W. Sacher

Statistik

für Benutzer programmierbarer

Taschenrechner

Mit 108 Programmen und 14 Tabellen

Zweite, völlig neu bearbeitete Auflage

Oldenbourg

Fehlerberichtigung

In Formel (29) auf S. 10 muß vor dem Wurzelzeichen „SD" wegfallen.

Der Autor

Richtige Formel:

$$f\ (x) = \frac{1}{\sqrt{2\ \pi\ SD^2}} \cdot e^{\left(-\frac{(X - \overline{X})^2}{2\ SD^2}\right)} ; \qquad (29)$$

π = die Kreiszahl 3,141592...,
e = die Basis der natürlichen Logarithman 2,718281...

Statistik für Benutzer programmierbarer Taschenrechner

Von Werner Sacher

Mit 108 Programmen und 14 Tabellen

Zweite, völlig neu bearbeitete Auflage

R. Oldenbourg Verlag München Wien 1980

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Sacher, Werner:
Statistik für Benutzer programmierbarer
Taschenrechner : mit 108 Programmen u. 14 Tab. /
Werner Sacher. – 2., völlig neu bearb. Aufl. –
München, Wien : Oldenbourg, 1980.
1. Aufl. u.d.T.: Sacher, Werner: Einführung in
die Statistik für Benutzer programmierbarer
Taschenrechner.
ISBN 3-486-20762-8

Druck: Hofmann-Druck KG, Augsburg
Bindearbeiten: R. Oldenbourg Graphische Betriebe GmbH, München

ISBN 3-486-20762-8

Inhalt

III. Teil: Tabellen

Vorwort zur 2. Auflage

Dieses Buch richtet sich hauptsächlich an Leser, die empirisch arbeiten möchten. Es ist daher betont pragmatisch konzipiert. Auf die mathematische Begründung und Ableitung der Verfahren wurde kein Wert gelegt. Trotz der Einwendungen mancher Rezensenten erscheint es dem Verfasser nach wie vor legitim, die gängigen Verfahren in handlicher Form für einen Personenkreis zusammenzustellen, der sie hauptsächlich anzuwenden hat, und dabei vorauszusetzen, daß dieser bereits über die mathematischen Grundlagen verfügt.
Es war und ist eine zentrale Absicht des Buches, die praktische Verwendbarkeit durch die Beigabe einer Programmsammlung für die gängigen programmierbaren Taschenrechner weiter zu erhöhen. Bei dieser Orientierung des Buches spielte die Überlegung eine Rolle, daß nicht jedermann Zutritt zu einem Rechenzentrum hat bzw. die anfallenden Kosten tragen kann. Außerdem gibt es eine ganze Reihe von Verfahren, die mit Papier und Bleistift äußerst mühevoll abzuwickeln sind, die andererseits aber den Einsatz einer EDV-Anlage noch nicht unbedingt rechtfertigen.
Die Programme können zugleich eine Hilfe zum besseren Verständnis der Verfahren sein:Leser, welche das Buch so verwenden möchten, sollten allerdings die Programme als Lösungsvorschläge des Verfassers ansehen und sich die Mühe machen, eigene Programme zu schreiben bzw. die hier vorgelegten nach ihren Bedürfnissen abzuändern.
Die mittlerweile auf dem Markt erschienenen Rechner ermöglichten für die zweite Auflage die Einbeziehung weiterer Verfahren, die mit den technischen Möglichkeiten der älteren Modelle noch nicht realisierbar waren. Dafür mußten einige Passagen der älteren Fassung fallen.
Mit Rücksicht auf eine gewisse Polarisierung des Angebots wird nunmehr jedes Programm in einer Variante für algebraische Eingabelogik (AOS) und in einer solchen für umgekehrte polnische Notation (UPN) vorgelegt. Die Programme laufen damit auf den handelsüblichen Rechnern, ohne daß Abänderungen erforderlich wären.[1]
Im Sinne eines weiteren Bemühens um Verständlichkeit wurden nun fast durchgehend Beispielrechnungen eingefügt. Der Verfasser hofft, dadurch einer gedankenlosen Verwendung der Programme etwas vorbeugen zu können. Außerdem kann das Buch nun auch ohne den Einsatz eines programmierten Taschenrechners als Anleitung zur Verwendung statistischer Verfahren mit Gewinn gelesen werden.

Insgesamt entstand eine völlig neue Fassung, die mit der ersten Auflage noch nicht einmal 5% Text gemeinsam haben dürfte.
Texas-Instruments/Freising und Hewlett&Packard/München-Taufkirchen stellten dem Verfasser ihre Geräte in großzügiger Weise für die Programmkonstruktion zur Verfügung. Besonders den zuständigen Abteilungsleitern, den Herren Nielsen und Baron, sei für diese Hilfe herzlich gedankt.

München, Sommer 1979
Werner Sacher

---

1) Zum Zeitpunkt des Manuskriptabschlusses TI-58, TI-58 C, TI-59 und HP 19 C, HP 67, HP 97 sowie mit Einschränkungen TI-57 und HP 29 C.

Hinweise für den Benutzer

Die behandelten Verfahren sind hinsichtlich ihrer Schwierigkeit und ihrer allgemeinen Bedeutung im Inhaltsverzeichnis gekennzeichnet: Ein Leser ohne statistische Vorkenntnisse sollte sich zunächst einmal die Abschnitte mit vornehmen, die sowohl die einfacheren als auch die grundlegenden Verfahren enthalten. Die mit einem + versehenen Textteile führen in weitere Verfahren ein, die heute zunehmende Verbreitung finden und ebenfalls noch relativ leicht verständlich sind. Die übrigen Passagen sind Verfahren und Problemen gewidmet, die bereits Vorkenntnisse voraussetzen und höhere Ansprüche stellen. Der noch nicht eingelesene Benutzer sollte sie erst zuletzt durcharbeiten.

I. Teil: Theoretische Grundlagen

1. Analyse von Verteilungen

1.1. Statistische Kennwerte von Verteilungen

1.1.1. Mittelwerte

Verteilungen sind zum einen charakterisiert durch ihre Mittelwerte. Der wohl am häufigsten verwendete und gebräuchlichste Mittelwert ist das ARITHMETISCHE MITTEL, das wir erhalten, wenn wir alle Einzelwerte addieren und die Summe durch die Anzahl der Werte teilen. Mathematisch gilt die Beziehung

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n},$$

wobei n = Anzahl der verrechneten X-Werte. (1)

Mit Hilfe von festprogrammierten Funktionen können wir $\bar{X}$ jederzeit bequem aus ungeordneten Daten der Urliste ermitteln. Zur Berechnung bedarf es also nicht unbedingt der Erstellung einer Tabelle. Sie wird aber in einer wissenschaftlichen Arbeit oft aus Gründen der Darstellung nötig sein. Muß man ohnehin eine Tabelle anlegen, so kann man mittels Programm 1 $\bar{X}$ auch aus den gruppierten Daten berechnen. In diesem Falle liegt die folgende Formel zugrunde:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{c} IM_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{c} f_i},$$

wobei IM = Intervallmitten, (2)
f = Häufigkeit im Intervall. (Pr.1)

Ziemlich selten werden wir in die Lage kommen, das GEOMETRISCHE MITTEL berechnen zu müssen, d.h. alle Werte miteinander zu multiplizieren und, wenn N die Anzahl der Werte ist, die N-te Wurzel aus dem Produkt zu ziehen. In der Statistik benötigt man das geometrische Mittel z.B. bei bestimmten Skalierungsverfahren (vgl. S.88f). Die zugehörige Formel lautet:

$$MG = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i},$$

wobei $\prod$ = eine fortlaufende Faktorenkette ist zu bilden, (3)

n = Anzahl der verrechneten X-Werte (negative Werte sind nicht zulässig!).

Ebenfalls wenig gebräuchlich ist das HARMONISCHE MITTEL. Es findet z.B. bei der Mittelung von Verhältniszahlen (km/h, kp/cm^2) und bei bestimmten Problemen der Varianzanalyse Anwendung:

$$HM = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}} \quad (4)$$

DAS ARITHMETISCHE MITTEL, DAS GEOMETRISCHE MITTEL UND DAS HARMONISCHE MITTEL SOLLTEN NUR ÜBER WIRKLICHE MESSWERTE BERECHNET WERDEN, BEI DENEN GLEICHEN ABSTÄNDEN IM MESSBEREICH GLEICHE ABSTÄNDE IM BEREICH DER GEMESSENEN PHÄNOMENE ENTSPRECHEN.

Dieser Einschränkung unterliegt nicht der MEDIAN bzw. ZENTRALWERT. Der Median ist jener Wert, der genau in der Mitte aller Werte liegt, wenn man diese in einer Rangfolge anordnet. Bei einer Wertreihe von

1 - 2 - 2 - 4 - 5 - 6 - 9

wäre 4 der Median, da unterhalb und oberhalb von ihm jeweils 3 Werte liegen. Etwas schwieriger gestaltet sich diese Prozedur bei einer geraden Anzahl von Werten, etwa

2 - 3 - 4 - 5 - 5 - 6 - 7 - 7 - 8 - 9 .

Die Mitte liegt dann zwischen 5 und 6, d.h. der Median wäre 5.5 .
Die Prozedur wird sehr schnell zeitraubend und umständlich, so daß man sich von jeher normalerweise einer Näherungsrechnung bedient, die allerdings eine Tabellierung der Werte voraussetzt.
Als Beispiel mag die unten zusammengestellte Verteilung von Testpunkten dienen. Darin ist die kumulierte Häufigkeit jene Häufigkeit, die sich in einem Intervall ergibt, wenn wir jeweils alle bis dahin vorgefundenen Häufigkeiten in aufsteigender Reihenfolge summieren. Aus den kumulierten Häufigkeiten ist ersichtlich, daß in der Gruppe der Schüler mit 12 bis 15 Punkten die 50%-Grenze der Klasse (17,5P.) überschritten wird, und zwar um 27 - 17,5 = 9,5 Schüler.

Intervall-Code	Punkte	Schüler (= f)	kumulierte Häufigkeit (= f_c)
1	0 - 3	2	2
2	4 - 7	6	8
3	8 - 11	8	16
4	12 - 15	11	27
5	16 - 19	5	32
6	20 - 23	3	35 = N

Den Median ermitteln wir dann durch folgende Näherungsrechnung:

$$Z = l_{50} - \frac{\Delta 50}{f_{50}} \cdot IB, \quad (5)\ (Pr.2)$$

wobei

I_{50} = obere Grenze des Intervalls, in welchem 50 % überschritten werden,

$\Delta 50$= Differenz zwischen der in diesem Intervall erreichten kumulierten Häufigkeit und N/2,

f_{50} = Häufigkeit in diesem Intervall,

IB = Intervallbreite

In unserem Falle haben wir zu rechnen: [1)]

$$Z = 15{,}5 - \frac{9{,}5}{11} 4 = 12{,}05.$$

Viel verwendet werden auch die sogenannten CENTILE, d.h. Prozentgrenzen, unterhalb derer ein bestimmter Prozentsatz der Verteilung liegt. Der Median ist in diesem Sinne eigentlich ein 50%-Centil (Schreibweise: C_{50}). Besonders häufig bedient man sich der Quartile, d.h. der Centile C_{25}, C_{50} und C_{75} sowie der Zehner-Centile C_{10}, C_{20} usw.
Das arithmetische Mittel ist relativ empfindlich gegenüber häufiger vorkommenden Extremwerten. Der Median teilt diese Schwäche nicht, so daß er unter Umständen zuverlässiger die zentrale Tendenz einer Verteilung wiedergibt.
Der Median ist jener Wert, von welchem alle übrigen in der Weise abweichen, daß die Summe der absoluten Beträge dieser Abweichungen minimal ist. Dagegen ergibt beim arithmetischen Mittel die Summe der quadrierten Abweichungen ein Minimum. Im Unterschied zum Median geht in das arithmetische Mittel j e d e r einzelne Meßwert ein.
Ein weiterer und in gewisser Hinsicht der einfachste Mittelwert ist der MODAL- oder GIPFELWERT: Es ist dies jener Wert, der am häufigsten vorkommt bzw. jenes Intervall, das mit der größten Häufigkeit besetzt ist. Im letzteren Falle wird als Modalwert die entsprechende Intervallmitte benannt. Vorausgesetzt, daß wir eine Tabellierung vornehmen, ist er leicht ohne irgendwelche mathematischen Hilfsmittel erkennbar. Haben benachbarte Werte bzw. Intervalle gleichhohe Häufigkeiten, handelt es sich um eine breitgipfelige Verteilung. Bei zwei Gipfeln sprechen wir von einer bimodalen, bei mehreren von einer multimodalen Verteilung.

1.1.2. Variabilitätsmaße

Die Mittelwerte geben einen Wert, der die übrigen Werte der Verteilung möglichst gut repräsentieren soll. Man sagt, sie stellen die zentrale Tendenz einer Verteilung dar. Von Interesse ist aber in den meisten Fällen auch, in welchen Entfernungen die übrigen Werte um den Mittelwert herum liegen, d.h. wie sehr sie um ihn "streuen". Verteilungen können durchaus gleiche Mittelwerte haben, obwohl sie ganz unterschiedlich streuen. Um diesen Effekt zu erfassen, sind die Streuungs- oder Variabilitätsmaße entwickelt worden.

1) Die Intervallbreite erhalten wir, wenn wir die Distanz zwischen der Obergrenze eines Intervalls und der Untergrenze des folgenden der scheinbaren Intervallbreite zuschlagen. In diesem Fall: der Abstand zwischen 11 und 12 beträgt 1. Die scheinbare Intervallbreite ist 15 - 12 = 3. Die wirkliche Intervallbreite ist dann 3 + 1 = 4. Entsprechend liegen auch die wirklichen Intervallgrenzen jeweils in der Mitte zwischen den scheinbaren.

Das zur Zeit wohl am häufigsten benutzte Maß für die Variabilität ist die STANDARDABWEICHUNG SD (= "STANDARD DEVIATION"), oft auch schlicht "STREUUNG" genannt, die nach der Beziehung

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2}{N}} \qquad (6)\ (Pr.\ 1)$$

berechnet wird, falls Daten einer Gesamtpopulation zugrundeliegen. Öfter freilich werden wir von Daten einer Stichprobe ausgehen müssen. In diesem Falle ist die Standardabweichung nach der Formel

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2}{N-1}} \qquad (7)\ (Pr.1)$$

zu ermitteln. Beide Formeln lassen sich vorteilhaft anwenden, falls wir $\bar{X}$ bereits kennen. Möchten wir hingegen die Standardabweichung direkt aus ungeordneten Rohdaten ermitteln, rechnen wir nach den beiden folgenden Beziehungen:

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{N} X_i)^2}{N}}{N}} \quad \text{für Populationsdaten,} \qquad (8)\ (Pr.\ 1)$$

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{N} X_i)^2}{N}}{N-1}} \quad \text{für Stichprobendaten.} \qquad (9)\ (Pr.\ 1)$$

Für tabellierte Daten gelten die nachstehenden Formeln:

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{c} IM_i^2 \cdot f_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{c} IM_i \cdot f_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{c} f}}{\sum_{i=1}^{c} f_i}} \quad \text{für Populationsdaten,} \qquad (10)\ (Pr.\ 1)$$

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{c} IM_i^2 \cdot f_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{c} IM_i \cdot f_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{c} f}}{\sum_{i=1}^{c} f_i - 1}} \quad \text{für Stichprobendaten.} \qquad (11)\ (Pr.\ 1)$$

Dabei ist
IM = Mitte des Intervalls,
f = Häufigkeit in dem jeweiligen Intervall.

Handelt es sich bei der untersuchten Verteilung um eine Normalverteilung, so liegen im Bereich einer Standardabweichung um das arithmetische Mittel herum (zwischen $\bar{X}$ + SD und $\bar{X}$ - SD) 68,26% aller Werte, im Bereich zweier Standardabweichungen um das arithmetische Mittel herum 95,44%. Man kann auch umgekehrt sagen, daß bei einer Standardabweichung die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Wert um mehr als eine Standardabweichung vom arithmetischen Mittel abweicht 31,74%, daß er um mehr als zwei Standardabweichungen abweicht 4,56% beträgt. Für jede beliebige eingipfelige Verteilung, soweit sie nur symmetrisch ist, gilt:

$$p_{\%} < 100 \cdot \frac{4}{9\,k^2}\,; \qquad (12)$$

$p_{\%}$ = Wahrscheinlichkeit, daß ein Meßwert um mehr als k Standardabweichungen von $\bar{X}$ abweicht.

k = Anzahl der Standardabweichungen, die X von $\bar{X}$ abweichen soll.

In Worten: Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Wert einer solchen Verteilung um mehr als k Standardabweichungen vom arithmetischen Mittel abweicht, beträgt weniger als p%.

Für eine beliebige (also auch mehrgipfelige und asymmetrische) Verteilung gilt:

$$p_{\%} < 100 \cdot \frac{1}{k^2}\,; \qquad (13)$$

$p_{\%}$ = Wahrscheinlichkeit, daß ein Meßwert um mehr als k Standardabweichungen von $\bar{X}$ abweicht.

k = Anzahl der Standardabweichungen, die X von $\bar{X}$ abweichen soll.

Ein sehr verbreitetes Streuungsmaß ist auch die <u>VARIANZ</u>. Sie ist nichts anderes als das Quadrat der Standardabweichung. Dementsprechend gelten für Fälle, in denen $\bar{X}$ bekannt ist, die Beziehungen:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{i}(X_i - \bar{X})^2}{N} \quad \text{für Populationsdaten,} \qquad (14)\ (\text{Pr. } 1)$$

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{i}(X_i - \bar{X})^2}{N-1} \quad \text{für Stichprobendaten.} \qquad (15)\ (\text{Pr. } 1)$$

Ist $\bar{X}$ nicht bekannt und soll aus ungeordneten Urdaten gerechnet werden, gilt:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{N} x_i)^2}{N}}{N}$$ für Populationsdaten, (16) (Pr.1)

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{N} x_i)^2}{N}}{N - 1}$$ für Stichprobendaten. (17) (Pr.1)

Aus tabellierten Daten rechnet man nach den Beziehungen:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{c} IM_i^2 \cdot f_i - \frac{(\sum_{i=1}^{c} IM_i \cdot f_i)^2}{\sum_{i=1}^{c} f_i}}{\sum_{i=1}^{c} f_i}$$ für Populationsdaten, (18) (Pr.1)

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{c} IM_i^2 \cdot f_i - \frac{(\sum_{i=1}^{c} IM_i \cdot f_i)^2}{\sum_{i=1}^{c} f_i}}{\sum_{i=1}^{c} f_i - 1}$$ für Stichprobendaten. (19) (Pr.1)

Ein Variabilitätsmaß, welches keine Meßwerte im strengen Sinne voraussetzt, ist der MITTLERE QUARTILABSTAND QD (="QUARTER DEVIATION"), der nach der Beziehung:

$$QD = \frac{C_{75} - C_{25}}{2} \qquad (20)$$

berechnet wird. C_{75} und C_{25} können dabei nach Programm 2 ermittelt werden.

