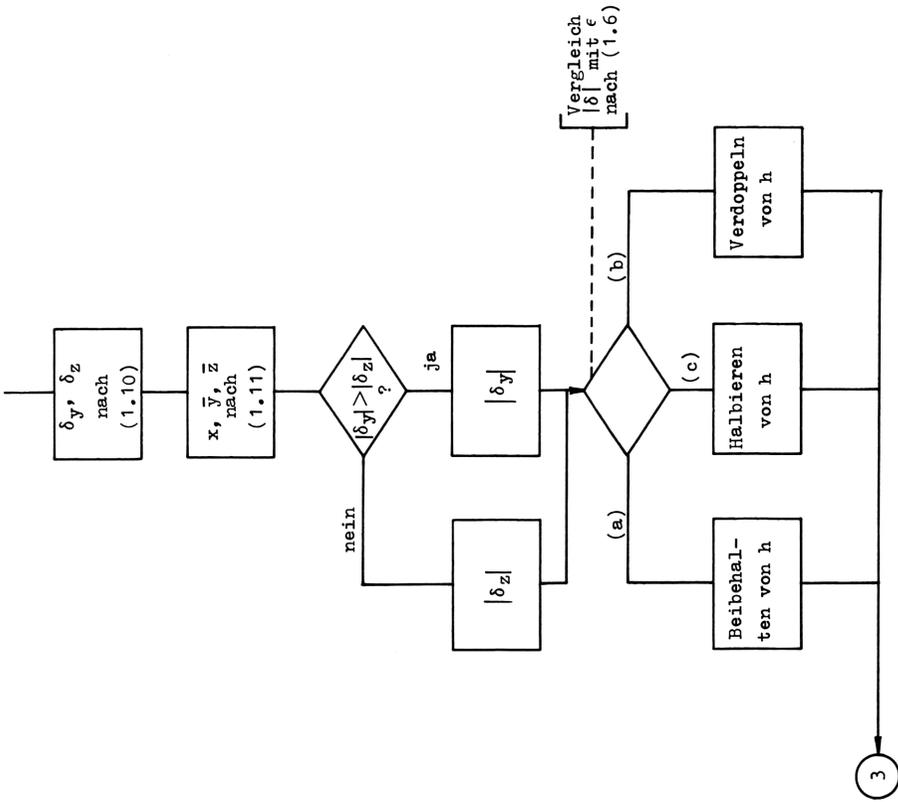


Abb. 11 Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Korrektur und Schrittsteuerung

Programmablaufplan

Der Ablaufplan für zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung ist ähnlich Abb.4 aufgebaut. Die beiden Funktionen $f(x,y,z)$ und $g(x,y,z)$ werden als Unterprogramme in das Hauptprogramm eingefügt, so daß das Hauptprogramm für Differentialgleichungen der unterschiedlichsten Form gilt (Abb.10). Der Ablaufplan mit Korrektur und Schrittsteuerung nimmt dann zur Vereinfachung hierauf Bezug (Abb.11).

1.2.2 Beispiel. Einschalten eines Gleichstrom-Motors mit Ankerrückwirkung

Am Beispiel 1.1.3 wurde der Einfluß der Eisensättigung auf den Einschaltstrom einer Spule mit Eisenkern gezeigt. Nun soll der Grobanlauf (Strom i und Drehzahl n) eines fremderregten Gleichstrom-Motors (Abb.12) gerechnet werden. Sobald durch den Anker der Maschine ein Strom i fließt, tritt, wegen der gekrümmten Eisenkennlinie, eine Schwächung des magnetischen Hauptfeldes ein, die sogenannte Ankerrückwirkung¹⁾. Diese hat die Form der Abb.13 und kann durch die Funktion

$$c = \frac{a}{1 + b \cdot i^2}$$

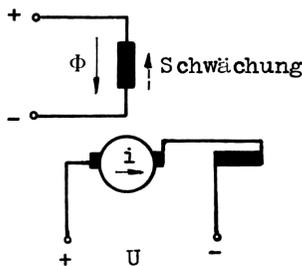


Abb. 12 Schaltbild eines fremderregten Gleichstrom-Motors

1) Nürnberg, Die Ankerrückwirkung der Gleichstrom-Maschine, Jahrbuch der AEG Forschung 1941, Bd.8

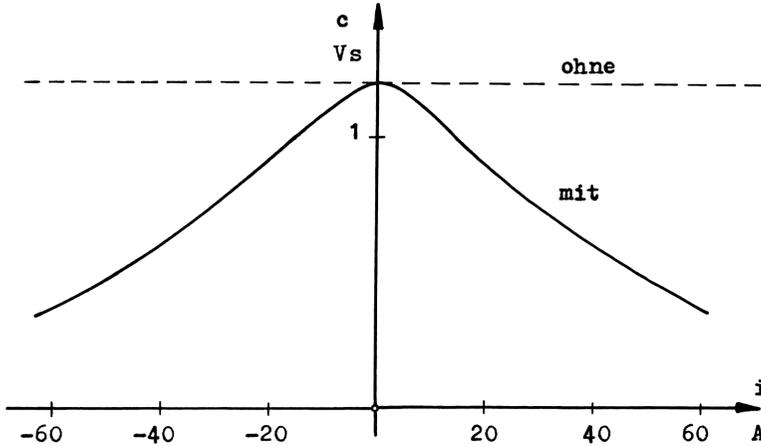


Abb. 13 Feldschwächung durch Ankerrückwirkung

approximiert werden. Die weitere mathematische Betrachtung führt auf eine "mechanische" und eine "elektrische" Differentialgleichung erster Ordnung, die miteinander gekoppelt sind:

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = c \cdot i$$

$$L \frac{di}{dt} = U - R \cdot i - c \cdot \omega$$

Die Berechnung von

Strom i A und

$$\text{Drehzahl } n = \frac{30}{\pi} \cdot \omega \frac{\text{U}}{\text{min}}$$

erfolgt für eine 2 kW - Maschine mit den Zahlenwerten

Spannung $U = 225$ V

Ankerwiderstand $R = 3,8$ Ω

Ankerinduktivität $L = 0,18$ H

Trägheitsmoment $I = 0,05$ Ws^3

$$\text{Leerlaufdrehzahl } n_0 = \frac{30 \cdot U}{\pi \cdot c_0} = 1790 \frac{\text{U}}{\text{min}}$$

$$c = \frac{1,2}{1 + \left(\frac{i}{40}\right)^2} \text{ Vs}$$

Anfangswerte $\omega = 0$ und $i = 0$ für $t = 0$

erste Schrittweite $h = 0,005$ s .

Das Ergebnis zeigt Abb.14. Zwischen dem Anlauf mit und dem Anlauf ohne Ankerrückwirkung ist ein deutlicher Unterschied feststellbar.

Gerechnet wurde mit Korrektur und Schrittsteuerung auf einem HP 67 nach dem folgenden Programm

Hauptprogramm

```

LBL A      STO 8      ABS
3          GSB C      x ≤ y
ST I      RCL 0       x > y
RCL 1     x          EEX
STO A     STO 5      CHS
-X-       GSB 0       3
RCL 2     GSB 0       x ≤ y
STO B     2          GTO 3
STO 6     STO x8     6
RCL 9     x          6
x         RCL 0       :
-X-       STO+1      x > y
RCL 3     R↓         GTO A
STO C     GSB 0       2
STO 7     STO-5      STO:0
-X-       RCL 8       GTO A
GTO 2     STO-4      LBL 0
LBL 1     3          RCL 3
RCL 0     STO:4      +
2         STO:5      STO C
x         RCL 0       RCL 8
STO-1     STO+1      RCL 2
STO-1     RCL 4      +
STO 0     STO+2      STO B
RCL 6     RCL 5      RCL 1
RCL 2     STO+3      RCL 0
STO 6     DSZ        +
R↓       GTO(i)      STO A
STO 2     RCL 2      GSB B
RCL 7     RCL 6      RCL 0
RCL 3     STO 2      x
STO 7     -          STO 8
R↓       1          STO+4
STO 3     5          STO+4
LBL 2     :          GSB C
RCL 1     STO-2      RCL 0
STO A     ABS        x
RCL 2     RCL 3      STO+5
STO B     RCL 7      STO+5
RCL 3     STO 3      RTN
STO C     -          LBL 3
GSB B     1          4
RCL 0     5          STO:0
x         :          GTO A
STO 4     STO-3

```

Unterprogramme

f(x,y,z)		g(x,y,z)
mit	ohne	
Ankerrückwirkung		
LBL B	LBL B	LBL C
POS	POS	POS
1	RCL D	RCL 0
.	RCL C	RCL C
2	x	RCL 1
RCL C	RCL 3	x
4	:	-
0	POS	RCL D
:	RTN	RCL B
x ²		x
1		-
+		RCL 2
:		:
STO D		POS
RCL C		RTN
x		
RCL 3		
:		
POS		
RTN		

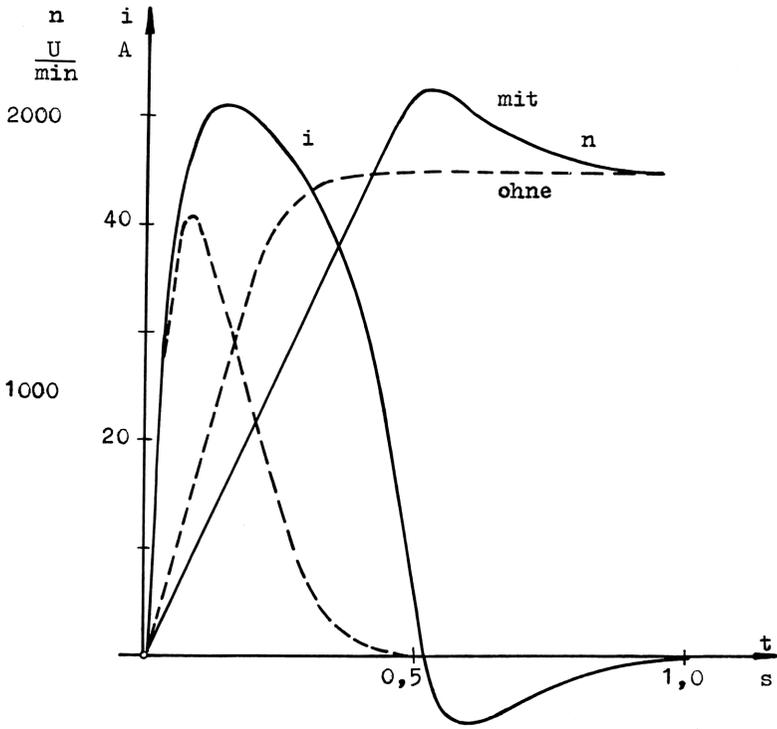


Abb. 14 Anlaufkurven eines fremderregten Gleichstrom-Motors

Speicherplan

Wertepaare	A t	B ω	C i	D c	E frei				
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{h}{2}$	t	ω	i	belegt	belegt	belegt	belegt	belegt	$\frac{30}{\pi}$
Anfangswerte									
10	11	12	13	14 bis	19				
U	R	L	I	frei					

1.3 Gekoppelte Differentialgleichung zweiter Ordnung, Differentialgleichung vierter Ordnung

1.3.1 Problemstellung und Lösungsweg

Die mathematische Beschreibung dynamischer Vorgänge führt häufig auf ein System von zwei oder mehreren Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die miteinander gekoppelt sind:

$$\begin{aligned}y'' &= f(t, y, y', z, z') \\z'' &= g(t, y, y', z, z') .\end{aligned}$$

Für die beiden Gleichungen werden jetzt $2 \times 2 = 4$ Anfangsbedingungen benötigt: $y = y_0$, $y' = y'_0$, $z = z_0$, $z' = z'_0$ zur Zeit $t = 0$.

Um Fragen nach einer Balkenbiegung zu beantworten, muß eine Differentialgleichung vierter Ordnung gelöst werden, in der Glieder bis zur vierten Ableitung auftreten:

$$y^{IV} = f(x, y, y', y'', y''') .$$

Ähnlich wie im Kapitel 1.2 führt die einfache Substitution $y'' = z$ eine Differentialgleichung vierter Ordnung auf zwei gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung zurück:

$$\begin{aligned}y'' &= z \\z'' &= f(x, y, y', z, z')\end{aligned}$$

Beide Probleme können also nach dem gleichen Verfahren behandelt werden.

Beschreibung des Verfahrens

Für das Rechnen mit programmierbaren Taschenrechnern ist es zweckmäßig, die beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung nicht weiter in vier Differentialgleichungen erster Ordnung zu zerlegen, sondern die Doppelgleichung nach einem von NYSTRÖM vorgeschlagenen RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM-Verfahren zu behandeln. Dann umfaßt das Programm nur zwei parallel verlaufende, gekop-

pelte Rechnungsgänge mit je vier Zuwächsen, k_I und l_I ($I = 1$ bis 4), in y - und in z -Richtung. Aus diesen Zuwächsen werden jetzt allerdings vier Mittelwerte k , k' , l , l' gebildet, um y , y' , z , und z' nach einer Schrittweite h für den nächsten Punkt angeben zu können. Die für Taschenrechner vorgeschlagenen Verfahren sehen sich damit von der Differentialgleichung erster Ordnung bis zur Differentialgleichung vierter Ordnung sehr ähnlich. Sie unterscheiden sich nicht durch wachsende Schwierigkeit, sondern nur durch den Umfang der notwendigen numerischen Rechenarbeit.

An einer beliebigen Stelle $x_n, y_n, y'_n, z_n, z'_n$ schreibt sich, für zwei gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung, das Gleichungssystem nach RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM

Zuwachs

$$k_1 = \frac{h}{2} \cdot f(s_1) \qquad l_1 = \frac{h}{2} \cdot g(s_1)$$

$$s_1: x_n; y_n; y'_n; z_n; z'_n$$

$$k_2 = \frac{h}{2} \cdot f(s_2) \qquad l_2 = \frac{h}{2} \cdot g(s_2)$$

$$s_2: x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{h}{2} \left(y'_n + \frac{k_1}{2} \right); y'_n + k_1; \\ z_n + \frac{h}{2} \left(z'_n + \frac{l_1}{2} \right); z'_n + l_1$$

$$k_3 = \frac{h}{2} \cdot f(s_3) \qquad l_3 = \frac{h}{2} \cdot g(s_3) \qquad (1.13)$$

$$s_3: x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{h}{2} \left(y'_n + \frac{k_1}{2} \right); y'_n + k_2; \\ z_n + \frac{h}{2} \left(z'_n + \frac{l_1}{2} \right); z'_n + l_2$$

$$k_4 = \frac{h}{2} \cdot f(s_4) \qquad l_4 = \frac{h}{2} \cdot g(s_4)$$

$$s_4: x_n + h; y_n + h \left(y'_n + k_3 \right); y'_n + 2k_3; \\ z_n + h \left(z'_n + l_3 \right); z'_n + 2l_3 \quad ,$$

Mittelwert

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{1}{3} \cdot (k_1 + k_2 + k_3) \\
 k' &= \frac{1}{3} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
 l &= \frac{1}{3} \cdot (l_1 + l_2 + l_3) \\
 l' &= \frac{1}{3} \cdot (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{1.14}$$

die Wertepaare des nächsten Punktes

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + h \\
 y_{n+1} &= y_n + h(y'_n + k) \\
 y'_{n+1} &= y'_n + k' \\
 z_{n+1} &= z_n + h(z'_n + l) \\
 z'_{n+1} &= z'_n + l'
 \end{aligned}
 \tag{1.15}$$

dienen wieder als Anfang für die nächste Schrittberechnung.

Programmablaufplan

Das Prinzip des Ablaufplanes der Abb.10 kann für zwei gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung übernommen werden (Abb.15). Die richtige Schrittbemessung bleibt unverändert wichtig. Das umfangreiche Gleichungssystem wird aber für eine Fein- und eine Grobrechnung die beschränkte Speicherkapazität eines Taschenrechners langsam übersteigen. Auf den um Korrektur und Schrittsteuerung erweiterten Ablaufplan wird daher verzichtet. An Hand der bisherigen Beispiele wird es sicher dem Leser im Bedarfsfall gelingen, den erweiterten Ablaufplan selber zu erstellen, indem er für die Schrittsteuerung den größten Betrag von jetzt vier Korrekturwerten benutzt.

1.3.2 Beispiel. Wasserspiele

Aus einem Wasserspeier spritzt, unter einem gegebenen Winkel α und mit einer bestimmten Geschwindigkeit v , ein Wasserstrahl

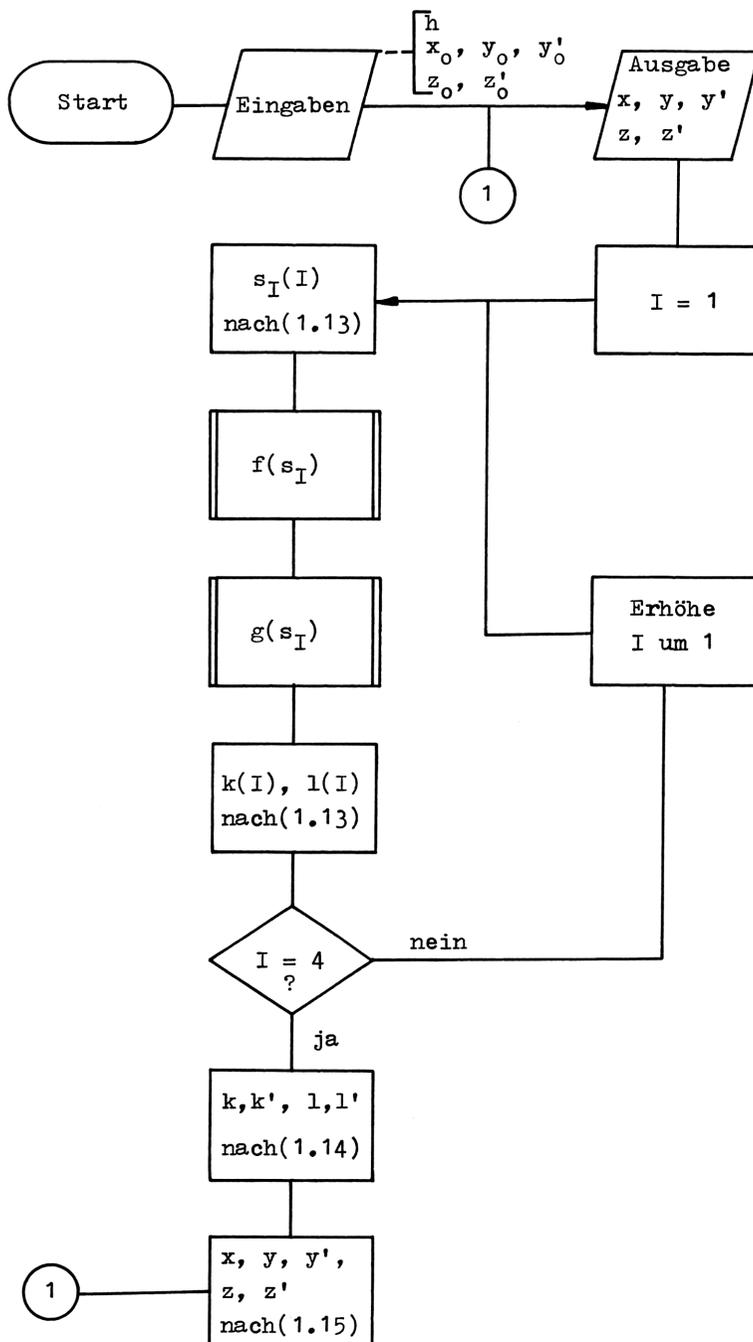


Abb. 15 Differentialgleichung vierter Ordnung

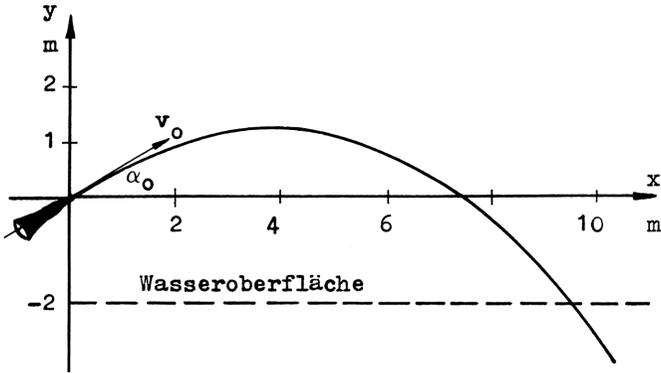


Abb. 16 Wasserfontäne

(Abb.16). Gesucht wird die Bahnkurve der Fontäne unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

Wir wollen einen Wassertropfen als kleine Kugel ansehen und die Aufgabe mit folgenden Zahlen rechnen:

Kugelradius	$r = 1,2 \cdot 10^{-3}$	m
"Schattenfläche"	$A_s = \pi r^2$	$\frac{m^2}{m^2}$
Volumen	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$	$\frac{m^3}{m^3}$
Masse	m	$\frac{Ns^2}{m}$
Widerstandsziffer	$c = 0,09$	
Dichte der Luft	$\rho = 1,2066$	$\frac{Ns^2}{m^4}$
Erdbeschleunigung	$g = 9,81$	$\frac{m}{s^2}$
Anfangswinkel	$\alpha_0 = 30^\circ$	
Anfangsgeschwindigkeit	$v_0 = 10$	$\frac{m}{s}$

Die Fragestellung führt auf zwei gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit dem Ansatz der Beschleunigung in x- und y- Richtung (Punkte sollen Ableitungen nach der Zeit bedeuten):

$$\ddot{x} = -\frac{W}{m} \cos \alpha$$

$$\ddot{y} = -\frac{W}{m} \sin \alpha - g$$

mit dem Luftwiderstand

$$W = \frac{1}{2} c \rho A_S v^2 = a \cdot v^2 \quad \text{N} .$$

Wir ersetzen die Bahngeschwindigkeit und den Bahnwinkel des Wassertropfens durch

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad \text{und} \quad \alpha = \arctan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$$

und erhalten abschließend

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{a}{m} \cdot (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \cdot \cos\left[\arctan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\right] \\ \ddot{y} &= -\frac{a}{m} \cdot (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \cdot \sin\left[\arctan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\right] - g \quad . \end{aligned}$$

Die Anfangswerte zur Zeit $t = 0$ sind

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \quad \text{m} \\ y_0 &= 0 \quad \text{m} \\ \dot{x}_0 &= v_0 \cdot \cos \alpha_0 = 8,6603 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \dot{y}_0 &= v_0 \cdot \sin \alpha_0 = 5,0000 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad , \end{aligned}$$

Schrittweite

$$\begin{aligned} h &= 0,1 \quad \text{s} \\ \frac{a}{m} &= 3,3936 \cdot 10^{-2} \quad \frac{1}{\text{m}} \quad . \end{aligned}$$

Ergebnis:

t	x	y
s	m	m
0	0	0
0,2	1,68	0,78
0,4	3,26	1,13
0,6	4,76	1,08
0,8	6,19	0,65
1,0	7,54	-0,14
1,1	8,19	-0,67
1,2	8,82	-1,27
1,3	9,43	-1,96

Gerechnet wurde mit dem folgenden Programm auf einem HP 67:

Hauptprogramm

```

LBL A      +      RCL 4
0          2      STO+8
STO 6     x      RCL 9
STO 7     GSB 3  RCL 9
STO 8     LASTX  RCL 0
STO 9     +      2
RCL E     STO A  x
-X-       RCL 4  STOx6
RCL 1     R↓     STOx8
STO A     +      RCL 6
-X-       LASTX  STO+1
RCL 2     +      RCL 8
STO B     STO D  STO+3
RCL 3     RCL 2  GTO A
STO C     RCL 5  LBL b
-X-       +      RCL 0
RCL 4     STO B  x
STO D     GSB B  STO 5
GSB B     GSB b  STO+6
GSB b     STO-6  STO+7
GSB C     GSB C  RTN
GSB c     GSB c  LBL c
2         STO-8  RCL 0
STO:5     3      x
:         STO:6  STO+8
RCL 4     STO:7  STO+9
+         STO:8  ENTER
GSB 3     STO:9  RTN
STO A     RCL 2  LBL 3
GSB 4     STO+6  RCL 0
GSB 4     RCL 7  x
RCL 4     STO+2  RCL 3
    
```

Unterprogramme für f und g

```

LBL B     LBL C
RCL D     P↺S
RCL B     RCL 2
:         SIN
TAN-1    RCL 3
P↺S      x
STO 2     RCL 1
COS       -
RCL D     P↺S
x2      RTN
RCL B
x2
+
RCL 0
x
+
LBL 4     LBL 4
R↓       RCL 4
RCL 4    x
+        STO 3
STO D    x
RCL 5    P↺S
RCL 2    RTN
+
STO B
GSB B
GSB b
STO+7
GSB C
GSB c
STO+9
RTN
    
```

Speicherplan

	A	B	C	D	E
Wertepaare	x	\dot{x}	y	\dot{y}	t
0	1	2	3	4	5 bis 9
$\frac{h}{2}$	x_0	\dot{x}_0	y_0	\dot{y}_0	belegt für k, k', l, l'
	Anfangswerte				
10	11	12	13	14 bis 19	
$-\frac{a}{m}$	g	Unterprogr. Zwischen-speicher		frei	

2. Differentialgleichungen mit Randwerten

2.1 Einführung

Bei der bisher behandelten Aufgabenstellung waren neben der Differentialgleichung noch Anfangswerte gegeben, d.h. gewünschte Daten der Lösungskurve $y(x)$ und deren Ableitungen an einer Stelle, der Anfangsstelle x_0 . Bei vielen technisch interessanten Fragen müssen aber bestimmte Funktionswerte und deren Ableitungen an mehreren Stellen der Lösungskurve gefordert werden, meist am Anfang und am Ende eines Intervalles, d.h. an dessen Rändern. Jetzt sucht man also die Lösung der Differentialgleichung, die zusätzlich auch noch die gegebenen Bedingungen an den Rändern eines Intervalles erfüllt (Randwertaufgabe). So ist z.B. die Frage nach der Durchbiegung eines auf zwei Stützen gelagerten Balkens eine typische Randwertaufgabe. Die Forderung, daß an den Stützstellen die Durchbiegung Null sein soll, sind die Randbedingungen.

In diesem einfachen Falle sind für die Lösungskurve $y(x)$ die Anfangs- und Endordinaten $y(x_a)$ und $y(x_b)$ gegeben. Die Lösungskurve wird im Intervall

$$x_a \leq x \leq x_b$$

gesucht. Die vorgegebenen Randbedingungen am Intervallanfang werden allgemein als Anfangsrandbedingungen (ARB), die am Intervallende als Endrandbedingungen (ERB) bezeichnet (Abb.17).

Randwertaufgaben finden sich erst ab Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Außerdem sind viele von ihnen linear, d.h. sowohl in der Differentialgleichung als auch in den Randbedingungen treten die Funktion y und deren Ableitungen nur in linearer Form auf. Linearität bedeutet aber, daß sich die Lösung aus mehreren Einzellösungen zusammensetzen läßt

$$y(x) = y_1(x) + K_2 y_2(x) + K_3 y_3(x) + \cdot \cdot \cdot$$

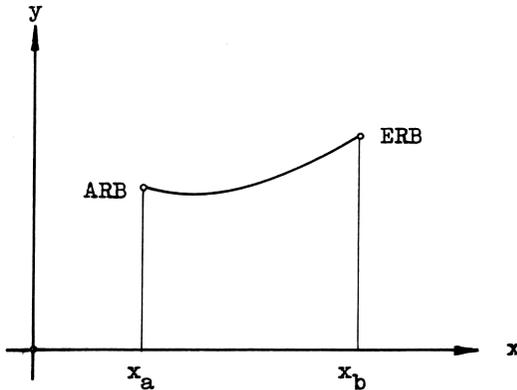


Abb. 17 Randwertaufgabe

Dadurch eröffnet sich die Möglichkeit, lineare Randwertaufgaben auf Anfangswertaufgaben zurückzuführen. Da Randwertaufgaben einen höheren Schwierigkeitsgrad als Anfangswertprobleme besitzen, so bescheiden wir uns für Taschenrechner auf die Lösung linearer Randwertaufgaben.

2.2 Differentialgleichung zweiter Ordnung

Eine vorliegende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = f(x, y, y')$$

betrachten wir in einer etwas ausführlicheren Schreibweise:

$$y'' = p \cdot y' + q \cdot y + r \quad ; \quad (2.1)$$

p , q und r können Funktionen von x sein. Die Randbedingungen setzen sich im allgemeinsten Falle aus einer Linearkombination von Ordinaten und Kurvensteigungen zusammen:

$$\begin{aligned} \text{ARB:} \quad & \alpha_1 y(x_a) + \alpha_2 y'(x_a) = A \quad , \\ \text{ERB:} \quad & \beta_1 y(x_b) + \beta_2 y'(x_b) = B \quad . \end{aligned} \quad (2.2)$$

Bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung beschränkt sich der Lösungsansatz auf zwei unabhängige Funktionen y_1 und y_2 :

$$y(x) = y_1(x) + K \cdot y_2(x) \quad . \quad (2.3)$$

Die Bestimmung dieser beiden Funktionen über eine Aufgabenstellung mit Anfangswerten gelingt unter den folgenden Bedingungen:

1. y_1 muß die Differentialgleichung $y'' = f(x, y, y')$ erfüllen.
2. y_2 muß den homogenen Teil der Differentialgleichung

$$y'' = p \cdot y' + q \cdot y = f_{\text{hom}}(x, y, y')$$

erfüllen ($r = 0$).

3. y muß für jedes beliebige K die ARB erfüllen.

Die dritte Bedingung ist dann eingehalten, wenn für die Teillösung y_1

$$\alpha_1 y_1(x_a) + \alpha_2 y_1'(x_a) = A \quad (2.4)$$

und für die Teillösung y_2

$$\alpha_1 y_2(x_a) + \alpha_2 y_2'(x_a) = 0$$

gilt. Der bis dahin noch freie Faktor K kann dann so gewählt werden, daß die Gesamtlösung $y(x)$ auch noch die ERB erfüllt. Die ausführliche mathematische Beschreibung findet man in der Spezialliteratur, z.B. /5/.

Beschreibung des Verfahrens

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = f(x, y, y')$$

wird zunächst in zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung überführt:

$$y' = z$$

$$z' = pz + qy + r = f(x, y, z) \quad .$$

Beide Gleichungen werden im Intervall $x_a \leq x \leq x_b$ zweimal mit der konstanten Schrittweite

$$h = \frac{x_b - x_a}{N}, \quad N \text{ ganze Zahl,}$$

als Anfangswertaufgabe nach RUNGE-KUTTA durchgerechnet (Abb.18).

Erste Durchrechnung für die Teillösung y_1 :

Die Differentialgleichung erhält die Anfangswerte

$$y_1(x_a) = \frac{A}{\alpha_1} \quad \text{und} \quad y_1'(x_a) = z_1(x_a) = 0, \quad (2.5)$$

oder, falls $\alpha_1 = 0$ ist,

$$y_1(x_a) = 0 \quad \text{und} \quad y_1'(x_a) = z_1(x_a) = \frac{A}{\alpha_2}.$$

Gespeichert oder notiert werden die hierbei errechneten Funktionswerte $y_1(x)$ sowie die erreichten Daten am Intervallende x_b :

$$y_1(x_b) \quad \text{und} \quad y_1'(x_b) = z_1(x_b).$$

Zweite Durchrechnung für die Teillösung y_2 :

Für diese Rechnung wird, bei gleicher Schrittweite h , nur der homogene Teil der Differentialgleichung f_{hom} genommen ($r = 0$).