Die Größe von SD hängt von der Größe des arithmetischen Mittels ab, so daß entsprechende Werte aus verschiedenen Verteilungen nicht ohne weiteres vergleichbar sind. Man relativiert deshalb SD am arithmetischen Mittel und erhält den VARIABILITÄTSKOEFFIZIENTEN:

$$VK = 100 \cdot \frac{SD}{\bar{X}} . \qquad (21)$$

1.1.3. Schiefe und Exzeß

Eine Verteilung ist schließlich weiterhin dadurch gekennzeichnet, daß sie flacher oder steiler und mehr oder weniger symmetrisch verläuft. Als diesbezügliche Maße verwendet die Statistik SCHIEFE und EXZESS.
Die Schiefe kann aufgrund folgender Beziehungen geschätzt werden:

$$Sch = \frac{\bar{X} - Mo}{SD}; \qquad \text{dabei ist } Mo = \text{Modalwert}, \; SD = \text{Standardabweichung} \tag{22}$$

oder

$$Sch = \frac{C_{90} + C_{10}}{2} - C_{50}. \tag{23}$$

Symmetrische Verteilungen haben eine Schiefe von Null, rechts-asymmetrische eine negative, links-asymmetrische eine positive Schiefe.

Der Exzeß kann nach der folgenden Formel geschätzt werden:

$$E = \frac{C_{75} - C_{25}}{2\,(C_{90} - C_{10})}. \tag{24}$$

Der Exzeß einer Normalverteilung nach (24) ist 0.263. Verteilungen mit einem größeren Exzeß heißen breitgipfelig, solche mit einem kleineren schmalgipfelig. Zur Berechnung der notwendigen Ausgangswerte sind die entsprechenden Programme heranzuziehen.

Eine präzise Bestimmung der Schiefe erhalten wir nach der Gleichung:

$$Sch = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i^3}{N}; \qquad \text{darin ist } z = \frac{X - \bar{X}}{SD}. \tag{25}$$

(Pr. 3)

Entsprechend kann der Exzeß einer Verteilung nach der Formel

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i^4}{N} \tag{26}$$

(Pr. 3)

genau berechnet werden. Der Exzeß einer Normalverteilung ist nach (26) 3.000.

DA BEI DER INTERPRETATION DES EXZESSES AUF DIE NORMALVERTEILUNG BEZUG GENOMMEN WIRD, SOLLTE DIESES MASS NUR FÜR EINGIPFELIGE VERTEILUNGEN BERECHNET WERDEN.

1.2. Vergleich von Verteilungen

1.2.1. Vergleich empirischer Verteilungen

Nicht selten stehen wir vor dem Problem, Daten derselben Person in verschiedenen Verteilungen vergleichen zu müssen, etwa die Leistungen in mehreren psychologischen Tests oder Zensuren in mehreren Klassenarbeiten. Die Punktzahlen oder die Noten für sich genommen, besagen für einen Vergleich gar nichts, was besonders hinsichtlich der Schulnoten noch immer viel zu wenig gesehen wird.

1.2.1.1. Prozentränge

Eine Möglichkeit, die gewünschte Vergleichbarkeit herzustellen, besteht in der Berechnung sogenannter Prozentränge:

$$PR = \frac{f_c}{N} \cdot 100, \qquad (27)\ (\text{Pr.}4)$$

wobei f_c = kumulierte Häufigkeit bis zu dem entsprechenden X-Wert,

N = Gesamthäufigkeit.

Ein Prozentrang von 38.5% für einen Schüler in einer Klassenarbeit besagt, daß 38.4% seiner Mitschüler schlechter und 61.4% besser waren als er. Diese Angabe ist aussagekräftiger als die Feststellung, der Schüler habe in besagter Klassenarbeit eine 3 erhalten, zumal sie sich anstelle der Noten auf die erreichten Punktzahlen oder auf die Fehlerzahlen beziehen und insofern genauer differenzieren kann.

1.2.1.2. Standardwerte

Ein anderes Verfahren besteht darin, die Verteilungen mit Hilfe ihrer Parameter $\overline{X}$ und SD zu standardisieren, d.h. die jeweiligen X-Werte nach der Beziehung

$$z = \frac{X - \overline{X}}{SD} \qquad (28)\ (\text{Pr.}5/6)$$

in z-Werte zu transformieren.

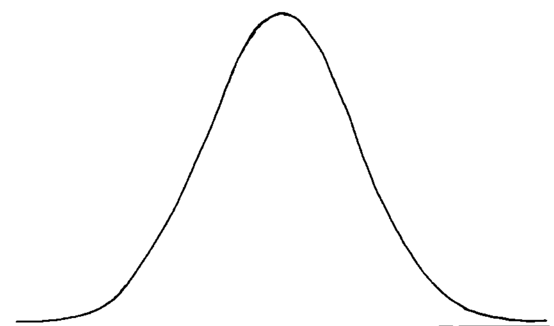
Prozentränge und Standardwerte sind nun über verschiedene Verteilungen hinweg vergleichbar. Wissen wir von einer Versuchsperson, daß sie in einem Gedächtnistest unter ihren Altersgenossen einen Prozentrang von 42.9% und in einem Aufmerksamkeitstest einen Prozentrang von 64.0% erreicht hat, dürfen wir folgern, daß sie im Aufmerksamkeitstest - und zwar ungeachtet der Schwierigkeit beider Tests - besser abgeschnitten hat. Dieselbe Folgerung dürften wir ziehen, wenn sie im ersten Test einen z-Wert von -1.26 und im zweiten Test

einen solchen von 0.54 erreicht hätte.
DA DIE BERECHNUNG VON STANDARDWERTEN UNTER HERANZIEHUNG DES ARITHMETISCHEN MITTELS UND DER STANDARDABWEICHUNG GESCHIEHT, SETZT SIE MESSWERTE IM STRENGEN SINNE VORAUS. ERSCHEINT DIESE VORAUSSETZUNG BEI EINER DER ZU VERGLEICHENDEN VERTEILUNGEN NICHT GESICHERT, EMPFIEHLT ES SICH, AUF DIE BERECHNUNG VON PROZENTWERTEN AUSZUWEICHEN.
In manchen Fällen ist es wichtig, zu überprüfen, ob zwischen zwei oder mehr empirischen Verteilungen generell ein signifikanter Unterschied besteht. Entsprechende Verfahren werden wir in den Kapiteln über Hypothesenprüfung und Varianzanalyse kennenlernen.

1.2.2. Vergleich einer empirischen Verteilung mit einer theoretischen Verteilung

1.2.2.1. Ausgewählte Zufallsverteilungen

Die NORMALVERTEILUNG dürfte jene Verteilungsform sein, welche in der Statistik die größte Rolle spielt. Man erhält sie z.B. in etwa, wenn man von einer schiefen Ebene sehr viele Kugeln herabrollen läßt und die Entfernungen mißt, in denen sie liegen bleiben. Ihr Bild kennen wir alle aus der Schulzeit:



Form einer Normalverteilung

Bei vielen Phänomenen des täglichen Lebens wie Körpergewicht, Körperlänge, Handkraft usw. liegt ziemlich klar auf der Hand, daß sie normalverteilt sind, bei anderen wird Normalverteiltheit unterstellt, z.B. bei der Intelligenz, der Unterscheidungsfähigkeit der Sinnesorgane usw.

Berechnet wird der Funktionswert zu einem vorgegebenen X-Wert nach der ziemlich komplizierten Formel:

$$f\ (x) = \frac{1}{SD\sqrt{2\ \pi\ SD^2}} \cdot e^{\left(-\ \frac{(X\ -\ \overline{X})^2}{2\ SD^2}\right)} \quad ; \tag{29}$$

π = die Kreiszahl 3,141592...,
e = die Basis der natürlichen Logarithman 2,718281...

Wir werden mit dieser Formel praktisch kaum arbeiten und sie schon gar nicht integrieren müssen. Man pflegt die Normalverteilung zu standardisieren, d.h. man verwendet eine Standardnormalverteilung mit $\overline{X}$ = 0 und SD = 1. Für diese enthält Tabelle 1 zu allen z-Werten die zugehörigen Ordinaten und Flächenstücke, so daß wir sie dort ohne weiteres nachschlagen können.
DIE NORMALVERTEILUNG IST EINE KONTINUIERLICHE VERTEILUNG, D.H. DIE MESSWERTE SOLLEN JEDE BELIEBIGE GRÖSSE VON MINUS UNENDLICH BIS PLUS UNENDLICH ANNEHMEN KÖNNEN UND KEINE "SPRÜNGE" AUFWEISEN. DIE NORMALVERTEILUNG DARF NICHT ZUGRUNDEGELEGT WERDEN, WENN SICH MESSWERTE NUR INNERHALB FESTER GRENZEN BEWEGEN KÖNNEN.
Damit sie sinnvoll auf unseren Kugelversuch anwendbar ist, müßte man also die Zahl der Kugeln gegen Unendlich gehen lassen. Sie ist z.B. nicht anzuwenden auf Prozentwerte, die nur zwischen 0 und 100 oder gar auf Korrelationskoeffizienten, die nur zwischen +1.00 und -1.00 schwanken können, oder auf die Anzahl richtig beantworteter Fragen in einem Test, da deren Gesamtzahl grundsätzlich immer begrenzt sein muß und die Meßwerte (hier: die Punktezahlen) nicht kontinuierlich sind: Auf eine Testleistung von 23 Punkten folgt beispielsweise eine solche von 24 Punkten. Die Normalverteilung würde aber voraussetzen, daß man auch jedes beliebige Ergebnis zwischen 23 und 24 Punkten, also z.B. 23,2;23,4589 usw., erhalten kann.
Im allgemeinen verfährt man in der Statistik mit diesen Voraussetzungen recht großzügig. Im Hinblick auf den Meßbereich, der natürlich in keinem praktischen Fall von minus Unendlich bis plus Unendlich gehen kann, ist diese Toleranz sicherlich z.T. angebracht. Sie ist aber jedenfalls fehl am Platz, wo es sich um Verteilungen mit diskreten (nicht kontinuierlichen) Meßwerten handelt.
Eine Zufallsverteilung mit beschränktem Meßbereich für diskrete Werte ist die BINOMIALVERTEILUNG.

Für sie gilt die Beziehung:

$$p\ (x) = \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot q^{N-k}, \tag{30}$$

(Pr. 7)

wobei
p(x) = Wahrscheinlichkeit, daß der Wert X k mal auftritt,
k = Häufigkeit, mit welcher ein Wert X auftreten soll,
p = Wahrscheinlichkeit für das Auftreten jedes der X-Werte, q = 1 - p,

N = Gesamtzahl der X-Werte,

$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!\ (N-k)!}$ 1)

Für $N > 20$ erzielt man in der Praxis im allgemeinen bereits recht brauchbare Ergebnisse mit der Normalverteilung.
Es sei z.B. die Wahrscheinlichkeit gesucht, mit 6 Griffen in einen undurchsichtigen Beutel, der eine rote, eine grüne, eine blaue und eine gelbe Kugel enthält, zweimal die rote Kugel herauszugreifen (wobei nach jedem Versuch die herausgegriffene Kugel wieder zurückgelegt wird):
Es ist dann $N = 6$, $k = 2$, $p = 0.25$, $q = 0.75$ und wir haben zu rechnen:

$$p\ (x) = \binom{6}{2}\ 0.25^2 \cdot 0.75^{6-2} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} \cdot 0.25^2 \cdot 0.75^4 = 0.2966.$$

Eine Zufallsverteilung mit beschränktem Wertebreich für diskrete Werte ist auch die POISSONVERTEILUNG für seltene Ereignisse. Für sie wird die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nach der folgenden Formel berechnet:

$$p\ (x) = \frac{\bar{f}_x^{\ k}}{e^{(\bar{f}_x)} \cdot k\ !}; \qquad (31)\ (Pr.8)$$

wobei
$p(x)$ = Wahrscheinlichkeit, daß das seltene Ereignis X k-mal auftritt,
k = Häufigkeit, mit welcher das seltene Ereignis X auftreten soll,
$\bar{f}_x$ = durchschnittliche Häufigkeit, mit welcher das seltene Ereignis unter N Fällen auftritt,
e = Basis der natürlichen Logarithmen 2,718281...

Ein seltenes Ereignis sei z.B. ein Schuß aus 100 m Entfernung ins Zentrum einer Zielscheibe. Anläßlich eines Schützenfestes seien unter 2450 abgegebenen Schüssen 319 ins Zentrum gesetzt worden. Wie groß war unter diesen Umständen für einen Teilnehmer die Wahrscheinlichkeit, 5mal ins Zentrum zu treffen?

In diesem Beispiel ist $\bar{f}_x = \frac{319}{2450}$ und $k = 5$. Wir haben zu rechnen:

$$p\ (x) = \frac{\left(\frac{319}{2450}\right)^5}{2{,}718281^{\left(\frac{319}{2450}\right)} \cdot 5!} = 0{,}0000002738.$$

1) ! ist das Fakultätszeichen: 8! besagt z.B., daß ein Produkt aus einer Faktorenkette gebildet werden soll, die - in absteigender Ordnung - mit 8 beginnen und mit 1 enden soll, so daß $8! = 8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 40320$

1.2.2.2. Die Chi-Quadrat-Probe

Oft wird man aufgrund irgendwelcher Hypothesen eine bestimmte Verteilung des Untersuchungsmaterials erwarten. So z.B., wenn wir untersuchen möchten, ob die Unfallhäufigkeit an bestimmten Wochentagen höher ist als an den übrigen. Die Nullhypothese, mit welcher unterstellt wird, die Abweichungen der beobachteten Häufigkeiten von den erwarteten seien zufallsbedingt, könnte hier etwa lauten: "An allen Wochentagen ereignen sich gleich viele Unfälle." Die erwartete Verteilung wäre also eine Gleichverteilung.

	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Summe
f_e	10	10	10	10	10	10	10	70
f_b	13	6	5	5	10	14	17	70

(f_e = erwartete Häufigkeit, f_b = beobachtete Häufigkeit)

Wir berechnen nun einen Prüfwert Chi-Quadrat nach der Formel

$$\mathrm{Chi}^2 = \sum_{i=1}^{c} \frac{(f_{b_i} - f_{e_i})^2}{f_{e_i}} \qquad \text{darin ist } f_b = \text{beobachtete Häufigkeit, } f_e = \text{erwartete Häufigkeit.} \tag{32}$$

Wir haben also zu jeder Spalte die Differenz zwischen f_b und f_e zu errechnen, ins Quadrat zu erheben und das Ergebnis durch f_e zu teilen. Die so erhaltenen Werte sind über alle Spalten hinweg zum Chi-Quadrat aufzuaddieren.
Für unser Beispiel erhalten wir einen Wert von 14,00. Um diesen zu beurteilen, müssen wir noch die sogenannten Freiheitsgrade (= df, von "degrees of freedom") feststellen. Wir hatten zwei Verteilungen von je 7 Werten für die Wochentage verglichen . Davon waren aber nur jeweils 6 Werte "frei": Der 7.Wert ergab sich aus den 6 übrigen und der Gesamtsumme, in welcher beide Verteilungen übereinstimmen mußten. Wir haben also 6 Freiheitsgrade. Wir schlagen nun in Tabelle 2 unter 6 Freiheitsgraden nach. Dort finden wir für die Signifikanz-Niveaus 0.05, 0.01 und 0.001 sogen. kritsche Chi-Quadrate von 12.59, 16.81 und 22.46. Unser Wert von 14.00 ist kleiner als 16.81, aber größer als 12.59. Wir sagen, er ist auf dem 5%-Niveau signifikant. Auf dem 1%-Niveau und erst recht auf dem 0.1%-Niveau wäre er hingegen nicht signifikant . Konkret bedeutet dies, daß die Nullhypothese ("An allen Wochentagen ereignen sich gleich viele Unfälle.") nur 5% Wahrscheinlichkeit für und 95% Wahrscheinlichkeit gegen sich hat. Die Alternativ-Hypothese ("Es ereignen sich nicht an allen Wochentagen gleich viele Unfälle.") kann also, wenn uns 95% Wahrscheinlichkeit genügen, akzeptiert werden.
Gelegentlich ist es wünschenswert, die genaue Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Chi^2 zu kennen. Dazu kann man sich einiger z-Transformationen bedienen, mit deren Hilfe Chi^2 in einen z-Wert umgerechnet wird, dessen Wahrscheinlichkeit dann in der Tabelle 1 nachgeschlagen werden kann.

Ist df = 1, so gilt

$$|z| = \sqrt{Chi^2}. \tag{33}$$

Hat das Chi^2 zwischen 2 und 25 Freiheitsgraden, kann für z ein Näherungswert nach der Gleichung

$$z = \frac{\sqrt[3]{\frac{Chi^2}{df}} - \left(1 - \frac{2}{9 \cdot df}\right)}{\frac{2}{9 \cdot df}} \tag{34}$$

bestimmt werden.
Ist df größer als 25, gilt näherungsweise

$$z = \sqrt{2Chi^2} - \sqrt{2df - 1}. \tag{35}$$

ES IST ZU BEACHTEN, DASS DIE ERSTE DIESER DREI FORMELN AUF ABSOLUTWERTE DER STANDARDNORMALVERTEILUNG BEZOGEN IST, DIE ANDEREN ABER MIT VORZEICHEN VERSEHENE WERTE ERBRINGEN.
Für den Umgang mit Tabelle 1 hat das zur Folge, daß wir bei z-Werten, die wir mit Hilfe der ersten der drei Formeln erhalten, die zugehörige Fläche von 0.5 abziehen und v e r d o p p e l n müssen, um die Wahrscheinlichkeit zu erhalten.
Für z-Werte aus den beiden anderen Formeln ist die Differenz zwischen der zugehörigen Fläche und 0.5 unmittelbar die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

BEI ALLEN CHI-QUADRAT-VERFAHREN IST ZU BEACHTEN, DASS DIESE VERFAHREN NUR SOGENANNTE ZWEISEITIGE ALTERNATIVHYPOTHESEN ZULASSEN, D.H. SIE PRÜFEN LEDIGLICH, OB EINE ABWEICHUNG IN IRGENDEINER RICHTUNG GEGEBEN IST.
Unsere Alternativhypothese war zweiseitig. Eine entsprechende einseitige Alternativhypothese hätte z.B. lauten können: "An Werktagen ereignen sich mehr Unfälle."
Die errechneten erwarteten Häufigkeiten hängen von unseren theoretischen Annahmen ab. In unserem Beispiel hätten wir andere erwartete Häufigkeiten erhalten, wenn wir die Hypothese aufgestellt hätten: An Werktagen ereignen sich doppelt so viele Unfälle wie an Samstagen und Sonntagen. In diesem Falle würde unsere Tabelle so ausgesehen haben:

	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Summe
f_e	11.67	11.67	11.67	11.67	11.67	5.83	5.83	70.01
f_b	13	6	5	5	10	14	17	70.00

Die Alternativhypothese hätte gelautet: An Werktagen ereignen sich nicht doppelt so viele Unfälle wie an Samstagen und Sonntagen. Die Berechnung ergibt hier ein Chi^2 von 43.62 bei wiederum df = 6, welches auf dem 0.1%-Niveau signifikant ist. Die Alternativhypothese kann also mit der hohen Wahrscheinlichkeit von 99.9% als richtig akzeptiert werden.
BEI ALLEN CHI-QUADRAT-VERFAHREN IST DARAUF ZU ACHTEN, DASS DIE ERWARTETE HÄUFIGKEIT IN KEINEM FALLE UNTER 5 ABSINKT.
Mit unseren errechneten Werten für Samstag und Sonntag liegen wir gerade noch über dieser Schwelle. Liegen einzelne Werte unter 5, so muß man entweder Werte zusammenfassen (in unserem Beispiel etwa die Häufigkeiten für Samstag und Sonntag), wodurch sich auch die Zahl der Freiheitsgrade entsprechend verringert, oder man muß die Stichprobe, welche der beobachteten Verteilung zugrundeliegt, vergrößern.
Ein Vergleich einer empirischen Verteilung mit einer theoretischen Verteilung liegt auch vor, wenn wir etwa wissen wollen, ob wir eine vorgefundene Verteilung als Normalverteilung betrachten dürfen.
Wir nehmen an, bei einem Schulsportfest seien die nachstehenden Wurfweiten mit der angegebenen Häufigkeit erzielt worden:

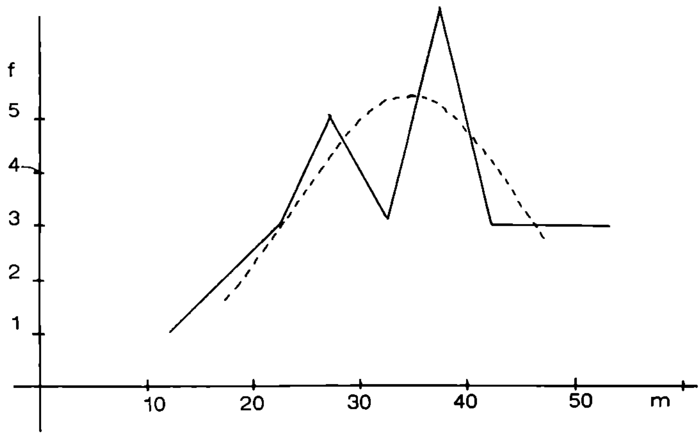
Weiten in m	beobachtete Häufigkeit	erwartete Häufigkeit
10 - 14.99	1	1.08
15 - 19.99	2	1.60
20 - 24.99	3	2.98
25 - 29.99	5	4.33
30 - 34.99	3	5.35
35 - 39.99	7	5.28
40 - 44.99	3	4.16
45 - 49.99	3	2.78
50 - 54.99	3	2.42

Zur sog. Normalitätsprüfung müssen die Intervallgrenzen in z-Werte überführt, d.h. standardisiert werden. Nach Tabelle 1 ermitteln wir dann jeweils diejenigen Flächenanteile, welche zwischen den Intervallgrenzen liegen und multiplizieren sie mit der Gesamtzahl aller Werte, um die erwarteten Häufigkeiten zu erhalten. Es ist

$$f_e = N\left(F_{IG_{oben}} - F_{IG_{unten}}\right); \tag{36}$$

wobei IG = Intervallgrenzen (für die unterste Grenze ist $-\infty$, für die oberste $+\infty$ einzusetzen).

Im übrigen können die errechneten Häufigkeiten auch zur graphischen Darstellung einer Normalverteilungskurve, die einer vorgegebenen empirischen Verteilung entspricht, benutzt werden. Allerdings dürfen die errechneten Häufigkeiten für das erste und letzte Intervall nicht herangezogen werden, da die Grenzen dieser Intervalle ja gegen Unendlich gehen sollen. In unserem Beispiel ergibt sich folgendes Bild:



Der Test auf Übereinstimmung der beiden Verteilungen erfolgt dann wieder über die Chi-Quadrat-Probe. Programm 9 erlaubt eine rationelle Abwickelung des Verfahrens.

Im Falle unseres Beispiels ergeben sich die oben in Spalte 3 der Tabelle aufgeführten erwarteten Häufigkeiten, und es errechnet sich ein Chi^2 von 2.28. Der kritische Wert bei einem Signifikanz-Niveau von 5% beträgt bei df = 6 (Anzahl der Zeilen minus 3, da beide Verteilungen N, X und SD gemeinsam haben müssen!) 12.59. Wir liegen mit unserem Ergebnis weit darunter, d.h. die Verteilung unserer Wurfweiten weicht nicht signifikant von einer Normalverteilung ab.

Ganz analog können empirische Verteilungen auch auf die Übereinstimmung mit einer Binomial- und mit einer Poissonverteilung geprüft werden.

IN ALLEN FÄLLEN DES VERGLEICHS EINER EMPIRISCHEN VERTEILUNG MIT EINER THEORETISCHEN (ERWARTETEN) VERTEILUNG SOLLTE DARAUF GEACHTET WERDEN, DASS SICH DER VERGLEICH NICHT AUF ZU WENIGE INTERVALLE STÜTZT.

2. Prüfung von Unterschieden

Ein wichtiger Teil der in der Statistik gebräuchlichen Verfahren dient der Überprüfung von Hypothesen. Man kann zunächst Zusammenhangs- und Unterschiedshypothesen unterscheiden. Den Bereich der ersteren klammern wir in diesem Kapitel aus. Wir werden uns im Kapitel 3 im Rahmen der Korrelationsstatistik eingehend damit befassen.
Für das Beibehalten oder Verwerfen einer Hypothese können wir mittels der hier geschilderten Verfahren allemal nur eine mehr oder weniger große Wahrscheinlichkeit geltend machen, die dafür spricht, daß eine Hypothese stimmt oder falsch ist. Ein strenger Beweis oder eine strenge Widerlegung einer aufgestellten Hypothese ist mit statistischen Methoden grundsätzlich nicht möglich.

2.1. Fehlertheorie

2.1.1. Alpha- und Beta-Fehler

Bei der empirischen Prüfung von Hypothesen können uns zwei Arten von Fehlern unterlaufen:
- Wir verwerfen eine an sich richtige Null-Hypothese zugunsten einer Alternativhypothese (Alpha-Fehler bzw. Fehler erster Art).
- Wir verwerfen eine an sich richtige Alternativ-Hypothese zugunsten der Nullhypothese (Beta-Fehler bzw. Fehler zweiter Art).

Die üblichen statistischen Prüfverfahren schützen im allgemeinen besser vor Alpha- als vor Beta-Fehlern. Je höher wir das Signifikanz-Niveau für die Prüfung einer Null-Hypothese ansetzen, d.h. je mehr Wahrscheinlichkeit wir für die Alternativ-Hypothese fordern, desto größer wird die Gefahr, daß wir einen Beta-Fehler begehen.
Oft können wir diesem Dilemma durch einige pragmatische Überlegungen entgehen:
- Wenn die Null-Hypothese eine in der Fachwelt allgemein anerkannte Theorie enthält, wenn wir subjektiv in hohem Maße davon überzeugt sind, daß sie zutrifft, wenn ihr Verwerfen ernste Folgen (z.B. finanzieller Art) hat, setzen wir das Signifikanz-Niveau streng an, d.h. wir fordern Signifikanz auf dem 1%- oder sogar auf dem 0.1%-Niveau.
- Wenn die Null-Hypothese eine in der Fachwelt bis dahin allgemein bestrittene Auffassung widerspiegelt, wenn wir subjektiv erhebliche Zweifel an ihr haben, wenn ihre Beibehaltung ernste Folgen hat, setzen wir das Signifikanz-Niveau milde an, d.h. wir verwerfen die Null-Hypothese z.B. schon auf dem 10%- oder auf dem 25%-Niveau.
- Sind wir über die Prioritäten unsicher und können wir mögliche Folgen nicht abschätzen, testen wir auf einem mäßigen Signifikanz-Niveau, etwa auf dem 5%-Niveau.

AUS DIESEN ÜBERLEGUNGEN SOLLTE DEUTLICH GEWORDEN SEIN, DASS DAS STRENGSTE SIGNIFIKANZ-NIVEAU NICHT AUTOMATISCH AUCH UNSERE ENTSCHEIDUNGEN BEZÜGLICH DER HYPOTHESE AM BESTEN ABSICHERT.

2.1.2. Standardfehler

Jeder statistische Wert gilt nur innerhalb bestimmter Zuverlässigkeitsgrenzen, die man kennen muß, um ihn angemessen zu beurteilen. Damit entsprechende Aussagen gemacht werden können, bedarf es meistens der Berechnung des sog. Standardfehlers. Die folgende Tabelle gibt eine Zusammenstellung der Standardfehler der wichtigsten statistischen Maße und Kennwerte:

$\bar{X}$	$s = \frac{SD}{\sqrt{N}}$;	(37)
SD	$s = \frac{SD}{\sqrt{2N}}$;	(38)
Median	$s = 1.25 \cdot \frac{SD}{\sqrt{N}}$;	(39)
QD	$s = 1.65 \cdot \frac{SD}{\sqrt{2\,N}}$;	(40)
p %	$s = \sqrt{\frac{p\%\,(100-p\%)}{N}}$;	(41) [1]
r	$s = \frac{1-r^2}{\sqrt{N-2}}$;	(42)
Z_r	$s = \frac{1}{\sqrt{N-3}}$;	(43) [2]
$Z_{\bar{r}}$	$s = \frac{1}{\sqrt{\sum(N-3)+3}}$;	(44) [3]
$X_1 - X_2$	$s = \sqrt{\frac{SD_1^2}{N_1} + \frac{SD_2^2}{N_1}}$.	(45)

2.1.3. Vertrauensbereiche

Mit Hilfe des Standardfehlers können sog. Vertrauensbereiche ermittelt werden, innerhalb deren ein bestimmter Wert mit einer gewünschten Wahrscheinlichkeit wirklich liegt.

---

1) p% ist ein beliebiger Prozentwert einer Verteilung, etwa ein Prozentrang.
2) Z_r ist der Fishersche Z-Wert einer Korrelation.
3) $Z_{\bar{r}}$ ist der Fishersche Z-Wert einer mittleren Korrelation r. Unter (N-3) wird die Anzahl der Wertepaare, auf denen die Korrelationen beruhen - jeweils vermindert um 3 -, summiert.

Ist K irgendein statistischer Kennwert und p das gewünschte Signifikanzniveau (d.h. die Wahrscheinlichkeit für die Null-Hypothese), so gilt:

$$VB = K \pm z_{p/2} \cdot s; \quad \text{bzw.} \quad VB = K \pm t_{p/2} \cdot s. \tag{46}$$

(Dabei ist $z_{p/2}$ bzw. $t_{p/2}$ der z- bzw. der t-Wert für eine Wahrscheinlichkeit von p/2.)

Bei der Überprüfung eines Vertrauensbereichs handelt es sich immer um eine 2-seitige Fragestellung. Deshalb ist als $z_{p/2}$ bzw. als $t_{p/2}$ jener Wert einzusetzen, dessen Fläche, von 0.5 abgezogen, die Hälfte des gewünschten Signifikanzniveaus ergibt (also 0.025, 0.005 usw.). Für das 5%-Niveau ist das ein z-Wert von 1.96, für das 1%-Niveau ein solcher von 2.58, für das 0.1%-Niveau einer von 3.29.

Zweiseitig ist unsere Fragestellung insofern, als wir wissen wollen, in welchem Bereich um den ermittelten Wert herum (also darunter und darüber) der wirkliche Wert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit liegt.

Die Ermittlung der z-Werte kann im übrigen mit Hilfe von Tabelle 1 für jedes beliebige Signifikanz-Niveau vorgenommen werden.

Angenommen, wir hätten ermittelt, daß von 480 untersuchten Säuglingen 31.28% an leichteren oder schwereren Luxationen des Hüftgelenks leiden. Wir möchten nun wissen, welcher größere oder auch kleinere Prozentsatz (zweiseitige Fragestellung!) in Wirklichkeit mit diesem Leiden behaftet sein könnte, wenn wir ein Signifikanz-Niveau von 8% zugrundelegen: Wir suchen zunächst in Tabelle 1 nach demjenigen z-Wert, dessen zugehörige Fläche um 0.04 kleiner als 0.5 ist, also etwa 0.46 beträgt. Dies ist der z-Wert 1.70. Nun rechnen wir:

nach (41) ist $s = 2.12$; $VB = 31.28 \pm 1.70 \cdot 2.12 = 31.28 \pm 3.604$.
$27.676 \leq p\,\% \leq 34.884$.

Oft wird uns der so ermittelte Vertrauensbereich zu weit sein. Es gibt zwei Wege, ihn zu verkleinern: Entweder mäßigen wir das Signifikanz-Niveau oder wir vergrößern die Stichprobe, auf der unser empirischer Wert beruht.

Für die Unsicherheit einer Summe oder Differenz statistischer Werte, die wir aus verschiedenem Untersuchungsmaterial gewonnen haben, gilt die Beziehung:

$$s_1 \pm s_2 = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}, \tag{47}$$

d.h. wir haben die beiden den Einzelwerten zugehörigen Standardfehler zu quadrieren, die Quadrate zu addieren und aus der Summe die Wurzel zu ziehen.

Angenommen wir möchten wissen, ob sich zwei Korrelationen $r_1 = +.36$ und $r_2 = +.58$, die wir aus Stichproben von $N_1 = 187$ und $N_2 = 243$ gewonnen haben, signifikant unterscheiden. Wir errechnen zunächst die Standardfehler:

$$s_1 = \frac{1 - 0.36^2}{\sqrt{187 - 2}} = .0640 \qquad s_2 = \frac{1 - 0.58^2}{\sqrt{243 - 2}} = .0427.$$

Der Standardfehler der Differenz ist dann .0769. Für das 1%-Niveau haben wir diesen Standardfehler mit 2.58 zu multiplizieren und erhalten .1984. Die Differenz der beiden Korrelationskoeffizienten beträgt aber .2200, d.h. sie ist größer als die errechnete Unsicherheit und damit auf dem 1%-Niveau signifikant.

Für die Unterschiede von Prozentangaben errechnen wir einen kritischen Bruch nach der Beziehung

$$CR = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{p_1(100 - p_1)}{N_1} + \frac{p_2\,(100 - p_2)}{N_2}}} \qquad (48)\ (Pr.10)$$

und sehen in Tabelle 1 nach, ob der errechnete z-Wert die kritischen Werte von 1.96 oder 2.58 oder gar 3.29 erreicht oder unterschreitet.

2.2. Prüfverfahren

Die folgenden Prüfverfahren sind eingeteilt in solche für Intervall-Daten, Ordinal-Daten und Nominal-Daten. Zum Verständnis müssen einleitend einige Worte über verschiedene Skalen-Niveaus vorausgeschickt werden:
Daten haben dann INTERVALLSKALENNIVEAU, wenn sie die realen Verhältnisse isomorph abbilden, wenn also z.B. gleichen Differenzen zwischen zwei Daten auch gleiche Differenzen zwischen den beiden Objekten entsprechen. Diese Daten meinten wir bisher immer, wenn wir von Meßdaten im engeren Sinne sprachen. Das Bilden von Mittelwerten, das Errechnen von Varianzen und Standardabweichungen ist nur bei intervallskalierten Daten sinnvoll.
Oft können wir keine Aussagen über die wirkliche Größe von beobachteten Objekten oder Phänomenen, wohl aber solche über ihr Verhältnis zueinander machen: Wir können die Objekte oder Phänomene in eine Rangordnung bringen, d.h. das größte, das zweitgrößte, das kleinste angeben, ohne daß damit schon auch gesagt wäre, daß der Unterschied zwischen dem größten und zweitgrößten gleich dem Unterschied zwischen dem zweitgrößten und drittgrößten ist. Solche Daten haben ORDINALSKALENNIVEAU.
In manchen Fällen können wir Objekte schließlich lediglich bestimmten Klassen zuordnen, so z.B. eine Gruppe von Menschen der europiden, negroiden, mongoliden und australiden Rasse oder den männlichen und weiblichen Menschen. Wir können dann innerhalb dieser Klassen lediglich die Häufigkeiten ermitteln, mit der sie besetzt sind. Solche Daten haben NOMINALSKALENNIVEAU bzw. KATEGORIALSKALENNIVEAU. Die Klassen der Kategorien müssen so definiert sein, daß sie einander ausschließen und jeder Fall zweifelsfrei zugeordnet werden kann.
Es ist zulässig, Daten eines höheren Skalenniveaus (wir haben sie hier in absteigender Reihenfolge vorgestellt) in solche eines niedrigeren zu transformieren, also auch Verfahren, die für niedrigere Skalenniveaus gedacht sind, für höhere einzusetzen. Dabei ist allerdings zu beachten, daß in diesem Falle Informationen nicht ausgeschöpft werden und wir somit möglicherweise zu weniger signifikanten Ergebnissen kommen.