Die Anfangswerte sind

$$y_2(x_a) = \alpha_2 \quad \text{und} \quad y_2'(x_a) = z_2(x_a) = -\alpha_1. \quad (2.6)$$

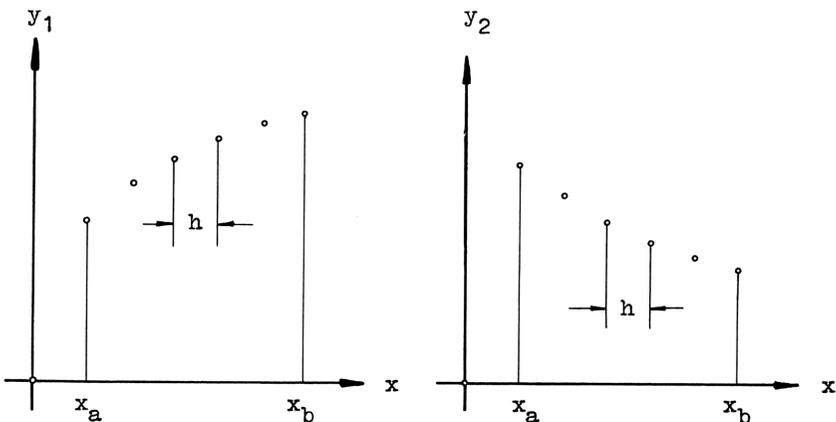


Abb. 18 Zur Lösung einer Randwertaufgabe

Auch hier werden die errechneten Funktionswerte $y_2(x)$ gespeichert oder notiert, sowie die Daten am Intervallende x_b : $y_2(x_b)$ und $y_2'(x_b) = z_2(x_b)$.

Die Anfangswerte nach (2.5) und (2.6) in der ersten und zweiten Durchrechnung erfüllen die Gleichungen (2.4) in einfachster Weise, wie man sich leicht überzeugen kann.

Im anschließenden Rechnungsgang wird die Gesamtlösung an die ERB angepaßt, durch die Festlegung der noch freien Konstanten K. Aus

$$K \cdot (\beta_1 y_2(x_b) + \beta_2 z_2(x_b)) + \beta_1 y_1(x_b) + \beta_2 z_1(x_b) = B$$

folgt

$$K = \frac{B - (\beta_1 y_1(x_b) + \beta_2 z_1(x_b))}{\beta_1 y_2(x_b) + \beta_2 z_2(x_b)} \quad (2.7)$$

Aus dieser Gleichung läßt sich ablesen, daß die Randwertaufgabe nur dann eindeutig lösbar ist, wenn der Nenner nicht zu Null wird. Zum Abschluß werden die notierten oder gespeicherten Funktionswerte zur Gesamtlösung (2.3) zusammengesetzt

$$y(x) = y_1(x) + K \cdot y_2(x) \quad .$$

Programmablaufplan

Zur Vereinfachung sind im Ablaufplan Abb.19 die Berechnung der Mittelwerte k und l nach RUNGE-KUTTA als Unterprogramme gezeichnet. Es ist darauf zu achten, daß bei der zweiten Durchrechnung nur der homogene Teil der Differentialgleichung f_{hom} genommen werden darf. Bei Taschenrechnern, die mit Flags ausgerüstet sind, läßt sich dieses durch Setzen eines Flags bequem erreichen. Flags sind elektronische Schalter, die man in einem Programm entweder setzt (einschaltet) oder löscht (ausschaltet).

2.3 Beispiel. Seil mit Schneelast

Die physikalische Theorie eines durchhängenden Seiles führt auf die Differentialgleichung

$$S \cdot y'' = - q(x)$$

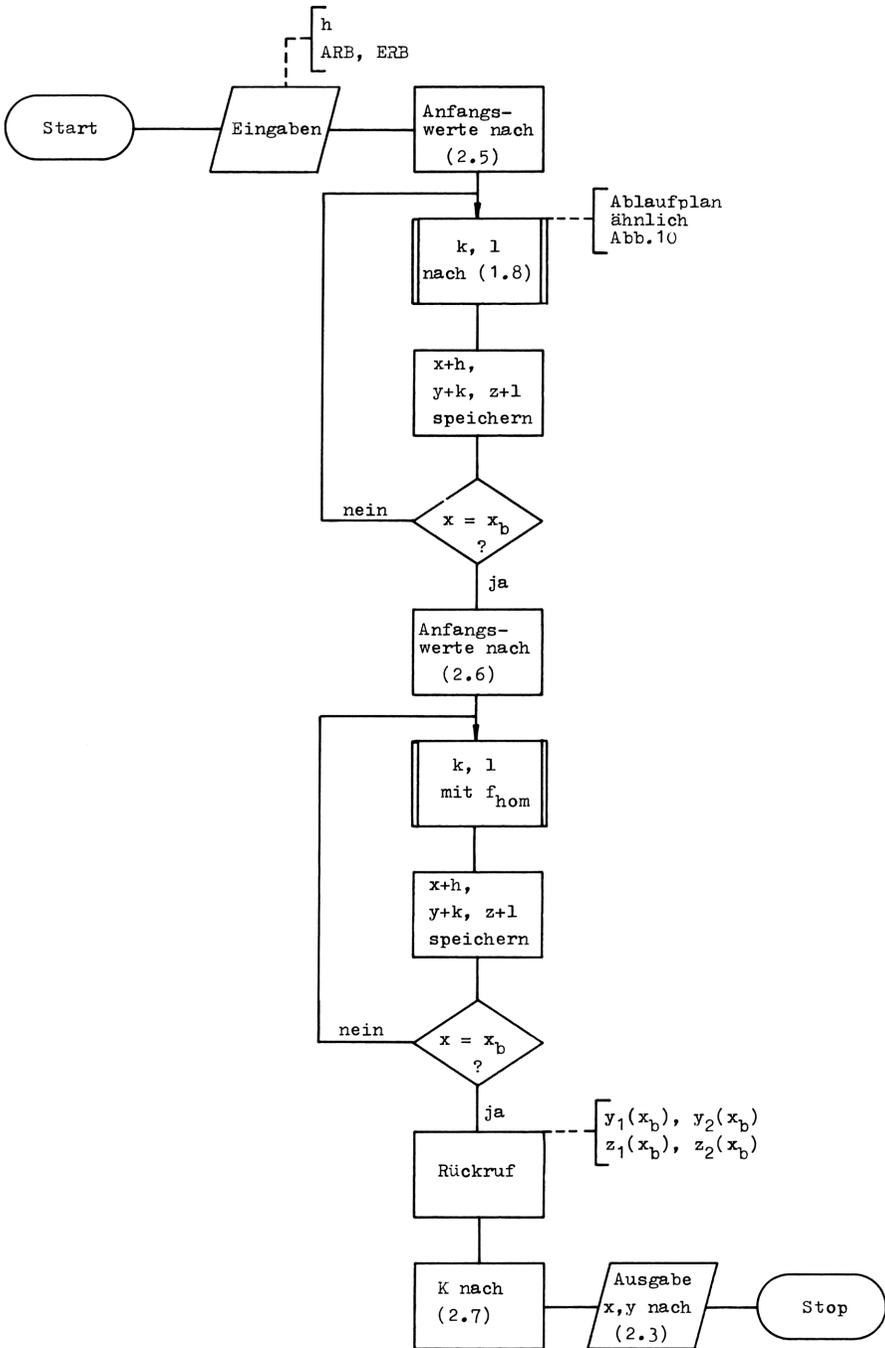


Abb. 19 Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Randwerten

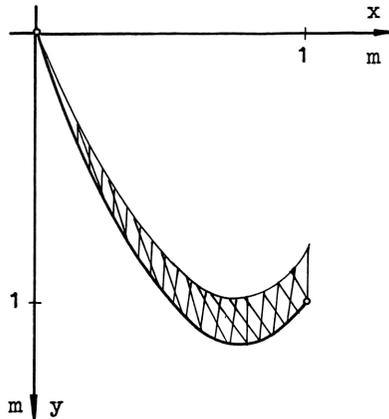


Abb. 20 Seil mit Schneelast

Seilzug S N , Last pro Längeneinheit q $\frac{N}{m}$.

Auf dem Seil liege eine Schneelast veränderlicher Stärke (Abb.20).

Wir approximieren diese Last durch die Funktion

$$q = q_0 \sin \left(\frac{\pi x}{2 x_b} \right) .$$

Dann lautet die Differentialgleichung

$$y'' = -\frac{q_0}{S} \sin \left(\frac{\pi x}{2 x_b} \right) .$$

Die Berechnung des Seildurchhanges $y(x)$ erfolgt mit dem Zahlenwert

$$\frac{q_0}{S} = 6 \frac{1}{m} , \text{ einer Schrittweite } h = 0,125 \text{ m}$$

und den Randwerten

ARB $x_a = 0$ m , $y(x_a) = 0$ m ; also $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $A = 0$

ERB $x_b = 1$ m , $y(x_b) = 1$ m ; also $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$, $B = 1$.

Das Rechenprogramm enthält keine Ausgabe der Teillösung y_1 und y_2 . In der Ergebniszusammenstellung sind sie aber mit aufgeführt.

x	y ₁	y ₂	y(x)	K = - 2,388
m	m	m	m	
0,000	0,000	0,000	0,000	
0,125	- 0,003	- 0,125	0,295	
0,250	- 0,024	- 0,250	0,573	
0,375	- 0,081	- 0,375	0,814	
0,500	- 0,190	- 0,500	1,004	
0,625	- 0,365	- 0,625	1,127	
0,750	- 0,618	- 0,750	1,173	
0,875	- 0,957	- 0,875	1,132	
1,000	- 1,388	- 1,000	1,000	

Programm für einen HP 67

Hauptprogramm

Unterpro-
gramme für
f und g

LBL A	STO+1	STO+4	CF 0	+	LBL B
RCL 1	R↓	STO+4	GTO A	RCL A	RCL C
STO A	GSB 0	GSB C	LBL 2	-X-	RTN
RND	STO-5	RCL 0	RCL B	R↓	LBL C
1	RCL 6	x	RCL 8	-X-	GSB a
x = y	STO-4	STO+5	x	GTO 5	RCL C
SF 2	3	STO+5	RCL C		x
RCL 2	STO:4	RTN	RCL 9		GSB b
STO B	STO:5	LBL 1	x		RCL B
F? 1	RCL 0	F? 1	+		x
GTO 3	STO+1	GTO 2	STO-7	+	
GTO 4	RCL 4	F? 0	0	F? 1	
LBL 5	STO+2	GTO 6	STO 1	GSB c	
RCL 3	RCL 5	RTN	RCL E	RTN	
STO C	STO+3	LBL 6	STO 2	LBL a	
F? 2	GTO A	RCL B	RCL D	LBL b	
GTO 1	LBL 0	RCL 8	CHS	0	
GSB B	RCL 3	x	STO 3	RTN	
RCL 0	+	RCL C	SF 0	LBL c	
x	STO C	RCL 9	CF 1	RAD	
STO 4	RCL 6	x	GTO A	RCL A	
STO 6	RCL 2	+	LBL 3	π	
GSB C	+	STO:7	ISZ	x	
RCL 0	STO B	0	STO(i)	2	
x	RCL 1	STO 1	GTO 5	:	
STO 5	RCL 0	RCL E	LBL 4	SIN	
GSB 0	+	STO 2	F? 0	6	
GSB 0	STO A	RCL D	GTO 5	x	
2	GSB B	CHS	ISZ	CHS	
STOx6	RCL 0	STO 3	RCL 7	+	
x	x	9	x	RTN	
RCL 0	STO 6	ST I	RCL(i)		

Vor dem Programmstart ist Flag 1 zu setzen!

Speicherplan

Die Werte $x_b = 1$ und $x_a = 0$ sind im Hauptprogramm die Programmschritte Nr.5 und Nr.88, Nr.108. Im Register I für die indirekte Steuerung ist die Zahl 9 zu speichern.

	A	B	C	D	E	I			
Wertepaare	x	y	z	α_1	α_2	9			
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{h}{2}$	x_a	ARB 1. Durchr.		belegt	belegt	belegt	B	β_1	β_2

Bei der ersten Durchrechnung werden die Funktionswerte y_1 in den Sekundärspeichern (maximal zehn Werte) gespeichert.

2.4 Differentialgleichung vierter Ordnung

Das beschriebene Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Randwerten läßt sich auch auf Differentialgleichungen vierter Ordnung anwenden. Eine Differentialgleichung vierter Ordnung

$$y^{IV} = f(x, y, y', y'', y''')$$

kann nach Kapitel 1.3 in zwei gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung überführt werden. Am Anfang und am Ende des Intervalls $x_a \leq x \leq x_b$ müssen somit bestimmte Aussagen über zwei ARB A_1 und A_2 und zwei ERB B_1 und B_2 vorliegen. Durch zwei ARB sind von den vier Funktionsdaten y, y', y'', y''' am Intervallanfang nur zwei festgelegt. Demnach kann noch über die beiden anderen als sogenannte freie Anfangswerte AW verfügt werden.

In der folgerichtigen Erweiterung des beschriebenen Verfahrens setzt sich die Lösung der linearen Differentialgleichung vierter Ordnung aus drei unabhängigen Teillösungen y_1, y_2 und y_3 zusammen

$$y(x) = y_1(x) + K_2 y_2(x) + K_3 y_3(x) \quad , \quad (2.8)$$

und zwar so, daß die Gesamtlösung $y(x)$, für beliebige Werte von K_2 und K_3 , der Differentialgleichung vierter Ordnung und den beiden ARB genügt. Die Anpassung der Lösung $y(x)$ an die zwei ERB erfolgt durch die Festlegung der bis dahin noch freien Faktoren K_2 und K_3 .

Beschreibung des Verfahrens

Die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$y^{IV} = f(x, y, y', y'', y''')$$

wird zunächst in zwei gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufgeteilt

$$\begin{aligned} y'' &= z \\ z'' &= f(x, y, y', z, z') \end{aligned} .$$

Beide werden im Intervall $x_a \leq x \leq x_b$ dreimal mit der konstanten Schrittweite

$$h = \frac{x_b - x_a}{N} \quad , \quad N \text{ ganze Zahl,}$$

als Anfangswertaufgabe nach RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM durchgerechnet (Abb.21).

Erste Durchrechnung für die Teillösung y_1 :

Die Differentialgleichung hat die vorgegebenen Anfangswerte bei Nullsetzung der beiden freien AWs

$$1. \text{ ARB} = A_1 ; \quad 2. \text{ ARB} = A_2 ; \quad 1. \text{ AW} = 0 ; \quad 2. \text{ AW} = 0 . \quad (2.9)$$

Notiert oder gespeichert werden die hierbei errechneten Funktionswerte $y_1(x)$ und die am Intervallende x_b erreichten Daten b_{11} und b_{12} der durch die zwei ERB gegebenen Funktionen.

Zweite Durchrechnung für die Teillösung y_2 :

Für diese Rechnung wird, bei gleicher Schrittweite h , nur der homogene Teil der Differentialgleichung f_{hom} genommen. Die Anfangswerte sind

$$1. \text{ ARB} = 0 ; \quad 2. \text{ ARB} = 0 ; \quad 1. \text{ AW} = 1 ; \quad 2. \text{ AW} = 0 . \quad (2.10)$$

Notiert oder gespeichert werden die Funktionswerte $y_2(x)$ und die am Intervallende x_b erreichten Daten b_{21} und b_{22} der interessierenden Funktionen.

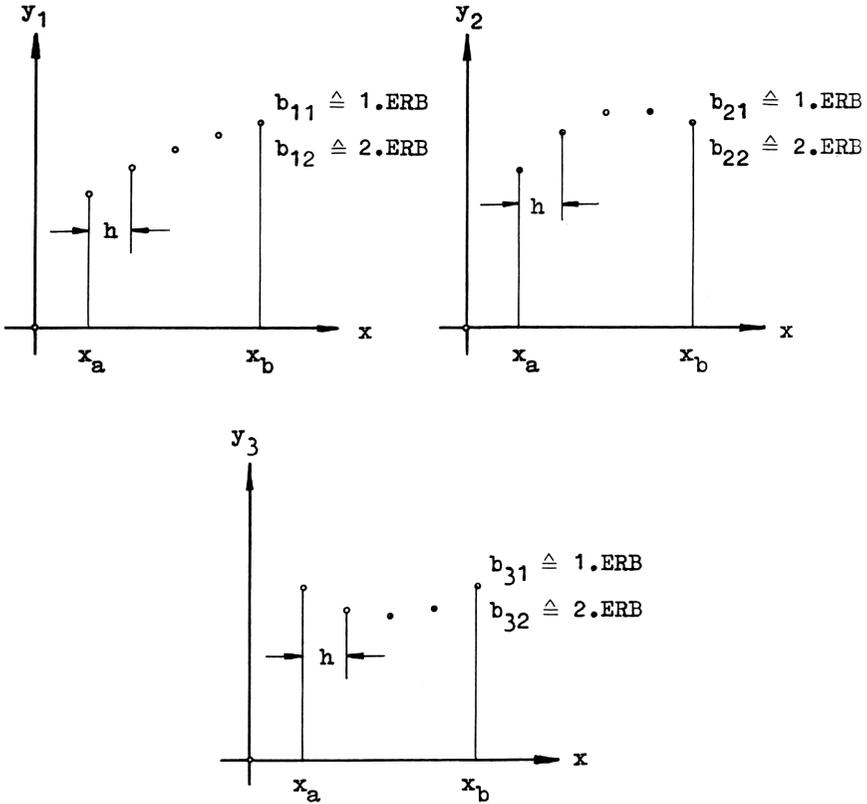


Abb. 21 Zur Lösung einer Randwertaufgabe

Dritte Durchrechnung für die Teillösung y_3 :

Bei gleichbleibender Schrittweite h wird nur mit dem homogenen Teil der Differentialgleichung gerechnet. Die Anfangswerte sind

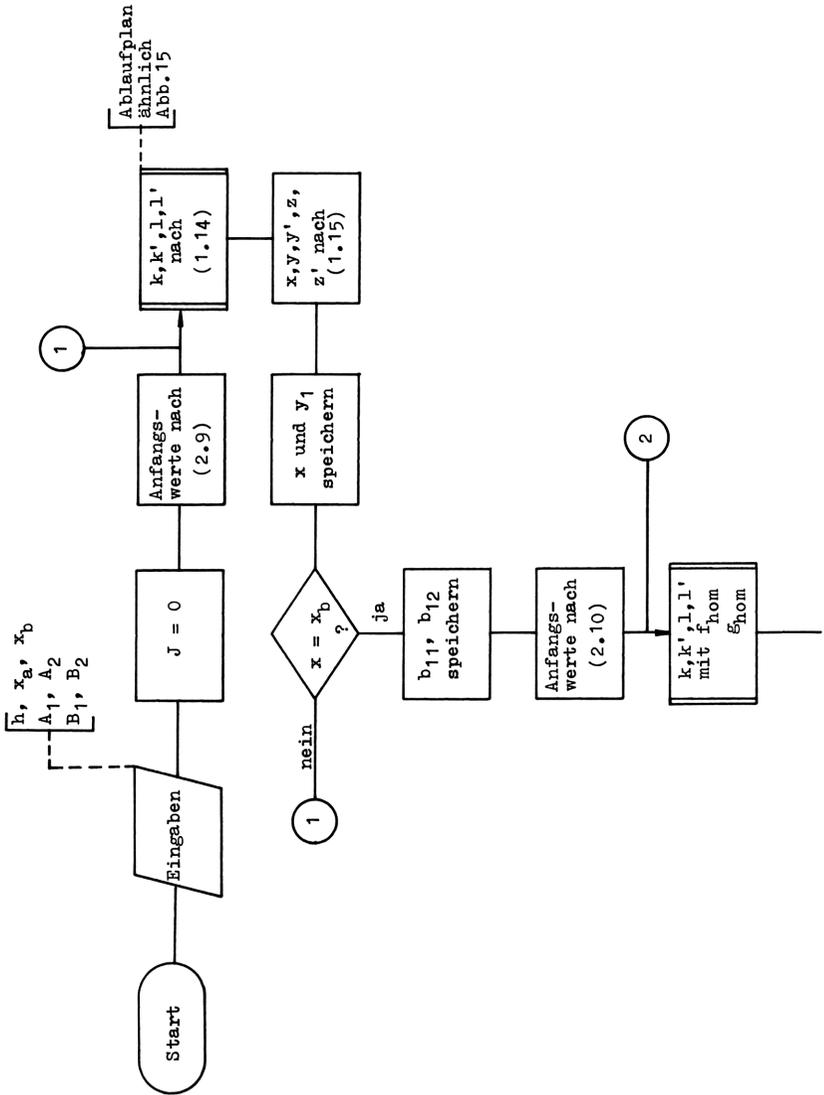
$$1. \text{ ARB} = 0 ; \quad 2. \text{ ARB} = 0 ; \quad 1. \text{ AW} = 0 ; \quad 2. \text{ AW} = 1 . \quad (2.11)$$

Die Funktionswerte $y_3(x)$ und die interessierenden Daten b_{31} und b_{32} am Intervallende werden notiert oder gespeichert.

Für die Anpassung der Lösung $y(x)$ an die zwei ERB B_1 und B_2 ergeben sich zwei Gleichungen mit den beiden unbekanntem Koeffizienten K_2 und K_3 :

$$b_{21} \cdot K_2 + b_{31} \cdot K_3 = B_1 - b_{11}$$

$$b_{22} \cdot K_2 + b_{32} \cdot K_3 = B_2 - b_{12} .$$



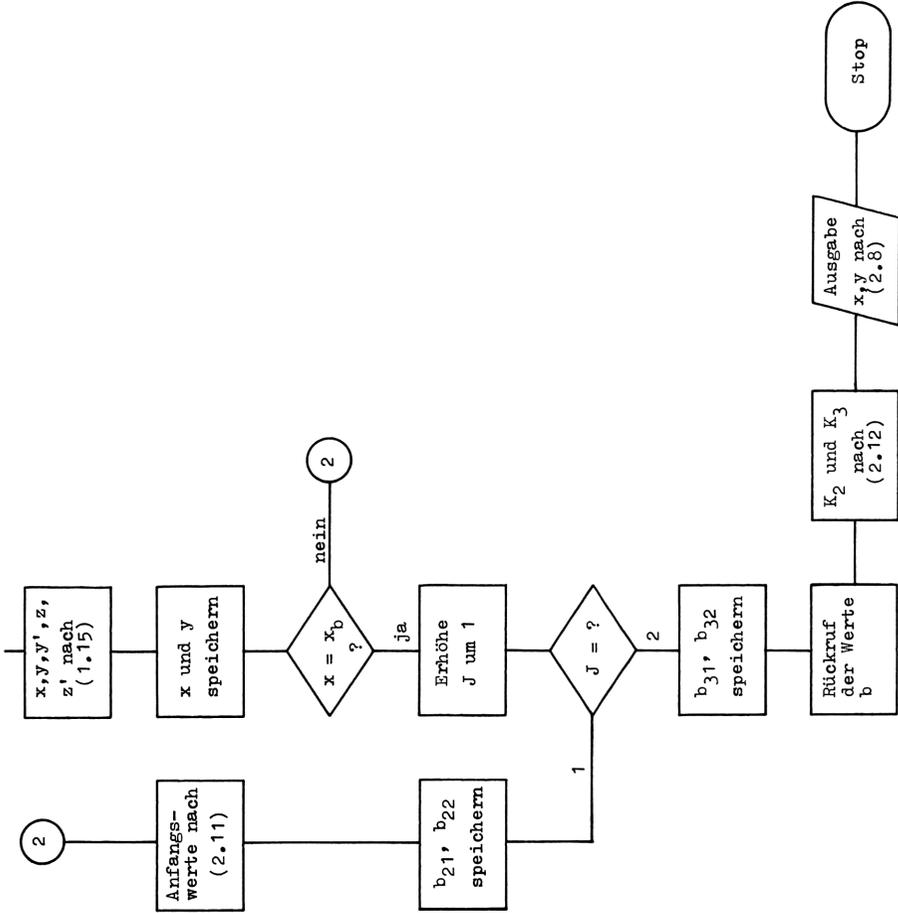


Abb. 22 Differentialgleichung vierter Ordnung mit Randwerten

Die Auflösung dieses Gleichungssystems nach K_2 und K_3

$$K_2 = \frac{(B_1 - b_{11})b_{32} - (B_2 - b_{12})b_{31}}{b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}} \quad (2.12)$$

$$K_3 = \frac{(B_2 - b_{12})b_{21} - (B_1 - b_{11})b_{22}}{b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}}$$

ermöglicht die notierten Werte der drei Funktionen y_1 , y_2 und y_3 zur Gesamtlösung (2.8) zusammzusetzen:

$$y(x) = y_1 + K_2 y_2(x) + K_3 y_3(x) \quad .$$

Programmablaufplan

Im Ablaufplan (Abb.22) ist die Berechnung der Mittelwerte k , k' , l und l' nach RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM als Unterprogramm gezeichnet. Zu beachten ist, daß die dreimalige Durchrechnung der Differentialgleichung mit jeweils anderen Anfangswerten erfolgen muß. Außerdem darf bei der zweiten und dritten Rechnung nur der homogene Teil der Differentialgleichung f_{hom} Verwendung finden, was sich durch das Setzen eines Flags wieder bequem erreichen läßt.

2.5 Beispiel. Belasteter Balken auf elastischer Unterlage

Die mathematische Beschreibung der Balkenbiegung (Abb.23) führt auf eine Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$EI \cdot y^{IV} + k \cdot y = q \quad ,$$

Biegesteifigkeit EI , Bettungsziffer k , Last pro Längeneinheit q . Die Differentialgleichung wird überführt in

$$EI \cdot y'' = z$$

$$z'' = q - k \cdot y \quad .$$

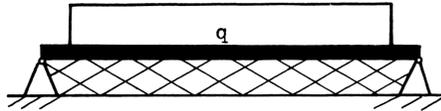


Abb. 23 Elastisch gebetteter Balken

Berechnet wird die Durchbiegung eines Trägers vom Normalprofil NP I 20, Länge 10 m, $EI = 4,5 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2$, $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, $q = 800 \frac{\text{N}}{\text{m}}$,

Randbedingungen

$$x_a = 0 \text{ m}, x_b = 10 \text{ m}$$

$$1. \text{ ARB } y(x_a) = 0 \qquad 1. \text{ AW } y'(x_a)$$

$$2. \text{ ARB } z(x_a) = 0 \qquad 2. \text{ AW } z'(x_a)$$

$$1. \text{ ERB } y(x_b) = 0$$

$$2. \text{ ERB } z(x_b) = 0$$

Schrittweite $h = 1 \text{ m}$.

Ergebnis

x m	y_1 m	y_2 m	y_3 m	$y(x)$ mm
0	$0,0 \cdot 10^{-3}$	0,0	$0,0 \cdot 10^{-6}$	0,0
2	0,119	2,0024	0,296	13,72
4	1,896	4,0187	2,370	22,00
6	9,600	6,0624	8,000	22,00
8	30,339	8,1453	18,961	13,72
10	$74,064 \cdot 10^{-3}$	10,2772	$37,027 \cdot 10^{-6}$	0,0

$$K_2 = 7,391 \cdot 10^{-3}$$

$$K_3 = -4,052 \cdot 10^{+3}$$

Programm für einen HP 67. Vor dem Start ist Flag 1 zu setzen!

Hauptprogramm

Unterprogramm für
f und g

LBL A	+	x	RCL 0	LBL 1	LBL B
0	2	STOx6	x	POS	POS
STO 6	x	STOx8	+	RCL A	RCL C
STO 7	GSB 3	RCL 6	RTN	STO 6	RCL 0
STO 8	LASTX	STO+1	LBL 4	RCL C	:
STO 9	+	RCL 8	R↓	STO 7	POS
RCL E	STO A	STO+3	RCL 4	POS	RTN
RND	RCL 4	GTO A	+	0	
-X-	R↑	LBL b	STO D	STO E	LBL C
1	+	RCL 0	RCL 5	STO 1	POS
0	LASTX	x	RCL 2	STO 3	RCL 1
x = y	+	STO 5	+	STO 2	RCL A
SF 2	STO D	STO+6	STO B	1	RCL 2
RCL 1	RCL 2	STO+7	GSB B	STO 4	x
STO A	RCL 5	RTN	GSB b	ISZ	F? 1
-X-	+	LBL c	STO+7	GTO A	+
RCL 2	STO B	RCL 0	GSB C	LBL 2	POS
STO B	GSB B	x	GSB c	POS	RTN
RCL 3	GSB b	STO+8	STO+9	RCL A	
STO C	STO-6	STO+9	RTN	RCL 6	
RCL 4	GSB C	ENTER		STO:8	
STO D	GSB c	RTN	LBL 0	:	
F? 2	STO-8	LBL 3	POS	ST I	
GTO(i)	3	RCL 0	RCL A	RCL 7	
GSB B	STO:6	x	STO-8	x	
GSB b	STO:7	RCL 3	RCL C	RCL C	
GSB C	STO:8	+	STO-9	-	
GSB c	STO:9	STO C	POS	RCL 7	
2	RCL 2	RCL E	1	RCL 8	
STO:5	STO+6	RCL 0	STO 2	x	
:	RCL 7	+	x I	STO-9	
RCL 4	STO+2	STO E	STO E	R↓	
+	RCL 4	R↑	STO 1	STO:9	
GSB 3	STO+8	RCL 1	STO 3	RCL 9	
STO A	RCL 9	RCL 2	CF 1	RC I	
GSB 4	STO+4	RCL 5	GTO A	x	
GSB 4	RCL 0	STO+5		STO+8	
RCL 4	2	+		RTN	

Die zweite Durchrechnung der Differentialgleichung beginnt mit dem Programmschritt Nr. 142, die dritte Durchrechnung mit Nr. 157 und die Lösung der zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten bei Nr. 166. Der errechnete Wert K_2 befindet sich anschließend im Datenspeicher 8 (18), minus K_3 im Speicher 9 (19) - Programm endet auf der Sekundärseite.

Speicherplan

Die interessierenden Daten am Intervallende x_b werden im Hauptprogramm abgefragt

1. ERB : Nr. 137, 152, 168,
2. ERB : Nr. 139, 154, 175 .

3. Differentialgleichungen mit Eigenwerten

3.1 Einführung

Wichtige technische Anwendungsgebiete werden durch homogene Randwertaufgaben beschrieben. Das sind Aufgaben, für die sowohl die Differentialgleichung als auch die Randbedingungen homogen ausfallen, d.h. in denen nur Glieder mit der Funktion y oder deren Ableitungen vorkommen. Solche Randwertaufgaben sind häufig Eigenwertprobleme. Darunter versteht man eine homogene Differentialgleichung, in der ein zunächst unbestimmter Parameter λ auftritt, z.B.

$$y'' = \lambda \cdot q \cdot y \quad .$$

Nur für ganz bestimmte Werte dieses Parameters λ , der auch in den Randbedingungen enthalten sein kann, wird die Randwertaufgabe lösbar. Eigenschwingungszahlen schwingungsfähiger Systeme oder das Knicken eines Stabes sind solche Eigenwertprobleme. Hier

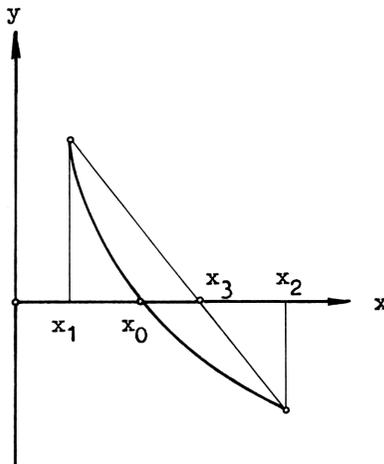


Abb. 24 Regula falsi

ist das Ziel der Rechnung das Auffinden der speziellen λ - Werte, der sogenannten Eigenwerte. Damit sind die Eigenwertaufgaben eng mit den Randwertaufgaben des vorigen Kapitels verbunden.