2.2.1. Prüfverfahren für intervallskalierte Daten

2.2.1.1. Der t-Test für unabhängige Stichproben

Für den Vergleich arithmetischer Mittel aus verschiedenen Verteilungen hinsichtlich der Signifikanz ihres Unterschieds ist der sog. t-Test für unabhängige Stichproben ein häufig angewendetes Verfahren. Es wird ein kritischer Bruch nach der Beziehung

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{SD_1^2}{N_1} + \frac{SD_2^2}{N_2}}} \quad \text{mit } N_1 + N_2 - 2 \text{ Freiheitsgraden} \tag{49}$$

(Pr.11)

errechnet. Die Signifikanz dieses Werts können wir in Tabelle 3 nachsehen. Für große Stichproben (etwa $N > 500$) dürfen wir ihn auch als z-Wert betrachten und anhand von Tabelle 1 auf seine Signifikanz prüfen (d.h. wir sehen seine Fläche nach und stellen die Differenz zu 0.5 fest, welche dann die halbe Wahrscheinlichkeit ist).
Der t-Test darf jedoch nur unter zwei Voraussetzungen angewendet werden: das Datenmaterial soll normalverteilt (was evtl. durch eine Normalitätsprüfung festgestellt werden kann, falls es zweifelhaft ist) und die Varianzen (Quadrate der Standardabweichungen) müssen in gewissen Grenzen homogen sein.
Für die zweite Bedingung wendet man den sog. F-Test an und rechnet:

$$F = \frac{\text{größere Varianz}}{\text{kleinere Varianz}} . \tag{50}$$

Anhand der Tabelle 4 prüfen wir nach, ob die kritischen Werte für das 5%- bzw. 1%-Niveau erreicht werden. Als Freiheitsgrade gelten $df_1 = N_1 - 1$ und $df_2 = N_2 - 1$. Wird ein kritischer Wert von F erreicht, so dürfen wir auf dem betreffenden Signifikanzniveau folgern, daß die beiden zu den Mittelwerten gehörigen Verteilungen nicht der gleichen Grundgesamtheit angehören.
Es ist dann nicht statthaft, den t-Test durchzuführen, aber es bedarf seiner auch nicht mehr: Der fragliche Unterschied ist bereits durch den F-Test nachgewiesen.
Wir zeigen das Verfahren an einem Beispiel auf:
Nehmen wir an, vergleichende Messungen der Körperlänge bei 2 verschiedenen Bevölkerungsgruppen hätten folgende Werte erbracht:

	Gruppe 1	Gruppe 2
$\bar{x}$	168.23 cm	172.49 cm
SD_x	14.66 cm	12.96 cm
N	60	120

Es ist dann

$$F = \frac{14.66^2}{12.96^2} = 1.28 .$$

Den kritischen Wert dazu haben wir unter 60 - 1 = 59 und 120 - 1 = 119 Freiheitsgraden nachzusehen. Unsere F-Tabelle weist freilich nur einen solchen für 60 und 120 Freiheitsgrade aus, der auf dem 5%-Niveau 1.43 beträgt. Unser Ergebnis liegt so deutlich darunter, daß wir die These, beide Gruppen würden nicht derselben Grundgesamtheit angehören, noch nicht einmal auf dem 5%-Niveau halten können. Da es ferner plausibel ist, daß Körperlängen normalverteilt sind, dürfen wir somit den t-Test durchführen:

$$t = \frac{172.49 - 168.23}{\sqrt{\frac{14.66^2}{60} + \frac{12.96^2}{120}}} = 1.909 .$$

Bei 60 + 120 - 2 = 178 Freiheitsgraden erreicht dieser Wert, wie Tabelle 5 ausweist, noch nicht einmal den kritischen Wert für das 5%-Niveau. Die These, die unterschiedlichen Durchschnittswerte für die Körpergröße in den beiden Gruppen seien nur zufällig, konnte also nicht widerlegt werden. Der Mittelwertunterschied ist nicht signifikant.

2.2.1.2. Der t-Test für abhängige Stichproben

Die Bedingung des t-Tests für unabhängige Stichproben, daß die verglichenen Mittelwerte aus verschiedenen Stichproben stammen müssen, die keine Versuchspersonen gemeinsam haben dürfen, kann gerade dann hinderlich sein, wenn wir in ein und derselben Stichprobe wiederholte Erhebungen durchgeführt haben und wissen wollen, ob beobachtete Veränderungen des Mittelwertes, etwa nach einer zwischendurch ergriffenen Maßnahme, signifikant sind.
In diesem Falle wenden wir den t-Test für abhängige Stichproben an. Nach diesem Verfahren ist auch dann vorzugehen, wenn wir zwei Stichproben vergleichen, deren Versuchspersonen jeweils paarweise einander zugeordnet werden müssen (z.B. Zwillinge, Ehepaare, Klassenkameraden usw.). Solche Stichproben heißen parallelisierte Stichproben.
Wir müssen in diesem Falle die paarweisen Differenzen X_d bilden und sowohl diese als auch ihre Quadrate aufsummieren. Der Wert für t errechnet sich dann nach folgendem kritischen Bruch:

$$t = \frac{\sqrt{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_{d_i}}{\sqrt{N \sum_{i=1}^{N} X_{d_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} X_{d_i}\right)^2}} ; \qquad df = N - 1. \tag{53}$$

(Pr.12)

Wir vergleichen als Beispiel die Reaktionszeiten von 9 Versuchspersonen vor und nach Einnahme eines angeblich anregenden Medikaments:

Versuchsperson	Zeit vor Einnahme	Zeit nach Einnahme	X_d	X_d^2
1	2.4 sec.	2.1 sec.	0.3	0.09
2	1.9 sec.	1.6 sec.	0.3	0.09
3	3.1 sec.	2.0 sec.	1.1	1.21
4	2.8 sec.	2.8 sec.	0	0
5	2.6 sec.	2.0 sec.	0.6	0.36
6	2.9 sec.	1.6 sec.	1.3	1.69
7	3.2 sec.	2.8 sec.	0.4	0.16
8	2.1 sec.	2.3 sec.	-0.2	0.04
9	2.5 sec.	2.0 sec.	0.5	0.25
			4.3	3.89

Wir errechnen einen Wert von t = 2.992, der bei 8 Freiheitsgraden auf dem 5%-Niveau signifikant ist (kritischer Wert: 2.306). Das Medikament hat also tatsächlich die Reaktionszeiten signifikant verkürzt.
DER t-TEST IN BEIDEN VARIANTEN ARBEITET MIT MITTELWERTEN UND VARIANZEN. DAS HAT ZUR FOLGE, DASS ER NUR IN FÄLLEN ANWENDBAR IST, IN DENEN MESSWERTE IM ENGEREN SINNE VERGLICHEN WERDEN.

2.2.1.3. Vergleich einer Stichprobenvarianz mit einer Populationsvarianz

Manchmal sind wir interessiert, uns zu vergewissern, ob eine Stichprobe, ungeachtet vorgefundener Unterschiede, zu einer bestimmten Grundgesamtheit (Population) gehört. Wir errechnen dazu nach folgender Gleichung ein Chi-Quadrat:

$$CHi^2 = \frac{(N - 1)\, V_{St}}{V_{GG}}; \quad (54)$$

V_{St} = Varianz der Stichprobe,
V_{GG} = Varianz der Grundgesamtheit,
N = Umfang der Stichprobe,
df = N - 1.

Bei diesem Test ist darauf zu achten, daß er voraussetzt, die Grundgesamtheit, mit welcher verglichen wird, sei normalverteilt. Wo diese Bedingung nicht erfüllt oder nicht wenigstens als wahrscheinlich gegeben unterstellt werden kann, sollte das Verfahren nicht angewendet werden, und zwar um so weniger, je kleiner die Stichprobe ist.

2.2.1.4. Vergleich zweier Stichprobenvarianzen

Der Vergleich zweier Stichprobenvarianzen durch die Bestimmung

$$F = \frac{V_1}{V_2}; \quad (55)$$

V_1 = Varianz der ersten Stichprobe,
V_2 = Varianz der zweiten Stichprobe,
N_1 = Umfang der ersten Stichprobe,
N_2 = Umfang der zweiten Stichprobe,
df_1 = $N_1 - 1$ = Zählerfreiheitsgrade,
df_2 = $N_2 - 1$ = Nennerfreiheitsgrade,

hat uns bereits im Abschnitt 2.2.1.1. (t-Test für unabhängige Stichproben) beschäftigt. In den Zähler ist dabei die jeweils größere der beiden Varianzen zu setzen. Für den Wert von F sehen wir in Tabelle 4 die kritischen Werte nach.

2.2.2. Prüfverfahren für ordinalskalierte Daten

Können wir nicht sicher sein, daß die uns vorliegenden Daten intervallskaliert sind, ordnen wir ihnen Rangplätze zu und wenden ein Verfahren für ordinalskalierte Daten an, wie auch immer dann, wenn uns ohnehin nur Rangordnungen bekannt sind.

2.2.2.1. Der U-Test von Mann-Withney

Der U-Test gestattet den Vergleich zweier Stichproben im Hinblick auf die Ausprägung eines Merkmals. Für kleinere Verteilungen (wobei allerdings die kleinere Stichprobe nicht weniger als 3 und die größere nicht weniger als 9 Elemente umfassen sollte) errechnen wir eine Prüfgröße U:

$$U = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - T_1, \tag{56}$$

wobei n_1 = Umfang der kleineren Stichprobe,
n_2 = Umfang der größeren Stichprobe,
T_1 = Rangsumme der kleineren Stichprobe.

Für den U-Test müssen jeweils alle Werte über beide Verteilungen hinweg in eine durchgehende Rangfolge gebracht werden. Sind die Stichproben gleich groß, ist es gleichgültig, von welcher man ausgeht.
Ist n_1 mindestens gleich 3 und n_2 größer als 10, können wir mit dem folgenden kritischen Bruch einen z-Wert errechnen:

$$z = \frac{n_1 \cdot (n_1 + n_2 + 1) - 2\,T_1}{\sqrt{\dfrac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 + 1)}{3}}}\,. \tag{57}$$

(Pr.13)

Während wir den z-Wert nach Tabelle 1 überprüfen, schlagen wir die kritischen Werte von U in Tabelle 5 nach.
Ein Beispiel mag die Anwendung erklären: Es soll geprüft werden, ob sich zwei Gruppen von Beamten hinsichtlich der auf Dienstreisen zurückgelegten Strecken unterscheiden:

Gruppe 1 km	Gruppe 1 Rang	Gruppe 2 km	Gruppe 2 Rang
345	8	5 017	16
1 320	14	983	13
598	10	128	4
4 813	15	97	3
211	5	322	6
45	1	648	12
		335	7
$n_1 = 6$	$T_1 = 53$	439	9
		81	2
		601	11
		$n_2 = 10$	

$$U = 6 \cdot 10 + \frac{6 \cdot (6+1)}{2} - 53 = 28.$$

Bei einem zweiseitigen Test (Null-Hypothese: Die beiden Gruppen unterscheiden sich hinsichtlich des genannten Merkmals nicht in irgendeiner Weise) dürfen wir auf dem 10%-Signifikanz-Niveau nach Tabelle 5 einen kritischen Wert von 14 nicht überschreiten. Es läßt sich also kein signifikanter Unterschied nachweisen.

Müssen wir sogenannte verbundene Ränge bilden, so ändert dies an der Berechnung von U nichts. Verbundene Ränge liegen vor, wenn z.B. an 2. Stelle 4 Personen mit gleichen Werten liegen. Wir ordnen diesen zunächst die entsprechenden Ränge zu:

Versuchsperson	1	2	3	4
Rang	2	3	4	5

Da die Versuchspersonen jedoch alle 4 denselben Wert erzielt haben, wäre eine solche Rangverteilung willkürlich und ungerecht. Wir weisen daher einer jeden denselben, genau in der Mitte zwischen dem 2. und 5. liegenden Rangplatz, also 3,5, zu:

Versuchsperson	1	2	3	4
Rang	3,5	3,5	3,5	3,5.

Die Versuchsperson mit dem nächsthöheren Rang erhält nun den Rangplatz 6 usw. Soweit n_1 oder n_2 größer als 10 ist, haben wir einen z-Wert nach der folgenden korrigierten Formel zu errechnen:

$$z = \frac{n_1 (n_1 + n_2 + 1) - 2T_1}{\sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{3n(n-1)} \left[n^3 - n - \sum (R_{gl}^3 - R_{gl}) \right]}}, \quad \text{wobei } n = n_1 + n_2. \qquad (58)\ (\text{Pr.}14)$$

Dabei ist R_{gl} = die Anzahl der Versuchspersonen, welche jeweils denselben Rang gemeinsam haben.

Die aufwendigste Arbeit, die Zuordnung der Rangplätze, müssen wir "per Hand und Augenschein" vornehmen, so daß dieser Test mit wachsenden Stichprobenumfängen rasch sehr unhandlich wird.

2.2.2.2. Der H-Test bzw. die Rangvarianzanalyse nach Kruscal & Wallis

Eben diesen Mangel hat der H-Test mit dem U-Test gemeinsam. Allerdings erlaubt uns dieses Verfahren, mehr als 2 Gruppen miteinander zu vergleichen. Wiederum erhalten alle Werte über alle Gruppen hinweg Rangplätze (notfalls verbundene) zugewiesen. Daraus errechnen wir dann eine Prüfstatistik für H nach der folgenden Beziehung:

$$H = \frac{12}{N\,(N+1)} \cdot \sum_{i=1}^{c} \frac{(\sum_{i=1}^{n} R_i)^2}{n} - 3 \cdot (N+1). \tag{59}$$

Darin ist $\sum R$ = Summe der Rangplätze in jeder Gruppe,
n = Größe der einzelnen Gruppen.

Für 3 Gruppen, die alle ≤ 5 sind, entnehmen wir Tabelle 6 die kritischen Werte, welche H nicht überschreiten darf, falls die Null-Hypothese verworfen werden soll. Für mehr und größere Gruppen ist H annähernd chi-quadrat-verteilt, bei c Gruppen mit c - 1 Freiheitsgraden.

2.2.2.3. Die Rangvarianzanalyse von Friedman

Ein rationelleres Verfahren, das wir anwenden können, wenn es sich um abhängige und gleichgroße Stichproben handelt, ist die Rangvarianzanalyse von Friedman. Wir werden uns seiner bedienen, wenn wir eine Stichprobe wiederholten Untersuchungen unterziehen oder wenn die Versuchspersonen durchwegs einander zuordbar sind (Zwillinge, Ehepaare, Vater - Mutter - ältestes Kind - mittleres Kind - jüngstes Kind usw.). Die Formel für den Friedman-Test lautet:

$$Fr = \frac{12}{n \cdot c\,(c+1)} \cdot \sum_{i=1}^{c} (\sum_{i=1}^{n} R_i)^2 - 3\,n \cdot (c+1). \tag{60}$$

Darin ist n = gemeinsame Größe jeder der Gruppen bzw. Größe der wiederholt untersuchten Gruppe,
c = Anzahl der Gruppen bzw. der wiederholten Untersuchungen,
$\sum R$ = Rangsumme einer Gruppe bzw. der Gruppe in einer Untersuchung.

Für 3 Gruppen bis zu 9 Personen enthält Tabelle 7 die Zufallswahrscheinlichkeiten. Falls $c = 3$ und $n > 9$ oder $c > 3$ und $n > 4$, ist Fr annähernd chi-quadrat-verteilt mit c - 1 Freiheitsgraden.
Wählen wir als Beispiel die Gewichtsveränderungen in einer 8 Personen umfassenden Versuchsgruppe durch 3 verschiedene Ernährungspläne, die jeweils nach 3 Monaten hervorgerufen wurden:

Vp	vor den Versuchen kg	Rang	nach d. 1. Vers. kg	Rang	nach d. 2. Vers. kg	Rang	nach d. 3. Vers. kg	Rang
1	65	2	66	1	62	3	60	4
2	61	2	63	1	60	3	59	4
3	70	3	71	2	72	1	68	4
4	72	1	71	2	70	3	69	4
5	59	2	58	3	60	1	57	4
6	75	2	76	1	71	4	73	3
7	58	2	60	1	57	3	55	4
8	55	3	59	1	56	2	50	4
		17		12		20		31

$$Fr = \frac{12}{8 \cdot 4 \cdot (4+1)} \cdot \sum (17^2 + 12^2 + 20^2 + 31^2) - 3 \cdot 8 \cdot (4+1) = 104,55.$$

Bei df = 4 - 1 = 3 erhalten wir nach Tabelle 2 für das 0.1%-Niveau einen kritischen Wert für Chi^2 von 16.27. Die durch die verschiedenartige Ernährung hervorgerufenen Gewichtsunterschiede sind also außerordentlich signifikant.
Durch eine Umgruppierung der obigen Tabelle können wir auch die Unterschiede zwischen den 8 Versuchspersonen testen:

Versuchspersonen

	1 kg	R	2 kg	R	3 kg	R	4 kg	R	5 kg	R	6 kg	R	7 kg	R	8 kg	R
vor d. Vers.	65	4	61	5	70	3	72	2	59	6	75	1	58	7	55	8
nach 1. Vers.	66	4	63	5	71	2.5	71	2.5	58	8	76	1	60	6	59	7
nach 2. Vers.	62	4	60	5.5	72	1	73	3	60	5.5	71	2	57	7	56	8
nach 3. Vers.	60	4	59	5	68	3	69	2	57	6	73	1	55	7	50	8
		16		20.5		9.5		9.5		25.5		5		27		31

$$Fr = \frac{12}{4\ 8\ (8+1)} \sum (16^2 + 20.5^2 + 9.5^2 + 9.5^2 + 25.5^2 + 5^2 + 27^2 + 31^2)$$

$$- 3\ 4(8+1) = 120,75.$$

Bei df = 8 - 1 = 7 erhalten wir nach Tabelle 2 auf dem 0.1%-Niveau einen kritischen Wert für Chi^2 von 24.322. Unser Wert für Fr liegt weit darüber, auch die Versuchspersonen unterscheiden sich also äußerst signifikant.

2.2.2.4. Der Wilcoxen-Test

Ebenfalls Unterschiede in 2 Parallelstichproben oder bei Testwiederholungen prüft der Wilcoxen-Test. Hier werden jeweils die Paardifferenzen ermittelt und nach ihrem absoluten Betrage mit Rangplätzen versehen. Nachträglich erhalten dann die Rangplätze wieder das Vorzeichen der Differenz. Es werden nun einfach alle "negativen" Ränge und alle "positiven" Ränge zu je einer Summe aufaddiert. Die kleinere Rangsumme dient dann als Prüfstatistik T_w:

$$T_w = \sum_{i=1}^{m} R_{i_{min}}. \tag{61}$$

In Tabelle 8 können wir die kritischen Werte nachschlagen, die nicht überschritten werden dürfen, wenn die Null-Hypothese aufrechterhalten werden soll. Für Stichproben, welche größer als 25 sind, errechnen wir einen z-Wert nach dem kritischen Bruch:

$$CR = \frac{T_w - \frac{n\,(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{24}}}. \qquad \begin{matrix}(62)\\(\text{Pr.}15)\end{matrix}$$

Seine Signifikanz können wir anhand von Tabelle 1 überprüfen.