Das systematische Herantasten an den unbekanntem Parameterwert, der eine Lösung garantiert, gelingt sehr gut mit Hilfe der einfachen Regula falsi. Diese alte numerische Methode sorgt für die angenäherte Bestimmung der Nulldurchgänge (Wurzeln) beliebiger Funktionen. Zwischen zwei "falschen Ansätzen" (Schätzwerten) x_1 und x_2 wird die Funktion $y(x)$ durch eine Gerade ersetzt (Abb.24). Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der x -Achse wird als verbesserter Schätzwert x_3 genommen. Auf diese Weise tastet man sich numerisch immer näher an den exakten Nulldurchgang x_0 heran.

3.2 Differentialgleichung zweiter Ordnung

Die Randwertaufgabe des Kapitels 2.2 vereinfacht sich für den homogenen Fall:

Differentialgleichung

$$y'' = f(x, y, y') = p \cdot y' + q \cdot y \quad (3.1)$$

Randbedingungen

$$\text{ARB:} \quad \alpha_1 y(x_a) + \alpha_2 y'(x_a) = 0 \quad (3.2)$$

$$\text{ERB:} \quad \beta_1 y(x_b) + \beta_2 y'(x_b) = 0 \quad .$$

Der Lösungsansatz reduziert sich auf

$$y(x) = K \cdot y_2(x) \quad , \quad (3.3)$$

d.h. die Eigenlösung (Eigenfunktion, Eigenvektor) $y(x)$ läßt sich nur bis auf einen Faktor K bestimmen.

Beschreibung des Verfahrens

Die homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung wird in der bekannten Weise in zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster

Ordnung überführt. Dann werden beide im Intervall $x_a \leq x \leq x_b$ mit der konstanten Schrittweite

$$h = \frac{x_b - x_a}{N} \quad , \quad N \text{ ganze Zahl,}$$

und einem geschätzten λ - Wert als Anfangsaufgabe nach RUNGE-KUTTA durchgerechnet (Abb.25), mit folgenden Anfangswerten:

$$y_2(x_a) = \alpha_2 \quad \text{und} \quad y_2'(x_a) = z_2(x_a) = -\alpha_1 \quad . \quad (3.4)$$

Von Interesse sind nur die mit dem λ - Wert erreichten Daten $y_2(x_b)$ oder $y_2'(x_b) = z_2(x_b)$ am Intervallende x_b bzw. der Wert der entsprechenden Linearkombination

$$\beta_1 y_2(x_b) + \beta_2 z_2(x_b) = B \quad . \quad (3.5)$$

Bei der richtigen Wahl von λ wird B nach Voraussetzung (3.2) zu Null. Dieser Nulldurchgang der Linearkombination $B(\lambda)$ läßt sich mit der Regula falsi finden (Abb.26). Sie verläuft nach dem folgenden Rechnungsgang:

Aus der Differenz zweier aufeinanderfolgender Werte B,

$$\Delta = B_n - B_{n+1} \quad , \quad (3.6)$$

errechnet sich der Zuwachs des Parameters λ

$$(\Delta \lambda)_{n+1} = \frac{\Delta \lambda_n}{\Delta} B_{n+1} \quad (3.7)$$

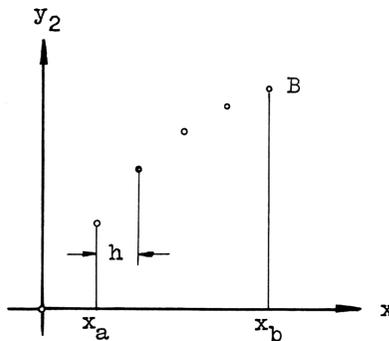


Abb. 25 Zur Lösung einer Eigenwertaufgabe

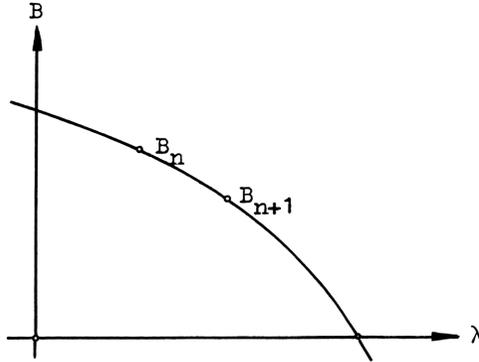


Abb. 26 Zur Lösung einer Eigenwertaufgabe

und damit der verbesserte λ - Wert

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + (\Delta\lambda)_{n+1} \quad \text{usw.} \quad (3.8)$$

Der Startwert für λ und $\Delta\lambda$ wird geschätzt, sowie der erste, in der Rechnung benötigte Wert B für $n = 0$, $B_0 = 0$ gesetzt. Die Rechnung muß durch die Vorgabe einer Genauigkeitsschranke für den Zuwachs $\Delta\lambda$ begrenzt werden, z.B. auf vier Stellen nach dem Komma. Der so ermittelte Eigenwert λ ist aber nur eine mögliche Lösung. Weitere λ - Werte findet man mit anderen Startwerten.

Die Konvergenz der Regula falsi bei Eigenwertaufgaben ist sehr gut. Trotzdem kann eine Kontrollausgabe für λ oder $\Delta\lambda$ im Programm vorteilhaft sein.

Programmablaufplan

An einen für den homogenen Fall vereinfachten Ablaufplan der Randwertaufgabe Abb.19 wird die Regula falsi angehängt und die Rechnung mit einer Genauigkeitsschranke abgeschlossen (Abb.27).

3.3 Beispiel. Schwingende Saite veränderlicher Stärke

Eine elastische Saite sei an den Enden eingespannt. Sie wird angezupft. Gesucht ist die Frequenz der Schwingung.

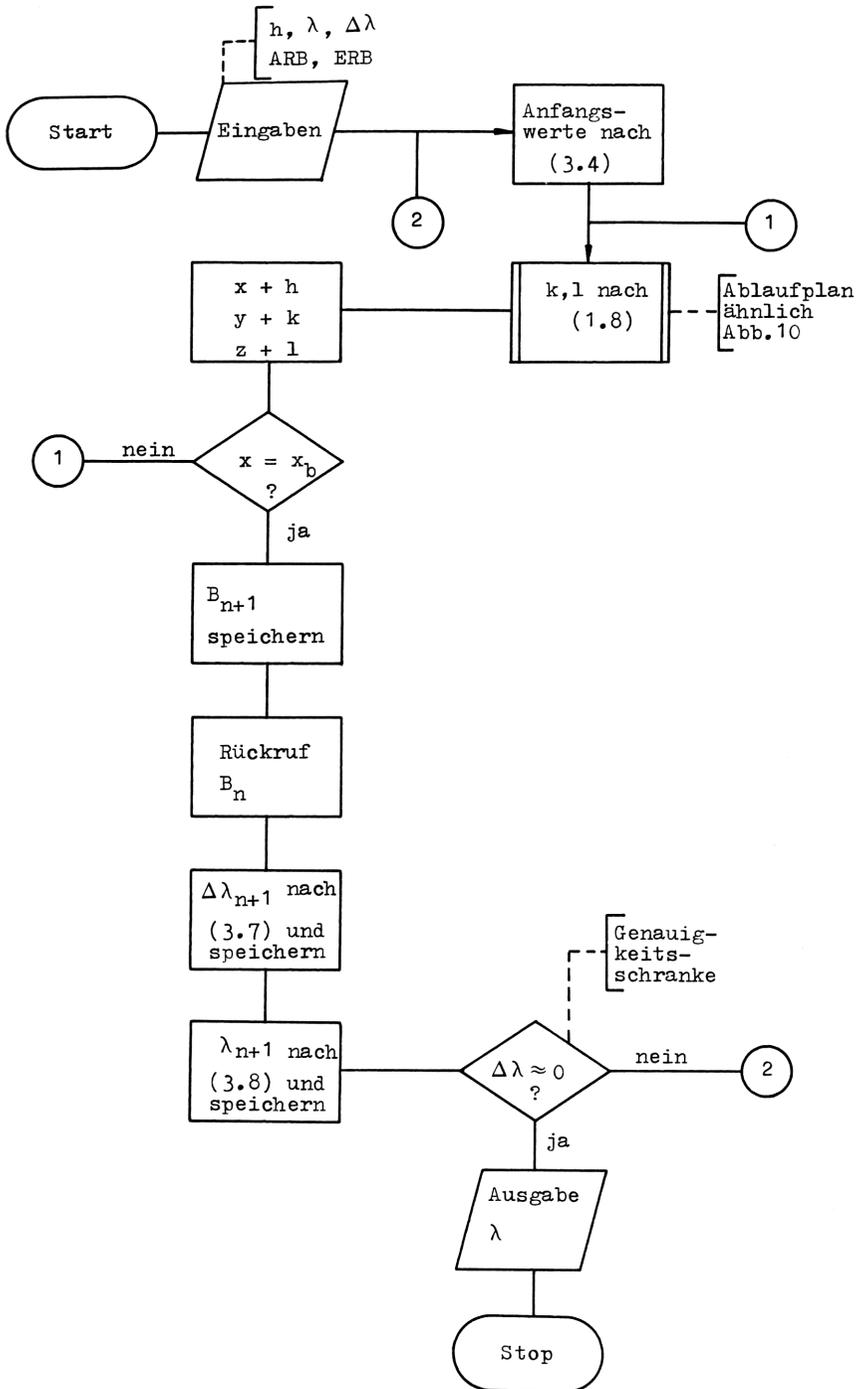


Abb. 27 Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Eigenwerten

Die zu lösende Differentialgleichung ist

$$S \cdot y'' + \lambda \cdot m(x) \cdot y = 0$$

Parameter $\lambda = \omega^2$, Seilzug S N, Winkelgeschwindigkeit ω $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$,

Masse pro Längeneinheit $m = \frac{Ns^2}{\text{m}^2}$.

Die Saite soll in der Mitte doppelt so stark als an den Rändern sein. Wir approximieren daher die Masse m durch die Funktion

$$m = m_0 \left(1 + \sin \pi \frac{x}{x_b} \right) .$$

Dann lautet die Differentialgleichung

$$y'' = - \lambda \frac{m_0}{S} \cdot \left(1 + \sin \pi \frac{x}{x_b} \right) \cdot y .$$

Die Berechnung des Parameters λ erfolgt mit den Zahlenwerten

$$\frac{m_0}{S} = 3,24 \cdot 10^{-6} \frac{\text{s}^2}{\text{m}}, \quad x_a = 0 \text{ m}, \quad x_b = 1 \text{ m}, \text{ Schrittweite}$$

$h = 0,1 \text{ m}$, den Randwerten

ARB $x_a = 0 \text{ m}$, $y(x_a) = 0 \text{ m}$; also $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$,

ERB $x_b = 1 \text{ m}$, $y(x_b) = 0 \text{ m}$; also $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$,

erster Schätzwert $\lambda = 10^7$, $\Delta \lambda = 10^6$, Genauigkeitsschranke eine Stelle nach dem Komma.

Ergebnis:

Parameter $\lambda = 7\,242\,293 = \omega^2$

Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi} = 428 \text{ Hz}$

Das Ergebnis wurde mit dem folgenden Programm auf einem HF 67 gerechnet:

Hauptprogramm

Unterpro-
gramme für
 f , g und B

LBL A	2	RCL 6	RCL 9
RCL 1	STOx6	RCL 2	x↺y
STO A	x	+	STO 9

LBL B
RCL C
RTN

RND	RCL 0	STO B	-	LBL C
1	STO+1	RCL 1	STO:8	RAD
x = y	R↓	RCL 0	RCL 8	RCL A
SF 2	GSB 0	+	STO+7	π
RCL 2	STO-5	STO A	RND	x
STO B	RCL 6	GSB B	x \neq 0	SIN
RCL 3	STO-4	RCL 0	GTO 2	1
STO C	3	x	RCL 7	+
F? 2	STO:4	STO 6	RTN	P↻S
GTO 1	STO:5	STO+4	LBL 2	RCL 1
GSB B	RCL 0	STO+4	0	P↻S
RCL 0	STO+1	GSB C	STO 1	x
x	RCL 4	RCL 0	RCL D	RCL B
STO 4	STO+2	x	STO 2	x
STC 6	RCL 5	STO+5	RCL E	RCL 7
GSB C	STO+3	STO+5	STO 3	x
RCL 0	GTO A	RTN	GTO A	CHS
x	LBL 0	LBL 1		RTN
STO 5	RCL 3	GSB a		LBL a
GSB 0	+	PAUSE		RCL B
GSB 0	STO C	STOx8		RTN

Die Regule falsi beginnt mit dem Programmschritt Nr. 69. Die Linearkombination B wird im Unterprogramm LBL a berechnet und zur Konvergenzkontrolle angezeigt. Die Genauigkeitsschranke entspricht dem eingestellten Anzeigeformat.

Speicherplan

	A	B	C	D	E				
Wertepaare	x	y	z	α_2	$-\alpha_1$				
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{h}{2}$	x_a	α_2	$-\alpha_1$	belegt	belegt	belegt	λ	$\Delta\lambda$	B_n
10	11	12	bis	19					
frei	$\frac{m_0}{S}$		frei						

3.4 Differentialgleichung vierter Ordnung

Für eine Differentialgleichung vierter Ordnung sind im homogenen Falle beide ARB und beide ERB Null:

$$1. \text{ ARB} = 0 ; \quad 2. \text{ ARE} = 0 ; \quad 1. \text{ ERB} = 0 ; \quad 2. \text{ ERB} = 0 .$$

Der Lösungsansatz (2.8) reduziert sich auf

$$y(x) = K_2 \cdot y_2(x) + K_3 \cdot y_3(x) \quad (3.9)$$

Beschreibung des Verfahrens

Die homogene Differentialgleichung vierter Ordnung wird in der bekannten Weise in zwei gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung überführt. Beide Gleichungen werden dann im Intervall $x_a \leq x \leq x_b$ zweimal mit der konstanten Schrittweite

$$h = \frac{x_b - x_a}{N}, \quad N \text{ ganze Zahl,}$$

und einem geschätzten λ -Wert als Anfangswertaufgabe nach RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM durchgerechnet.

Die erste Durchrechnung für die Teillösung y_2 erfolgt mit den Anfangswerten

$$1. \text{ ARB} = 0; \quad 2. \text{ ARB} = 0; \quad 1. \text{ AW} = 1; \quad 2. \text{ AW} = 0. \quad (3.10)$$

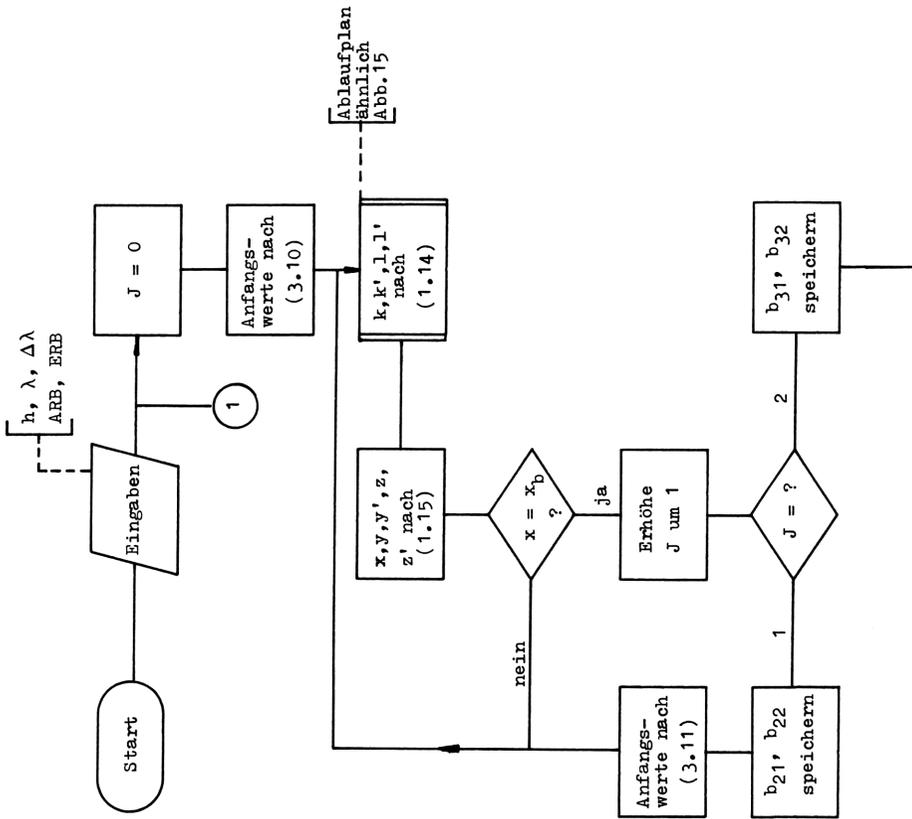
Von Interesse sind nur die mit dem geschätzten λ -Wert am Intervallende x_b erreichten Daten b_{21} und b_{22} , der Funktionen, die durch die ERB gegeben sind.

Die zweite Durchrechnung für die Teillösung y_3 erfolgt mit den Anfangswerten

$$1. \text{ ARB} = 0; \quad 2. \text{ ARB} = 0; \quad 1. \text{ AW} = 0; \quad 2. \text{ AW} = 1. \quad (3.11)$$

Die am Intervallende interessierenden Daten seien b_{31} und b_{32} . Das Gleichungssystem zur Anpassung an die Forderung, beide ERB gleich Null, hat die beiden Unbekannten K_2 und K_3 :

$$\begin{aligned} b_{21} \cdot K_2 + b_{31} \cdot K_3 &= 0 \\ b_{22} \cdot K_2 + b_{32} \cdot K_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$



Um triviale Lösungen ($K_2 = K_3 = 0$) auszuschließen, muß die Hauptdeterminante zu Null werden

$$D = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{31} \\ b_{22} & b_{32} \end{vmatrix} = b_{21} \cdot b_{32} - b_{31} \cdot b_{22} = 0 \quad (3.13)$$

Dieser Nulldurchgang der Hauptdeterminante $D(\lambda)$ kann wieder mit der Regula falsi gefunden werden:

Aus der Differenz zweier aufeinanderfolgender Determinantenwerte

$$\Delta = D_n - D_{n+1} \quad (3.14)$$

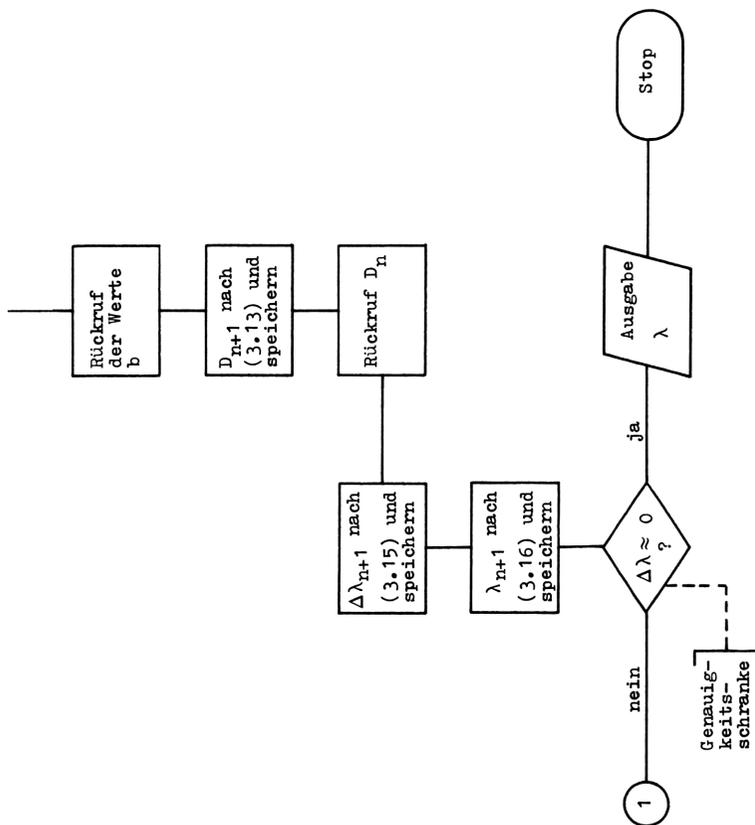


Abb. 28 Differentialgleichung vierter Ordnung mit Eigenwerten

errechnet sich der Zuwachs für den Parameter λ

$$(\Delta\lambda)_{n+1} = \frac{\Delta\lambda_n}{\Delta} D_{n+1} \quad (3.15)$$

und damit der verbesserte λ -Wert

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + (\Delta\lambda)_{n+1} \quad \text{usw.} \quad (3.16)$$

Der Startwert für λ und $\Delta\lambda$ wird geschätzt, der erste benötigte Wert D für $n = 0$, $D_0 = 0$ gesetzt. Die Rechnung wird durch eine Genauigkeitsschranke für den Zuwachs $\Delta\lambda$ begrenzt. Weitere λ -Werte, falls vorhanden, findet man durch die Vorgabe anderer Startwerte.

Programmablaufplan

An einen für den homogenen Fall vereinfachten Ablaufplan der früheren Randwertaufgabe Abb. 22 wird die Regula falsi angehängt und die Rechnung mit einer Genauigkeitsschranke abgeschlossen (Abb. 28).

3.5 Beispiel. Knickung eines Stabes unter seinem Eigengewicht

Wir betrachten ein Stabilitätsproblem. Ein senkrechter, unten eingespannter Stab konstanter Biegesteifigkeit EI werde in der Längsachse durch eine Kraft F belastet (Abb. 29). Die Suche nach der kritischen Last aus Kraft und Eigengewicht, bei der eine Knickung des Stabes eintritt, führt auf die homogene Differentialgleichung

$$EI \cdot y^{IV} = [G_0(1-x) \cdot y']' - (F + G_0 l) \cdot y'' \quad ,$$

mit dem Eigengewicht pro Längeneinheit des Stabes $G_0 = \frac{N}{m}$.

Wird die äußere Kraft $F = 0$ gesetzt, so geht die Gleichung nach kurzer Umformung über in

$$y^{IV} = -\lambda(x \cdot y'' + y') \quad ,$$

mit dem Parameter $\lambda = \frac{G_0}{EI}$ aus Eigengewicht und Biegesteifigkeit.

Dieses ist die mathematisch-physikalische Formulierung der Spruchweisheit, daß die Bäume nicht in den Himmel wachsen. Die Grenze des Wachstums gibt die Lösung der Eigenwertaufgabe an. Sie erfolgt für die Zahlenwerte $x_a = 0$ m, $x_b = 1$ m, Schrittweite $h = 0,1$ m, den Randbedingungen

1. ARB $y(x_a) = 0$	1. AW $y'(x_a)$
2. ARB $z(x_a) = 0$	2. AW $z'(x_a)$
1. ERB $y'(x_b) = 0$	
2. ERB $z'(x_b) = 0$	

erster Schätzwert $\lambda = 10$ und $\Delta\lambda = 1$.

Ergebnis $\lambda = 7,8377$. Weitere Durchrechnung mit anderen Stablängen $l = x_b$ führt zu der Gleichung

$$\frac{G_0 l^3}{EI} = 7,8377 \quad .$$

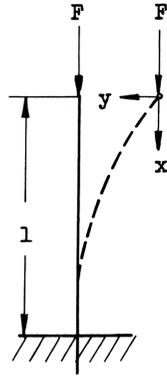


Abb. 29
Knickung eines Stabes

Gerechnet wurde mit dem folgenden Programm auf einem HP 67:

Hauptprogramm

```

LBL A      :      RCL 2      +      STO 5
1          RCL 4      STO+6      STO C      RCL D
STO 2      +      RCL 7      RCL E      STO 6
0          GSB 3      STO+2      RCL 0      P↻S
STO 4      STO A      RCL 4      +      1
STO 1      GSB 4      STO+8      STO E      STO 4
STO 3      GSB 4      RCL 9      R↓      x↻I
STO E      RCL 4      STO+4      RCL 1      STO E
ST I      +      RCL 0      RCL 2      STO 2
LBL a     2          2          RCL 5      STO 1
0          x          x          STO+5      STO 3
STO 6      GSB 3      STOx6      +      GTO a
STO 7      LASTX     STOx8      RCL 0
STO 8      +      RCL 6      x
STO 9      STO A     STO+1      +      LBL 1
RCL E      RCL 4     RCL 8      RTN      P↻S
RND        R↓      STO+3      LBL 4
1          +      GTO a      R↓      RCL 4
x = y     LASTX     LBL b      RCL 4
SF 2      +      RCL 0      +      RCL 6
RCL 1     STO D     x          STO D
STO A     RCL 2     STO 5      RCL 5
RCL 2     RCL 5     STO+6      RCL 2
STO B     +      STO+7      +      STOx8
RCL 3     STO B     RTN      STO B
STO C     GSB B     LBL c      GSB B
RCL 4     GSB b     RCL 0      GSB b
STO D     STO-6     x          STO+7
P? 2     GSB C     STO+8      GSB C
GTO(i)   GSB c     STO+9      GSB c
GSB B     STO-8     EMTR      STO+9
GSB b     3        RTN      RTN
GSB C     STO:6     LBL 3
GSB c     STO:7     RCL 0
2         STO:8     x
STO:5     STO:9     RCL 3

```

Unterpro-
gramm für
f und g

```

LBL B
RCL C
RTN
LBL C
RCL E
RCL C
x
RCL B
+
P↻S
RCL 7
x
CHS
P↻S
RTN

```

```

RCL 5
-
-X-
STOx8
RCL 9
x↻y
STO 9
-
STO:8
RCL 8
STO+7
RND
x = 0
RTN
P↻S
P↻S
GTO A

```

Die zweite Durchrechnung der Differentialgleichung beginnt beim Programmschritt Nr. 148 und die Regula falsi bei Nr. 166. Die Determinante D wird unter LBL 1 (Nr.156) berechnet und zur Konvergenzkontrolle angezeigt. Die Genauigkeitsschranke entspricht dem eingestellten Anzeigeformat.

Speicherplan

Die interessierenden Daten am Intervallende x_p werden im Hauptprogramm abgefragt

- 1. ERB : Nr. 143 und Nr. 161
- 2. ERB : Nr. 145 und Nr. 158 .

Die Anfangsbedingungen für die erste Durchrechnung sind im Programm die Nr. 1 bis 7, für die zweite Durchrechnung die Nr. 148 bis 154. Im Register I für die indirekte Steuerung ist die Zahl 0 zu speichern.

	A	B	C	D	E	I
Wertepaare	y	y'	z	z'	x	Beginn: 0
0	1	2	3	4	5	bis 9
$\frac{h}{2}$	$y(x_a)$	$y'(x_a)$	$z(x_a)$	$z'(x_a)$	belegt für $k, k',$ l, l'	
	Anfangswerte					
10	bis	14	15	16	17	18 19
	frei		belegt für	λ	$\Delta\lambda$	D_n
			b_{21}	b_{22}		

Teil B

Partielle Differentialgleichungen

4. Einführung, Gitterpunktmethod

Fast noch zahlreicher als für gewöhnliche Differentialgleichungen sind die Anwendungsgebiete der partiellen Differentialgleichungen. Durch die Möglichkeit, sie auf Rechenautomaten zu lösen, gewinnen sie in den letzten Jahren zunehmend an Bedeutung für alle Ingenieurwissenschaften. Auch programmierbare Taschenrechner sind zur Lösung geeignet. Die folgenden Kapitel sollen daher den partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gehören. Ihre Typenbezeichnungen erhalten sie nach wichtigen technisch-physikalischen Anwendungsgebieten:

$$\text{Wärmeleitung} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\text{Wellengleichung} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\text{Telegraphengleichung} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + b^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(Wanderwelle)

$$\text{Stromverdrängung} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

(Skineffekt)

$$\text{Membranschwingung} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\text{Poissonsche - ,} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$$

Potentialgleichung

Bei zwei unabhängigen Veränderlichen x und y bzw. x und t wird als Lösung eine Funktion u gesucht, eine Fläche im x t u - Koordinatensystem, die die Differentialgleichung erfüllt und zusätzlich vorgegebene Anfangs- und Randwerte einhält (Abb.30). Bei drei unabhängigen Veränderlichen muß die gesuchte Lösung einen Raum im x y t u - Koordinatensystem umfassen. Was Wunder, daß die Theorie

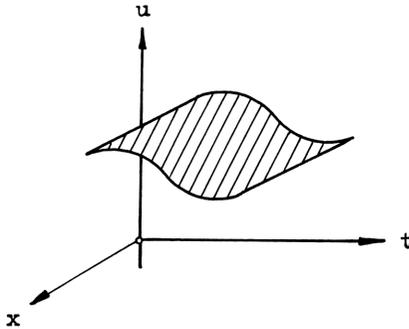


Abb. 30 Fläche als Lösung einer partiellen Differentialgleichung

der partiellen Differentialgleichungen zu den schwierigen Kapiteln der Mathematik gerechnet wird. Vor diesem Hintergrund hebt sich die Gitterpunktmethode (Differenzenverfahren) als eine einfache, numerische Näherungslösung wohltuend ab. Das Verfahren ist seit langem bekannt. Es geht auf Leonhard Euler (1707 bis 1783) zurück und ist auch auf programmierbaren Taschenrechnern leicht zu realisieren. Heute zählt es zu den wirkungsvollen Lösungsmethoden, nicht nur für partielle Differentialgleichungen, sondern auch für nichtlineare Aufgaben der mathematischen Physik. Die Grundgedanken der Gitterpunktmethode sind:

Das Gebiet, in dem man die Lösung u sucht, wird mit einem regelmäßigen Punktegitter überzogen, welches aus gleichen, meist rechteckigen oder quadratischen Zellen besteht (Abb.31).

Die vorliegende partielle Differentialgleichung wird in den Gitterpunkten durch eine Differenzengleichung ersetzt.

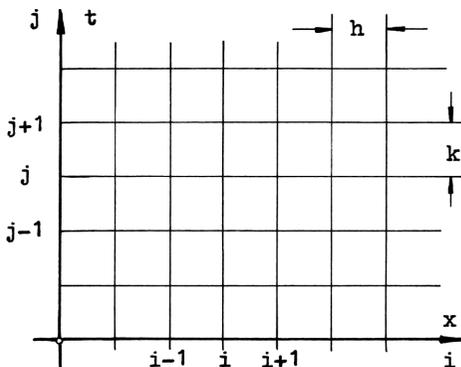


Abb. 31 Gitterpunktmethode

Aus dem Differenzenansatz entsteht ein (lineares) Gleichungssystem, dessen Lösung näherungsweise den jeweiligen Wert der Funktion u in den einzelnen Gitterpunkten angibt. Vielfach erhält man eine sehr einfach aufgebaute Rekursionsformel, in der ein einzelner noch unbekannter u -Wert mehreren bereits bekannten gegenübersteht. Durch wiederholtes Anwenden dieser Rekursionsformel lassen sich die u -Werte in allen Gitterpunkten finden. Eine solche mechanische Wiederholung gleichartiger Rechenzyklen führt aber zu einfachen und kurzen Rechenprogrammen, wie es Taschenrechner erfordern.

Für die Güte der Näherung ist es wichtig, wie der Differentialquotient durch einen Differenzenquotienten ersetzt wird. Man sollte, wenn möglich, nur zentrale Differenzenformeln benutzen. Das sind Formeln, in denen die Tangentenneigung in einem Gitterpunkt P durch die Steigung der Sehne zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten ersetzt wird (Abb.32). Die richtige Wahl der Schrittweite h ist, wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen, von zentraler Bedeutung. Der Gitterpunkt P habe die Koordinaten

$$\begin{aligned}x &= i \cdot h \\t &= j \cdot k \quad ,\end{aligned}$$

die beiden benachbarten Punkte

$$\begin{aligned}x + h &= (i+1) \cdot h & \text{und} & & x - h &= (i-1) \cdot h \\t + k &= (j+1) \cdot k & \text{und} & & t - k &= (j-1) \cdot k\end{aligned}$$

und der Funktionswert im Punkte P sei $u_{i,j}$.

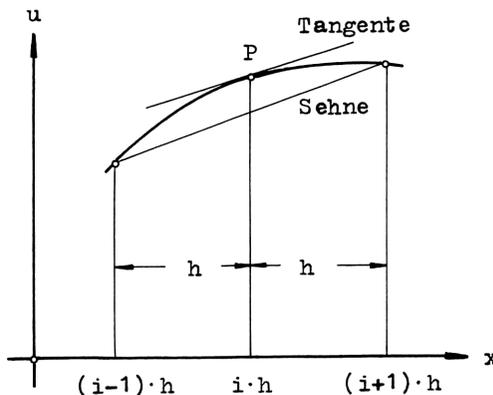


Abb. 32 Tangente und Sehne bei Zentralformeln

Dann wird für das Gitterpunktverfahren ersetzt die erste Ableitung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}$$

mit einem Fehler von der Ordnung h^2 bzw. k^2 , die zweite Ableitung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

mit einem Fehler von der Ordnung h^2 bzw. k^2 , eine gemischte Ableitung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4 \cdot hk}$$

mit einem Fehler von der Ordnung $(h+k)^2$.

Schwierigkeiten können bei der mathematischen Formulierung der Anfangs- und Randbedingungen auftreten, weil die Zentralformeln an den Rändern u -Werte "jenseits" des Anfangs oder des Randes fordern. Sind diese u -Werte nicht bekannt, so ersetze man den Differentialquotienten durch eine "einseitige" Differenzenformel

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} .$$

Dieses ist z.B. der Fall bei der Differentialgleichung vom Typ "Wärmeleitung" und "Stromverdrängung".

5. Wärmeleitung

5.1 Problemstellung und Lösungsweg

Die Betrachtung einer gedämpften, zeitlichen Energieströmung in nur einer Richtung führt auf die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad . \quad (5.1)$$

Ihre wichtige technische Anwendung ist die Wärmeleitung. Hier wird u zur Temperaturerhöhung, die vom Ort x und der Zeit t abhängt. a ist eine Materialkonstante aus Materialdichte ρ , spezifische Wärmekapazität c und Wärmeleitvermögen λ :

$$a = \frac{\rho \cdot c}{\lambda} \quad .$$

Beschreibung des Verfahrens

Die Differentialgleichung wird zunächst durch die Substitution

$$t = a \cdot \tau \quad (5.2)$$

vereinfacht:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad . \quad (5.3)$$

Dann ersetzt man, wie im Kapitel 4 beschrieben, die beiden Differentialquotienten durch Differenzenquotienten. Meist ist aber die Temperaturverteilung nur zu Beginn ($t = 0$) der Wärmeströmung

bekannt, nicht aber auch noch davor. So ersetzen wir $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ durch eine "einseitige" Differenzenformel

$$\frac{u_{i+1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$

$$x = i \cdot h$$

$$\tau = j \cdot k \quad .$$

Wählt man die Abmessungen der Gitterzelle h und k nicht unabhängig voneinander, sondern setzt

$$k = n \cdot h^2 \quad , \quad (5.4)$$

so ergibt sich in den Gitterpunkten die einfache Beziehung

$$u_{i,j+1} = n (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2 \cdot u_{i,j}) + u_{i,j} \quad . \quad (5.5)$$

Diese Rekursionsformel ist eine Gleichung zwischen der unbekannt-ten Temperaturerhöhung $u_{i,j+1}$ im Gitterpunkt i der Zeitzeile $j+1$ und drei bekannten Temperaturerhöhungen aus der Zeitzeile j . Die Abb. 33 soll die Rekursionsformel veranschaulichen. Der unbe-kannte u -Wert ist durch einen leeren Kreis, die bekannten sind durch volle Kreise gekennzeichnet. Die wiederholte Anwendung der Rekursion ergibt die Temperaturerhöhung in allen Gitterpunkten der Zeitzeile $j+1$ im betrachteten Gebiet von $i = 0$ bis $i = 1$;

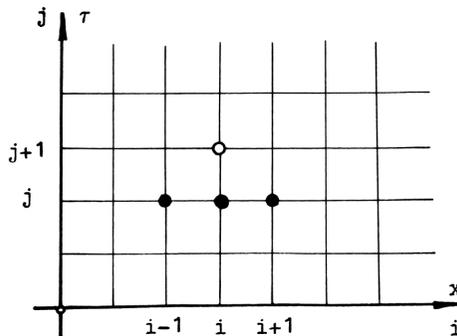


Abb. 33 Rekursion: Gleichung (5.5)

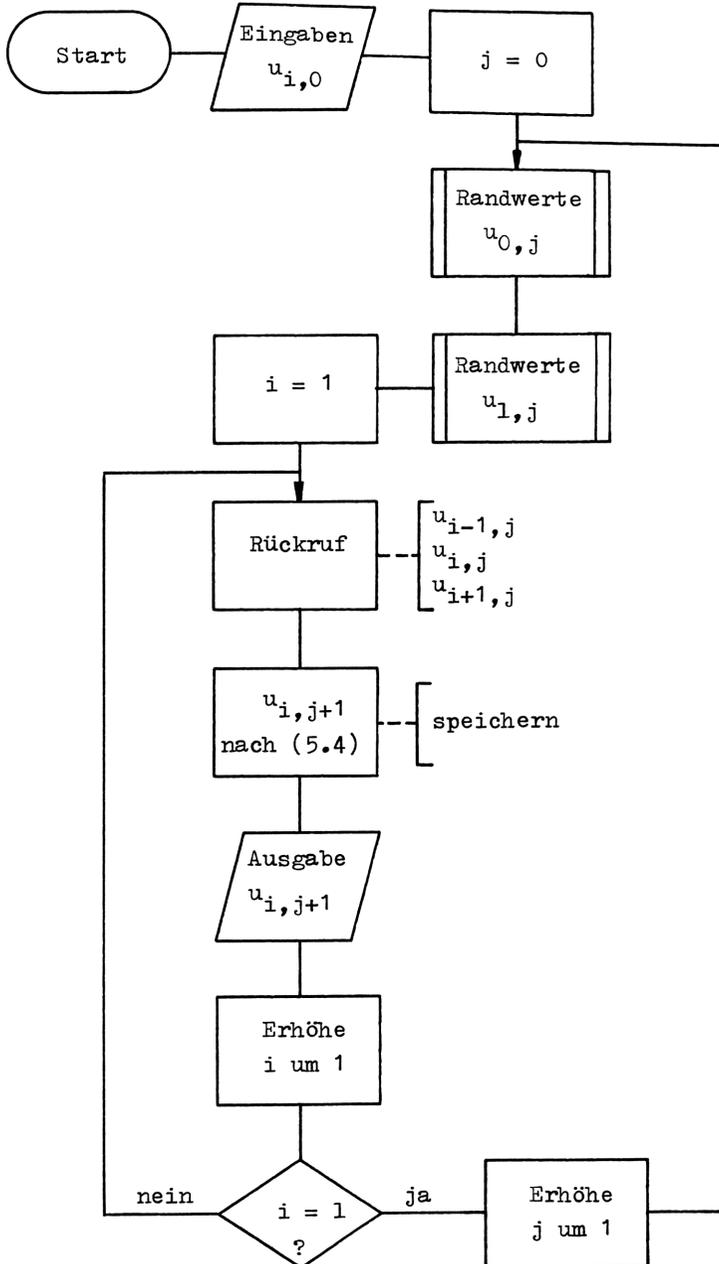


Abb. 34 Wärmeleitung

anschließend in den Gitterpunkten der Zeitzeile $j+2$ usw. Genauere Untersuchungen zeigen aber, daß dieses einfache Verfahren nur dann numerisch stabil bleibt, wenn

$$n \leq 0,5$$

ist. Nur dann schaukeln sich unvermeidbare Rundungsfehler mit zunehmender Rechenlänge nicht auf, sondern bleiben klein oder klingen sogar ab. Andernfalls würde die Rechnung sehr schnell zu falschen Ergebnissen führen. Wählt man $n = \frac{1}{6}$, so wird der Fehler für die Gleichung (5.5) am kleinsten, nämlich von der Ordnung h^4 !

Programmablaufplan

Der Programmablaufplan (Abb.34) hat einen denkbar einfachen Aufbau. Zu Beginn der Rechnung wird die bekannte Temperaturverteilung der Zeitzeile $j = 0$ eingegeben. Die Temperaturen an den Rändern, $x = 0$ und $x = L$ ($i = 0$ und $i = 1$), müssen für alle kommenden j - Zeilen angebar sein. Falls sie nicht konstant sind, erfolgt ihre Berechnung in Unterprogrammen. Die Temperaturerhöhungen u zweier aufeinanderfolgender j - Zeilen müssen während der Rechnung zwischengespeichert werden. Dabei dürfen erst die Daten der Zeile $j+1$ die Datenspeicher der Zeile $j-1$ überschreiben.

5.2 Beispiel. Erwärmung der Bremsstrommel eines Pkw beim Anhalten

Die Erwärmung einer Bremsstrommel (Abb.35) soll für eine Vollbremsung berechnet werden.

Geht man davon aus, daß die an den Bremsbelägen erzeugte Wärme radial in die zylindrische Trommel eindringt, so gilt für die Temperaturerhöhung u angenähert die Differentialgleichung (5.1). Ferner soll die Trommel die erzeugte Wärme stets aufnehmen können. Dieses führt zu der Randbedingung

$$x = 0 \quad - \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = q = q_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) \quad . \quad (5.6)$$

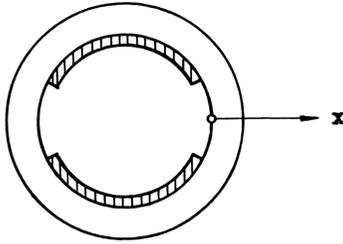


Abb. 35 Bremstrommel

q (W/cm^2) ist die Leistungsdichte an den Bremsbelägen, die, wie die Geschwindigkeit des Wagens, während der Bremsdauer T linear mit der Zeit t abnimmt. Außen, im radialen Abstand $x = L$, sei die Temperaturerhöhung auf Null abgesunken:

$$x = L \quad u = 0 \quad . \quad (5.7)$$

Als Anfangsbedingung wird für die Bremstrommel

$$t = 0 \quad u = 0 \quad (5.8)$$

gesetzt.

Die Rechnung erfolgt mit den Zahlenwerten

Gewichtskraft des Pkw	$G = 14\,568$	N
Geschwindigkeit	$v = 36$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$
Bremsverzögerung	$b = 9$	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Bremstrommel:		
Innendurchmesser	$D = 28$	cm
Breite	$d = 3$	cm
Materialkonstante	$a = 4,9$	$\frac{\text{s}}{\text{cm}^2}$
Wärmeleitwert	$\lambda = 0,67$	$\frac{\text{W}}{\text{cm} \cdot ^\circ\text{C}}$

Zunächst errechnen wir die Bremsdauer bis zum Stillstand

$$T = \frac{v}{b} = 4,0 \quad \text{s}$$

und den Bremsweg

$$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot T = 72 \quad \text{m} .$$

Die kinetische Energie des Wagens ist

$$W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{14 \ 568}{9,81} \cdot 36^2 = 962 \ 290 \quad \text{J}$$

und die auf ihn wirkende Bremskraft

$$F = \frac{W}{s} = \frac{962 \ 290}{72} = 13 \ 365 \quad \text{N} .$$

Damit beträgt die Bremsleistung zu Beginn der Bremsung für alle vier Bremstrommeln

$$P_0 = F \cdot v = 13 \ 365 \cdot 36 = 481 \ 145 \quad \text{W} ,$$

und so erhalten wir bei einer Bremstrommelfläche von

$$A = \pi \cdot D \cdot d = 263,9 \quad \text{cm}^2$$

die anfängliche Leistungsdichte pro Bremstrommel

$$q_0 = \frac{481 \ 145}{4 \cdot 263,9} = 455,8 \quad \frac{\text{W}}{\text{cm}^2} .$$

In x- Richtung wählen wir ein Gitter mit acht Punkten, bei einer Schrittweite $h = 0,35 \text{ cm}$; für $n = \frac{1}{6}$ wird dann nach (5.4)

$$k = 0,0204 \quad \text{cm}^2 .$$

In der Randbedingung (5.6) wird die erste Ableitung durch eine Zentralformel ersetzt und die Substitution $t = a \cdot \tau$ ($\tau = j \cdot k$) berücksichtigt

$$\frac{u_{0+1,j} - u_{0-1,j}}{2h} = -\frac{q_0}{\lambda} \left(1 - \frac{a \cdot j \cdot k}{T} \right) .$$

Nach $u_{0-1,j}$ aufgelöst, schreibt sich schließlich die Randbedingung

$$\begin{aligned} u_{0-1,j} &= u_{0+1,j} + \frac{2h \cdot q_0}{\lambda} \left(1 - \frac{a \cdot k}{T} j \right) \\ &= u_{0+1,j} + 476,2 \cdot \left(1 - \frac{j}{40} \right) . \end{aligned}$$

$j = 40$ entspricht der Bremsdauer $T = 4 \text{ s}$.

Die zweite Randbedingung für $i = 1$ und die Anfangsbedingungen für $t = 0$ sind nach (5.7) und (5.8) $u = 0$.

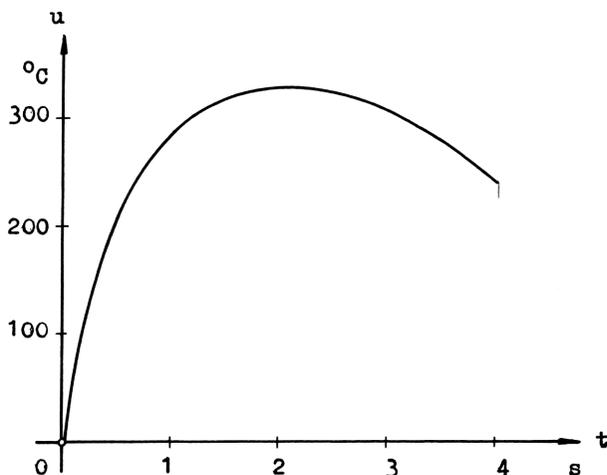


Abb. 36 Erwärmung einer Bremstrommel

Das Ergebnis an der Stelle $x = 0$ zeigt die Abb. 36. Hier, an den Bremsbelägen, erreicht die Temperaturerhöhung den Höchstwert von $330 \text{ }^{\circ}\text{C}$ nach der halben Bremszeit, d.h. nach zwei Sekunden! Am Ende der Bremsperiode ist die Erhöhung wieder auf $245 \text{ }^{\circ}\text{C}$ abgesunken.

Der Temperaturverlauf wurde mit dem folgenden Programm auf einem HP 67 gerechnet, wobei sich die Ausgabe u auf die Stelle $x = 0$ beschränkte.

Hauptprogramm		Ausgabe	Unterprogramme f. die Ränder x=0 und x=L
LBL A	RCL(i)	LBL 2	LBL a
RCL E	-	RC I	1
1	RCL(i)	1	RCL E
+	-	x ≠ y	1
STO E	6	RTN	-
PAUSE	:	RCL(i)	RCL B
0	RCL(i)	-X-	:
ST I	+	RTN	-
GSB a	P↻S		RCL A
STO 0	STO(i)		x
GSB b	GSB 2		RCL 2
STO 9	P↻S		+
LBL 1	RC I		RTN
RCL(i)	8		
ISZ	x ≠ y		LBL b
ISZ	GTO 1		0
RCL(i)	P↻S		RTN
+	GTO A		
DSZ			

Das Voranschreiten von j zu $j+1$ in den Datenspeichern erfolgt auf einfache Weise durch den jeweiligen Austausch von Primär- und Sekundärspeichern: P↻S !

Speicherplan

A		B		C		D		E		I	
476,2		40		frei		frei		Zähler j Beginn: 0		Zähler i	
x=0						x=L					
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Zeitzeile j	
u_{0-1}	u_0	u_{0+1}						u_{1-1}	u_1		
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	Zeitzeile j+1	

Die Anfangswerte für die Zeile $j = 0$ nach (5.8) sind in die Speicher 1 bis 9 einzugeben.

6. Wellengleichung

6.1 Problemstellung und Lösungsweg

Ein elastischer Stab der Länge L ist an seinem einen Ende fest eingespannt. Er wird am anderen Ende ein kleines Stück gelängt und losgelassen. Mit Ausnahme der Einspannstelle werden dann alle Punkte Schwingungsbewegungen ausführen, die in Form einer Welle längs des Stabes ablaufen. Die Elastizitätstheorie liefert für die Auslenkung u eines Punktes aus seiner Ruhelage in x -Richtung (Stab-Achse) die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad . \quad (6.1)$$

Aus
$$b^2 = \frac{m}{E \cdot A} \quad \frac{s^2}{m^2}$$

mit Masse pro Längeneinheit m , Elastizitätsmodul E und Querschnitt A errechnet sich die Wellengeschwindigkeit für elastische Längswellen:

$$v = \frac{1}{b} \quad \frac{m}{s} \quad .$$

Auch die Schwingung einer elastischen Saite, die zwischen zwei Punkten eingespannt ist, führt auf die gleiche partielle Differentialgleichung. Jetzt ist aber u die Auslenkung senkrecht zur Saite und

$$b^2 = \frac{m}{S} \quad \frac{s^2}{m^2}$$

mit dem Saitenzug S .

Beschreibung des Verfahrens

Die beiden Differentialquotienten in (6.1) werden durch Zentralformeln ersetzt:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = b^2 \frac{u_{i,j+1} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

$$x = i \cdot h$$

$$t = j \cdot k \quad .$$

Die Abmessungen der Gitterzelle h und k sollen wieder nicht unabhängig voneinander sein. Die Beziehung

$$n = \left(\frac{k}{b \cdot h} \right)^2 \quad (6.2)$$

führt zu der Rekursionsformel

$$u_{i,j+1} = n \cdot (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + 2 \cdot (1-n)u_{i,j} - u_{i,j-1} \quad , \quad (6.3)$$

die aber nur für

$$n \leq 1$$

numerisch stabil ist. Wählt man das Gleichheitszeichen, so wird die Rekursionsformel besonders einfach:

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1} \quad . \quad (6.4)$$

Dem unbekanntem Wert $u_{i,j+1}$ stehen drei bekannte Werte aus der Zeitzeile j und $j-1$ gegenüber. Die Abb. 37 soll dieses veranschaulichen.

Die Lösung u ist eine periodische Funktion. Nach einer gewissen Anzahl von Zeitschritten j_T wiederholen sich die u -Werte, und die Eigenfrequenz der Schwingung läßt sich errechnen:

$$f = \frac{1}{j_T \cdot k} \quad \text{Hz} \quad . \quad (6.5)$$

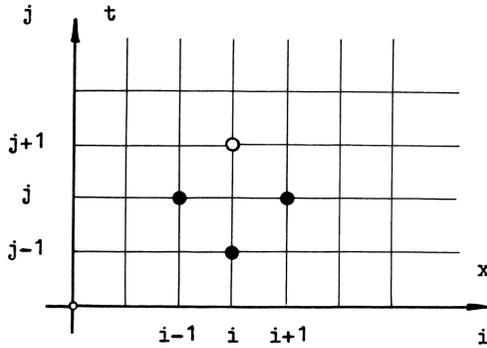


Abb. 37 Rekursion: Gleichung (6.4)

Bei einer Saite schwingen alle Punkte synchron und phasengleich, d.h. alle Punkte erreichen zur gleichen Zeit ihren Maximalaus-
schlag und gehen zur gleichen Zeit durch ihre Ruhelage. Dann darf

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot u$$

gesetzt werden, und die partielle Differentialgleichung geht in eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Eigen-
werten über.

Programmablaufplan

Zu Beginn der Rechnung (Abb.38) werden die Anfangswerte der bei-
den Zeitzeilen $j = 0$ und $j = 1$ eingegeben. Diese können z.B.
aus "Auslenken" und "Loslassen" bestehen. Eine vorgegebene Aus-
lenkung liefert alle u -Werte der Zeitzeile $j = 0$; "Loslassen"
bedeutet, daß die Rückschwinggeschwindigkeit im ersten Moment
noch Null ist,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

oder, nach dem Ersatz der Ableitung durch eine Zentralformel,

$$u_{i,0+1} = u_{i,0-1} \cdot$$

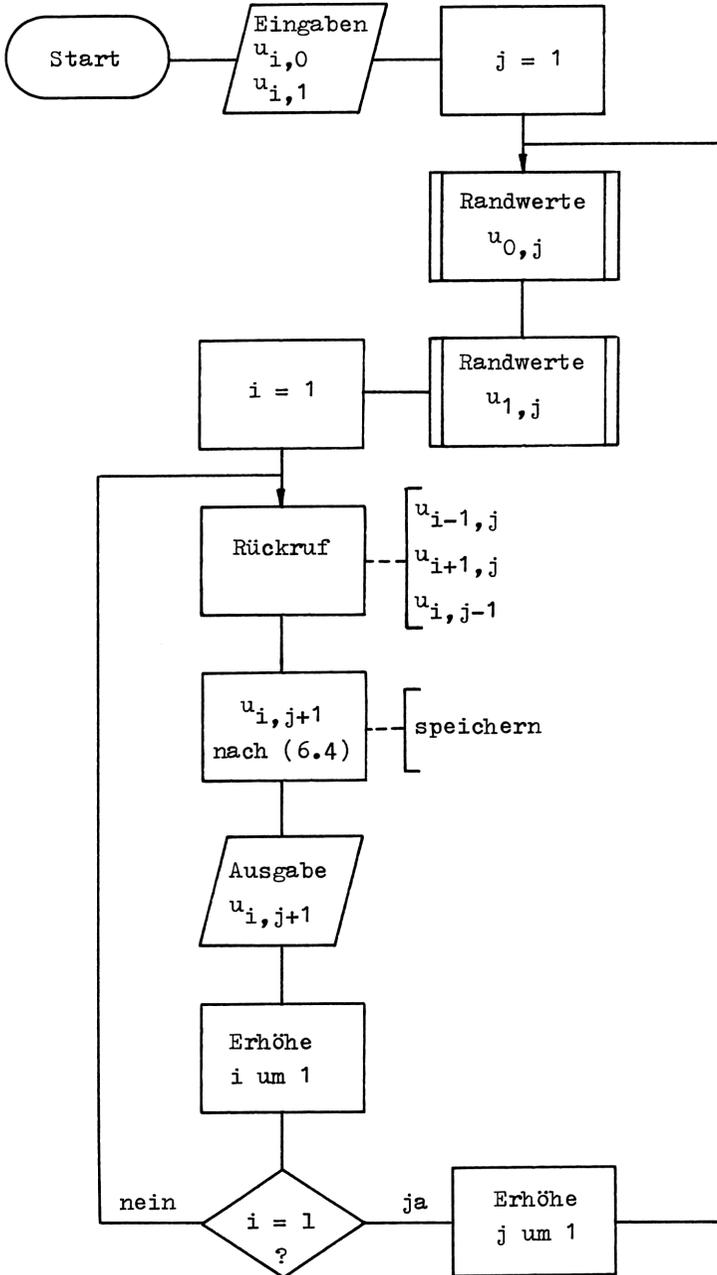


Abb. 38 Wellengleichung

Nimmt man noch die Gleichung (6.4) hinzu, so sind die u -Werte der Zeitzeile $j = 1$

$$u_{i,1} = \frac{1}{2} (u_{i+1,0} + u_{i-1,0}) \quad (6.6)$$

Die Auslenkungen an den beiden Rändern $x = 0$ und $x = L$ müssen für alle kommenden j -Zeilen angebar sein. Die Berechnung kann in Unterprogrammen erfolgen. Die Auslenkung u zweier aufeinanderfolgender j -Zeilen müssen während der Rechnung zwischengespeichert werden. Dabei darf erst die Zeile $j+1$ die Zeile $j-1$ in den Datenspeichern überschreiben.

6.2 Beispiel. Träger mit Rammbar, Kompressionswelle

Ein senkrechter Träger (Abb.39) ist am unteren Ende ($x = 0$) unbeweglich gelagert. Auf das obere Ende ($x = L$) fällt ein Rammbar (Masse M) mit der Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot s} \quad .$$

Rammbar und Träger sollen vom Auftreffmoment an miteinander verbunden bleiben, d.h. Prellerscheinungen finden nicht statt. Für die Auslenkung u eines Trägerpunktes aus seiner Ruhelage gilt die Differentialgleichung (6.1) mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} x = 0 \quad u &= 0 \\ x = L \quad -\frac{\partial u}{\partial x} &= b_0^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad ; \quad b_0^2 = \frac{M}{E \cdot A} \end{aligned} \quad (6.7)$$

und den Anfangsbedingungen

$$t = 0 \quad \text{und} \quad x \neq L \quad u = 0 \quad (6.8)$$

$$t = 0 \quad \text{und} \quad x = L \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -v \quad . \quad (6.9)$$

Die Rechnung erfolgt für einen vier Meter langen Träger NP I 20

$$\begin{aligned} \text{Masse pro Längeneinheit} \quad m &= 26,81 \quad \frac{\text{Ns}^2}{\text{m}^2} \\ E \cdot A &= 7 \cdot 10^8 \quad \text{N} \end{aligned}$$

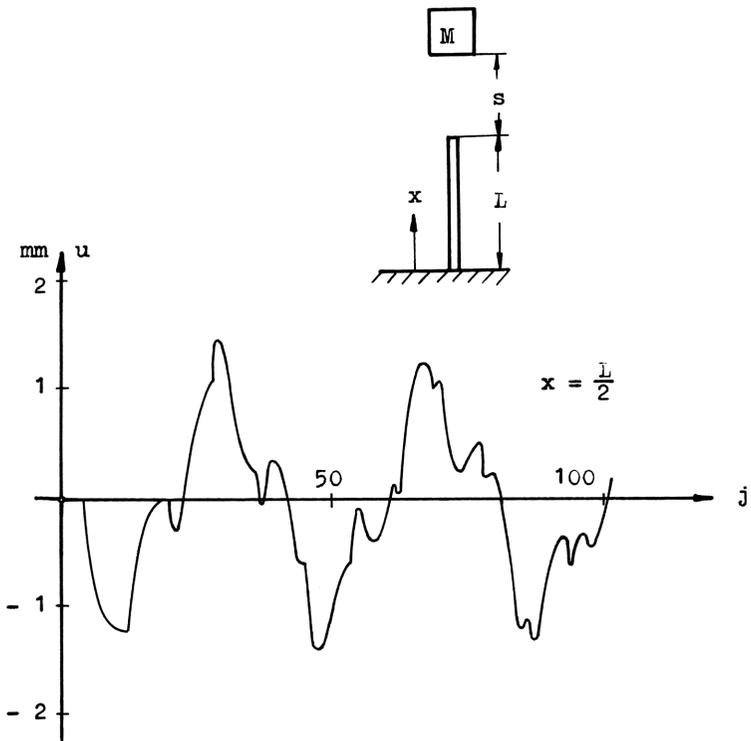
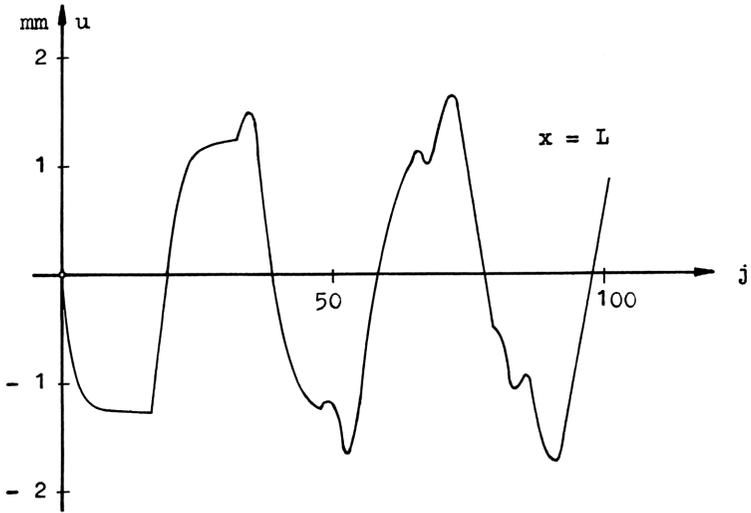


Abb. 39 Kompressionswelle in einem Träger

$$\begin{array}{ll} \text{Rammbar\textsubscript{m}asse} & M = 25,48 \frac{Ns^2}{m} \\ \text{Fallh\textsubscript{o}he} & s = 1,5 \quad m \quad . \end{array}$$

Zunächst errechnen wir die Auftreffgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1,5} = 5,42 \frac{m}{s} .$$

Dann w\u00e4hlen wir ein Gitter mit acht Punkten in x- Richtung und einer Schrittweite $h = 0,5$ m. Das ergibt nach (6.2)

$$k = h \cdot b = 0,5 \sqrt{\frac{26,81}{7 \cdot 10^8}} = 9,8 \cdot 10^{-5} \quad s \quad .$$

In der Randbedingung (6.7) werden die Ableitungen durch Zentralformeln ersetzt und $k = h \cdot b$ ber\u00fccksichtigt:

$$-\frac{u_{1+1,j} - u_{1-1,j}}{2h} = \left(\frac{b_0}{b}\right)^2 \cdot \frac{u_{1,j+1} - 2u_{1,j} + u_{1,j-1}}{h^2} .$$

Die Rekursionsformel (6.4) an der Stelle $i = 1$

$$u_{1,j+1} = u_{1+1,j} + u_{1-1,j} - u_{1,j-1} \quad (6.10)$$

liefert die zweite Gleichung f\u00fcr die beiden Unbekannten $u_{1+1,j}$ und $u_{1,j+1}$. Nach $u_{1+1,j}$ ausgerechnet, schreiben sich die Randbedingungen

$$(A+1)u_{1+1,j} = 2 \cdot u_{1,j} + (A-1)u_{1-1,j}$$

$$A = \left(\frac{b_0}{b}\right)^2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{m}{M} \cdot \frac{h}{2} = 0,263$$

und nach (6.6)

$$u_{0,j} = 0 \quad .$$

Auch in der Anfangsbedingung (6.9) wird die Ableitung durch eine Zentralformel ersetzt:

$$\frac{u_{1,0+1} - u_{1,0-1}}{2k} = -v \quad .$$

Die Rekursionsformel (6.10) an der Stelle $i = 1$ liefert, unter Beachtung, daß für alle $x \neq L$ nach (6.8) $u = 0$ ist,

$$u_{1,0+1} = 0 + 0 - u_{1,0-1} \cdot$$

Damit schreiben sich die Anfangswerte der beiden Zeitzeilen

$$j = 0 \quad \text{und} \quad i \neq 1 \quad u_{i,0} = 0 \quad \text{mm} \quad (6.11)$$

$$i = 1 \quad u_{1,0} = 0 \quad \text{mm}$$

$$j = 1 \quad \text{und} \quad i \neq 1 \quad u_{i,1} = 0 \quad \text{mm} \quad (6.12)$$

$$i = 1 \quad u_{1,1} = -kv = -0,53 \quad \text{mm} \cdot$$

Die errechnete Schwingung des Trägers an der Stelle $x = L$ und $x = \frac{L}{2}$ zeigt die Abb. 39. Es ist das Bild einer Welle, die an den beiden Trägerenden jeweils reflektiert wird. An der Stelle $x = L$ entnehmen wir als Schwingungsweite $j_T = 39$ und finden damit die Frequenz nach (6.5) $f = 262 \text{ Hz}$.