2.2.2.5. Der Vorzeichen-Test

Ein sehr einfach zu handhabender Test für 2 Parallelstichproben ist der Vorzeichentest, der lediglich die Vorzeichen der Paardifferenzen benutzt. Wertepaare, die nicht differieren, werden ausgeschieden und nicht mitgezählt. Da der Vorzeichentest nur ein Minimum an Information ausnutzt, fallen Entscheidungen nach ihm sehr konservativ aus, d.h. die Nullhypothese wird u.U. auch dann noch beibehalten, wenn sie bei der Verwendung feinerer Verfahren verworfen werden müßte. ABER MAN KANN SICHER SEIN, DASS EINE NACH DEM VORZEICHENTEST VERWORFENE NULLHYPOTHESE MIT FEINEREN VERFAHREN ERST RECHT NICHT ZU HALTEN WÄRE.
Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von F Pluszeichen (oder Minuszeichen)[1] unter N Vorzeichen errechnet sich entsprechend der Binominalverteilung nach der Beziehung:

$$p = \binom{N}{F}\cdot 0.5^N; \qquad \text{dabei ist} \binom{N}{F} = \frac{N!}{F!\,(N-F)!}. \qquad \begin{matrix}(63)\\(\text{Pr.}16)\end{matrix}$$

Für N>25 errechnen wir einen z-Wert nach dem kritischen Bruch

$$CR = \frac{2F - N}{\sqrt{N}}. \tag{64}$$

1) Ob man die Zahl der Plus- oder die der Minuszeichen zugrundelegt, ist für das Ergebnis gleichgültig.

2.2.2.6. Der Median-Test

Im Mediantest beurteilen wir den Unterschied zwischen zwei Gruppen aufgrund einer Vierfelder-Tafel. Dazu ermitteln wir zunächst für beide Gruppen den gemeinsamen Median und legen dann eine Vierfelder-Tafel nach folgendem Schema an:

	Gruppe 1	Gruppe 2	
Werte $\leq$ Z	a	b	a + b
Werte > Z	c	d	c + d
	a + c	b + d	N

Die Signifikanz wird dann nach der für Vierfelder-Tafeln gebräuchlichen Formel überprüft:

$$Chi^2 = \frac{N \cdot (ad - bc)^2}{(a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+d) \cdot (c+d)} \quad \text{bei df} = 1. \qquad (65)$$
(Pr. 17)

VORAUSSETZUNG IST ALLERDINGS, DASS ES SICH UM UNABHÄNGIGE STICHPROBEN HANDELT.

Selbstverständlich können wir auch ein beliebiges anderes Centil anstelle des Medians wählen. Nehmen wir das arithmetische Mittel als Grenze, was auch zulässig ist, wird das Verfahren allerdings zu einem solchen für intervallskalierte Daten, da die Berechnung von $\bar{X}$ solche voraussetzt.

In jedem Falle muß man darauf achten, daß in den vier Feldern nicht mit erwarteten Häufigkeiten (die in der Berechnungsvorschrift nicht unmittelbar in Erscheinung treten) unter 10 gerechnet werden darf. Im Zweifelsfalle bestimmt man die kleinste erwartete Häufigkeit für das Feld mit der kleinsten Zeilen- und Spaltensumme nach der Beziehung:

$$fe_{min} = \frac{\sum Z_{min} \cdot \sum Sp_{min}}{N}; \qquad (66)$$

dabei ist
$\sum Z_{min}$ = kleinste Zeilensumme,
$\sum Sp_{min}$ = kleinste Spaltensumme.

2.2.3. Prüfverfahren für nominalskalierte Daten

In manchen Fällen ist es noch nicht einmal möglich, Aussagen über Rangfolgen zu machen, sondern man kann Daten lediglich bestimmten Kategorien zuordnen, z.B. "Männer", "Nichtraucher", "Landwirte" usw. Hier können wir eine Reihe von Verfahren für Nominaldaten anwenden, deren VORAUSSETZUNG allerdings ist, DASS DIE ZUORDNUNG ZU DEN ENTSPRECHENDEN KATEGORIEN AUSNAHMSLOS VÖLLIG EINDEUTIG ERFOLGEN KANN UND DASS SICH DIE KATEGORIEN NICHT ÜBERSCHNEIDEN.

2.2.3.1. Die Vierfelder-Tafel

Haben wir 2 jeweils in alternative Merkmalsklassen unterteilbare Stichproben, können wir eine Vierfelder-Tafel erstellen. Es soll z.B. der Anteil der Geschlechter an der Belegschaft zweier Betriebe verglichen werden:

	Betrieb A	Betrieb B	
Frauen	583 (a)	289 (b)	872
Männer	2 031 (c)	427 (d)	2 458
	2 614	716	3 330 (N)

Unter der Voraussetzung, daß die beiden Merkmale (Anteil der Männer/Frauen an der Belegschaft, Zugehörigkeit zu Betrieb A/B) stochastisch voneinander unabhängig sind, d.h. sich in ihrem alternativen Auftreten nicht gegenseitig beeinflussen, können wir als Prüfgröße ein Chi^2 nach der schon vorgestellten Formel für Vierfelder-Tafeln errechnen:

$$Chi^2 = \frac{N \cdot (ad - bc)^2}{(a+b)\cdot(a+c)\cdot(b+d)\cdot(c+d)} \quad \text{bei } df = 1. \qquad \begin{matrix}(65)\\(Pr.17)\end{matrix}$$

In unserem Beispiel würden wir erhalten:

$$Chi^2 = \frac{3330 \cdot (2031 \cdot 289 - 583 \cdot 427)^2}{2614 \cdot 716 \cdot 872 \cdot 2458} = 93.24.$$

Bei df = 1 ergibt sich nach Tabelle 2 bei einem Signifikanz-Niveau von 0.1% ein kritischer Wert von 10.828. Da unser Chi^2 weit darüber liegt, sind die beobachteten Unterschiede zwischen den beiden Betrieben hinsichtlich des Anteils der Geschlechter an der Belegschaft außerordentlich signifikant.

Daß eine der 4 erwarteten Häufigkeiten in den Feldern kleiner als 10 sein könnte, ist im Hinblick auf die großen Zeilen- und Spaltensummen ausgeschlossen und braucht nicht eigens überprüft zu werden.

Wenden wir Formel 65 an, werden die erwarteten Häufigkeiten aus den beobachteten Häufigkeiten geschätzt.

Nun ist aber die Voraussetzung der stochastischen Unabhängigkeit, die wir mit der Anwendung von Formel (65) machen, in unserem Beispiel durchaus fragwürdig: Zwischen dem schwankenden Anteil der Geschlechter an der Belegschaft und der Betriebszugehörigkeit ist sehr wohl eine Abhängigkeit denkbar. Wäre Betrieb A eine Gießerei und Betrieb B eine Textilfabrik, würde das Ausmaß der männertypischen bzw. frauentypischen Arbeit die Verhältnisse beeinflussen. Man kann aber auch ganz allgemeine Überlegungen anstellen, welche eine geringere Quote an berufstätigen Frauen ergeben. So etwa könnte die Verpflichtung der Frau als Mutter ihre Möglichkeiten, einen Beruf auszuüben, zumindest zeitweise einschränken. Können wir die Voraussetzung der stochastischen Unabhängigkeit nicht machen, bleibt uns dennoch der Weg, die erwarteten Häufigkeiten anderweitig zu schätzen. So mag z.B. einem Bericht des statistischen Landesamtes zu entnehmen sein, daß die Berufstätigkeitsquote der Frauen in der Region, in welcher beide Betriebe liegen, zu jener der Männer im Verhältnis 41:59 steht. Gehen wir davon aus, so erhalten wir folgende Erwartungswerte:

	Betrieb A	Betrieb B
Frauen	1071,74 (a)	293,56 (b)
Männer	1542,26 (c)	422,44 (d)
	2614	716

Wir ermitteln nun nach Formel 34 ein Chi^2, indem wir für jedes Feld die Differenz $f_b - f_e$ bilden, quadrieren und durch f_e dividieren und schließlich die für alle 4 Zellen errechneten Werte addieren.
In unserem Beispiel ergibt sich:

$$Chi^2 = 222,88 + 0,07 + 596,64 + 0,05 = 819,64.$$

BEI DER SIGNIFIKANZPRÜFUNG EINER VIERFELDER-TAFEL, DEREN ERWARTUNGSWERTE NICHT STOCHASTISCH AUS DEN BEOBACHTETEN WERTEN GESCHÄTZT SIND, IST ZU BEACHTEN, DASS EIN SOLCHES CHI^2 3 FREIHEITSGRADE HAT.
Für unser Chi^2 ermitteln wir nach Tabelle 2 bei 3 Freiheitsgraden auf dem 0,1%-Niveau einen kritischen Wert von 16,266. Der Unterschied zwischen den beiden Betrieben ist also auch dann hochsignifikant, wenn wir die Durchschnittsverhältnisse der Region zugrundelegen. Zugleich können wir hier sehen, obwohl der Chi^2-Test immer nur zweiseitige Fragestellungen prüft (hier: besteht ein Unterschied irgendeiner Art zwischen den Beschäftigungsquoten der Geschlechter in beiden Betrieben?), daß im Grunde beinahe der gesamte Wert von Chi^2 durch den Betrieb A (die Felder a und c) erbracht wird. Daraus läßt sich folgern: Der Unterschied besteht hauptsächlich darin, daß Betrieb A überdurchschnittlich viele Männer beschäftigt, während die Beschäftigungsquoten im Betrieb B ziemlich genau den Durchschnittswerten entsprechen.

2.2.3.2 Die Kontingenztafel (Pr. 18)

Das Verfahren der Vierfelder-Tafel kann auf eine n-mal-m-Felder-Tafel, eine sogenannte Kontingenztafel, ausgedehnt werden. Wir vergleichen dann ein n-fach klassifizierbares Merkmal mit einem m-fach klassifizierbaren anderen, und es entsteht folgende Matrix:

	n_1	n_2	.....	n_m	
m_1					$\sum m_1$
m_2					$\sum m_2$
.					.
.					.
.					.
m_n					$\sum m_n$
	$\sum n_1$	$\sum n_2$	.....	$\sum n_m$	N

Können die beiden Merkmale als stochastisch voneinander unabhängig gelten, so lassen die erwarteten Häufigkeiten sich nach der Beziehung

$$fe = \frac{\sum Z \cdot \sum Sp}{N}, \qquad \text{wobei: } \sum Z = \text{Zeilensumme}, \quad \sum Sp = \text{Spaltensumme}, \tag{66}$$

aus den beobachteten Häufigkeiten schätzen. Chi^2 wird dann wie üblich nach der Beziehung

$$Chi = \sum_{i=1}^{c} \frac{(fb_i - fe_i)^2}{fe_i}$$

errechnet.
Programm 18 gestattet die rationelle Ermittlung des Chi^2 für eine Kontingenztafel.
Die Freiheitsgrade einer Kontingenztafel werden in folgender Weise berechnet:

$$df = (n - 1) \cdot (m - 1).$$

Wir demonstrieren die Berechnung an folgendem Beispiel:

	ledig	verheiratet	geschieden	verwitwet	$\sum$
starke sexuelle Interessen	53	49	42	11	155
mäßige sexuelle Interessen	28	67	31	56	182
keine sexuellen Interessen	17	22	18	39	96
$\sum$	98	138	91	106	433

Es errechnet sich ein Chi^2 von 54,85. Bei df = (4 - 1)·(3 - 1) = 6 ist dieser Wert hochsignifikant. Der kritische Wert für das 0,1%-Niveau beträgt 22,46.

2.2.3.3. Der McNemar-Test

Untersuchen wir dieselbe Stichprobe zweimal im Hinblick auf ein alternatives Merkmal, so können wir den McNemar-Test anwenden. Auch hierzu müssen wir eine Vierfelder-Tafel erstellen:

		2. Untersuchung	
		MA	MB
1. Untersuchung	MA	a	b
	MB	c	d

MA = Merkmalsalternative A,
MB = Merkmalsalternative B.

Die Berechnungsvorschrift für Chi^2 lautet dann:

$$Chi^2 = \frac{(b - c)^2}{b + c}; \qquad df = 1. \tag{67}$$

Angenommen, eine Werbekampagne für das Waschmittel A soll auf ihre Auswirkung hin überprüft werden. Vor der Kampagne wuschen 84 Frauen von einer 500 Personen umfassenden Stichprobe mit A, die restlichen 416 mit anderen Waschmitteln. Nach der Kampagne wuschen 128 Frauen mit A und 372 mit anderen Mitteln, und zwar waren 81 A "treu" geblieben, 47 verwendeten erst jetzt A, 369 wuschen nach wie vor mit anderen Mitteln und 3 waren von A "abgefallen":

		nach der Kampagne	
		A	andere Mittel
vor der Kampagne	A	81	3
	andere Mittel	47	369

$$Chi^2 = \frac{(3 - 47)^2}{50} = 38,72$$

Da wir bei einem Freiheitsgrad auf dem 0,1%-Niveau einen kritischen Wert von 10,83 aus Tabelle 2 entnehmen können, darf die Kampagne als durchschlagender Erfolg angesehen werden, freilich nur in statistischer Hinsicht.
Auch beim McNemar-Test ist zu prüfen, ob die erwartete Häufigkeit für b oder c nicht etwa 10 unterschreitet. Dafür gilt die Beziehung:

$$f_e = \frac{b + c}{2}. \tag{68}$$

In unserem Falle errechnen wir $\frac{3 + 47}{2}$ = 25. Damit ist die Bedingung für die Anwendung des Verfahrens erfüllt.

2.2.3.4. Der Cochran-Test

Soll eine Stichprobe nicht nur zweimal, sondern k-mal untersucht werden, so können wir den Cochran-Test zur Überprüfung auftretender Unterschiede einsetzen. Wir legen uns dazu eine Matrix nach folgendem Muster an, wobei das Auftreten der einen Merkmals-Alternative mit 1, das der anderen mit 0 bezeichnet wird:

Versuchs-personen	Untersuchungen 1	2	3	...	k	Zeilen-summe	Quadrat der Zeilensumme
1	1	1	0	...	0	34	1156
2	0	1	1	...	1	21	441
.	.	.	.	...	.	...	...
.	.	.	.	...	.	...	...
.	.	.	.	...	.	...	...
n	0	0	1	...	1	27	729
Summe	$\sum U$ 12	9	18	...	9	$\sum Vp$ 586	$\sum Vp^2$ 23459

Wir errechnen dann ein Chi^2 mit df = k - 1 Freiheitsgraden nach der Beziehung:

$$Chi^2 = \frac{(k-1) \cdot \left[k \sum_{i=1}^{m} U_i^2 - (\sum_{i=1}^{m} U_i)^2\right]}{k \sum_{i=1}^{n} Vp_i - \sum_{i=1}^{n} Vp_i^2} \, . \qquad (69) \; (Pr.19)$$

Dabei sollte das Produkt kn > 30 sein.

Nehmen wir an, eine Stichprobe von 8 Versuchspersonen sei über ein Jahr hinweg einer Therapie gegen Kopfschmerzen unterzogen worden. Die Versuchspersonen wurden vor der Untersuchung und dann jeweils in Vierteljahresabständen befragt, ob der letzte Tag vor der Befragung schmerzfrei gewesen sei (0) oder nicht (1):

Versuchs-personen	vor der Unters.	1. VJ	2. VJ	3. VJ	4. VJ	Zs	Zs^2
1	1	1	0	1	0	3	9
2	1	0	1	0	1	3	9
3	1	1	0	0	0	2	4
4	1	1	1	1	1	4	16
5	1	0	0	1	1	3	9
6	1	1	0	0	0	2	4
7	1	1	1	0	0	3	9
8	1	1	1	1	1	4	16
Summe	8	6	4	4	4	24	76

Wir rechnen demgemäß:

$$Chi^2 = \frac{(5-1) \cdot [5 \cdot (8^2+6^2+4^2+4^2+4^2) - (8+6+4+4+4)^2]}{5 \cdot 24 - 76} = 5{,}818.$$

Dieser Wert ist bei df = 5 - 1 = 4 weitab von jeglicher Signifikanz: Für das 25%-Niveau beispielsweise wäre schon ein kritischer Wert von 5,385 erforderlich. Die Therapie hatte also keinen nachweislichen Erfolg.

2.2.3.5. Die Konfigurations-Frequenz-Analyse (Pr.20 bis 23)

Die Kontingenztafel verallgemeinert die Vierfelder-Tafel dahingehend, daß statt zweier Merkmale mit jeweils alternativer Ausprägung zwei Merkmale mit n und m Merkmalsstufen bzw. -klassen untersucht werden. Die Konfigurationsfrequenzanalyse (KFA) treibt diese Verallgemeinerung in der Richtung weiter, daß sie erlaubt, k Merkmale mit n und m Merkmalsstufen zu analysieren.
Wir wählen als erstes den Fall, daß Unterschiede in einer Stichprobe im Hinblick auf 3 jeweils alternativ ausgeprägte Merkmale untersucht werden:
In einer Untersuchung sei geprüft worden, ob im Hinblick auf das Geschlecht (Merkmal A : 1 = männlich, 0 = weiblich) und die Wohnregion (Merkmal B: 1 = Stadt, 0 = Land) Unterschiede in der Drogenabhängigkeit Jugendlicher (Merkmal C: 1 = Drogenabhängigkeit, 0 = keine Drogenabhängigkeit) bestehen.

Merkmale A B C	beob. Häufigkeit $= f_b$	erw. Häufigkeit $= f_e$	Chi-Quadrat
1 1 1	28	40,424	3,818
1 1 0	213	182,776	4,998
1 0 0	144	170,984	4,259
1 0 1	47	37,816	2,230
0 1 1	35	43,793	1,766
0 1 0	189	198,007	0,410
0 0 1	53	40,967	3,534
0 0 0	191	185,233	0,180
	900		

Es wird also zunächst aufgeführt, wie oft jede Merkmalskonfiguration sich im Untersuchungsmaterial findet (f_b). Des weiteren zählen wir aus, wieviele männliche, drogenabhängige usw. Jugendliche in der Untersuchung enthalten sind. Wir addieren dazu einfach die Häufigkeiten aller Konfigurationen, für welche A = 1, A = 0, B = 1 usw., und erhalten:

$$\sum A_1 = 432 \qquad \sum A_0 = 468$$
$$\sum B_1 = 465 \qquad \sum B_0 = 435$$
$$\sum C_1 = 163 \qquad \sum C_0 = 737$$

Die erwarteten Häufigkeiten errechnen wir dann nach der Beziehung:

$$f_e = \frac{\sum_{i=1}^{c} A_{1(0)i} \cdot \sum_{i=1}^{c} B_{1(0)i} \cdot \sum_{i=1}^{c} C_{1(0)i}}{N^2}, \quad \text{wobei N=Gesamtzahl aller untersuchten Fälle.} \qquad (70) \; (Pr.22)$$

Demgemäß haben wir beispielsweise für die Konfiguration 1 1 0 zu rechnen:

$$f_e = \frac{432 \cdot 465 \cdot 737}{900^2} = 182,776,$$

da $A_1 = 432$; $B_1 = 465$ und $C_0 = 737$ bei N = 900.