Die Rechnung erfolgte auf einem HP 67 mit dem folgenden Programm, wobei die Ausgabe u sich auf die Stellen $x = L/2$ und $x = L$ beschränkte.

Hauptprogramm		Ausgabe	Unterprogramme f. die Ränder $x=0$ und $x=L$
LBL A	DSZ	LBL 2	LBL a
RCL E	P↻S	RC I	0
1	RCL(i)	4	RTN
+	-	:	
STO E	STO(i)	FRAC	LBL b
PAUSE	GSB 2	$x \neq 0$	RCL 7
0	P↻S	RTN	RCL A
ST I	RC I	RC I	x
GSB a	8	PAUSE	RCL 8
STO 0	$x \neq y$	RCL(i)	+
GSB b	GTO 1	-X-	RCL 8
STO 9	P↻S	RTN	+
LBL 1	GTO A		RCL A
RCL(i)			2
ISZ			+
ISZ			:
RCL(i)			RTN
+			

Das Voranschreiten von Zeile j zu $j+1$ in den Datenspeichern erfolgt wieder durch den Austausch von Primär- und Sekundärspeicher.

Speicherplan

	A		B		C		D		E		I
	(A-1)		frei		frei		frei		Zähler j		Zähler i
	- 0,737								Beginn: 1		
$x=0$									$x=L$		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		Zeitzeile $j+1$
u_0							u_{l-1}	u_l	u_{l+1}		
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19		Zeitzeile j

Die Anfangswerte für die Zeile $j = 0$ nach (6.11) sind in die Speicher 10 bis 18, für die Zeile $j = 1$ nach (6.12) in die Speicher 0 bis 8 einzugeben.

7. Telegraphengleichung, Wanderwelle

7.1 Problemstellung und Lösungsweg

Kabel und Freileitungen der Fernmelde- und Starkstromtechnik sind Leitungsgebilde von großer räumlicher Ausdehnung. Es ist daher nicht mehr gewährleistet, daß in jedem Punkt einer längeren Leitungsverbindung zur gleichen Zeit auch der selbe Spannungs- und Stromzustand herrscht, wie dieses bei konzentrierten Schaltungen vorausgesetzt werden kann. Jetzt hat eine zeitliche Änderung von Spannung und Strom auch eine räumliche Änderung des elektrischen Zustandes auf der Leitung zur Folge. So wird die räumliche Verteilung des Stromes im Leitungsdraht oder die räumliche Verteilung der Spannung zwischen Hin- und Rückleitung von Interesse, besonders bei Spannungsänderungen am Leitungsanfang. Die physikalische Betrachtung führt auf die beiden "Telegraphengleichungen" für die Spannung U und den Strom I :

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = R_0 I + L_0 \cdot \frac{\partial I}{\partial t} \quad (7.1)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = G_0 U + C_0 \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \quad (7.2)$$

mit

Widerstand der Doppelleitung	R_0	Ω/km
Induktivität	L_0	H/km
Ableitung (Isolierfähigkeit)	G_0	S/km
Kapazität	C_0	F/km .

Die beiden Gleichungen sagen aus, daß grundsätzlich jede Spannungsverteilung auf der Leitung möglich ist und daß Spannungs- und Stromverteilung voneinander abhängen. Außerdem ist die Verteilung nicht stationär, sondern es wandern Spannungs- und Stromwellen von einem Störungspunkt aus längs der Leitung.

Für die weitere Betrachtung setzen wir die Ableitung $G_0 = 0$, bei der heutigen Isolationstechnik eine zulässige Vereinfachung. Um die Spannungs- und Stromwelle gleichzeitig rechnen zu können, führen wir eine übergeordnete Funktion u ein, aus der sich die Spannung U und der Strom I durch partielle Ableitungen ergeben sollen:

$$U = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7.3)$$

$$I = -C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7.4)$$

Für $G_0 = 0$ erfüllen diese Beziehungen (7.2) und überführen (7.1) in die partielle Differentialgleichung einer Wanderwelle:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + b^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7.5)$$

mit

$$a = R_0 C_0$$

$$b^2 = L_0 C_0 \quad .$$

(7.5) beschreibt eine Welle, die längs einer Leitung mit der Wellengeschwindigkeit $v = 1/b$ wandert und dabei eine Dämpfung erfährt, die proportional a ist. (7.5) kombiniert die beiden partiellen Differentialgleichungen (5.1) und (6.1).

Beschreibung des Verfahrens

Entsprechend den Ausführungen im Kapitel 6 setzen wir für den Ersatz der Differentialquotienten durch Zentralformeln

$$x = i \cdot h ; \quad t = j \cdot k ; \quad k = h \cdot b = h \sqrt{L_0 C_0} \quad . \quad (7.6)$$

Dann führen wir noch zusätzlich die Abkürzung

$$\frac{u}{2 \cdot h} = w$$

ein. Dann gehen (7.3) und (7.4) über in

$$U_{i,j} = w_{i+1,j} - w_{i-1,j} \quad (7.7)$$

$$I_{i,j} = \frac{1}{Z_0} (w_{i,j-1} - w_{i,j+1}) \quad (7.8)$$

und (7.5) in

$$(A+1)w_{i,j+1} = w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + (A-1)w_{i,j-1} \quad (7.9)$$

mit

$$\text{Wellenwiderstand} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad \Omega$$

$$\text{und} \quad A = \frac{h \cdot R_0}{2 \cdot Z_0} \quad . \quad (7.10)$$

In der Rekursionsformel (7.9) stehen dem unbekanntem Wert $w_{i,j+1}$ drei bekannte Werte aus der Zeitzeile j und $j-1$ gegenüber. Spannungs- und Stromwelle ergeben sich nach (7.7) und (7.8). Die Abb. 37 veranschaulicht auch die Rekursionsformel der gedämpften Welle. Die Funktionswerte in der Waagrechten ergeben die Spannungswelle, die in der Senkrechten die Stromwelle. Dieser einfache Rechnungsgang erfährt leider eine Erschwernis bei der Anpassung an die Randbedingungen. Die Verwendung von Zentralformeln führt auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Die erste Gleichung ist die Rekursionsformel (7.9) für den Randpunkt, die zweite Gleichung ist die Randbedingung nach den Gesetzen der Elektrotechnik. So beschreibt z.B. die Gleichung

$$U_{0,j} = E - I_{0,j} \cdot R_1 = E - \frac{R_1}{Z_0} \cdot (w_{0,j-1} - w_{0,j+1}) \quad (7.11)$$

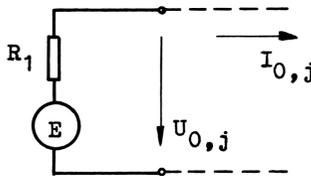


Abb. 40 Speiseschaltung: Spannung mit Widerstand

nach Abb. 40 das Einschalten einer Spannung E über einen Widerstand R_1 am Leitungsanfang ($i = 0$). Die beiden Gleichungen (7.9) und (7.11) lassen sich entweder nach der Unbekannten $w_{0-1,j}$ (Fall I) oder nach $w_{0,j+1}$ (Fall II) auflösen.

Im Fall I ist die Unbekannte ein Funktionswert jenseits des Randes ($i = 0-1$). Ist sie ermittelt und gespeichert, so lassen sich Spannung und Strom auch am Rande, wie in den anderen Gitterpunkten, nach (7.7) und (7.8) errechnen.

Im Fall II wird die Spannung am Leitungsanfang nach (7.11) und der Strom nach (7.8) bestimmt. Der Rechnungsgang ist etwas umständlicher.

Bei einem Kondensator am Anfang oder Ende der Leitung gibt es eine Randbedingungsgleichung in einfacher Form nur für den Fall I und für die Zeitzeile $j+1$.

Randbedingungsgleichungen

Eine Übersicht über einige Schaltungen an den Leitungsrändern zeigt Abb. 41. Die zugehörigen Gleichungen sind für Fall I und II mit den folgenden Abkürzungen zusammengestellt:

$$p = \frac{h}{2} \frac{C_0}{C_1} ; \quad q = \frac{2}{h} \frac{L_1}{L_0} ; \quad r = \frac{R_1}{Z_0} . \quad (7.12)$$

Schaltung a_2 : Einschalten einer Spannung E

$$\text{I} \quad w_{0-1,j} = w_{0+1,j} - E$$

$$\text{II} \quad (A+1)w_{0,j+1} = 2 \cdot w_{0+1,j} - E + (A-1)w_{0,j-1}$$

$$U_{0,j} = E.$$

Schaltung a_3 : Einschalten einer Spannung E über Widerstand und/oder Induktivität

$$\text{I} \quad (A+1+r+q)w_{0-1,j} = (A+1-r-q)w_{0+1,j} + (A+1)(2q \cdot w_{0,j} - E) + 2 \cdot (r - Aq)w_{0,j-1}$$

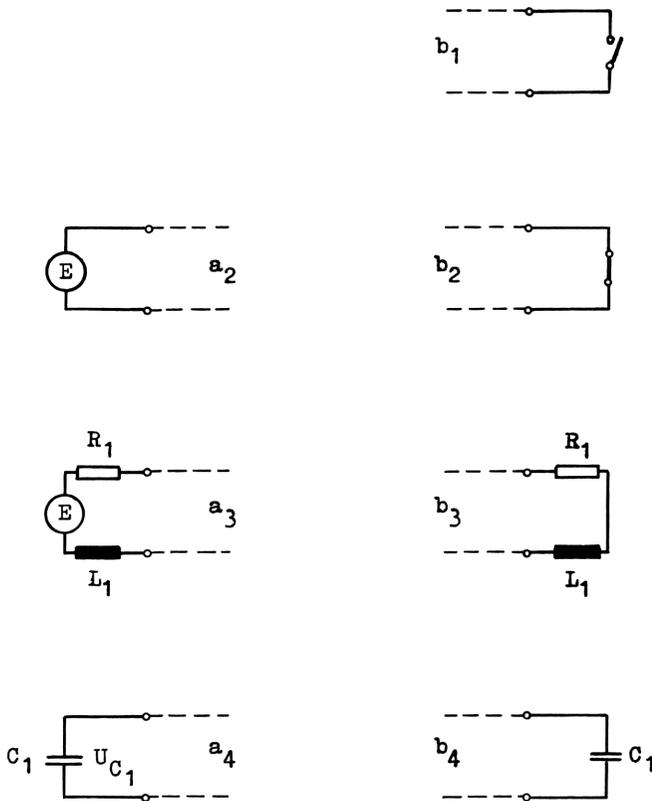


Abb. 41 Randschaltungen: Speise- und Verbraucherseite

$$\text{II} \quad (A+1+r+q)w_{0,j+1} = 2 \cdot (w_{0+1,j} + qw_{0,j}) - E + (A-1+r-q)w_{0,j-1}$$

$$U_{0,j} = E - r(w_{0,j-1} - w_{0,j+1}) + q(w_{0,j+1} + w_{0,j-1} - 2 \cdot w_{0,j}).$$

Schaltung a_4 : Zuschalten eines geladenen Kondensators

$$\text{I} \quad (A+1)w_{0-1,j+1} = w_{0,j} + w_{0+2,j} + (A-1)w_{0-1,j-1} + \\ - \frac{2}{1+p} \cdot [w_{0+1,j} - w_{0-1,j} + p(w_{0+2,j} - w_{0,j})].$$

Die Strom- und Spannungswelle erfordert die Eingabe von w -Werten für die Zeitzeile $j = -1$ und $j = 0$.

Für $i \geq 0$ sind die Anfangswerte w dieser Zeitzeilen Null zu setzen.

Der erste nach den obigen Gleichungen errechnete Randwert ist

im Fall I $w_{0-1,0}$,

im Fall II $w_{0,1}$.

Nur für Schaltung a_4 ist der erste Randwert $w_{0-1,1}$. Hier ist die Spannung am Kondensator zusätzlich negativ einzugeben:

$$w_{0-1,0-1} = w_{0-1,0} = -U_{C_1}.$$

Schaltung b_1 : Leitungsende offen

$$\text{I} \quad w_{1+1,j} = 2 \cdot w_{1,j-1} - w_{1-1,j}$$

$$\text{II} \quad w_{1,j+1} = w_{1,j-1}$$

$$U_{1,j} = 2 \cdot (w_{1,j+1} - w_{1-1,j}).$$

Schaltung b_2 : Leitungsende kurzgeschlossen

$$\text{I} \quad w_{1+1,j} = w_{1-1,j}$$

$$\text{II} \quad (A+1)w_{1,j+1} = 2 \cdot w_{1-1,j} + (A-1)w_{1,j-1}$$

$$U_{1,j} = 0.$$

Schaltung b_3 : Leitung mit Widerstand und/oder Induktivität belastet

$$\begin{aligned} \text{I} \quad (A+1+r+q)w_{1+1,j} &= 2 \cdot [q(A+1)w_{1,j} + (r-Aq)w_{1,j-1}] + \\ &+ (A+1-r-q)w_{1-1,j} \end{aligned}$$

$$\text{II} \quad (A+1+r+q)w_{1,j+1} = 2 \cdot (w_{1-1,j} + qw_{1,j}) + (A-1+r-q)w_{1,j-1}$$

$$U_{1,j} = r(w_{1,j-1} - w_{1,j+1}) - q(w_{1,j+1} + w_{1,j-1} - 2 \cdot w_{1,j})$$

Schaltung b_4 : Leitung mit Kondensator belastet

$$\text{I} \quad (A+1)w_{1+1,j+1} = w_{1,j} + w_{1-2,j} + (A-1)w_{1+1,j-1} + \\ - \frac{2}{1+p} \cdot [w_{1-1,j} - w_{1+1,j} + p(w_{1-2,j} - w_{1,j})]$$

Programmablaufplan

Den Programmablaufplan für den Fall I zeigt die Abb. 42. Er ist wie der in Abb. 38 aufgebaut. Lediglich die Berechnung von Spannung $U_{i,j}$ und Strom $I_{i,j}$ ist hinzugekommen.

Die Eingabe der Anfangs- und Randwerte wurde bereits bei den Randwertgleichungen besprochen. Die w -Werte zweier aufeinanderfolgender j -Zeilen müssen während der Rechnung zwischengespeichert werden. Dabei dürfen die Datenspeicher der Zeile $j-1$ erst durch die Daten der Zeile $j+1$ überschrieben werden.

Die Änderungen im Programmablaufplan für den Fall II sind in der Abb. 54 enthalten.

7.2 Beispiel. Speisung einer am Ende offenen Leitung über eine Induktivität

Es soll die Wanderwelle ermittelt werden, die beim Zuschalten einer Spannung über eine Induktivität entsteht, wenn das Leitungsende offen ist (Abb.43).

Die Leitung habe die folgenden Kenngrößen:

Länge	$s = 1$	km
	$E = 10$	kV
	$L_1 = 40 \cdot 10^{-6}$	H
	$R_o = 16,6$	Ω/km
	$L_o = 200 \cdot 10^{-6}$	H/km
	$C_o = 80 \cdot 10^{-9}$	F/km .

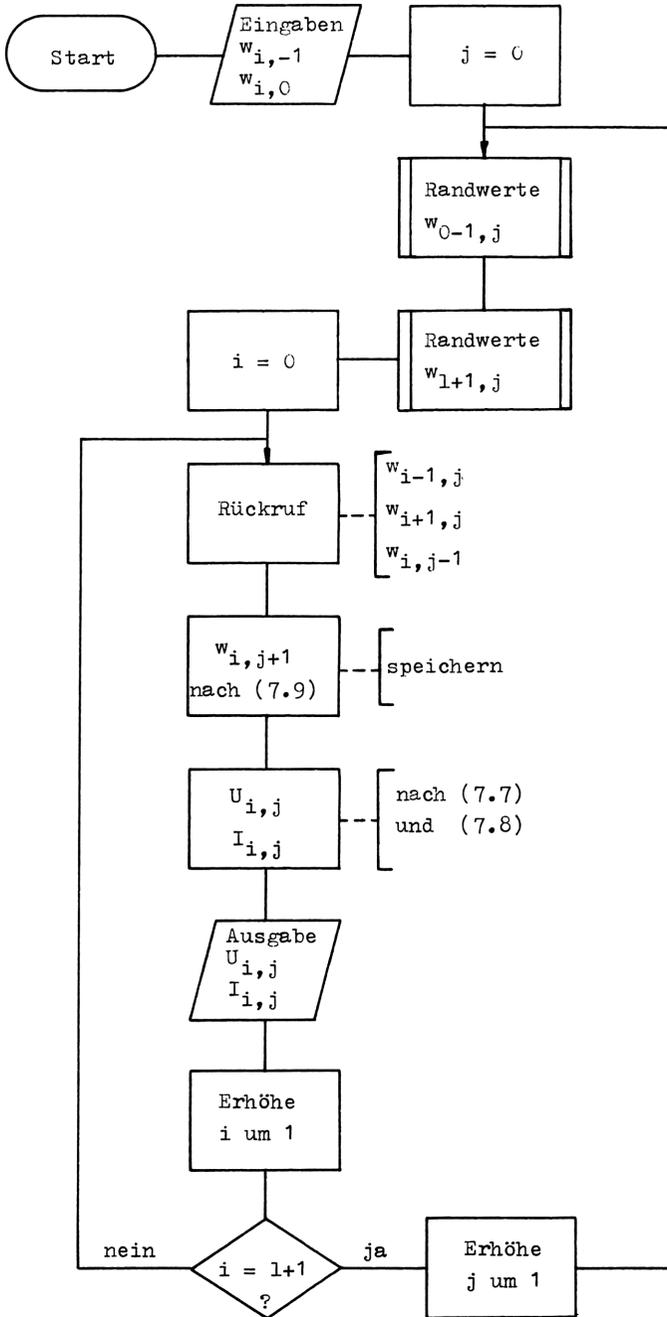


Abb. 42 Wanderwelle (Fall I)

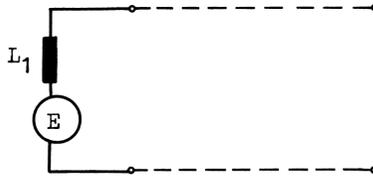


Abb. 43 Speisung einer am Ende offenen Leitung über eine Induktivität

Der relativ hohe Widerstand entspricht einem Aluminiumdraht von 2,2 mm Leitungsdurchmesser.

Wir unterteilen die Leitungslänge in vier Teile. Dieser sehr grobe Gitterraster wurde für einen Vergleich mit Ergebnissen aus dem Beispiel 9.2 gewählt. Das ergibt nach (7.6)

$$h = 0,25 \quad \text{km}; \quad k = 1 \cdot 10^{-6} \quad \text{s}.$$

Die Geschwindigkeit der Welle errechnet sich zu $v = 2,5 \cdot 10^5$ km/s. Bei einer Länge von einem Kilometer hat die Welle das Leitungsende nach einer Zeit von

$$T = \frac{1}{v} = 4 \cdot 10^{-6} \quad \text{s}$$

erreicht. Für das Beispiel gelten die Randbedingungsgleichungen a_3 mit $r = 0$

$$I \quad (A+1+q)w_{0-1,j} = (A+1-q)w_{0+1,j} + (A+1)(2q \cdot w_{0,j} - E) + \\ - 2 \cdot Aq \cdot w_{0,j-1}$$

$$A = 0,0415 \quad \text{nach (7.10)}$$

$$q = 1,6 \quad \text{nach (7.12)}$$

und b_1

$$I \quad w_{1+1,j} = 2 \cdot w_{1,j-1} - w_{1-1,j}$$

Die gerechnete Spannungswelle an drei Leitungspunkten zeigt die Abb. 44. Die Dämpfung der Welle durch den sehr großen Leitungs-

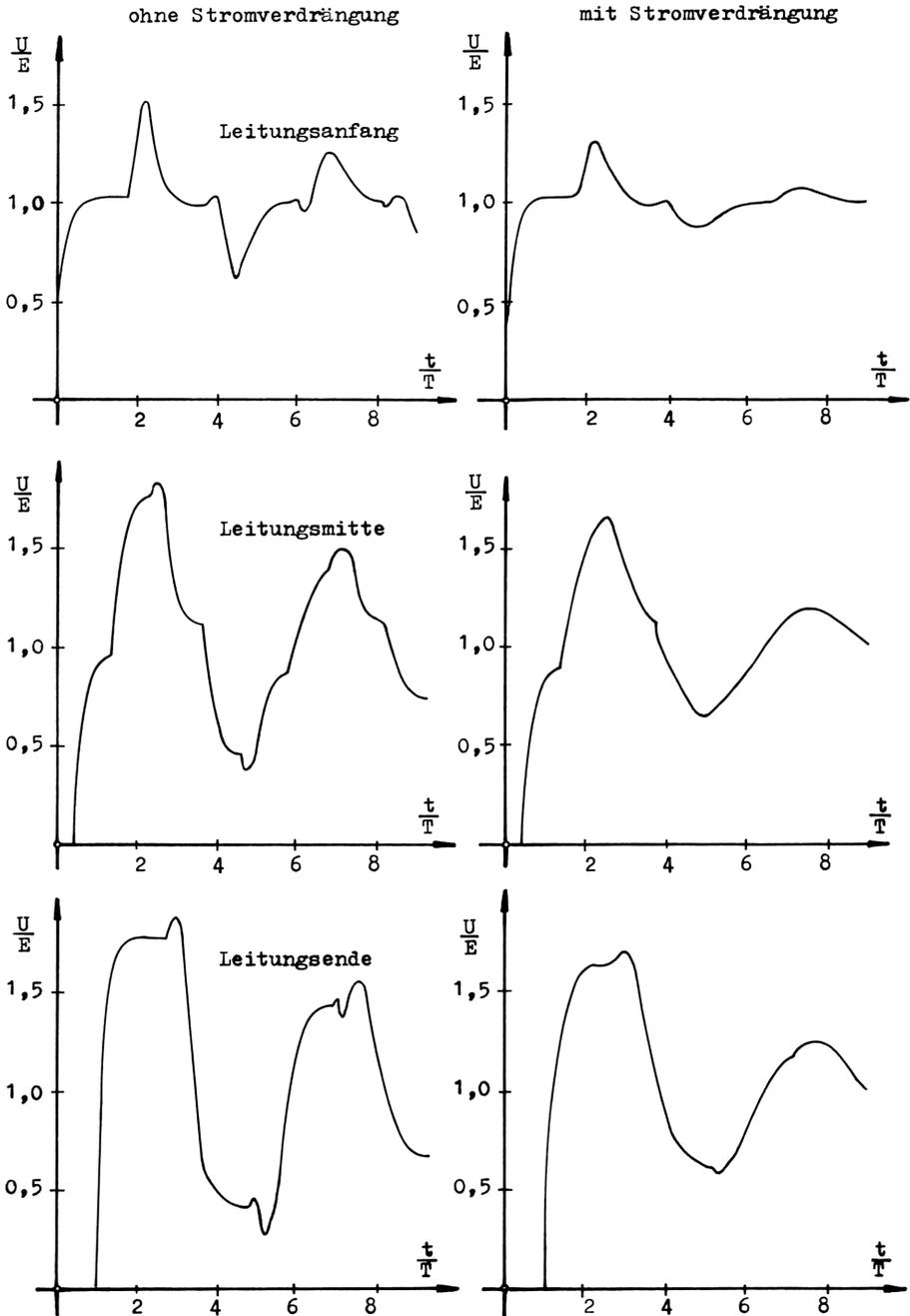


Abb. 44 Wanderwelle des Beispiels 7.2 ohne und mit Stromverdrängung

widerstand macht sich deutlich bemerkbar. Die Spannung am Leitungsende hat einen ähnlichen Verlauf wie die Kompressionswelle in Abb. 39. In die Abb. 44 sind auch die Ergebnisse des Beispiels 9.2 zum Vergleich eingezeichnet.

Die Wanderwelle wurde auf einem HP 67 mit folgendem Programm gerechnet. Die Datenausgabe beschränkt sich auf Anfang, Mitte und Ende der Leitung.

Hauptprogramm		Ausgabe Strom und Spannung	Unterprogramme f. die Ränder $i = 0-1 ; i = 1+1$	
LBL A	RCL A	LBL 2	LBL a	x
RCL E	2	RC I	2	POS
1	+	2	RCL C	RCL 1
+	:	:	x	POS
STO E	RCL(i)	FRAC	RCL 1	x
PAUSE	x \odot y	x = 0	x	-
0	STO(i)	RTN	RCL D	RCL A
ST I	-	R \downarrow	-	2
GSB a	POS	x \odot I	RCL A	+
STO 0	GSB 2	PAUSE	2	RCL C
GSB b	RC I	x \odot I	+	+
STO 6	5	RCL B	x	:
LBL 1	x \neq y	:	LASTX	RTN
RCL(i)	GTO 1	-X-	RCL C	
ISZ	POS	ISZ	-	LBL b
ISZ	GTO A	RCL(i)	RCL 2	POS
RCL(i)		DSZ	x	RCL 5
+		DSZ	+	RCL 5
DSZ		SPACE	RCL A	+
POS		RCL(i)	1	POS
RCL(i)		-	+	RCL 4
RCL A		ISZ	RCL C	-
x		-X-	x	RTN
+		RTN	2	

Speicherplan

A		B		C		D		E		I	
(A-1)		Z ₀		q		E		Zähler j		Zähler i	
- 0,9585		50		1,6		10		Beginn: -1			
x=0						x=L					
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Zeitzeile j	
w ₀₋₁	w ₀	w ₀₊₁		w ₁₋₁	w ₁	w ₁₊₁	frei	frei	frei		
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	Zeitzeile j+1	

8. Stromverdrängung, Skineffekt

8.1 Problemstellung und Lösungsweg

Eine Wärmeleitung in x- und y- Richtung führt auf die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad . \quad (8.1)$$

Als Lösung wird ein Raum im x y t u - Koordinatensystem gesucht. Schwierigkeiten entstehen dabei weniger in der Numerik, mehr bei der bildlichen Darstellung der Ergebnisse.

Neben der Wärmeleitung in dünnen Platten erlaubt die Gleichung die Stromverdrängung (Skineffekt) der Elektrotechnik zu berechnen. Nur für Gleichspannung ist die Stromdichte über dem Leiterquerschnitt konstant. Bei Wechselspannung führt die endliche Aufbauzeit des elektromagnetischen Feldes im Drahtinnern zur Störung dieser gleichmäßigen Stromverteilung. Im massiven Leiter bilden sich Wechselströme aus, die sich dem eigentlichen Leiterstrom überlagern und die gleichmäßige Verteilung aufheben. Der Strom wird immer mehr aus dem Innern an die Außenhaut gedrängt. Bei vorgegebener Spannung verkleinert sich der fließende Strom durch diese auch als Selbstinduktion bezeichnete Wirkung, welche einer Widerstandserhöhung gleichkommt. Die Funktion u ist jetzt die Komponente der elektrischen Feldstärke E im Drahtinnern, die parallel zur Leiterachse gerichtet ist. Die Konstante a ist das Produkt aus elektrischer Leitfähigkeit κ und magnetischer Permeabilität μ :

$$a = \kappa \cdot \mu \quad . \quad (8.2)$$

Beschreibung des Verfahrens

Das Verfahren aus Kapitel 5 wird in der y - Richtung erweitert. Zunächst vereinfacht sich die Differentialgleichung durch die Substitution nach (5.2)

$$t = a \cdot \tau$$

zu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad (8.3)$$

Dann werden die drei Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt, wobei man für $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ wieder auf eine einseitige Differenzengleichung zurückgreift. Mit

$$\begin{aligned} x &= i \cdot h \\ y &= i' \cdot h \\ \tau &= j \cdot k = j \cdot n \cdot h^2 \end{aligned} \quad (8.4)$$

ergibt sich die Rekursionsformel in den Gitterpunkten

$$\begin{aligned} u_{i,i',j+1} &= n \cdot (u_{i+1,i',j} + u_{i-1,i',j} + u_{i,i'+1,j} + \\ &+ u_{i,i'-1,j} - 4 u_{i,i',j}) + u_{i,i',j} \quad (8.5) \end{aligned}$$

Es stehen der unbekanntem Feldstärke $u_{i,i',j+1}$ in der Zeitschicht $j+1$ fünf bekannte der Zeitschicht j gegenüber. Die Rechnung ist für $n \leq 0,5$ numerisch stabil und hat für $n = \frac{1}{6}$ den kleinsten Diskretisierungsfehler.

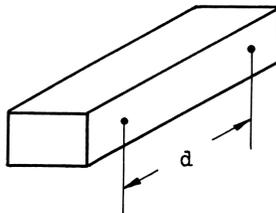


Abb. 45 Zur Randwertbestimmung

Für die Bestimmung der Randwerte, der Stromdichte S und des Leiterstromes I bediene man sich der folgenden einfachen Beziehungen:

Die Spannungsdifferenz U_j zwischen zwei um d entfernte Leiterpunkte (Abb.45) bestimmt die Feldstärke am Leiterrand

$$u_{a,j} = E_{a,j} = \frac{U_j}{d} \quad . \quad (8.6)$$

Die Stromdichte S im Leiter findet man aus der Feldstärke

$$S = \kappa \cdot u = \kappa \cdot E \quad , \quad (8.7)$$

und den im Leiter fließenden Strom I erhält man aus der Stromdichte durch eine numerische Integration über den Drahtquerschnitt A (siehe hierzu Abschnitt 8.2)

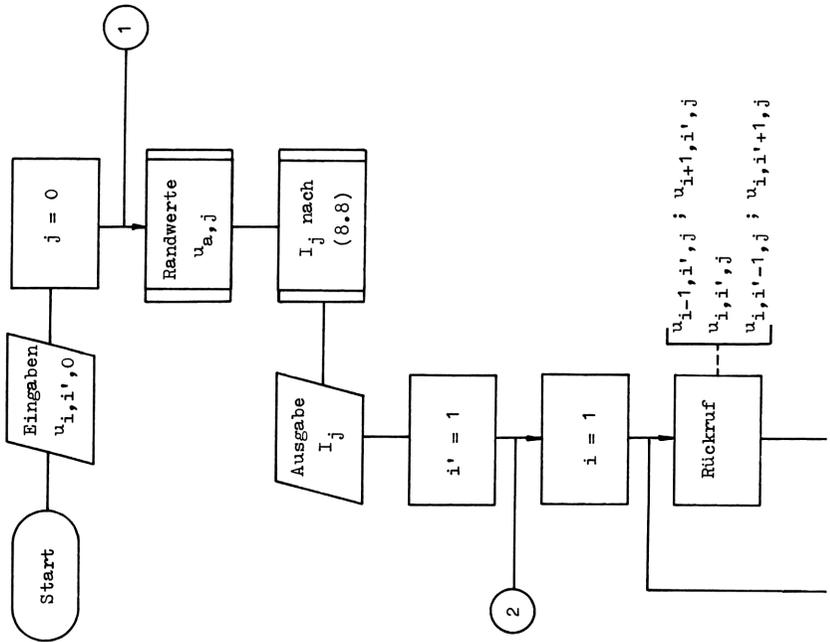
$$I = \iint_A S \cdot dA. \quad (8.8)$$

Programmablaufplan

Der Leiter habe einen rechteckigen Querschnitt $a \cdot b$. Zu Beginn der Rechnung (Abb.46) erfolgt die Eingabe der Feldstärkenwerte der Zeitschicht $j = 0$ (meist gleich Null). Die Berechnung der Randfeldstärke $u_{a,j}$ aus der aufgedrückten Leiterspannung nach (8.6) kann in einem Unterprogramm erfolgen. Ebenfalls die Berechnung des Stromes nach (8.8). Die Feldstärkenwerte zweier aufeinanderfolgender Zeitschichten j müssen während der Rechnung zwischengespeichert werden. Die Daten der Schicht $j-1$ dürfen dabei erst durch die Daten der Schicht $j+1$ überschrieben werden.