Die Werte für Chi^2 werden dann nach der schon mehrfach verwendeten Formel

$$Chi^2 = \sum_{i=1}^{c} \frac{(f_{b_i} - f_{e_i})^2}{f_{e_i}}$$

errechnet. Die Zahl der Freiheitsgrade für eine KFA mit k alternativ gestuften Merkmalen ist

$$df = 2^k - k - 1,$$

in unserem Beispiel also 4. Das errechnete (Gesamt-) Chi^2 von 21,194 ist auf dem 0,1%-Niveau signifikant. Der entsprechende kritische Wert beträgt 18,467.

Einer der Vorzüge einer KFA ist nun, daß sie uns ermöglicht, festzustellen, in welchen einzelnen Merkmalskonfigurationen der Unterschied zwischen den beobachteten und erwarteten Häufigkeiten signifikant ist. Insofern als eine Kontingenztabelle ohne weiteres auch als eine KFA mit 2 n- bzw. m-fach gestuften Merkmalen darstellbar ist, ist das Verfahren auch auf eine solche anwendbar. Die Zahl der Freiheitsgrade für diese sogenannten einzelnen Chi^2-Komponenten ist jeweils 1. Da aber die gesamte KFA nicht $8 \cdot 1 = 8$, sondern 4 Freiheitsgrade hat, muß der Signifikanzprüfung ein korrigiertes Signifikanz-Niveau p^* zugrunde gelegt werden, das nach der Beziehung

$$p^* = \frac{p}{r}$$ (wobei p = gewünschtes Signifikanz-Niveau, z.B. 0,05.
r = Anzahl der Konfigurationen) (71)

errechnet wird. Fordern wir für unser Beispiel Signifikanz auf dem 5%-Niveau, so erhalten wir

$$p^* = \frac{5}{8}\% = 0,625\%,$$

d.h. wir müssen die einzelnen Chi^2-Komponenten am kritischen Wert für das 0,625%-Niveau überprüfen, wenn wir sie auf dem 5%-Niveau testen wollen. Solche Signifikanz-Niveaus sind in den üblichen Tabellen meist nicht ausgewiesen. Man kann die kritischen Werte für Chi^2 in diesem Falle relativ einfach berechnen:

$$Chi^2 = \left[z_{F\left(0,5 - \frac{p/2}{r}\right)} \right]^2. \qquad (72)$$

Dabei ist p/2 = die Hälfte des gewünschten Signifikanz-Niveaus,
r = Anzahl der m ö g l i c h e n Konfigurationen,
F = Fläche des z-Wertes der Standnormalverteilung.

In unserem Fall rechnen wir: $\frac{p/2}{r} = 0,00625:2 = 0,003125$

$0,5 - 0,003125 = 0,496875.$

Wir suchen diesen Wert in Tabelle 1 unter den Flächen der Standardnormalverteilung auf. Am nächsten kommt ihm dort der Wert 0,4969. Diesem entspricht ein z-Wert von 2,74. Diesen quadrieren wir und erhalten als den gesuchten kritischen Wert für Chi^2 7,51.

Es zeigt sich, daß keine einzelne Komponente signifikant ist.

ES ZEIGT SICH, DASS EINE KFA (ALSO AUCH EINE KONTINGENZTAFEL!) ALS GANZE SIGNIFIKANT SEIN KANN, OHNE DASS EINE DER MERKMALSAUSPRÄGUNGEN SIGNIFIKANT IST. UMGEKEHRT IST ES AUCH MÖGLICH, DASS EINZELKOMPONENTEN SIGNIFIKANT SIND, OHNE DASS DIE GANZE KFA SIGNIFIKANT IST. MAN SOLLTE SICH IN SOLCHEN FÄLLEN, UM FEHLINTERPRETATIONEN ZU VERMEIDEN, AUF JEDEN FALL DIE EINZELNEN KOMPONENTEN ANSEHEN.

Kann eine Komponente als signifikant abgesichert werden, ergibt sich die Frage, inwieweit sie auch praktisch bedeutsam ist. Dazu kann ein sog. Prägnanzkoeffizient nach der Formel

$$Q = \frac{2\left|f_b - f_e\right|}{N + \left|2f_e - N\right|} \tag{73}$$

berechnet werden, der bei geringster Prägnanz den Wert 0 und bei höchster Prägnanz den Wert 1 erreicht. Für die Merkmalskombination 1 1 0 in unserem Beispiel ergäbe sich

$$Q = \frac{2\,\left|213 - 282{,}776\right|}{900 + \left|2 \cdot 282{,}776 - 900\right|} = 0{,}113.$$

Die Prägnanz reicht kaum hin, auch wenn uns eine Signifikanz auf dem 25%-Niveau genügt.

Bei einer KFA mit k t-fach gestuften Merkmalen ist die Zahl der Freiheitsgrade

$$df = t^k - k - 1. \tag{74}$$

Handelt es sich ganz allgemein um k Merkmale mit a,b,c ...n Merkmalsstufen, so errechnet sich die Anzahl der Freiheitsgrade nach der Beziehung

$$df = a \cdot b \cdot c \ldots m \cdot n - a - b - c \ldots - m - n + (n - 1). \tag{75}$$

Die Errechnung des Gesamt-Chi^2 und die Überprüfung der Einzelkomponenten geschieht ganz analog zu einer KFA mit 2-fach gestuften Merkmalen.

Die erwarteten Häufigkeiten werden bei k verschiedenen Merkmalen ganz allgemein nach der Beziehung berechnet

$$f_e = \frac{\sum_{i=1}^{c} A_{1(0)i} \cdot \sum_{i=1}^{c} B_{1(0)i} \cdots \cdot \sum_{i=1}^{c} K_{1(0)i}}{N^{k-1}}, \tag{76}$$

wobei $\sum_{i=1}^{c} A_{1(0)i}$ = Anzahl der Fälle mit vorhandener (nicht vorhandener) Ausprägung des Merkmals A,

$\sum_{i=1}^{c} B_{1(0)i}$ = Anzahl der Fälle mit vorhandener (nicht vorhandener) Ausprägung des Merkmals B.

usw.

(Bei nicht alternativ, sondern mehrfach gestuften Merkmalen wären die Häufigkeiten für $A_{0(1,2\ldots n)}$, d.h. für die Fälle mit dem Ausprägungsgrad 0,1,2,...n des Merkmals A einzusetzen.)

Konfigurationsfrequenzanalysen können schließlich auch mit einem Material aus mehreren Stichproben durchgeführt werden.

Es wird in der Praxis öfter vorkommen, daß wir nicht alle theoretisch denkbaren Merkmalskombinationen tatsächlich vorfinden. In solchen Fällen schieben wir einfach eine Leerzeile in die Matrix ein. Die Chi^2-Komponenten dieser Zeilen können dann nicht überprüft werden, ebenso kann kein Gesamt-Chi^2 für die KFA berechnet werden. Zur Berechnung des korrigierten Signifikanz-Niveaus nach (71) müssen jedoch a l l e , auch die unbesetzten Merkmalskombinationen herangezogen werden.
Auch Meßwiederholungen an derselben Stichprobe kann man mit einer KFA testen: Die Veränderung von der 1. zur 2. Messung, von der 2. Messung zur 3. Messung usw. nimmt man dann einfach als weitere a-, b- usw. -fach gestufte Merkmale in die Matrix auf.
GRUNDSÄTZLICH MUSS ABER BEI JEDER KFA GRÜNDLICH BEDACHT WERDEN, DASS DIE ZAHL DER KOMBINATIONEN MIT ZUNEHMENDER ZAHL DER MERKMALE UND DER MERKMALSSTUFEN EXPONENTIAL ANSTEIGT.

Im übrigen muß streng darauf geachtet werden, daß die Zahl der erwarteten Häufigkeiten in keinem Falle geringer als 5 und die Gesamtzahl N aller untersuchten Fälle für k t-fach gestufte Merkmale größer als 5 t^k ist.

3. Prüfung von Zusammenhängen

Im vorangehenden Kapitel wurden Verfahren vorgestellt, mit denen Unterschieds-Hypothesen überprüft werden können. Oft wird man aber auch Hypothesen über vermutete Zusammenhänge untersuchen wollen. Dazu dient die sog. Korrelationsrechnung.

Bevor wir die verschiedenen Verfahren im einzelnen präsentieren, sei ausdrücklich festgestellt, daß MIT HILFE ERRECHNETER KORRELATIONEN KEIN NACHWEIS ÜBER DIE EXISTENZ VON KAUSALBEZIEHUNGEN GEFÜHRT WERDEN KANN. KORRELATIONEN SIND LEDIGLICH EIN MASS FÜR DAS ZUSAMMENVORKOMMEN ZWEIER VARIABLEN. Dieses aber kann von ganz verschiedenen Kostellationen herrühren:

- V_1 verursacht V_2,
- V_2 verursacht V_1,
- es herrscht ein Inklusionsverhältnis zwischen V_1 und V_2,
- V_1 und V_2 sind von einer oder mehreren anderen Variablen abhängig.

usw.

3.1. Die Produkt-Moment-Korrelation

Das verbreitetste Korrelationsmaß ist die Produkt-Moment-Korrelation nach Pearson-Bravais. Verglichen werden hier immer Meßwerte, genauer: Reihen von Meßwertpaaren. Wir können von den Datenpaaren der Urliste ausgehen und die Berechnung nach der Formel

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i \cdot \sum_{i=1}^{N} Y_i}{N}}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{N} X_i)^2}{N}\right]\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{N} Y_i)^2}{N}\right]}} \qquad (77)\ (\text{Pr.}24)\ (\text{Pr.}25)$$

vornehmen.

Z. B. möchten wir den Zusammenhang zwischen den Durchschnittsnoten des Abiturzeugnisses und der Examensnoten in einem bestimmten Studienfach feststellen. Wir haben dazu folgende Daten vorliegen (wobei die 1. Zahl jeweils der Notendurchschnitt im Abitur, die 2. die Examensnote ist):
2.25 - 3.37, 4.11 - 3.44, 1.98 - 2.89, 3.49 - 2.10, 1.23 - 1.79,
1.53 - 3.00, 2.68 - 1.95, 3.44 - 3.09, 3.75 - 2.89, 3.60 - 2.99.

Als Korrelationskoeffizienten errechnen wir + .341. Vermutlich möchten wir nun auch wissen, ob und gegebenenfalls auf welchem Niveau diese Korrelation signifikant ist. Dies können wir sehr leicht anhand der in Tab. 9 zusammengestellten kritischen Werte klären. Unsere Korrelation von + .341 ist bei 8 Freiheitsgraden (df = N - 2) nicht signifikant.

Der Korrelationskoeffizient enthält eine wichtige Information über den Betrag der gemeinsamen Varianz zwischen den Variablen X und Y:

$$VA = 100 \cdot r^2 \,\%. \qquad (78)$$

In unserem Fall erhalten wir eine Varianzaufklärung bzw. eine gemeinsame Varianz von $100 \cdot 0.341^2 = 11.63\,\%$.

3.2. Die Rangkorrelation

Manchmal haben wir für die zu vergleichenden Variablen keine genauen Meßzahlen, sondern nur Rangordnungen zur Verfügung, etwa die Beliebtheit von Freizeitbeschäftigungen bei 14jährigen Jungen und Mädchen:

	Knaben	Mädchen	d	d^2
Sport	1	4	-3	9
Fernsehen	3	5	-2	4
Lesen	6	6	0	0
Kino	4	7	-3	9
Tanzen	8	8	0	0
Theater	9	9	0	0
Konzert	10	10	0	0
Musik hören	5	1	4	16
Spazierengehen	7	3	4	16
Basteln, Handarbeit	2	2	0	0
				54

Für die Berechnung einer Rangkorrelation gilt dann die Formel

$$R_{xy(Sp)} = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{N} d_i^2}{N^3 - N}. \qquad (79)\ (Pr.26)$$

In unserem Beispiel ergibt sich:

$$R = 1 - \frac{6 \cdot 54}{10^3 - 10} = 0.673.$$

(N ist die Anzahl der verglichenen Paare, hier der Freizeitbeschäftigungen.)

3.3. Der Phi-Koeffizient

Möchten wir den Zusammenhang zwischen 2 jeweils alternativ auftretenden Merkmalen überprüfen, ermitteln wir den sogenannten Phi-Koeffizienten. Dazu muß zunächst eine sogenannte Vierfelder-Tafel erstellt werden:

		Merkmal X Alternative I	Alternative II	
Merkmal Y	Alt. I	a	b	a + b
	Alt. II	c	d	c + d
		a + c	b + d	N

Der Phi-Koeffizient errechnet sich dann nach der Beziehung

$$Phi = \frac{bc - ad}{\sqrt{(a+c)\cdot(b+d)\cdot(a+b)\cdot(c+d)}}. \qquad (80)$$

Phi ist dann signifikant, wenn das zugehörige Vierfelder-Chi^2 signifikant ist, das nach der schon vorgestellten Formel (65) ermittelt wird. Da wir zur Signifikanzprüfung also ohnehin das Chi^2 benötigen, wird es sich meist empfehlen, Phi aus diesem über die Bestimmung

$$Phi = \sqrt{\frac{Chi^2}{N}} \tag{81}$$

zu berechnen.
Der Phi-Koeffizient ist nicht ohne weiteres mit einem Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten vergleichbar, da er nicht immer alle Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann. Um die Vergleichbarkeit herzustellen, berechnet man nach der Formel

$$r = \frac{bc - ad}{(b+d)\cdot(a+b)} \quad \text{(wobei } a + b \leq c + d \text{ und } b + d \leq a + c \text{ sein muß)} \tag{82}$$

ein Äquivalent für einen Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten.

Die angegebene Bedingung können wir leicht erfüllen, wenn wir die Vierfelder-Tafel so ordnen, daß als Alternative I von Y jene Merkmalsausprägung mit der geringeren Häufigkeit und analog als Merkmal II von X ebenfalls das seltener auftretende bezeichnet wird.
Es habe sich in einer Stichprobe von 500 Versuchspersonen die folgende Verteilung der alternativen Merkmale männlich/weiblich und ungelernte/gelernte Berufstätigkeiten ergeben:

	Männer	Frauen	$\sum$
Ungelernte	78	124	202
Gelernte	207	91	298
$\sum$	285	215	500

Wir rechnen dann für Chi^2:

$$Chi^2 = \frac{500\cdot(78\cdot 91 - 124\cdot 207)^2}{285\cdot 215\cdot 202\cdot 298} = 46{,}746.$$

Für df = 1 (Eine Vierfelder-Tafel hat 1 Freiheitsgrad, wenn die Formel (65) angewendet wird!) ist der kritische Wert für das 0,1%-Niveau nach Tabelle 2 10,83. Der Zusammenhang ist also äußerst signifikant. Für Phi erhalten wir:

$$Phi = \sqrt{\frac{46{,}746}{500}} = 0{,}306.$$

Als Äquivalent unseres Phi zu einem Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten ergibt sich:

$$r = \frac{124\cdot 207 - 78\cdot 91}{(124 + 91)\cdot(78 + 124)} = 0{,}428.$$

Der Zusammenhang zwischen dem Geschlecht und der Tendenz, einen gelernten Beruf auszuüben, ist demnach nur mittelmäßig, wenn auch statistisch sehr gut abgesichert.

3.4. Der Kontingenz-Koeffizient

Sind die Variablen X und Y einerseits nicht intervallskaliert, andererseits aber auch nicht nur alternativ, sondern k- und l-fach gestuft, berechnet man einen sog . Kontingenzkoeffizienten.
Dazu legt man in der oben auf S.31gezeigten Weise eine Kontingenz-Tafel an, ermittelt für diese das Chi^2 nach (32) und berechnet daraus den Kontingenzkoeffizienten C nach der Beziehung

$$C = \sqrt{\frac{Chi^2}{Chi^2 + N}} . \qquad (83)$$

Dieser hat allerdings den Nachteil, daß sein Maximalwert nicht in allen Fällen bei 1.00 liegt, wie bei einem Korrelationskoeffizienten, so daß nur Werte von Kontingenztafeln mit gleich vielen Spalten und Zeilen vergleichbar sind. Daher suchte man nach einem Weg, aufgrund des Kontingenzkoeffizienten zu einer Schätzung eines entsprechenden Korrelationskoeffizienten zu gelangen. Es ist

$$r \approx \frac{C}{C_{max}} . \qquad (84)$$

Die Werte für C_{max} (die maximalen Beträge für C bei Kontingenztafeln mit k Spalten und k Zeilen) können der Tabelle11entnommen werden. Das Verfahren ist also zunächst nur anwendbar auf quadratisch angelegte Kontingenztabellen. In unserem oben auf S.31angeführten Beispiel für den Zusammenhang zwischen Familienstand und sexuellen Interessen haben wir 3 Zeilen und 4 Spalten, so daß die Bedingung nicht erfüllt ist. Wir können dennoch zu einer ungefähren Schätzung des Korrelationskoeffizienten kommen, wenn wir für C_{max} das arithmetische Mittel der Maximalwerte für 3 und 4 Klassen zugrunde legen, also

$$C_{max} = (0,816 + 0,866):2 = 0,841.$$

Für das genannte Beispiel ergibt sich dann ein geschätzter Korrelationskoeffizient von 0,399.
Zur Signifikanzprüfung eines Kontingenzkoeffizienten ziehen wir jeweils das zugehörige Chi-Quadrat unter Zugrundelegung der entsprechenden Zahl der Freiheitsgrade heran.

3.5. Korrelationen mit dichotomen Variablen

Oft ist es nötig, etwas über den Zusammenhang von intervallskalierten oder ordinalskaliertenMerkmalenmit alternativ gestuften (= dichotomen) Merkmalen auszusagen. Es kann sein, daß das zweite Merkmal wirklich dichotom ist (z.B. männlich - weiblich), oft kommt es aber auch vor, daß es an sich intervall- oder ordinalskaliert ist, aber aus forschungstechnischen Gründen nur in zwei Ausprägungen erfaßt werden kann (z.B. Blutalkohol $<$ 0,8 Promille und $\geq$ 0,8 Promille).
Die Statistik kennt dazu eine ganze Reihe, zum Teil recht umständlicher Verfahren (vor allem diepunktbiserialeund diebiserialeKorrelation sowie die bise-

riale Rangkorrelation). Man kann solche Fälle aber auch recht gut über die Produkt-Moment-Korrelation und die Zusammenhangsmaße für Nominaldaten abwickeln.
Dazu müssen dichotome Variablen (oft auch "Dummy-Variablen" genannt) eingeführt werden: Das alternativ gestufte Merkmal erhält in der einen Ausprägung durchgehend eine 1, in der anderen durchgehend eine 0 zugeordnet. Im übrigen kann dann mit den Wertepaaren in der gewohnten Weise verfahren werden.

Wir illustrieren diese Vorgehensweise an zwei Beispielen:
Nachstehend sollen Ergebnisse einer Intelligenzuntersuchung bei Hauptschülern mit und ohne qualifizierenden Abschluß überprüft werden:

Vp	Abschluß	IQ	Vp	Abschluß	IQ
1	1	114	11	1	125
2	1	101	12	1	112
3	1	122	13	0	113
4	1	89	14	0	87
5	1	96	15	0	92
6	1	103	16	0	95
7	1	99	17	0	91
8	1	117	18	0	85
9	1	97	19	0	89
10	1	88	20	0	104
			21	0	102

wobei
1 = mit Abschluß
0 = ohne Abschluß

Demnach haben also die Vpn 1 bis 12 den qualifizierenden Abschluß gemacht, die Vpn 13 bis 21 nicht.
Die Werte für "Abschluß" und "IQ" werden wie üblich nach (77) in einer Produkt-Moment-Korrelation verrechnet. Es ergibt sich ein Wert von + 0,418, d.h. es besteht ein mäßiger Zusammenhang zwischen dem Besitz des qualifizierenden Abschlusses und der Intelligenzhöhe. Bei 21 - 2 = 19 Freiheitsgraden wäre für das 5%-Niveau eine Korrelation mindestens vom Betrage 0,433 erforderlich. Der Zusammenhang ist also nicht signifikant.
Ein anderes Beispiel möge die Kombination einer ordinalskalierten und einer dichotomen Variablen veranschaulichen:
Es sei die Aggressivität von N = 20 Kindern, die teilweise in einem Heim (Codierung mit 1), teilweise in einer Familie (Codierung mit 0) aufwuchsen, in einer Rangordnung bekannt:

Vpn	Familie Heim	Aggressivität	Vpn	Familie Heim	Aggressivität
1	1	2	11	0	1
2	1	7	12	0	16
3	1	4	13	0	17
4	1	9	14	0	3
5	1	11	15	0	20
6	1	5	16	0	19
7	1	10	17	0	13
8	1	6	18	0	18
9	0	12	19	0	8
10	0	14	20	0	15

Da die Angaben über Aggressivität Rangdaten sind (niedrige Rangplätze mögen hohe Aggressivität bedeuten) und ein spezielles Verfahren für die Kombination solcher mit einer dichotomen Variablen (die biseriale Rangkorrelation) sehr aufwendig ist, transformieren wir die Rangdaten in Nominaldaten, was durchaus zulässig ist: Wir legen eine Vierfelder-Tafel an, indem wir auch die Ränge in zwei Gruppen einteilen.

		niedrige Aggressivität 11 bis 20	hohe Aggressivität 1 bis 10
"Familie"	1	7	1
"Heim"	0	3	9

Dafür errechnen wir ein Vierfelder-Chi^2 nach (65) zu 7,5, welches auf dem 1%-Niveau signifikant ist, sowie ein Äquivalent für einen Korrelationskoeffizienten nach (65) zu 0,75 (wobei die auf S.40 angegebenen Vorschriften für die Anordnung der Vierfelder-Tafel beachtet werden müssen). Es besteht also ein sehr signifikanter Zusammenhang zwischen niedriger Aggressivität und "Familienkindheit". Übrigens muß man natürlich darum bemüht sein, daß die erwarteten Häufigkeiten in den Feldern möglichst nicht unter 10 absinken. Man kann das prüfen, indem man die niedrigste Zeilensumme mit der niedrigsten Spaltensumme multipliziert und das Ergebnis durch die Gesamtsumme dividiert. In unserem Beispiel ergäbe sich so für die beiden oberen Felder eine erwartete Häufigkeit von je 4,0 und für die unteren eine solche von 6. Die gemachten Aussagen stehen somit auf wackeligen Füßen. Natürlich kann man ebensogut eine Kontingenztafel konstruieren, wenn die Datenmenge hinreichend groß ist, und es besteht keinerlei methodische Notwendigkeit, die Rangskala zu gleichen Anteilen zu unterteilen, wie dies in unserem Beispiel geschah.

3.6. Der Konkordanz-Koeffizient

Gelegentlich kann es sich als nötig erweisen, mehrere Rangreihen auf das Maß ihrer Übereinstimmung (Konkordanz) zu prüfen. Hier ist uns ein Verfahren zur Ermittlung eines Konkordanz-Koeffizienten von Nutzen, das von Kendall entwickelt worden ist. Angenommen, 5 Schulklassen hätten 8 Lehrkräfte nach mehr oder weniger autoritärem Führungsstil in eine Rangreihe zu bringen:

	L 1	L 2	L 3	L 4	L 5	L 6	L 7	L 8	Gesamtsumme
Klasse 8a	4	3	1	2	5	8	7	6	
Klasse 8b	4	2	3	1	5	7	6	8	
Klasse 8c	3	2	1	4	6	3	5	7	
Klasse 9a	2	3	1	6	4	6	7	8	
Klasse 9c	1	3	2	5	4	7	6	8	
$\sum R$	14	13	8	17	24	36	31	37	180

mittl. Rangsumme M_R = 180 : 8 = 22,50.

Der Konkordanzkoeffizient W wird dann nach der Formel

$$W = \frac{(M_R - \sum_{i=1}^{N} R_i)^2}{\frac{1}{12}\, k^2 \cdot (N^3 - N)} \qquad (85) \; (Pr.28)$$

berechnet, wobei N für die Anzahl der Beurteilten (hier der Lehrer), k für die Anzahl der Beurteiler (hier der Klassen) steht.
Die Signifikanzprüfung erfolgt mit Hilfe von Tabelle 12, in welcher wir die kritischen Werte für den Zähler des Konkordanzkoeffizienten nachschlagen können.

Um eine bessere Vergleichbarkeit mit den gebräuchlicheren Korrelationsmaßen zu gewährleisten, wird der Konkordanzkoeffizient gern nach der Beziehung

$$\bar{R} = \frac{kW - 1}{k - 1} \qquad (86)$$

in einen mittleren Rang-Korrelationskoeffizienten umgerechnet.
Für $k \leq 7$ finden wir in Tabelle 12 kritische Werte zum Zähler von W. Für k 7 können wir ein Chi^2 nach der Beziehung:

$$Chi^2 = k\,(N - 1)\,W \qquad (87)$$

als Prüfgröße errechnen.

In unserem Beispiel ergibt sich:

$$W = \frac{(22,5-14)^2+(22,5-13)^2+(22,5-8)^2+(22,5-17)^2+(22,5-24)^2+(22,5-36)^2}{\frac{1}{12}\cdot 5^2\cdot (8^3-8)}$$

$$+ \frac{(22,5-31)^2+(22,5-37)^2}{\frac{1}{12}\cdot 5^2\cdot (8^3-8)} = \frac{870,00}{1050,00} = 0,829.$$

In Anbetracht eines kritischen Wertes von 556,5 für den Zähler ist die Konkordanz auf dem 1%-Niveau signifikant.
Als mittlere Rangkorrelation errechnet sich:

$$\bar{R}' = \frac{5 \cdot 0,829 - 1}{5 - 1} = 0,786.$$

W kann nur Werte zwischen 0 (keine Konkordanz) und +1 (maximale Konkordanz) annehmen.

3.7. Mittlere Korrelationen

Hin und wieder kommt man in die Lage, aus mehreren einzelnen Korrelationskoeffizienten einen MITTLEREN KORRELATIONSKOEFFIZIENTEN errechnen zu müssen. Dazu darf man sich nicht ohne weiteres der Technik des arithmetischen Mittels bedienen. Die Korrelationen müssen vielmehr erst nach einer von Fisher entwickelten Transformation in Z-Werte umgerechnet werden, wobei

$$Z = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + r}{1 - r}\right); \qquad df = N - 3. \tag{88}$$

Sofern wir Korrelationen aus unterschiedlich großen Populationen mitteln wollen, müssen wir sie mit den entsprechenden Freiheitsgraden gewichten:

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{c}(n_i-3)\cdot Z_i}{\sum_{i=1}^{c}(n-3)}$$ für ungleiche Stichproben, (89) (Pr.29)

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{c} Z_i}{c}$$ für gleiche Stichproben (wobei c = Anzahl der Stichproben). (90) (Pr.30)

3.8. Partialkorrelationen

Die Korrelation von zwei Variablen kann durch weitere Variablen vermittelt sein. So läßt sich z.B. sicher eine beträchtliche Korrelation zwischen den Schulleistungen in Mathematik und Physik ermitteln. Dabei erscheint jedoch die Vermutung nicht ganz unbegründet, diese Korrelation möchte etwa durch die Fähigkeit zu abstrakt-logischem Denken, ohne die gute Leistungen in beiden Fächern nicht oft vorkommen dürften, zumindest mit bedingt sein. Wir könnten nun an der Frage interessiert sein, wie stark die Leistungen in beiden Fächern unter Berücksichtigung dieser mutmaßlichen Abhängigkeit sind. Wir dürften dann nur Schüler mit gleicher Fähigkeit zu abstrakt-logischem Denken miteinander vergleichen, d.h. wir müßten diese 3. Variable konstant halten, um ihren Einfluß auszuschalten. Das wird aber praktisch nicht immer möglich sein. Ein Verfahren zur rechnerischen Ausschaltung von Variablen ist die sogen. PARTIALISIERUNG VON KORRELATIONEN:

$$r_{1-2(3)} = \frac{r_{1-2} - r_{1-3}r_{2-3}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{1-3}\right)\left(1 - r^2_{2-3}\right)}}.$$ (91) (Pr.31)

Wir führen es an einem Beispiel vor. In einer Untersuchung über faule Schüler ergab sich folgende Korrelationsmatrix:

Tab. 1	1	2	3	4
1	-			
2	+.70	-		
3	+.74	+.76	-	
4	+.87	+.67	+.50	-

1 = "Faulheit"
2 = "Belastung durch schulische Umwelt"
3 = "Belastung durch außerschulische Umwelt"
4 = "Belastung durch Persönlichkeitsfaktoren"

Wir möchten nun z.B. die Variable "Persönlichkeitsfaktoren" ausschalten. Angenommen,wir wollen eine Partialisierung der Korrelation zwischen Faulheit und Belastung durch schulische Umwelt vornehmen. Dann ist:

$$r_{1\text{-}2(3)} = r_{\text{Faulheit - Bel. durch schul.Umw.(Pers.F.)}}$$

$$r_{1\text{-}3} = r_{\text{Faulheit - Pers.F.}}$$

$$r_{2\text{-}3} = r_{\text{Bel. durch schul.Umw. - Pers.F.}}$$

$$r_{1\text{-}2} = r_{\text{Faulheit - Bel. durch schul.Umwelt}}$$

Wir rechnen also:

$$r_{1\text{-}2(3)} = \frac{0,70 - 0,87 \cdot 0,67}{\sqrt{(1 - 0,87^2)\cdot(1 - 0,67^2)}} = 0,32.$$

Entsprechend lassen sich die anderen Korrelationen partialisieren. Als Matrix der Partial-Korrelationen nach Ausschaltung der Variablen "Persönlichkeitsfaktoren" ergibt sich:

Tab. 2	1	2	3
1	-		
2	+.32	-	
3	+.71	+.66	-

4. Regressionsrechnung

Korrelationsrechnung dient im wesentlichen der Überprüfung von Zusammenhangshypothesen und insoweit theoretischen Zwecken. In der Praxis ist aber oft die Frage von Interesse, welche Vorhersagen wir aufgrund einer bestimmten Anzahl von Datenpaaren machen können. Diesem Problem, Werte einer Variablen aufgrund von Werten einer anderen vorherzusagen, geht die Regressionsrechnung nach.
Das mathematische Problem besteht in allen Fällen darin, eine Kurve zu finden, welche den Gesamttrend der Werte für X und Y am besten wiedergibt.

4.1. Die lineare Regression (Pr. 33)

In diesem (zugleich am häufigsten angewendeten) Verfahren wird versucht, als Trendlinie eine Gerade zu ermitteln. Bekanntlich hat eine solche die folgende Gleichung:

$$Y_i = a + bx_i . \qquad (92)$$

Der Koeffizient b wird nach der folgenden Beziehung errechnet:

$$b = \frac{N \sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot \sum_{i=1}^{N} Y_i}{N \sum_{i=1}^{N} X^2 - (\sum_{i=1}^{N} X)^2} . \qquad (93)$$

Für a ermitteln wir dann:

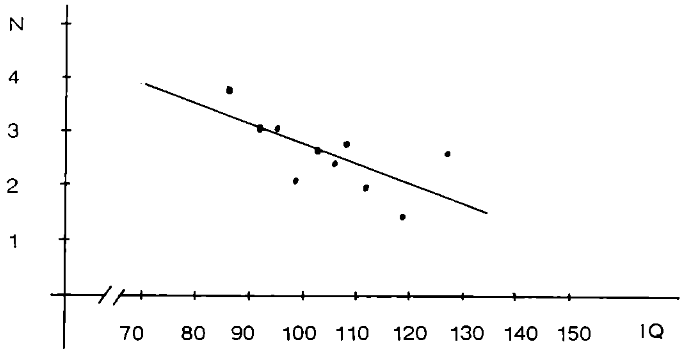
$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i}{N} - b \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} . \qquad (94)$$

Dabei ist Y_i = vorhergesagter Wert für die Variable Y,
X_i = Wert der Variable X, für welchen eine Prognose erstellt werden soll.

X, die Variable, welche zur Vorhersage benutzt wird, heißt in der Regressionsrechnung die Prädikatorvariable, Y, die Variable, die prognostiziert wird, heißt Kriteriumsvariable. Gewöhnlich wählt man als Prädikatorvariable eine relativ einfach zu messende. Natürlich soll sie außerdem hoch mit der Kriteriumsvariablen korrelieren.
Wir wählen als Beispiel 10 Schüler, deren Intelligenzquotient und Notendurchschnitt ermittelt wurde:

IQ (=X)	95	108	127	103	119	86	92	106	112	99
$\bar{N}$ (=Y)	3,11	2,88	2,65	2,70	1,44	3,79	3,31	2,45	2,00	2,13

N = 10



$\sum X = 1047$; $\sum X^2 = 111029$; $\sum Y = 26{,}46$;
$\sum XY = 2717{,}53$;

$$b = \frac{10 \cdot 2717{,}53 - 1047 \cdot 26{,}46}{10 \cdot 111029 - 1047^2} = -0{,}0375;$$

$$a = \frac{26{,}46}{10} - (-0{,}0375) \cdot \frac{1047}{10} = 6{,}572.$$

Die Regressionsgleichung lautet also:
$Y_i = 6{,}572 - 0{,}0375 X_i$.

Setzen wir für X_i (IQ) einen Wert von 140 ein, errechnen wir einen prognostizierten Notendurchschnitt von 1,32. Für $X_i = 78$ sagen wir einen Notendurchschnitt von 3,65 vorher.
In den meisten Fällen wird man an der Sicherheit solcher Prognosen interessiert sein. Mit Hilfe der nachstehenden Beziehung läßt sich berechnen, in welchem Vertrauensintervall ein prognostizierter Wert für Y bei einem erwünschten Signifikanz-Niveau von p% liegt:

$$VI_R = Y_i \pm t_{(p/2)} \sqrt{\frac{N \cdot SD_{YN}^2 - N \cdot b^2 \cdot SD_{XN}^2}{N-2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{N} + \frac{(X_i - \bar{X})^2}{N \cdot SD_{XN}^2}}, \quad (95)$$

(Pr.34)

wobei df für $t = N - 2$,
Y_i = vorhergesagter Y-Wert,
X_i = X-Wert, welcher der Vorhersage zugrunde liegt,
SD_{XN}, SD_{YN} = Standardabweichung von X bzw. Y mit dem Nenner N.

In unserem Beispiel hätten wir, falls wir unsere Prognose auf dem 5%-Niveau absichern wollen, zu rechnen:

$$VI = 1{,}32 \pm 2{,}306 \sqrt{\frac{10 \cdot 0{,}648^2 - 10 \cdot (-0{,}0375)^2 \cdot 11{,}866^2}{10-2}} \sqrt{1 + \frac{1}{10} + \frac{(140-104{,}7)^2}{10 \cdot 11{,}866^2}} ;$$

$VI = 1{,}32 \pm 1{,}71,$
also gilt:

$$-0{,}39 \leq \bar{N}_{IQ=140} \leq 3{,}03.$$

(SD_{XN} und SD_{YN} wurden nach Formel 9 berechnet).
Es zeigt sich, daß unsere Prognose recht schlecht abgesichert ist:
Mit der gewünschten Sicherheit können wir eigentlich nur sagen, daß ein Schüler mit einem IQ = 140 keinen schlechteren Notendurchschnitt als 3,03 haben wird. Hingegen sind alle besseren Notendurchschnitte möglich, ja der Prognosebereich erstreckt sich bis zu einem nicht einmal möglichen negativen Wert von -0,39. Diese beträchtliche Unsicherheit unserer Prognose darf insofern nicht verwundern, als sie ja nur auf einem Datenmaterial von 10 Wertepaaren beruht.

4.2. Nichtlineare Regression

Die Gerade ist nicht immer die ideale Trendlinie für ein vorgefundenes Datenmaterial. Es gibt Fälle, in denen kompliziertere Linien, d.h. Kurven, eine bessere Anpassung ermöglichen.