8.2 Übergang auf Polarkoordinaten

Oft sind technische Probleme für Körper von zylindrischer Form zu lösen, z.B. die Stromverdrängung in runden Drähten. Zur Ver-



einfachung der Rechnung führt man dann gerne die Polarkoordinaten r und φ ein:

$$x = r \cdot \cos \varphi \quad (8.9)$$

$$y = r \cdot \sin \varphi \quad .$$

Nach dem Übergang auf Polarkoordinaten schreibt sich die Differentialgleichung (8.1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = a \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad (8.10)$$

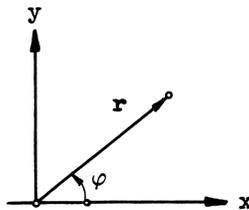


Abb. 47 Polarkoordinaten

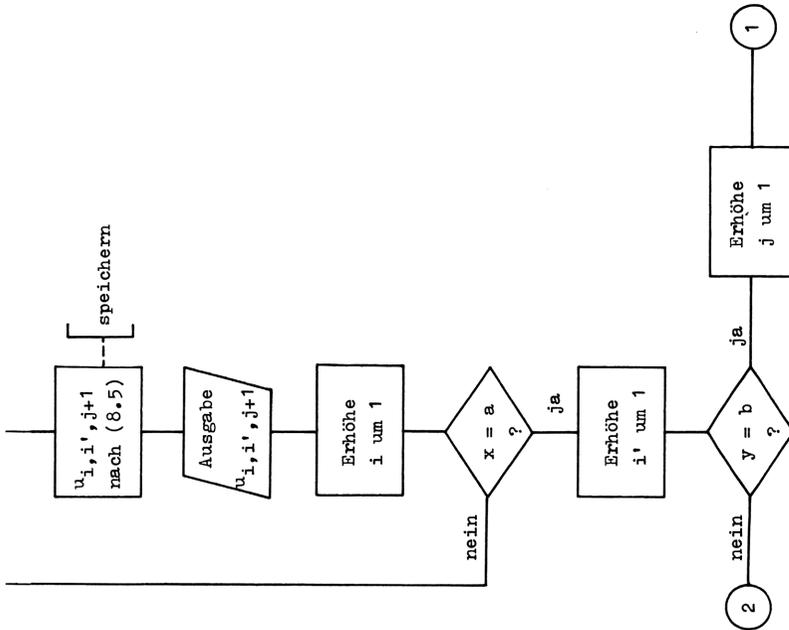


Abb. 46 Stromverdrängung

Aus Symmetriegründen innerhalb eines Zylinders ist in vielen technischen Anwendungen die Funktion u unabhängig vom Winkel φ , d.h.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad ,$$

und die Gleichung (8.10) vereinfacht sich mit der Substitution (5.2) zu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad . \quad (8.11)$$

Der Ersatz durch Differenzenquotienten führt mit

$$\begin{aligned} r &= i \cdot h \\ \tau &= j \cdot k = j \cdot n \cdot h^2 \end{aligned} \quad (8.12)$$

zur Rekursionsformel in den Gitterpunkten

$$u_{i,j+1} = n \cdot \left[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + \frac{1}{2i} \cdot (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \left(\frac{1}{n} - 2 \right) u_{i,j} \right] , \quad (8.13)$$

wiederum numerisch stabil für $n \leq 0,5$ und $n = \frac{1}{6}$ als bester Wert.

Jetzt werden für den unbekanntten Wert $u_{i,j+1}$ nur noch drei bekannte benötigt. Dafür muß aber gewährleistet sein, daß im Mittelpunkt der Kreisfläche ($i = 0$) $u_{i,j+1}$ endlich bleibt. Die Funktion u ist symmetrisch zum Kreismittelpunkt, d.h.

$$u_{0-1,j} = u_{0+1,j}$$

oder

$$\frac{1}{2i} \cdot (u_{0-1,j} - u_{0+1,j}) = 0 .$$

Im Kreismittelpunkt schreibt sich damit die Rekursionsformel

$$u_{0,j+1} = n \cdot \left[2 u_{1,j} + \left(\frac{1}{n} - 2 \right) u_{0,j} \right] . \quad (8.14)$$

Auch die Berechnung der Stromstärke I aus der Feldstärke $u = E$ nach (8.8) vereinfacht sich in Polarkoordinaten. Mit dem Flächenelement

$$dA = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

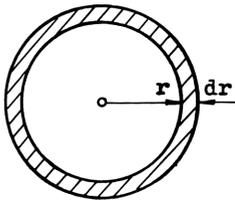


Abb. 48 Flächenelement in Polarkoordinaten

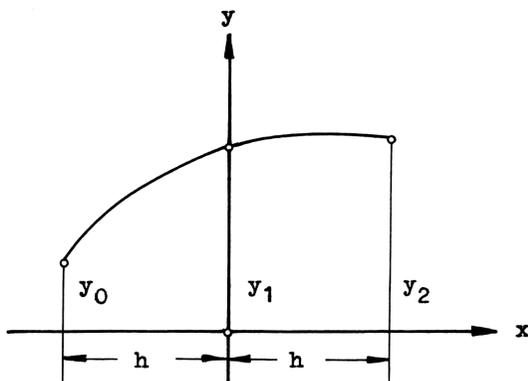


Abb. 49 Keplersche Faßregel

geht das Doppelintegral über in

$$I = 2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot \int_0^a E \cdot r \cdot dr,$$

wobei a der Außenradius der Kreisfläche ist.

Dieses Integral kann numerisch durch ein- oder mehrfachen Ansatz der Keplerschen Faßregel gelöst werden. Diese einfache alte Regel erlaubt ein Integral der Kurve $y = f(x)$ angenähert aus nur drei Ordinatenwerten zu bestimmen (Abb.49):

$$\int_{-h}^{+h} y \cdot dx \approx \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4 \cdot y_1 + y_2) \quad .$$

Wir verdanken diese Regel Johannes Kepler (1571 bis 1630). Seine erfolgreiche numerische Auseinandersetzung mit unlauteren Weinhändlern gab dieser Regel ihren Namen ²⁾.

2) W. Gerlach und M. List, Johannes Kepler, München 1971

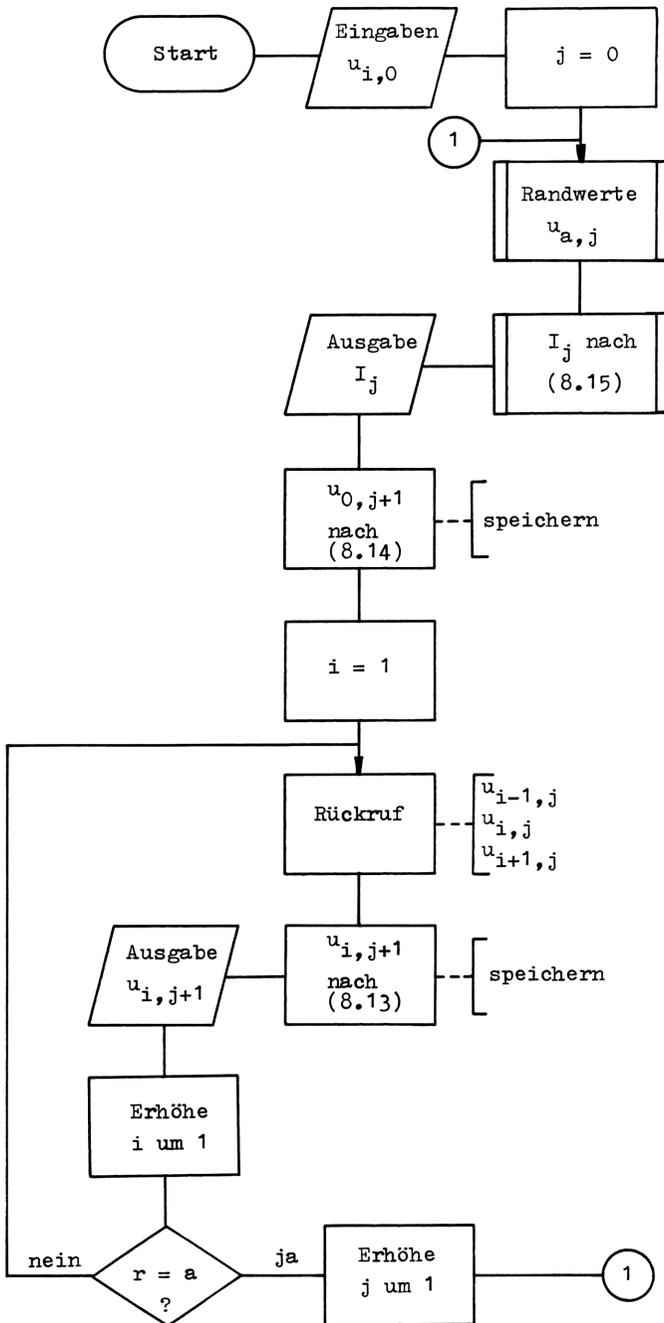


Abb. 50 Stromverdrängung, Übergang auf Polarkoordinaten

Mit $y = E \cdot r$ ergeben sich nach Kepler für I , bei verschieden feiner Gitterunterteilung, folgende Gleichungen:

$$h = \frac{a}{2} ; \quad i = 0, 1, 2$$

$$I_j = \kappa A \cdot \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot E_{1,j} + E_{2,j})$$

$$h = \frac{a}{4} ; \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$I_j = \kappa A \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (E_{1,j} + E_{2,j} + E_{4,j}) + E_{3,j} \right] \quad (8.15)$$

$$h = \frac{a}{6} ; \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$I_j = \kappa A \cdot \frac{1}{9} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot (E_{1,j} + E_{2,j} + 3 \cdot E_{3,j} + 2 \cdot E_{4,j} + 5 \cdot E_{5,j}) + E_{6,j} \right]$$

$$\text{Kreisfläche } A = \pi \cdot a^2 \quad .$$

Der Programmablaufplan der Abb. 46 vereinfacht sich zur Abb. 50.

8.3 Beispiel. Stromverdrängung in runden Drähten bei nichtsinusförmiger Spannung

Es sollen für vier Spannungskurven (Abb.51) von gleicher Frequenz und gleichem Maximalwert die Stromkurven und die Wechselstromwiderstände eines Kupferdrahtes errechnet werden:

Frequenz	$f = 13\,153$	Hz
Drahtradius	$a = 0,33$	cm
Leitfähigkeit	$\kappa = 50 \cdot 10^4$	$\frac{1}{\Omega \text{ cm}}$
Permeabilität	$\mu = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-9}$	$\frac{\Omega \text{ s}}{\text{cm}}$

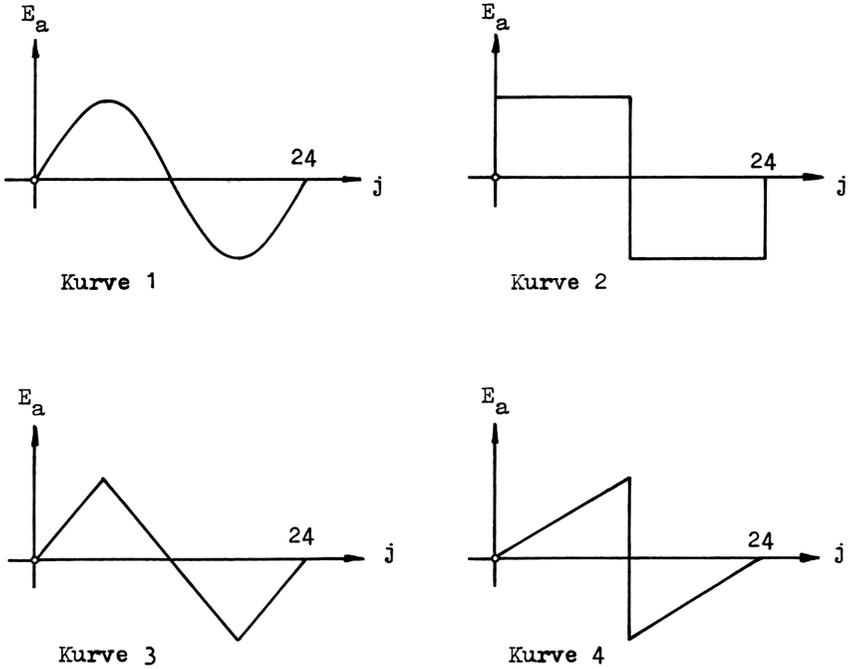


Abb. 51 Spannungskurven zum Beispiel 8.3

Der Spitzenwert der Außenfeldstärke soll jeweils

$$(E_a)_{\max} = 2,9 \cdot 10^{-5} \frac{\text{V}}{\text{cm}}$$

betragen. Wir unterteilen den Radius in sechs Teile

$$h = 0,055 \text{ cm} .$$

Dann errechnet sich zunächst, mit τ nach (8.12), der Substitution nach (5.2) und bei $n = 1/6$

$$\omega \cdot t = 2 \pi f \cdot \kappa \mu n \cdot h^2 \cdot j = 0,2618 \cdot j ,$$

d.h. die Spannungskurve hat eine Periodendauer in Zeitschritten

$$j_{\text{T}} = \frac{2\pi}{0,2618} = 24 .$$

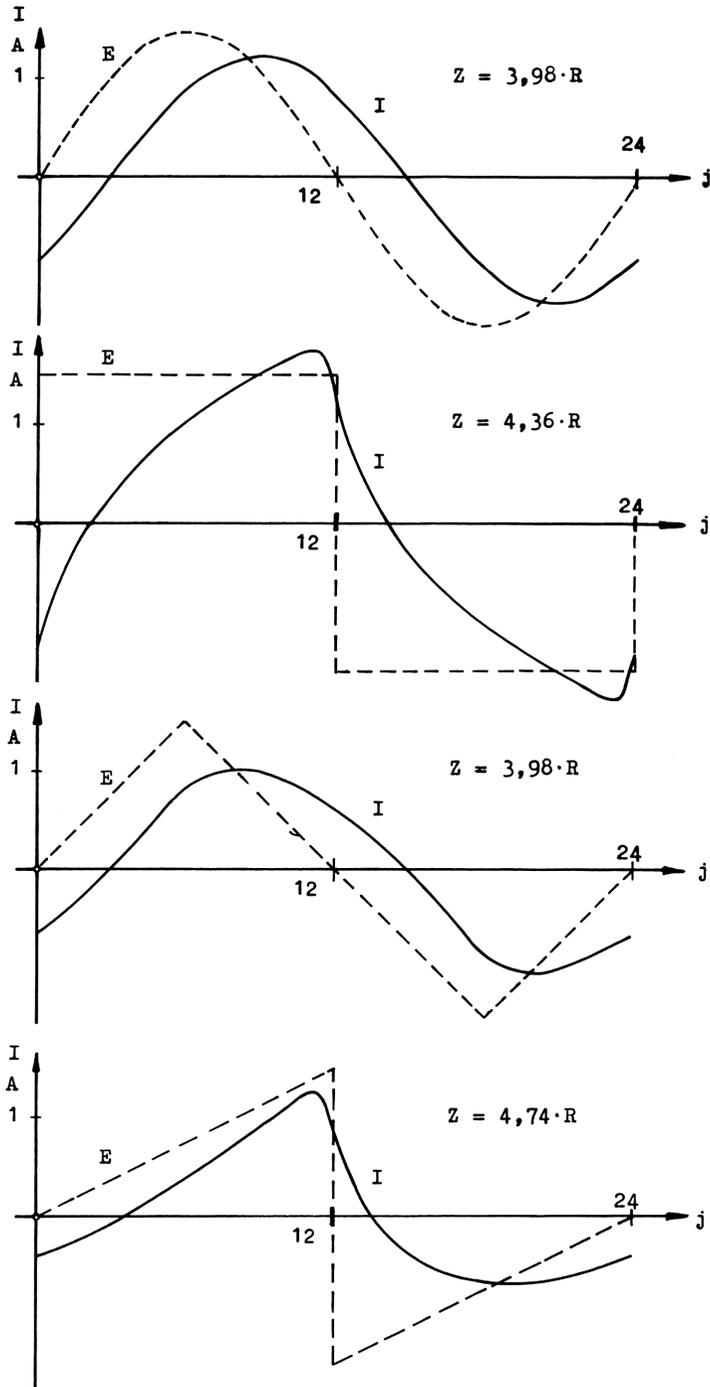


Abb. 52 Stromkurven des Beispiels 8.3

Die Feldstärke im Drahtinnern errechnet sich nach (8.13) und (8.14), die sich daraus ergebenden Stromwerte nach (8.15). Das Ergebnis im eingeschwungenen Zustande (nach $j \approx 120$) zeigt die Abb. 52. Der Wechselstromwiderstand Z gegenüber dem Gleichstromwiderstand R ergibt sich aus den Effektivwerten (quadratische Mittelwerte) von Feldstärke und Strom:

$$Z = c \cdot R ; \quad c = \kappa \cdot A \cdot \frac{E_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} . \quad (8.16)$$

Die Stromkurven wurden auf einem HP 67 gerechnet. Im nachfolgenden Programm darf jeweils nur eines der Kurvenunterprogramme benutzt werden. Die Datenausgabe beschränkt sich auf die Stromstärke I .

Hauptprogramm		Unterprogramm	Unterprogramme f. Rand $r=a$		
		I m. Ausgabe	Kurve 1	Kurve 3	Kurve 4
LBL A	2	LBL b	LBL a	LBL a	LBL a
RCL E	:	RCL 1	RAD	RCL E	.
1	DSZ	RCL 2	RCL E	RCL B	5
+	RC I	+	RCL C	:	RCL E
STO E	:	RCL 3	x	FRAC	RCL B
PAUSE	-	3	SIN	4	:
0	RCL(i)	x	RTN	1/x	FRAC
ST I	4	+		$x > y$	$x = y$
GSB a	x	RCL 4	Kurve 2	GTO 3	GTO 3
RCL A	+	+		3	$x > y$
x	6	RCL 4	LBL a	x	GTO 4
STO 6	:	+	RCL E	$x \leq y$	2
GSB b	POS	RCL 5	RCL B	GTO 4	x
RCL 0	STO(i)	5	:	$x \leq y$	RTN
RCL 0	RC I	x	FRAC	4	LBL 3
+	5	+	1	x	0
RCL 1	$x \neq y$	2	0	2	RTN
+	GTO 1	x	x	-	LBL 4
3	GTO A	3	$x = 0$	CHS	2
:		:	5	RTN	x
POS		RCL 6	ENTER	LBL 4	2
STO 0		+	5	$x \leq y$	-
LBL 1		9	$x = y$	1	RTN
POS		:	0	-	
RCL(i)		RCL D	$x \leq y$	4	
RCL(i)		x	CHS	x	
ISZ		-X-	1	RTN	
ISZ		RTN	x	LBL 3	
RCL(i)			5	$x \leq y$	
+			:	4	
$x \leq y$			RTN	x	
RCL(i)				RTN	

Das Voranschreiten in den Datenspeichern von j zu $j+1$ erfolgt durch einen Austausch der Primär- und Sekundärspeicher: P \leftrightarrow S .

Speicherplan

A		B		C		D		E		I	
$(E_a)_{\max}$		j_T				$\kappa \cdot A$		Zähler j		Zähler i	
$2,9 \cdot 10^{-5}$		24		0,2618		$1,711 \cdot 10^5$		Beginn: -1			
$r=0$						$r=a$					
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Zeitzeile j	
$E_{0,j}$						$E_{a,j}$		frei			
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	Zeitzeile $j+1$	

9. Wanderwelle mit Stromverdrängung

9.1 Problemstellung und Lösungsweg

Nach Kapitel 7 ist für die Dämpfung einer Wanderwelle der Widerstand der Doppelleitung maßgebend. Im Kapitel 8 wurde gezeigt, daß bei schnellen zeitlichen Spannungsänderungen der Skineffekt eine Erhöhung des Drahtwiderstandes bewirkt. Bei der großen Geschwindigkeit der Wanderwelle ist ein Stromverdrängungseffekt auf der Leitung nicht auszuschließen. Seine Auswirkung auf die Welle soll untersucht werden.

Setzen wir einen runden Drahtquerschnitt voraus, so ergibt die Zusammenstellung der Gleichungen aus Kapitel 7.1 und 8.2 ein System von drei partiellen Differentialgleichungen und einer Integralgleichung:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = 2 \cdot E_a + L_0 \cdot \frac{\partial I}{\partial t} \quad (9.1)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = C_0 \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{\partial E}{\partial \tau} \quad (9.3)$$

$$I = 2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot \int_0^a E \cdot r \cdot dr. \quad (9.4)$$

In Gleichung (9.1) wurde der ohmsche Spannungsabfall bei Gleichstrom $I \cdot R_0$ durch $2 \cdot E_a$ ersetzt, wobei E_a die parallel zur Leiterachse gerichtete Komponente der elektrischen Feldstärke an der Drahtoberfläche ($r = a$) ist.

Beschreibung des Verfahrens

Zur Lösung des Gleichungssystems mit der Gitterpunktmethode verwenden wir zwei Gitter:

1. In Leitungsrichtung (Wanderwelle)

$$x = h \cdot i \quad \text{km}$$

$$t = k \cdot j \quad \text{s} ; \quad k = h \sqrt{L_0 C_0} .$$

2. In radialer Richtung, senkrecht zur Leitung (Stromverdrängung)

$$r = h' \cdot i' \quad \text{cm}$$

$$t = k' \cdot j' \quad \text{cm}^2 ; \quad k' = \frac{1}{6} \cdot (h')^2 .$$

Dann ist das Verhältnis der beiden Zeittakte zueinander

$$\frac{j}{j'} = H \cdot \frac{1}{7500 \cdot s \cdot R_0 \sqrt{L_0 C_0}} \quad (9.5)$$

Leitungslänge	s	km
Widerstand der Doppelleitung	R_0	Ω/km
Induktivität	L_0	H/km
Kapazität	C_0	F/km
Drahtradius	a	cm .

Der Beiwert H richtet sich nach den gewählten Gitterabmessungen.

Beiwert H

$\begin{matrix} h \\ h' \end{matrix}$	$\frac{s}{4}$	$\frac{s}{5}$	$\frac{s}{6}$	$\frac{s}{7}$	$\frac{s}{8}$
$\frac{a}{2}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	2
$\frac{a}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{a}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{2}{9}$

Die Berechnung der Wanderwelle soll nur während einer Zeit T nach dem Zuschalten einer Spannung erfolgen. Gilt für diese Zeit

$$T \leq \frac{j}{j'} \cdot k \quad ,$$

so ist der Vorgang so kurz, daß das elektromagnetische Feld nur wenig in den Draht eindringen kann. Die Rekursionsformel für das Gitter in Leitungsrichtung entspricht dann der Gleichung (7.9)

$$(A'+1)w_{i,j+1} = w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + (A'-1)w_{i,j-1} \quad . \quad (9.6)$$

A wird durch A' ersetzt, weil nicht der volle Drahtquerschnitt für die Stromwelle zur Verfügung steht. Je nach der gewählten Gitterabmessung in radialer Richtung ist

$$h' = \frac{a}{2} \quad A' = 3 \cdot A$$

$$h' = \frac{a}{4} \quad A' = 6 \cdot A$$

$$h' = \frac{a}{6} \quad A' = 9 \cdot A$$

zu setzen mit

$$A = \frac{h}{2} \cdot \frac{R_0}{Z_0} \quad ; \quad R_0 = \frac{2}{\kappa \pi a^2} \quad \Omega/\text{km} \quad . \quad (9.7)$$

Die Wanderwelle mit Stromverdrängung wird dann weiter nach Kapitel 7 gerechnet.

Ist dagegen

$$T > \frac{j}{j'} \cdot k \quad ,$$

so dringt das elektromagnetische Feld mehr und mehr in das Drahtinnere ein. Die Welle läßt sich dann mit einem Taschenrechner auf folgende Weise rechnen.

Wegen der begrenzten Anzahl von Datenspeichern verwenden wir zwei grobe Gitterraster

$$h = \frac{s}{4} \quad \text{km} \quad , \quad h' = \frac{a}{2} \quad \text{cm} \quad .$$

Damit sind 19 Datenspeicher belegt: je fünf für die Funktionswerte $w_{i,j}$ und $w_{i,j+1}$ im Wanderwellengitter und drei mal drei für die Feldstärken im Stromverdrängungsgitter E_0, E_1, E_a der Zeitzeile j' an den drei Leitungspunkten $i = 1, 2, 3$ (Abb.53). An den Rändern $i = 0$ und $i = 4$ werden die Feldstärken im Drahtinnern Null gesetzt. Diese Vereinfachung erlaubt die Benutzung der Randbedingungsgleichungen aus Kapitel 7. Weitere Datenspeicher lassen sich bei Verwendung der Gleichungen II einsparen. Das Zeittaktverhältnis (9.5) wird auf die nächste ganze Zahl gerundet.

Bei der vorgesehenen geringen radialen Unterteilung im Stromverdrängungsgitter sind im Drahtinnern nur zwei Feldstärken zu berechnen. Hierzu ersetzen wir die Gleichung (9.3) durch die Rekursionsformel (8.13) bzw. (8.14). Mit u gleich der Feldstärke E und $n = 1/6$ lassen sich dann beide Feldstärken für die Zeitzeile j' an einem beliebigen Leitungspunkt i angeben:

$$h \cdot E_{0,i,j'} = \frac{1}{3} \cdot (h \cdot E_{1,i,j'-1} + 2h \cdot E_{0,i,j'-1}) \tag{9.8}$$

$$h \cdot E_{1,i,j'} = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (h \cdot E_{0,i,j'-1} + 8h \cdot E_{1,i,j'-1}) + h \cdot E_{a,i,j'-1} \right] .$$

Als nächstes stellen wir die Gleichung (9.1) nach $2 \cdot E_a$ um und führen die übergeordnete Funktion u , Gleichung (7.3) und (7.4), ein:

$$2 \cdot E_a = - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L_0 C_0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \tag{9.9}$$

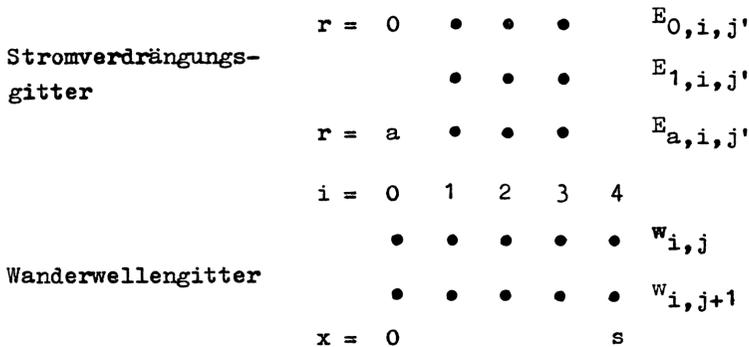
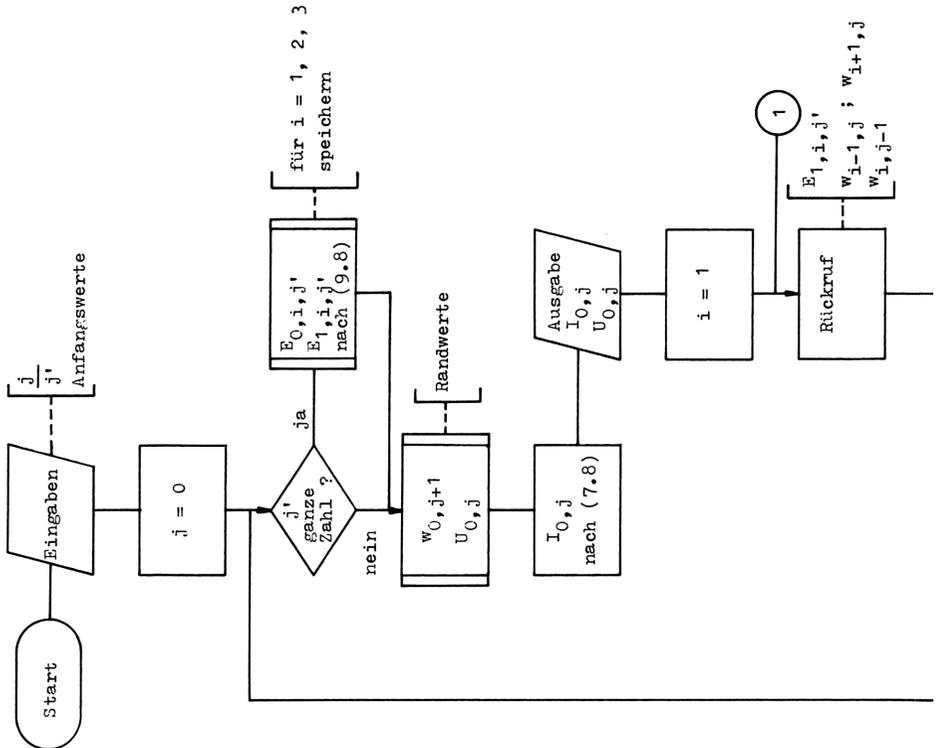


Abb. 53 Datenspeicher-Gitter für Wanderwelle mit Stromverdrängung



Nach dem Ersatz der Differentialquotienten durch Zentralformeln und der zusätzlichen Abkürzung

$$\frac{u}{2 \cdot h} = w$$

geht (9.9) über in

$$h \cdot E_{a,i,j} = w_{i,j+1} + w_{i,j-1} - (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) \cdot \quad (9.10)$$

Anschließend wird in der Gleichung (9.4) der Strom I durch (7.8) ersetzt, das Integral über die Keplersche Faßregel nach (8.15) ausgedrückt:

$$\frac{1}{Z_0} \cdot (w_{i,j-1} - w_{i,j+1}) = \frac{2}{R_0} \frac{1}{j} \cdot (2 \cdot E_{1,i,j'} + E_{a,i,j'}) \cdot \quad (9.11)$$

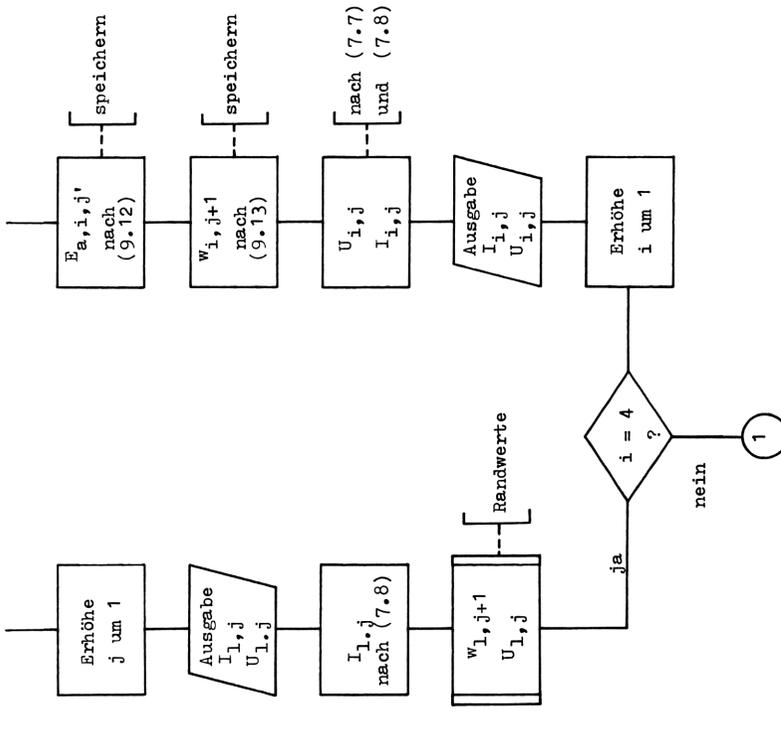


Abb. 54 Wanderwelle mit Stromverdrängung

Aus den beiden Gleichungen (9.10) und (9.11) lassen sich nun angeben:
 der Randwert im Stromverdrängungsgitter an einem beliebigen Leitungspunkt i

$$(3A+1)h \cdot E_{a,i,j'} = 3A \cdot \left(2 \cdot w_{i,j-1} - (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) \right) + \quad (9.12)$$

$$- 2h \cdot E_{l,i,j'}$$

und die Rekursionsformel für das Wanderwellengitter

$$(3A+1)w_{i,j+1} = w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + (3A-1)w_{i,j-1} - 2h \cdot E_{1,i,j} \quad (9.13)$$

mit A nach (9.7) .

Nun steht der Berechnung der Spannungs- und Stromwelle nach den Gleichungen (7.7) und (7.8) aus den Werten w , wie im Kapitel 7 beschrieben, nichts mehr im Wege.

Programmablaufplan

Der Programmablaufplan (Abb.54) ist eine Erweiterung der Abb.42. Zu Beginn der Rechnung muß das Zeittaktverhältnis (9.5) als eine ganze Zahl eingegeben werden. Für die Anfangswerte sei auf Kapitel 7 verwiesen. Im Rhythmus des Zeittaktverhältnisses werden die inneren Feldstärken E_0 und E_1 in den Leitungspunkten $i = 1, 2, 3$ nach (9.8) neu berechnet. Der weitere Ablauf entspricht der Abb. 42 , mit Änderungen für die Randbedingungsgleichungen des Falles II. Die w - Werte zweier aufeinanderfolgender j - Zeilen müssen zwischengespeichert werden. Die Datenspeicher der Zeile $j-1$ dürfen erst durch die Daten der Zeile $j+1$ überschrieben werden.

9.2 Beispiel. Einfluß der Stromverdrängung auf das Beispiel 7.2

Das Beispiel 7.2 soll unter Berücksichtigung der Stromverdrängung gerechnet werden. Für

$$h = \frac{s}{4} \quad ; \quad h' = \frac{a}{2}$$

ist das Zeittaktverhältnis

$$\frac{j}{j'} = 2 \quad .$$

Wir benutzen ferner die Randbedingungsgleichungen a_3 mit $r = 0$ und b_1 in der Form II.

Die gerechnete Spannungswelle am Anfang, Mitte und Ende der Leitung ist zum Vergleich in die Abb. 44 eingezeichnet. Die Zunahme der Dämpfung durch den erhöhten Leitungswiderstand infolge der Stromverdrängung ist nicht zu übersehen.

Die Kurven wurden auf einem HP 67 mit dem folgenden Programm gerechnet

Hauptprogramm			Ausgabe Strom, Spannung	Unterpro- gramm $E_0 ; E_1$	Unterprogramme f. die Ränder $i = 0 ; i = 4$	
LBL A	DSZ	LASTX	LBL 0	LBL c	LBL a	RCL 1
9	STO 7	RCL A	RC I	P \odot S	RCL 2	-
ST I	-	R \uparrow	2	RCL(i)	RCL 2	RTN
RCL E	GSB 3	x	:	DSZ	+	
1	GSB b	LASTX	PAUSE	3	RCL D	
+	LBL 4	R \uparrow	R \uparrow	STO:(i)	RCL 0	LBL b
STO E	RCL(i)	+	RCL B	RCL(i)	2	RCL 9
PAUSE	ISZ	x \odot y	:	8	x	RCL 6
2	RCL(i)	P \odot S	-X-	STOx(i)	RCL C	-
:	x \odot y	ISZ	R \uparrow	x \odot y	x	2
FRAC	STO(i)	ISZ	-X-	R \uparrow	-	x
x = 0	x \odot y	ISZ	RTN	STO+(i)	-	0
GSB c	DSZ	RTN	LBL 3	DSZ	LASTX	GSB 0
0	SPACE	LBL 2	RC I	3	x \odot y	RTN
ST I	STO(i)	STO(i)	2	STO:(i)	RCL A	
GSB a	RC I	CL X	:	RCL(i)	RCL C	
GSB 0	DSZ	RCL A	PAUSE	STO+(i)	-	
ISZ	DSZ	1	R \uparrow	R \uparrow	RCL 1	
ISZ	x \neq 0	+	RCL B	STO+(i)	x	
GSB 1	GTO 4	STOx(i)	:	R \uparrow	+	
GSB 2	GTO A	R \uparrow	-X-	ISZ	RCL A	
STO 3	LBL 1	DSZ	DSZ	STO+(i)	2	
-	ISZ	RCL(i)	DSZ	4	+	
GSB 3	RCL(i)	2	SPACE	STO:(i)	RCL C	
GSB 1	RCL(i)	x	RCL(i)	P \odot S	:	
ISZ	RCL(i)	ISZ	CHS	DSZ	+	
GSB 2	+	STO-(i)	x \odot I	DSZ	RCL 1	
DSZ	ISZ	-	4	GTO c	R \uparrow	
STO 5	RCL(i)	RCL A	+	RTN	RCL 1	
-	x \odot I	2	x \odot I		R \uparrow	
GSB 3	4	+	RCL(i)		STO 1	
GSB 1	-	STO:(i)	+		+	
ISZ	x \odot I	:	-X-		RCL C	
ISZ	RCL(i)	P \odot S	RTN		x	
GSB 2	+	DSZ			+	
DSZ	-	RTN			R \uparrow	

Das Zeittaktverhältnis ist der Programmschritt Nr. 9. Beim Vorschreiten von der Zeitzeile j zu j+1 müssen die Datenspeicher im Wanderwellengitter umgesetzt werden. Wegen der besonderen Aufteilung der Datenspeicher auf zwei Gittersysteme erfolgt

dieses in einem Unterprogramm: Schritt Nr. 42 bis 56. Das Programm enthält gelegentlich den Leerbefehl "SPACE", um einen Sprung nach DSZ auszugleichen.

Speicherplan

A	B	C	D	E	I
(3A-1)	Z ₀	q	E	Zähler j	Zähler i
- 0,8755	50	1,6	10	Beginn: -1	

Die übrige Speichereinteilung entspricht der Abb. 53

	11	14	17	
	12	15	18	
	13	16	19	
0	2	4	6	8
1	3	5	7	9

10. Membranschwingung

10.1 Problemstellung und Lösungsweg

Eine am Rande eingespannte, dünne, elastische Haut (Membran) unterliege einem einseitigen Druck. Sie wölbt sich aus, d.h. die einzelnen Membranpunkte erfahren eine Auslenkung $u(x,y)$. Wird die Membran plötzlich entlastet, so schwingt sie zurück. Der zeitliche Verlauf dieser Schwingung ist gesucht.

Die Fragestellung führt auf die in der y - Richtung erweiterte Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (10.1)$$

mit Dichte ρ und Spannung der Membran σ :

$$b^2 = \frac{\rho}{\sigma} \quad \frac{s^2}{m^2} \quad .$$

Beschreibung des Verfahrens

Mit

$$\begin{aligned} x &= i \cdot h \\ y &= i' \cdot h \\ t &= j \cdot k \end{aligned} \quad (10.2)$$

werden die Differentialquotienten in der Gleichung (10.1) durch Zentralformeln ersetzt. Die Abmessungen der Gitterzelle h und k sollen dabei nicht unabhängig voneinander sein. Die Beziehung

$$n = \left(\frac{k}{hb} \right)^2 \quad (10.3)$$

führt auf die Rekursionsformel

$$u_{i,i',j+1} = n \cdot (u_{i+1,i',j} + u_{i-1,i',j} + u_{i,i'+1,j} + u_{i,i'-1,j}) + 2 \cdot (1 - 2n)u_{i,i',j} - u_{i,i',j-1} \quad (10.4)$$

Die Rechnung ist für $(1 - 2n) \geq 0$ numerisch stabil. Wählt man das Gleichheitszeichen, d.h. $n = 1/2$, so vereinfacht sich die Rekursion:

$$u_{i,i',j+1} = \frac{1}{2} \cdot (u_{i+1,i',j} + u_{i-1,i',j} + u_{i,i'+1,j} + u_{i,i'-1,j}) - u_{i,i',j-1} \quad (10.5)$$

Die Lösung ist eine unharmonische Schwingung.

Programmablaufplan

Die Membran habe einen rechteckigen Querschnitt $a \cdot b$. Zu Beginn der Rechnung (Abb.55) müssen die Anfangswerte der beiden Zeitschichten $j = 0$ und $j = 1$ eingegeben werden. Wie im Kapitel 6 beschrieben, lassen sich die Werte durch "Auslenken" und "Loslassen" finden. Um die Auslenkung u der einzelnen Membranpunkte für die Zeitschicht $j = 0$ zu erhalten, setzen wir die Membran unter einem einseitigen Druck p . Die Lösung der Poissonschen Differentialgleichung für diesen Fall nach Kapitel 11 ergibt die gesuchten u -Werte. Entlasten wir die Membran zur Zeit $t = 0$, so ist die Rückschwing-Geschwindigkeit aller Punkte im ersten Moment noch Null. Dann ergeben sich, wie im Kapitel 6 beschrieben, die u -Werte der Zeitschicht $j = 1$ zu

$$u_{i,i',1} = \frac{1}{4} \cdot (u_{i+1,i',0} + u_{i-1,i',0} + u_{i,i'+1,0} + u_{i,i'-1,0}) \quad (10.6)$$

Im weiteren Rechnungsablauf sind alle Randwerte Null zu setzen, weil die Membran an den Rändern eingespannt ist. Die u -Werte zweier aufeinanderfolgender j -Schichten werden zwischengespeichert. Die Datenspeicher der Schicht $j-1$ dürfen dabei erst durch die Daten der Schicht $j+1$ überschrieben werden.

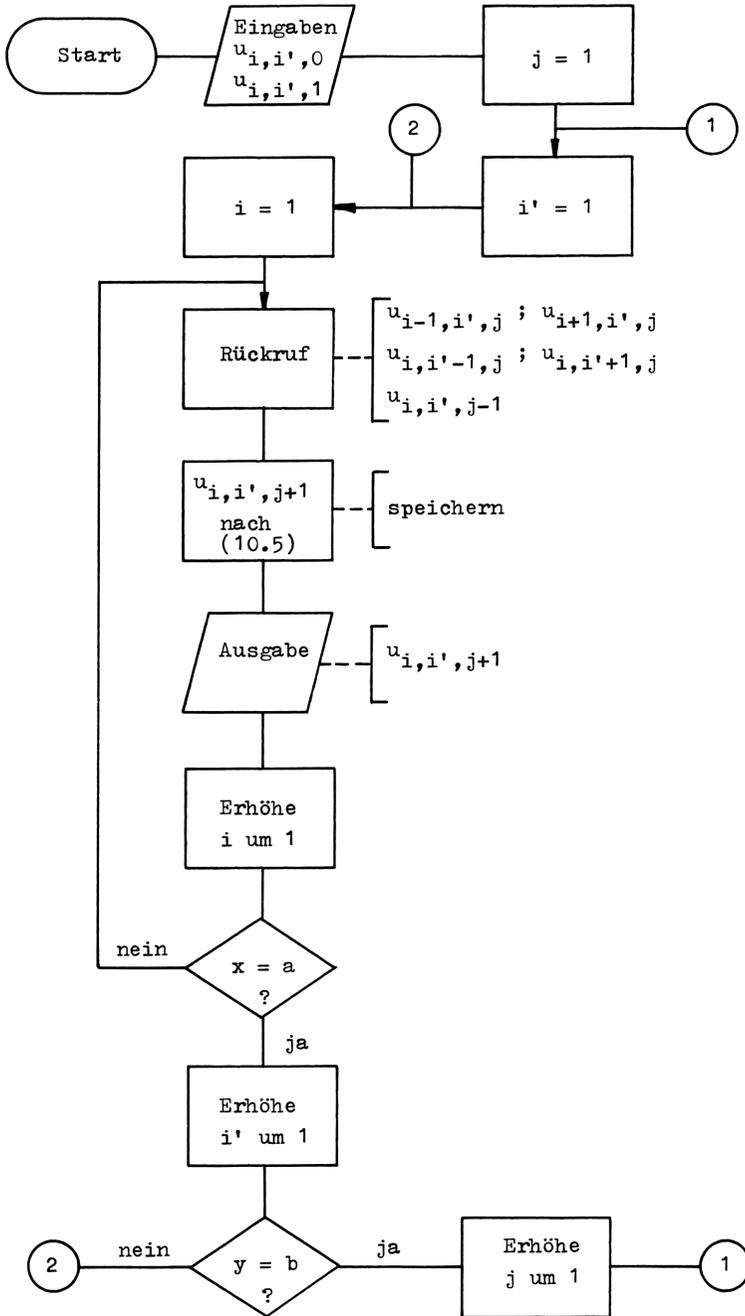


Abb. 55 Membranschwingung

10.2 Übergang auf Polarkoordinaten

Ist die Membran kreisförmig, so überführen wir die Differentialgleichung nach Abschnitt 8.2 in Polarkoordinaten:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = b^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \quad (10.7)$$

Bei gleichmäßiger Belastung der Membran bleibt u unabhängig von φ oder

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 .$$

Der Ersatz durch Zentralformeln führt dann mit

$$\begin{aligned} r &= i \cdot h \\ t &= j \cdot k \\ n &= \left(\frac{k}{hb} \right)^2 \end{aligned} \quad (10.8)$$

zu der neuen Rekursion

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= n \cdot \left[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + \frac{1}{2i} \cdot (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \right] + \\ &+ 2 \cdot (1-n) u_{i,j} - u_{i,j-1} \end{aligned} \quad (10.9)$$

Diese ist numerisch stabil für $(1-n) \geq 0$. Für $n = 1$ erhält man

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + \frac{1}{2i} \cdot (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} . \quad (10.10)$$

Die Auslenkung u muß im Kreismittelpunkt ($i = 0$) endlich bleiben. Dazu ist

$$u_{0+1,j} - u_{0-1,j} = 0$$

erforderlich, und wir erhalten im Kreismittelpunkt die Rekursion

$$u_{0,j+1} = 2 \cdot u_{1,j} - u_{0,j-1} . \quad (10.11)$$

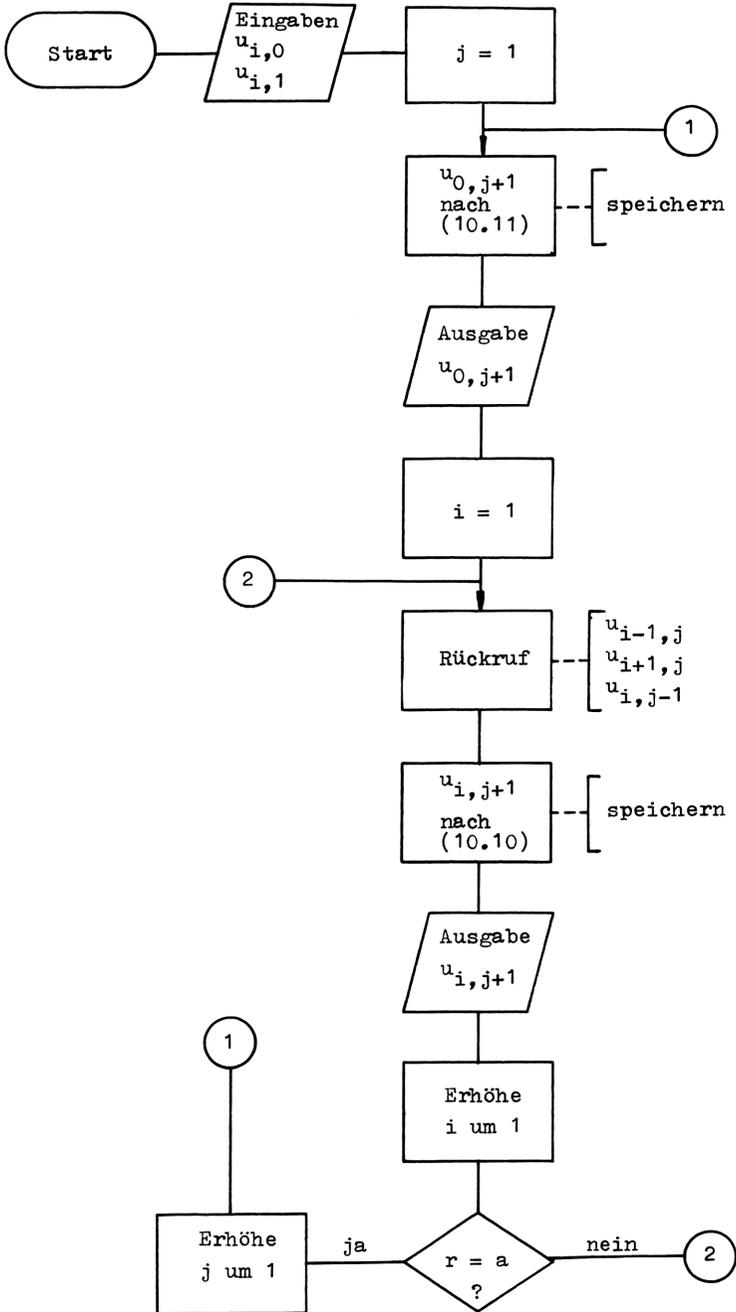


Abb. 56 Membranschwingung, Übergang auf Polarkoordinaten

Der Programmablaufplan vereinfacht sich zur Abb. 56. Bei einem gleichmäßigen Druck auf eine Membran vom Außenradius a ergeben sich die u -Werte für die Zeitzeile $j = 0$ zu

$$u = c \cdot (a^2 - r^2) \quad (10.12)$$

und bei plötzlicher Entlastung für die Zeitzeile $j = 1$

$$u_{i,1} = \frac{1}{2} \cdot \left[u_{i+1,0} + u_{i-1,0} + \frac{1}{2i} \cdot (u_{i+1,0} - u_{i-1,0}) \right] \quad (10.13)$$

und im Kreismittelpunkt

$$u_{0,1} = u_{1,0} \quad (10.14)$$

10.3 Beispiel. Schwingung einer quadratischen Membran

Die Schwingung einer quadratischen Membran, Kantenlänge $a = 6$ cm, $b = 2,4 \cdot 10^{-3}$ s/cm, soll berechnet werden. Wir unterteilen die Kante in sechs Teile. $h = 1$ cm ergibt nach (10.3) für $n = 1/2$ $k = 1,7 \cdot 10^{-3}$ s. Eine quadratische Membran ist symmetrisch zum Achsenkreuz, so daß es genügt, die Rechnung für einen Quadranten auszuführen. Dieses erfordert neun Datenspeicher pro Zeitschicht (Abb.57). Dann müssen noch die Auslenkungen u der Zeitschichten

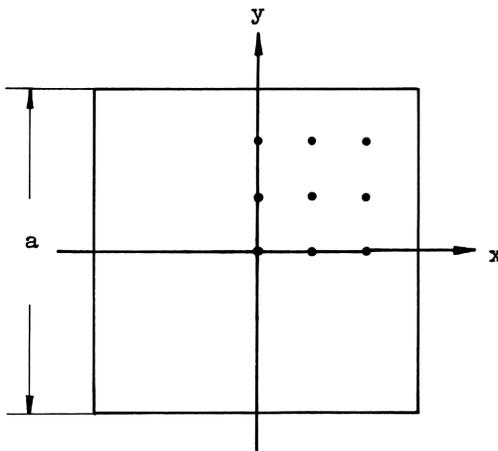


Abb. 57 Datenspeicher-Gitter bei einer quadratischen Membran

$j = 0$ und $j = 1$ bestimmt werden. Hierbei sind wir in der Wahl des Auslenungsdruckes frei. Mit dem Wert

$$f(x,y) = -\frac{p}{d\sigma} = 0,039 \frac{1}{\text{cm}}$$

und einer Genauigkeitsschranke von drei Stellen nach dem Komma ergibt das Gleichungssystem (11.4) folgende u -Werte für die Zeitschicht $j = 0$ in mm:

- 0,597	- 0,545	- 0,370
- 0,908	- 0,824	- 0,545
- 1,003	- 0,908	- 0,597 .

Die Entlastung nach Gleichung (10.6) liefert die u -Werte für die Zeitschicht $j = 1$ in mm:

- 0,499	- 0,448	- 0,272
- 0,812	- 0,727	- 0,448
- 0,908	- 0,812	- 0,499 .

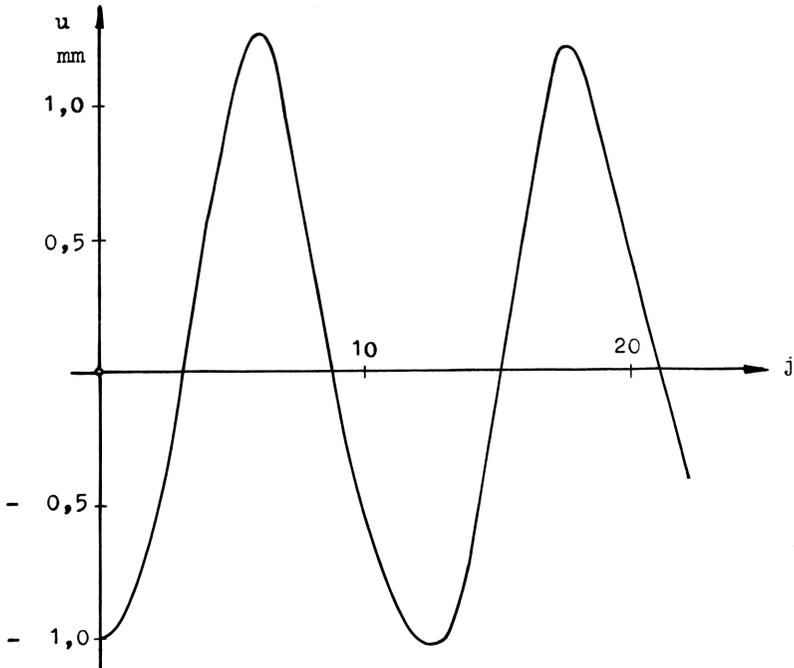


Abb. 58 Schwingung des Membranmittelpunktes

Damit kann die Schwingung nach (10.5) gerechnet werden. Das Ergebnis für den Membranmittelpunkt zeigt die Abb. 58. Als Schwingungszeit entnehmen wir $j_T = 12$ Zeitschritte und erhalten damit die Frequenz nach (6.5) zu $f = 49$ Hz .

Gerechnet wurde auf einem HP 67. Die Ausgabe im Hauptprogramm beschränkte sich auf die Werte für den Membranmittelpunkt. Es ist aber nicht ohne Reiz, auch die Schwingungen der anderen Gitterpunkte mit in die Betrachtung einzubeziehen.

Hauptprogramm		Belastung j = 0		Entlastung j = 1	
LBL A	RCL 8	LBL B	RCL 4	LBL C	RCL 9
RCL E	0	RCL 2	GSB 6	1	RCL 7
1	RCL 4	RCL 2	STO 7	1	0
+	GSB 1	+	RCL 9	ST I	RCL 5
STO E	RCL 9	RCL 4	+	RCL 2	GSB 0
PAUSE	RCL 7	RCL 4	0	RCL 2	0
1	0	GSB 6	RCL 5	RCL 4	RCL 8
ST I	RCL 5	STO 1	GSB 6	RCL 4	0
RCL 2	GSB 1	RCL 3	STO 8	GSB 0	RCL 6
RCL 2	0	+	0	RCL 3	GSB 0
RCL 4	RCL 8	RCL 5	RCL 6	RCL 1	P⊙S
RCL 4	0	RCL 5	GSB 6	RCL 5	RTN
GSB 1	RCL 6	GSB 6	RCL 9	RCL 5	
RCL 3	GSB 1	STO 2	x⊙y	GSB 0	LBL 0
RCL 1	P⊙S	RCL 6	STO 9	0	+
RCL 5	GTO A	RCL 6	-	RCL 2	+
RCL 5	LBL 1	GSB 6	RND	RCL 6	+
GSB 1	+	STO 3	x ≠ 0	RCL 6	4
0	+	RCL 5	GTO B	GSB 0	:
RCL 2	+	RCL 5	RTN	RCL 5	STO(i)
RCL 6	2	+		RCL 5	ISZ
RCL 6	:	RCL 7	LBL 6	RCL 7	RTN
GSB 1	P⊙S	RCL 1	+	RCL 1	
RCL 5	RCL(i)	GSB 6	+	GSB 0	
RCL 5	-	STO 4	RCL A	RCL 6	
RCL 7	STO(i)	RCL 6	RCL D	RCL 4	
RCL 1	GSB 2	+	x	RCL 8	
GSB 1	ISZ	RCL 8	-	RCL 2	
RCL 6	P⊙S	RCL 2	4	GSB 0	
RCL 4	RTN	GSB 6	:	0	
RCL 8	LBL 2	STO 5	RTN	RCL 5	
RCL 2	RC I	RCL 9		RCL 9	
GSB 1	1	RCL 3		RCL 3	
0	x ≠ y	GSB 6		GSB 0	
RCL 5	RTN	STO 6		RCL 8	
RCL 9	PAUSE	RCL 8		RCL 8	
RCL 3	RCL(i)	RCL 8		0	
GSB 1	-X-	+		RCL 4	
RCL 8	RTN	0		GSB 0	

Das Voranschreiten von j zu j+1 in den Datenspeichern erfolgt durch den Austausch der Primär- und Sekundärspeicher: P⊙S .

Speicherplan

A	B	C	D	E	I
	frei	frei	h^2	Zähler j	Zähler i, i'
0,39			1	Beginn: 1	

Die übrige Speichereinteilung entspricht der Abb. 57.

Zeitschicht j			Zeitschicht j+1		
7	8	9	17	18	19
4	5	6	14	15	16
1	2	3	11	12	13

Der Membranmittelpunkt ist der Datenspeicher 1 bzw. 11 .

11. Poissonsche- und Potentialgleichung

11.1 Problemstellung und Lösungsweg

Die Differentialgleichung der Wärmeleitung in einer dünnen Platte wurde im Kapitel 8 vorgestellt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

Es wird der Platte eine Temperaturverteilung u am Rande aufgedrückt. Nach einer gewissen Zeit hat sich im Innern eine stationäre Temperaturverteilung eingestellt, die Ableitung nach der Zeit ist zu Null geworden:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (11.1)$$

Die Betrachtung auch anderer stationärer Felder mit einem Potential u führt auf die Gleichung (11.1), die den Namen Potentialgleichung erhalten hat. Sie gilt aber nur, wenn im Innern der Platte keine Wärme erzeugt oder abgeführt wird. Gibt es im Innern einen Wärmefluß, so ist die rechte Seite der Gleichung nicht mehr Null:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \quad (11.2)$$

Die Funktion $f(x,y)$ drückt dann den stationären Wärmefluß in den Plattenpunkten aus. Die um $f(x,y)$ erweiterte Potentialgleichung heißt Poissonsche Differentialgleichung. Beide Gleichungen spielen in vielen Anwendungsgebieten eine fundamentale Rolle. So führt die Druckbelastung einer Membran ebenfalls auf die Gleichung

chung (11.2). Mit dem Druck p , der Membrandicke d , der Spannung σ ist

$$f(x,y) = -\frac{p}{d\sigma}$$

und $u(x,y)$ die Auslenkung der Membranpunkte.

Für eine kreisrunde Umrandung schreibt sich (11.2) in Polarkoordinaten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = f(r,\varphi) \quad (11.3)$$

Ist u unabhängig von φ , so geht die partielle in eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Randwerten über.

Beschreibung des Verfahrens

Es genügt, die Poissonsche Differentialgleichung zu behandeln, weil die Potentialgleichung in ihr als Sonderfall mit $f(x,y) = 0$ enthalten ist. Die Differentialquotienten werden durch Zentralformeln ersetzt. Die Abmessungen der Gitterzelle h und k sollen von einander unabhängig wählbar sein. Mit

$$x = i \cdot h$$

$$y = j \cdot k$$

erhält man eine Gleichung für $u_{i,j}$ im Gitterpunkt i,j :

$$2 \cdot (h^2 + k^2) u_{i,j} = k^2 (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + h^2 (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) - h^2 k^2 f(x,y) \quad (11.4)$$

Die Abb. 59 soll diese Gleichung veranschaulichen. Der u -Wert der linken Seite ist durch einen leeren Kreis, die u -Werte der rechten Seite sind durch volle Kreise gekennzeichnet.

Schreibt man die Gleichungen für alle Gitterpunkte i,j untereinander, indem man jeweils einen anderen $u_{i,j}$ -Wert auf der linken

Seite hat, so ergeben sich n Gleichungen mit n Unbekannten. Die Anzahl der Gitterpunkte im Innern des Gitters ist gleich n . Die

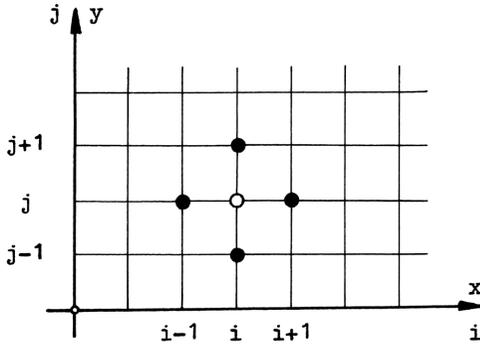


Abb. 59 Zur Gleichung (11.4)

Funktionswerte u in den Rand-Gitterpunkten und die Funktion $f(x,y)$ sind nach Voraussetzung gegeben.

Ein solches umfangreiches Gleichungssystem läßt sich auf einem Taschenrechner nur durch ein Iterationsverfahren lösen. Wegen seines einfachen Aufbaues bietet sich das Einzelschrittverfahren nach Gauß-Seidel an.

Auf den linken Seiten des Gleichungssystems steht jeweils eine andere Unbekannte u . Der Startwert für alle Unbekannten ist Null. Mit den vorhandenen Zahlenwerten in den Rand-Gitterpunkten werden für die einzelnen Unbekannten Näherungswerte, Gleichung hinter Gleichung, ermittelt. Hierbei sind stets die neusten Näherungswerte in die nachfolgenden Gleichungen einzusetzen. Ist man auf diesem Wege bei der letzten Gleichung des Systems angekommen, so beginnt die Rechnung mit der ersten wieder von vorne. Die Rechnung ist beendet, wenn sich, gemessen an einer Genauigkeitsschranke, die Zahlenwerte der Unbekannten nicht mehr ändern.

Eine schnelle Konvergenz dieses einfachen Iterationsverfahrens ist nicht bei jedem Gleichungssystem gewährleistet. Erforderlich sind wenige Unbekannte pro Gleichung und ein Überwiegen des Koeffizienten auf der linken Seite gegenüber denen auf der rechten. Dieses trifft bei dem vorliegenden Gleichungssystem (11.4) zu, wenn nicht zu viele Gitterpunkte weit ab vom Rande liegen. Als Maß zur Beendigung der Rechnung kann man den u -Wert der letzten Gleichung wählen. Erreicht der Unterschied aus zwei aufeinanderfolgender Iterationen

$$\Delta = (u_{i,j})_m - (u_{i,j})_{m+1} \quad (11.5)$$

eine vorgegebene Genauigkeitsschranke, so wird die Rechnung beendet.

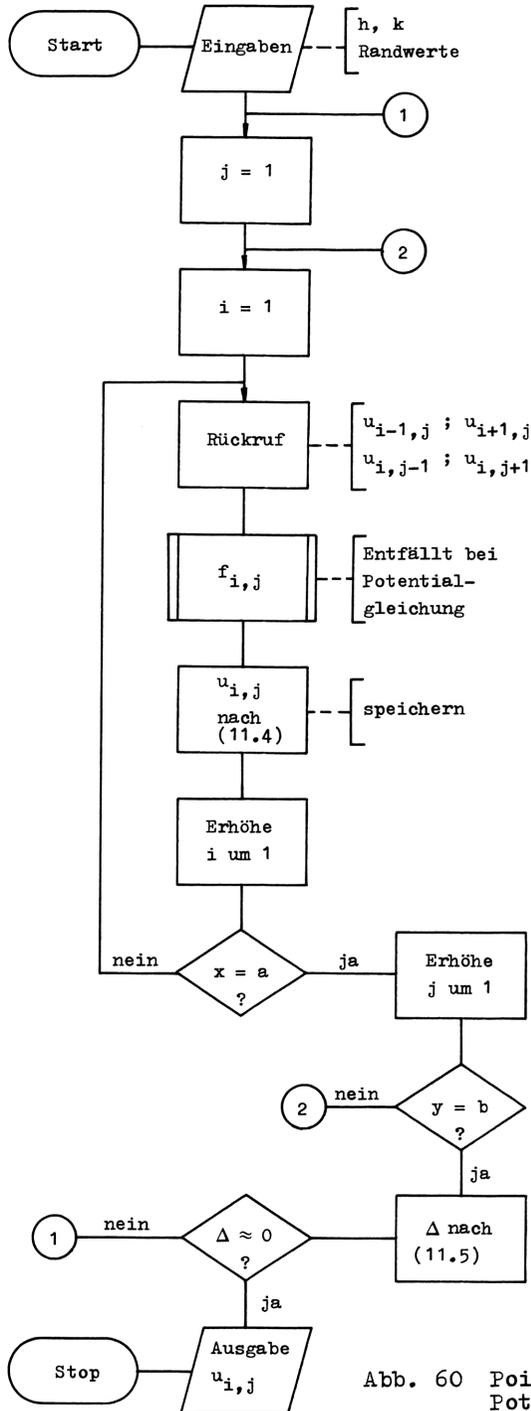


Abb. 60 Poissonsche- und Potentialgleichung

Programmablaufplan

Das Gitter habe die Abmessung $a \cdot b$. Zu Beginn der Rechnung (Abb.60) werden die Werte u an den vier Rändern sowie h und k eingegeben. Bei der Poissonschen Differentialgleichung kann die Funktion $f_{i,j}$ in den einzelnen Gitterpunkten in einem Unterprogramm gerechnet werden. Bei der Potentialgleichung entfällt dieses. Während jedes Iterationsdurchlaufes überschreiben die neuen Näherungswerte sofort die alten in den entsprechenden Datenspeichern, mit Ausnahme des letzten Gitterpunktes. Hier wird zunächst der Unterschied nach (11.5) festgestellt und mit der Genauigkeitsschranke verglichen.

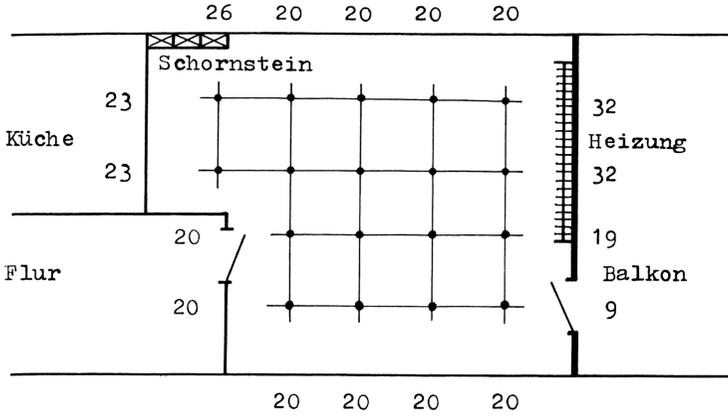
11.2 Beispiel. Temperaturverteilung in einem Wohnraum im Winter

Ein Beispiel für die Poissonsche Differentialgleichung war die Auswölbung einer Membran innerhalb des Beispiels 10.3. Als Beispiel für die Potentialgleichung soll der Einfluß einer dünnen Balkontür auf die Temperaturverteilung in einem geheizten Wohnraum ermittelt werden. Bekannt sind die Randtemperaturen, der niedrigste Wert an der Balkontür, der höchste an der Heizung. Auch weitere Gegebenheiten, wie Schornstein und Küche, werden in die Überlegungen einbezogen.

Das Zimmer wird mit einem Gitter aus quadratischen Zellen überzogen. Ohne die Ränder hat es 18 Punkte (Abb.61). Für $h = k$ und $f(x,y) = 0$ vereinfacht sich (11.4)

$$4 \cdot u_{i,j} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} \quad .$$

Gerechnet wird das System aus 18 Gleichungen nach dem beschriebenen Iterationsverfahren mit einer Genauigkeitsschranke von zwei Stellen nach dem Komma. Das Ergebnis ist in Abb. 61 festgehalten. Die kalte Balkontür macht sich im Zimmer nur wenig bemerkbar. Dafür ist der Wärmestau in der Zimmerecke an der Heizung nicht zu übersehen. Der Einbau eines Thermostaten an dieser Stelle ist nicht empfehlenswert.



23,0	21,4	21,2	22,0	24,7
21,8	21,2	21,3	22,2	24,8
20,5	20,6	20,7	20,4	
20,1	20,1	19,5	17,2	

Abb. 61 Datenspeicher-Gitter und Temperaturverteilung des Beispiels 11.2

Gerechnet wurde die Temperaturverteilung auf einem HP 67 mit dem folgenden Iterationsprogramm für 18 Gleichungen mit 18 Unbekannten. Die Genauigkeitsschranke entspricht dem Anzeigeformat.

```

LBL A      GSB 1      GSB 1      STO 0      RC I      RCL D
RCL 2      STO 4      STO 7      +          +          +
RCL B      +          P⊙S      RCL C      +          RCL E      P⊙S
+          RCL 2      +          +          RCL 5      RCL A
RCL A      P⊙S      RCL 9      P⊙S      GSB 1      RCL 9
RCL 8      P⊙S      RCL 1     P⊙S      STO 4      GSB 1
GSB 1      +          RCL 1     RCL 6      P⊙S      P⊙S
STO 1      RCL A      GSB 1     P⊙S      RCL 6      RCL 8
          RCL 6      STO 8     GSB 1     +          x⊙y
RCL 3      GSB 1     STO 1     STO 1     RCL A      STO 8
+          STO 5     P⊙S      RCL 2     RCL 2     P⊙S
RCL 7      RCL 8     +          GSB 1     -          -
RCL A      RCL 7      +          +          STO 5      RND
GSB 1      +          RCL D     RCL 5     +          x ≠ 0
STO 2      P⊙S      RCL 0     P⊙S      RCL 7     GTO A
          RCL 1     GSB 1     RCL 5     +          RTN
          P⊙S      P⊙S      P⊙S      RCL A
RCL 4      P⊙S      P⊙S      P⊙S      RCL 1
+          RCL 3     STO 9     GSB 1     RCL 1
RCL 6      GSB 1     STO 2     STO 2     GSB 1
RCL A      STO 6     P⊙S      RCL E     STO 6      LBL 1
GSB 1      RCL 1     RCL 1     +          +
STO 3      RCL 8     +          +          4
          +          RCL 7     +          :
RCL A      P⊙S      P⊙S      RCL 4     RCL 8     RTN
+          RCL 0     RCL 7     RCL A     RCL A
RCL 5      P⊙S      P⊙S      GSB 1     RCL 0
RCL A      RCL 2     GSB 1     STO 3     GSB 1
          +          +          STO 7     STO 7

```

Speicherplan

	A	B	C	D	E	I
Randwerte	20	9	19	32	23	26

Die übrige Speichereinteilung entspricht der Abb. 61.

14	15	16	17	18
13	12	11	10	9
	5	6	7	8
	4	3	2	1

12. Das Rechteckgitter mit beliebig geformten Rändern

12.1 Problemstellung und Lösungsweg

Für die Berechnung partieller Differentialgleichungen vom Typ Stromverdrängung, Membranschwingung oder Potentialgleichung wurden zunächst rechteckige Randbegrenzungen angenommen. Bei kreisförmigen Grenzkurven blieben dann die Differentialgleichungen durch den Übergang auf Polarkoordinaten für Taschenrechner lösbar. Aber auch die Weiterung auf beliebig geformte Ränder läßt sich mit Taschenrechnern noch bearbeiten, weil die Gitterpunktmethod mit relativ kurzen Programmen auskommt.

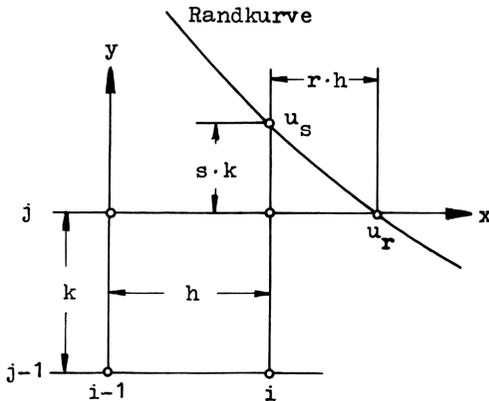


Abb. 62 Randkurve mit Rechteckgitter

Hierzu betrachten wir eine beliebige Randkurve, die eine Zelle des Rechteckgitters durchschneidet (Abb.62). Die gegebenen Randwerte an den Schnittpunkten sind u_r und u_s . Die Gitterabstände im Punkt i, j sind zur Randkurve hin verkürzt

in x-Richtung: $r \cdot h$ $0 \leq r \leq 1$
 in y-Richtung: $s \cdot k$ $0 \leq s \leq 1$.

Auch für diese einseitig verkürzten Gitterabstände lassen sich Differenzenquotienten angeben. Der Ansatz der Taylor-Reihe links und rechts vom Punkt i, j ergibt zwei Gleichungen mit den partiellen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung

$$u(ih+rh) = u_r = u_{i,j} + rh \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot h^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots$$

$$u(ih-h) = u_{i-1,j} = u_{i,j} - h \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots$$

Aus ihnen errechnen sich die Zentralformeln für einseitig verkürzte Gitterabstände:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{h} \cdot \left[\frac{1}{1+r} \left(\frac{u_r}{r} - r \cdot u_{i-1,j} \right) - (1-r) \cdot \frac{u_{i,j}}{r} \right]$$

analog

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{k} \cdot \left[\frac{1}{1+s} \left(\frac{u_s}{s} - s \cdot u_{i,j-1} \right) - (1-s) \cdot \frac{u_{i,j}}{s} \right]$$

(12.1)

mit einem Fehler von der Ordnung h^2 bzw. k^2 ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{r \cdot h^2} \cdot \left(\frac{u_r + r \cdot u_{i-1,j}}{1+r} - u_{i,j} \right)$$

analog

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2}{s \cdot k^2} \cdot \left(\frac{u_s + s \cdot u_{i,j-1}}{1+s} - u_{i,j} \right)$$

(12.2)

mit einem Fehler von der Ordnung h bzw. k , d.h. für $r < 1$ bzw. $s < 1$ mindert sich die Genauigkeit gegenüber den unverkürzten Zentralformeln!

Der Ersatz der Differentialquotienten durch (12.2) ergibt in den Gitterpunkten mit verkürzten Abständen zum Rand die folgenden Rekursionsformeln:

Stromverdrängung (Skineneffekt)

Nach (8.4) $x = i \cdot h$, $y = i' \cdot h$, $\tau = j \cdot k$, $n = \frac{k}{h^2}$

$$u_{i,i',j+1} = 2n \cdot \left[\frac{u_r + r \cdot u_{i-1,i',j}}{r \cdot (1+r)} + \frac{u_s + s \cdot u_{i,i'-1,j}}{s \cdot (1+s)} + \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) \cdot u_{i,i',j} \right] + u_{i,i',j} \quad (12.3)$$

Membranschwingung

Nach (10.2) $x = i \cdot h$, $y = i' \cdot h$, $t = j \cdot k$ und (10.3) $n = \left(\frac{k}{hb} \right)^2$

$$u_{i,i',j+1} = 2n \cdot \left[\frac{u_r + r \cdot u_{i-1,i',j}}{r \cdot (1+r)} + \frac{u_s + s \cdot u_{i,i'-1,j}}{s \cdot (1+s)} \right] + \\ - 2 \cdot \left[n \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) - 1 \right] \cdot u_{i,i',j} - u_{i,i',j-1} \quad (12.4)$$

In den übrigen Gitterpunkten gelten weiter die Rekursionsformeln (8.5) bzw. (10.4). Die Rechnung ist numerisch stabil für

$$n \leq \frac{r \cdot s}{r + s} \quad (12.5)$$

Der Punkt mit den kürzesten Gitterabständen zum Rand entscheidet also über die Stabilität der Rechnung.

Poissonsche- und Potentialgleichung

Hier wird in den Gitterpunkten mit verkürzten Abständen die Gleichung (11.4) ersetzt. Mit $x = i \cdot h$, $y = j \cdot k$

$$\left(\frac{h^2}{s} + \frac{k^2}{r} \right) u_{i,j} = \frac{k^2}{1+r} \left(\frac{u_r}{r} + u_{i-1,j} \right) + \frac{h^2}{1+s} \left(\frac{u_s}{s} + u_{i,j-1} \right) + \\ - \frac{1}{2} \cdot h^2 k^2 f(x,y) \quad (12.6)$$

Die Rechnungsabläufe der vorangegangenen Kapitel bleiben ungeändert.

12.2 Beispiel. Biegung und Schwingung einer elliptischen Membran

Für eine elliptische Membran mit den Halbachsen $\alpha = 4$ cm und $\beta = 2$ cm, soll analog zu Kapitel 10.3 die Durchbiegung bei einer gleichmäßigen Belastung von

$$f(x,y) = -\frac{p}{d\sigma} = 0,05 \frac{1}{\text{cm}}$$

und die Schwingung für $b = 2,4 \cdot 10^{-3}$ s/cm berechnet werden.

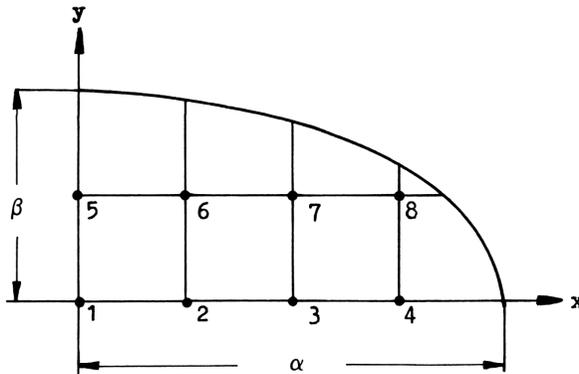


Abb. 63 Datenspeicher-Gitter bei einer elliptischen Membran

Eine Ellipse ist symmetrisch zum Achsenkreuz. Es genügt daher, die Rechnung für einen Quadranten auszuführen. Dieses erfordert bei $h = k = 1$ cm acht Datenspeicher pro Zeitschicht (Abb.63). Außerdem sind alle Randwerte Null, weil die Membran eingespannt ist.

Zunächst erhält man für die Punkte 6, 7 und 8 verkürzte Gitterabstände

$$r_6 = 1,0$$

$$s_6 = 2 \cdot \sin(\arccos 0,25) - 1 = 0,9365$$

$$r_7 = 1,0$$

$$s_7 = 2 \cdot \sin(\arccos 0,50) - 1 = 0,7321$$

$$r_8 = 4 \cdot \cos(\arcsin 0,50) - 3 = 0,4641$$

$$s_8 = 2 \cdot \sin(\arccos 0,75) - 1 = 0,3229 \quad .$$

Die kürzesten Abstände hat der Punkt 8, so daß für die Stabilität der Schwingungsrechnung nach (12.5)

$$n \leq \frac{r_8 \cdot s_8}{r_8 + s_8} = 0,1905$$

eingehalten werden muß. Wir wählen $n = \frac{1}{8}$.

Durchbiegung

Mit $h = k$ ergeben sich nach (12.6) folgende Gleichungen in den Gitterpunkten, die dem Rande benachbart sind:

$$\text{Punkt 6} \quad \left(\frac{1}{s_6} + 1\right)u_6 = \frac{1}{2} \cdot (u_5 + u_7) + \frac{u_2}{1+s_6} - \frac{h^2}{2} \cdot f$$

$$\text{Punkt 7} \quad \left(\frac{1}{s_7} + 1\right)u_7 = \frac{1}{2} \cdot (u_6 + u_8) + \frac{u_3}{1+s_7} - \frac{h^2}{2} \cdot f$$

$$\text{Punkt 8} \quad \left(\frac{1}{r_8} + \frac{1}{s_8}\right)u_8 = \frac{u_7}{1+r_8} + \frac{u_4}{1+s_8} - \frac{h^2}{2} \cdot f \quad .$$

Für die übrigen Gitterpunkte gilt die Gleichung (11.4), z.B. im

$$\text{Punkt 1} \quad 2 \cdot u_1 = \frac{1}{2} \cdot (u_2 + u_2 + u_5 + u_5) - \frac{h^2}{2} \cdot f \quad .$$

Bei einer Genauigkeitsschranke von vier Stellen nach dem Komma errechnen sich aus dem Gleichungssystem nach Gauß-Seidel die u -Werte (Durchbiegungen) in mm

$$\begin{array}{cccc} -0,60 & -0,55 & -0,40 & -0,15 \\ -0,80 & -0,75 & -0,60 & -0,35 \end{array}$$

Gerechnet wurde mit dem folgenden Programm auf einem HP 67. Die Genauigkeit entspricht dem eingestellten Anzeigeformat.

```

LBL B      RCL 6      +      STO 5      RCL 1
RCL 7      RCL 8      2      RCL 3      x↺y
RCL A      +      :      0      STO 1
1          2          RCL 2      RCL 8      -
+          :          RCL D      RCL 8      RND
:          RCL 3      1          GSB 0      x ≠ 0
RCL 4      RCL C      +      STO 4      GTO B
RCL B      1          :          RCL 2      RTN
1          +          +          RCL 7
+          :          RCL E      RCL 7      LBL 0
:          +          -          GSB 0      +
+          RCL E      RCL D      STO 3      +
RCL E      -          1/x      RCL 1      +
-          RCL C      1          RCL 6      2
RCL A      1/x      +          RCL 6      :
1/x        1          :          GSB 0      RCL E
RCL B      +          STO 6      STO 2      -
1/x        :          RCL 6      RCL 2      2
+          STO 7      0          RCL 5      :
:          RCL 5      RCL 1      RCL 5      RTN
STO 8      RCL 7      GSB 0      GSB 0

```

Speicherplan

A	B	C	D	E	I
r_8	s_8	s_7	s_6	$\frac{h^2}{2} \cdot f$	frei
0,4641	0,3229	0,7321	0,9365	0,25	

Die übrige Speichereinteilung entspricht der Abb.63. Der Membranzmittelpunkt ist der Datenspeicher 1 .

5	6	7	8	9 bis 19	frei
1	2	3	4		

Schwingung

Nach (12.4) ergeben sich folgende Gleichungen in den Gitterpunkten, die dem Rande benachbart sind:

Punkt 6

$$u_{6,j+1} = n \left(u_{5,j} + u_{7,j} + \frac{2u_{2,j}}{1+s_6} \right) - 2 \left[n \left(1 + \frac{1}{s_6} \right) - 1 \right] u_{6,j} - u_{6,j-1}$$

Punkt 7

$$u_{7,j+1} = n \left(u_{6,j} + u_{8,j} + \frac{2u_{3,j}}{1+s_7} \right) - 2 \left[n \left(1 + \frac{1}{s_7} \right) - 1 \right] u_{7,j} - u_{7,j-1}$$

Punkt 8

$$u_{8,j+1} = 2n \left(\frac{u_{7,j}}{1+r_8} + \frac{u_{4,j}}{1+s_8} \right) - 2 \left[n \left(\frac{1}{r_8} + \frac{1}{s_8} \right) - 1 \right] u_{8,j} - u_{8,j-1} .$$

Für die übrigen Gitterpunkte gilt die Gleichung (10.4), z.B. im

Punkt 1

$$u_{1,j+1} = n(u_{2,j} + u_{2,j} + u_{5,j} + u_{5,j}) + 2(1 - 2n)u_{1,j} - u_{1,j-1} .$$

Zu Beginn der Rechnung müssen die Anfangswerte in den beiden Zeitschichten $j = 0$ und $j = 1$ vorliegen. Wie im Kapitel 6 beschrieben, lassen sich diese Werte durch "Auslenken" und "Loslassen" finden. Für die Zeitschicht $j = 0$ benutzen wir die berechneten u -Werte der Durchbiegung. Entlasten wir die Membran, so ist die Rückschwing-Geschwindigkeit aller Punkte im ersten Moment noch Null. Man erhält so die u -Werte der Zeitschicht $j=1$ durch Gleichsetzen von $u_{i,i',j+1}$ und $u_{i,i',j-1}$ in den obigen Gleichungen, z.B. im

Punkt 1

$$2u_{1,0+1} = n(u_{2,0} + u_{2,0} + u_{5,0} + u_{5,0}) + 2(1 - 2n)u_{1,0} .$$

Die u -Werte der Zeitschicht $j = 1$ sind dann

$$\begin{array}{cccc} - 0,5688 & - 0,5188 & - 0,3688 & - 0,1188 \\ - 0,7688 & - 0,7188 & - 0,5688 & - 0,3188 . \end{array}$$

Jetzt läßt sich die Schwingung der elliptischen Membran nach dem im Kapitel 10 beschriebenen Verfahren rechnen. Das Ergebnis für den Membranmittelpunkt zeigt die Abb.64. Als Schwingungszeit entnehmen wir $j_T = 19$ Zeitschritte. Die Frequenz errechnet sich nach

(6.5)

mit $k = b \cdot h \sqrt{n} = 0,85 \cdot 10^{-3}$ s zu

$$f = \frac{1}{j_{\Pi} \cdot k} = 62 \text{ Hz} .$$

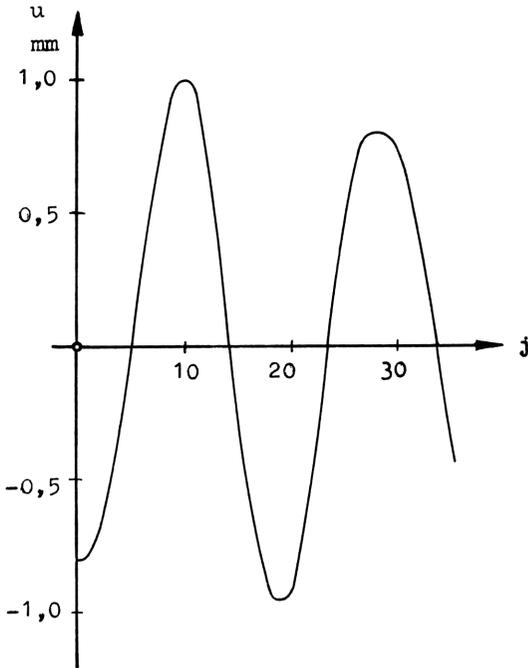


Abb. 64 Schwingung des Membranmittelpunktes

Programm für einen HP 67. Die Ausgabe beschränkt sich auf die Werte für den Membranmittelpunkt. Das Voranschreiten von j zu $j+1$ in den Datenspeichern erfolgt wieder durch den Austausch von Primär- und Sekundärspeicher: P↔S .

LBL A	0	+	RCL A	LBL 1
RCL E	RCL 8	RCL 0	1	+
1	RCL 8	x	+	+
+	GSB 1	GSB 2	:	+
STO E	RCL 6	RCL 6	RCL 4	RCL 0
PAUSE	RCL 6	RCL 8	RCL B	x
1	0	+	1	RCL 0
ST I	RCL 1	RCL 3	+	2
RCL 2	GSB 1	2	:	x
RCL 2	RCL 5	x	+	LBL 2
RCL 5	RCL 7	RCL C	RCL 0	1
RCL 5	+	1	x	-
GSB 1	RCL 2	+	2	2
-X-	2	:	x	x
RCL 1	x	+	RCL A	RCL(i)
RCL 3	RCL D	RCL 0	1/x	x
RCL 6	1	x	RCL B	-
RCL 6	+	RCL C	1/x	P \odot S
GSB 1	:	1/x	+	RCL(i)
RCL 2	+	1	RCL 0	-
RCL 4	RCL 0	+	x	STO(i)
RCL 7	x	RCL 0	GSB 2	ISZ
RCL 7	RCL D	x	P \odot S	P \odot S
GSB 1	1/x	GSB 2	GTO A	RTN
RCL 3	1	RCL 7		

Speicherplan

A	B	C	D	E	I
r_8	s_8	s_7	s_6	Zähler j	Zähler i, i'
0,4641	0,3229	0,7321	0,9365	Beginn: 1	
0 und 10	n = 0,125			9 und 19	frei

Die übrige Speichereinteilung entspricht der Abb.63.

Zeitschicht j				Zeitschicht j+1			
5	6	7	8	15	16	17	18
1	2	3	4	11	12	13	14

Die Daten der Zeitschicht $j=0$ sind in die Speicher 11 bis 18, die der Zeitschicht $j=1$ in die Speicher 1 bis 8 einzugeben. Der Membranmittelpunkt ist der Datenspeicher 1 bzw. 11.

Literaturverzeichnis

Das nachfolgende Verzeichnis ist nur eine kleine Auswahl weiterführender Bücher, sowohl über numerische Verfahren als auch über Anwendungen von Differentialgleichungen. Bei der Zusammenstellung wurde darauf geachtet, daß der interessierte Leser sein Wissen ergänzen kann.

1. J. Becker, Numerische Mathematik für Ingenieure, Stuttgart 1977
2. A. Björck, G. Dahlquist, Numerische Methoden, München - Wien 1972
3. L. Collatz, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Leipzig 1963
4. L. Collatz, Differentialgleichungen, Stuttgart 1966
5. B. P. Demidowitsch, Numerische Methoden der Analysis, Berlin 1968
6. H. Selder, Einführung in die numerische Mathematik für Ingenieure, München 1973
7. G. D. Smith, Numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen, Braunschweig 1970
8. E. Stiefel, Einführung in die numerische Mathematik, Stuttgart 1971
9. R. Zurmühl, Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, Berlin - Heidelberg - New York 1965

Stichwortverzeichnis

- Ableitung, elektrische 96
- Anfangsrandbedingung 43
- Anfangswert 13
 - , freier 51
- Ankerrückwirkung 32
- Anlaufkurve 35

- Balken auf elastischer Unterlage 56
- Bettungsziffer 56
- Biegesteifigkeit 56
- Bremstrommel 83

- Dämpfung einer Welle 97
- Decision 10
- Differentialgleichung
 - , gekoppelte 26, 36
 - , mit Anfangswerten 13
 - , mit Eigenwerten 60
 - , mit Randwerten 43
 - , partielle 75
- Differenzenverfahren 76
- Differenzenformel
 - , einseitige 78
 - , zentrale 77

- Eigenfunktion 61
- Eigenlösung 61
- Eigenvektor 61
- Eigenwert 60
- Einschalten
 - , eines Motors 32
 - , einer Spule 23
- Einzelrittverfahren 140
- Eisen-Magnetisierungskurve 23
- Elastizitätsmodul 87
- Endrandbedingung 43
- Erwärmung einer Bremsstrommel 82
- Euler, Leonard 76

- Fehlerabschätzung 19
- Feldstärke, elektrische 107
- Flag 47
- Flußdiagramm 15
- Flüssigkeitsströmung 18
- Fontäne 40
- Frequenz 65, 88, 136

- Gauß-Seidel 140
- Genauigkeitsschranke 22, 63
- Gitterpunktmethode 76

- Homogene Randwertaufgabe 60

- Induktivität 24, 33, 96
- Integral 113
- Isolierfähigkeit 96
- Iterationsverfahren 140

- Kapazität
 - , elektrische 96
 - , Wärme-
 - Kepler, Johannes 113
 - Keplersche Faßregel 113
 - Knickung 70
 - Kompressionswelle 92
 - Kondensator 100, 102
 - Korrektur 21, 28

- Leerbefehl 128
- Leitfähigkeit
 - , elektrische 107
 - , Wärme- 79

- Magnetisierungskurve 23
- Membran
 - , Druckbelastung 139, 148
 - , elliptische 148
 - , quadratische 134
 - , Schwingung 129, 134, 148

- Permeabilität 107
- Poissonsche Gleichung 130
- Polarkoordinaten 110, 112
- Potentialgleichung 138
- Programmablaufplan 15
 - , Symbole 16

- RAM 10
- Rambär 92
- Randbedingungsgleichung 99
- Randkurve 145
- Randschaltung 100
- Randwertaufgabe 43, 46, 53
 - , homogene 60

-
- | | | | |
|-----------------------------------|----------|---|---------|
| Regula falsi | 60 | Taylor-Reihe | 146 |
| Rekursionsformel | 77 | Telegraphengleichung | 96 |
| ROM | 10 | Temperaturverteilung in
einem Wohnraum | 142 |
| Runge-Kutta-Verfahren | 13 | Träger mit Rammbar | 91 |
| -, Fehlerabschätzung | 19 | Trägheitsmoment | 33 |
| -, Korrektur | 21, 28 | | |
| -, Schrittbestimmung | 22, 28 | Unterprogramm | 16, 18 |
| Runge-Kutta-Nyström-
Verfahren | 36 | | |
| | | Wanderwelle | 96, 105 |
| Saite veränderlicher
Stärke | 63 | -, mit Stromverdrängung | 120 |
| Sättigungsgrad | 23 | Wärmefluß | 138 |
| Schrittbestimmung | 22, 28 | Wärmekapazität | 79 |
| Schwingungsfrequenz | 65, 88 | Wärmeleitung | 79 |
| Seil mit Schneelast | 47 | Wärmeleitvermögen | 79 |
| Selbstinduktion | 107 | Wasserspeicher | 38 |
| Skineffekt | 107, 120 | Wellendämpfung | 97 |
| Spannungskurve | 116 | Wellengeschwindigkeit | 87, 97 |
| Spannungswelle | 98 | Wellengleichung | 87 |
| Spule mit Eisenkern | 23 | Wellenwiderstand | 98 |
| Stabilität | 70 | Widerstand | |
| -, numerische | 82 | -, Gleichstrom- | 33, 96 |
| Strom | 109 | -, Wechselstrom- | 118 |
| Stromdichte | 109 | -, Wellen- | 98 |
| Stromkurve | 117 | | |
| Stromverdrängung | 107, 120 | Zentralformel | 77 |
| Stromwelle | 98 | -, verkürzte | 146 |
| Subroutine | 10 | | |

Durch programmierbare Taschenrechner eröffnet sich dem Interessierten heute die Möglichkeit, einen reizvollen Zweig der Naturbeschreibung auch außerhalb von Rechenzentren kennenzulernen. Hierzu will das Buch Hilfestellung geben, durch das Aufzeigen der mathematischen Verfahren, mit denen auf programmierbaren Taschenrechnern das Lösen von Differentialgleichungen auf einfache Weise gelingt. Mit 18 Programmablaufplänen (Flußdiagramme) und vielen Zahlenbeispielen wird der Aufbau der verschiedenen Programme verdeutlicht.