4.2.1. Quadratische Regression (Pr. 35)

Für den Fall einer quadratischen Regressionslinie lautet die Bestimmungsgleichung:

$$Y_i = a + b_1 X_i + b_2 X_i^2 . \tag{96}$$

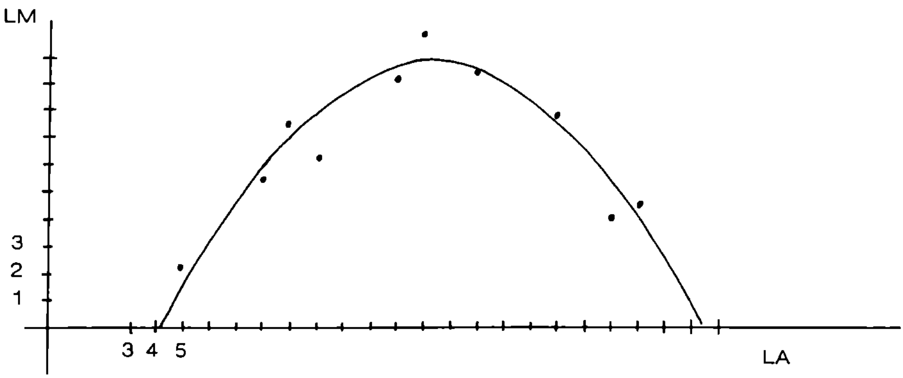
Die Koeffizienten werden aus 3 linearen Gleichungen mit 3 Unbekannten bestimmt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} Y_i &= a \cdot N + b_1 \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i + b_2 \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i^2 . \\ \sum_{i=1}^{N} X_i Y_i &= a \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i + b_1 \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i^2 + b_2 \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i^3 . \\ \sum_{i=1}^{N} X_i^2 Y_i &= a \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i^2 + b_1 \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i^3 + b_2 \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i^4 . \end{aligned} \tag{97}$$

Als Beispiel wählen wir Testwerte für Leistungsanforderung (X) und Leistungsmotivation (Y):

LA (=X)	5	8	10	14	16	19	21	22	9	13
LM (=Y)	2,1	5,5	6,3	10,9	9,4	7,8	4,0	4,5	7,5	9,2

$N = 10$; $\sum X = 137$; $\sum X^2 = 2177$; $\sum X^3 = 38171$; $\sum X^4 = 712853$.
$\sum Y = 67{,}2$; $\sum XY = 938{,}8$; $\sum X^2Y = 14497{,}4$.



$\boxed{1}$ 67,2 = 10 a + 137 b_1 + 2177 b_2.
$\boxed{2}$ 938,8 = 137 a + 2177b_1 + 38171 b_2.
$\boxed{3}$ 14497,4 = 2177 a + 38171 b_1 + 712853 b_2.
aus $\boxed{1}$: $\boxed{1'}$ a = 6,72 - 13,7 b_1 - 217,7 b_2.
aus $\boxed{2}$: $\boxed{2'}$ a = 6,853 - 15,891 b_1 - 278,620 b_2.
aus $\boxed{3}$:: $\boxed{3'}$ a = 6,659 - 17,534 b_1 - 327,447 b_2.
$\boxed{1'}$ = $\boxed{2'}$: 6,72 - 13,7 b_1 - 217,7 b_2 = 6,853 - 15,891 b_1 - 278,620 b_2.
daraus $\boxed{4}$: b_1 = 0,061 - 27,805 b_2.
$\boxed{2'}$ = $\boxed{3'}$: 6,853 - 15,891 b_1 - 278,620 b_2 = 6,659 - 17,534 b_1 - 327,447 b_2.
daraus $\boxed{5}$: b_1 = -0,118 - 29,718 b_2.
$\boxed{4}$ = $\boxed{5}$: 0,061 - 27,805 b_2 = -0,118 - 29,718 b_2.
daraus: b_2 = -0,0936.
b_2 in $\boxed{5}$: b_1 = -0,118 - 29,718 · (-0.0936); b_1 = 2,663.
b_1 und b_2 in $\boxed{1'}$: a = 6,72 - 13,7 · 2,663 - 217,7 · (-0,0936); a = -9,386.

Die Regressionsgleichung lautet also:

$Y_i = -9{,}386 + 2{,}663\, X_i - 0{,}0936\, X_i^2$ (Kurve siehe Abbildung oben!)

4.2.2. Die kubische Regression (Pr. 36)

In manchen Fällen werden bessere Vorhersagen durch eine Gleichung 3. Grades der allgemeinen Form

$$Y = a + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 \tag{98}$$

erzielt.
So mag sich Strenge der Bestrafung (X) auf die Leistungsmotivation (Y) so auswirken, daß mit zunehmender Strenge der Bestrafung zunächst ein langsamer Motivationsanstieg erzielt wird, der sich dann bei größerer Strenge beschleunigt, von einem bestimmten Punkt an jedoch wieder nachläßt und schließlich in einen Motivationsverfall umschlägt. In einer Untersuchung seien folgende Werte für X und Y gemessen worden:

X	1	2,5	3,1	5	12,1	7,5	4	0,1	9,2	10,4
Y	2	2,8	9,2	14,5	-20,5	10,2	8	1,1	7,0	-1,5

Die Koeffizienten werden nach folgenden Bestimmungsgleichungen ermittelt:

$$
\begin{aligned}
&1.)\ \sum Y_i = a \cdot N + b_1 \cdot \sum X_i + b_2 \cdot \sum X_i^2 + b_3 \cdot \sum X_i^3; \\
&2.)\ \sum X_i Y_i = a \cdot \sum X_i + b_1 \cdot \sum X_i^2 + b_2 \cdot \sum X_i^3 + b_3 \cdot \sum X_i^4; \\
&3.)\ \sum X_i^2 Y_i = a \cdot \sum X_i^2 + b_1 \cdot \sum X_i^3 + b_2 \cdot \sum X_i^4 + b_3 \cdot \sum X_i^5; \\
&4.)\ \sum X_i^3 Y_i = a \cdot \sum X_i^3 + b_1 \cdot \sum X_i^4 + b_2 \cdot \sum X_i^5 + b_3 \cdot \sum X_i^6.
\end{aligned}
\tag{99}
$$

In unserem Beispiel haben wir zu rechnen:

$N = 10$; $\sum X = 54{,}9$; $\sum X^2 = 453{,}33$; $\sum X^3 = 4332{,}405$; $\sum X^4 = 44475{,}878$;
$\sum X^5 = 475212{,}07$; $\sum X^6 = 5208934{,}2$; $\sum Y = 32{,}8$; $\sum XY = 19{,}38$;
$\sum X^2Y = -1398{,}992$; $\sum X^3Y = -25606{,}027$;

1.) $32{,}8 = a \cdot 10 + b_1 \cdot 54{,}9 + b_2 \cdot 453{,}33 + b_3 \cdot 4332{,}405$;
2.) $19{,}38 = a \cdot 54{,}9 + b_1 \cdot 453{,}33 + b_2 \cdot 4332{,}405 + b_3 \cdot 44475{,}878$;
3.) $-1398{,}992 = a \cdot 453{,}33 + b_1 \cdot 4332{,}405 + b_2 \cdot 44475{,}878 + b_3 \cdot 475212{,}07$;
4.) $-25606{,}027 = a \cdot 4332{,}405 + b_1 \cdot 4475{,}878 + b_2 \cdot 475212{,}07 + b_3 \cdot 5208934{,}2$.

Wir lösen alle 4 Gleichungen nach a auf und erhalten:

1a) $a = 3{,}28 - 5{,}49b_1 - 45{,}333b_2 - 433{,}241b_3$;
2a) $a = 0{,}353 - 8{,}257b_1 - 78{,}914b_2 - 810{,}125b_3$;
3a) $a = -3{,}086 - 9{,}557b_1 - 98{,}109b_2 - 1048{,}270b_3$;
4a) $a = -5{,}910 - 10{,}266b_1 - 109{,}688b_2 - 1202{,}319b_3$.

Nun setzen wir 1a) = 2a), 1a) = 3a), 1a) = 4a) und lösen diese Gleichungen jeweils nach b_1 auf:

1a) = 2a):
$3{,}28-5{,}49b_1-45{,}333b_2-433{,}241b_3=0{,}353-8{,}257b_1-78{,}914b_2-810{,}125b_3$;
1b) $b_1 = -1{,}058-12{,}136b_2-136{,}207b_3$;
1a) = 3a):
$3{,}28-5{,}49b_1-45{,}333b_2-433{,}241b_3 = -3{,}086-9{,}557b_1-98{,}109b_2-1048{,}270b_3$;
2b) $b_1 = -1{,}565 - 12{,}976b_2 - 151{,}224b_3$;
1a) = 4a):
$3{,}28-5{,}49b_1-45{,}333b_2-433{,}241b_3= -5{,}910-10{,}266b_1-109{,}688b_2-1202{,}319b_3$;
3b) $b_1= -1{,}924-13{,}475b_2-161{,}030b_3$.

Im folgenden setzen wir 1b) = 2b) und 2b) = 3b) und errechnen daraus jeweils b_2:

1b) = 2b):
$-1{,}058-12{,}136b_2-136{,}207b_3 = -1{,}565-12{,}976b_2-151{,}224b_3$;
1c) $b_2= -0{,}604-17{,}877b_3$;
2b) = 3b):
$-1{,}565-12{,}976b_2-151{,}224b_3 = -1{,}924-13{,}475b_2-161{,}030b_3$;
2c) $b_2= -0{,}719-19{,}651b_3$;

1c) ist gleich 2c), und aus dieser Gleichung können wir b_3 errechnen:

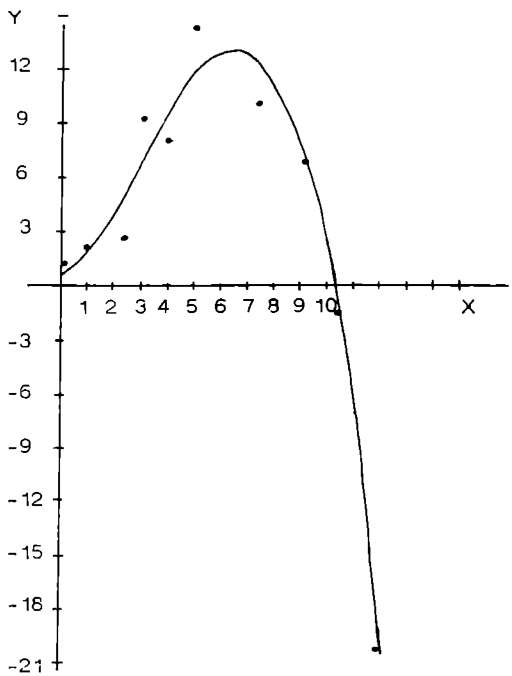
$-0{,}604-17{,}877b_3 = -0{,}719-19{,}651b_3$; $b_3 = -0{,}0648$;
b_3 in 1c) ergibt: $b_2 = -0{,}604-17{,}877 \cdot (-0{,}0648)$; $b_2 = 0{,}554$;
b_2 und b_3 in 1b) ergibt: $b_1 = -1{,}058-12{,}136 \cdot 0{,}554-136{,}207 \cdot (-0{,}0648)$;

$b_1 = 1{,}045$;
b_1, b_2 und b_3 in 1a) ist: $a = 3{,}28 - 5{,}49 \cdot 1{,}045 - 45{,}333 \cdot 0{,}554 - 433{,}241 \cdot (-0{,}0648)$;
$a = 0{,}502$.

Die Regressionsgleichung lautet somit:

$$Y_i = 0{,}502 + 1{,}045X_i + 0{,}554X_i^2 - 0{,}0648X_i^3.$$

Die unten folgende Abbildung zeigt die Anpassung der Kurve an die Ausgangswerte.



4.2.3. Die Potenzregression (Pr. 37)

Gelegentlich findet man auch Zusammenhänge, die sich hinsichtlich ihres Trends am ehesten in der Form einer Gleichung nach der Formel

$$Y = aX^b \tag{100}$$

darstellen lassen.
In solchen Fällen nimmt man aus Gründen der Rechenvereinfachung eine lineare Transformation durch Logarithmieren der Gleichung vor. Man erhält dann:

$$\log Y = \log a + b \cdot \log X.$$

(Natürlich kann ebenso der natürliche Logarithmus verwendet werden.)

Dafür kann man setzen:

$$Y' = a' + bX'.$$

Anstelle der Urdaten von X und Y sind die logarithmierten Werte X' und Y' zu verrechnen wie in einer normalen linearen Regression. Man erhält dann unmittelbar den Koeffizienten b. a wird durch Delogarithmieren von a' ($a = 10^{a'}$) errechnet.

Nachstehend seien Wirkungseffekte (Y) einer Arzneimitteldosierung (X) aufgeführt und verrechnet:

Wirkung (Y)	5	5,5	6,2	7,4	8,3	9,1	9,8	9,5	12	11,8
Dosierung (X)	2	3,2	4,9	7,3	9	10,5	12,3	14,9	18	22,2
log Y	0,699	0,740	0,792	0,869	0,934	0,959	0,991	0,978	1,079	1,072
log X	0,301	0,505	0,690	0,863	0,954	1,021	1,090	1,173	1,255	1,346

$X' = \log X$; $Y' = \log Y$; $N = 10$;
$\sum X' = 9{,}198$; $\sum X'^2 = 9{,}470$; $\sum Y' = 9{,}113$; $\sum X'Y' = 8{,}775$.

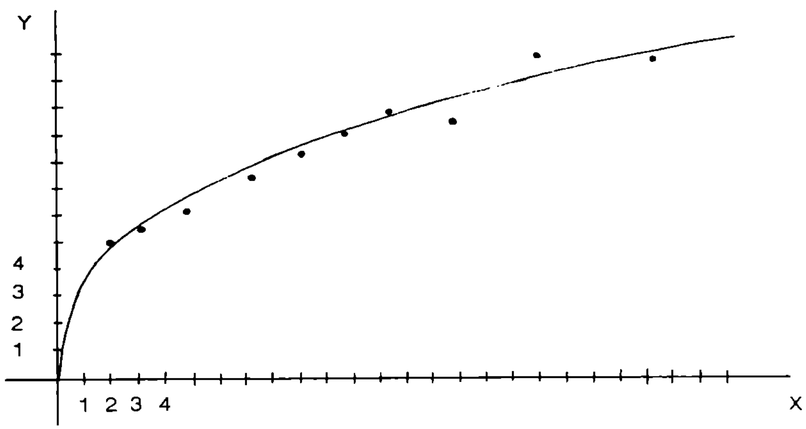
$$b = \frac{10 \cdot 8{,}775 - 9{,}198 \cdot 9{,}113}{10 \cdot 9{,}470 - 9{,}198^2} = 0{,}389;$$

$$a' = \frac{9{,}113}{10} - 0{,}389\,\frac{9{,}198}{10} = 0{,}553; \qquad a = 10^{0{,}553} = 3{,}573.$$

Die Regressionsgleichung lautet also:

$$Y_i = 3{,}573\, X_i^{0{,}389}.$$

Die nachstehende Abbildung zeigt die Anpassung der Regressionskurve an die Ausgangswerte:



4.2.4. Die Exponentialregression (Pr. 38)

Eine weitere Kurve, nach welcher manchmal Daten prognostiziert werden können, wird durch die Gleichung

$$Y = ae^{bX} \tag{101}$$

bestimmt (e ist darin die Basis der natürlichen Logarithmen 2,718282). Sie läßt sich ebenfalls linear transformieren in die Beziehung:

$Y' = a' + bX$, worin $Y' = \ln Y$ und $a' = \ln a$.

Wir untersuchen im folgenden Daten über Einkommen und Sparverhalten:

Y (Sparrate)	50	60	100	120	150	200	230	300	350	500
X (Einkommen)	800	1000	1200	1500	1800	2000	2200	2500	2700	3000
Y' = lnY	3,912	4,094	4,605	4,787	5,011	5,298	5,438	5,704	5,858	6,215

$N = 10$;
$\sum X = 18700$; $\sum X^2 = 39950000$; $\sum Y = 50,922$; $\sum XY = 100231,1$;

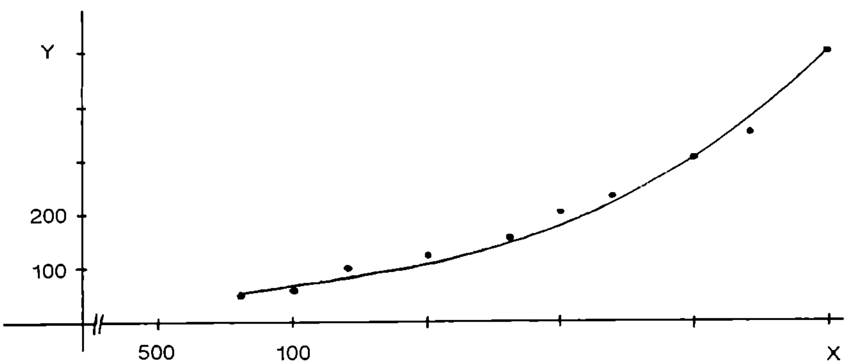
$$b = \frac{10 \cdot 100231,1 - 18700 \cdot 50,922}{10 \cdot 39950000 - 18700^2} = 0,001;$$

$$a' = \frac{50,922}{10} - 0,001 \cdot \frac{18700}{10} = 3,222; \quad a = e^{3,222} = 25,078.$$

Die Regressionsgleichung lautet also:

$$Y = 25,078e^{0,001X}.$$

Die nachstehende Graphik gibt die Anpassung der Regressionskurve an die Ausgangsdaten wieder:



4.2.5. Die logarithmische Regression (Pr. 39)

Manchmal findet man schließlich Verhältnisse vor, die am besten durch eine logarithmische Kurve angepaßt werden. Ihre allgemeine Gleichung lautet:

$$Y = a + b \cdot \ln X. \tag{102}$$

Auch sie läßt sich linear transformieren. Wir erhalten dann:

$$Y = a + bX',$$

wobei $X' = \ln X$. Im übrigen wird wieder wie bei einer normalen linearen Regression gerechnet. Es werden lediglich anstelle der X-Werte logarithmierte Werte verarbeitet. Die sich ergebenden Koeffizienten sind unmittelbar die gesuchten Koeffizienten a und b.
Für den Anstieg der Rechenfertigkeit (Y) in Abhängigkeit vom Zeitaufwand für Übungen (X) seien nachstehende Daten erhoben worden:

Rechenfertigkeit (Y)	4,9	5,0	4,0	4,6	5,1	4,7	5,4	5,0	5,6	5,2
Übungszeit (X)	1,2	2,1	2,5	3,7	4	6,4	8,8	9,7	12	15,5
lnX (=X')	0,182	0,742	0,916	1,308	1,386	1,856	2,175	2,272	2,485	2,741

Er ergibt sich dann:

$N = 10$; $\sum X' = 16,063$; $\sum X'^2 = 32,080$; $\sum Y = 49,5$; $\sum X'Y = 81,349$;

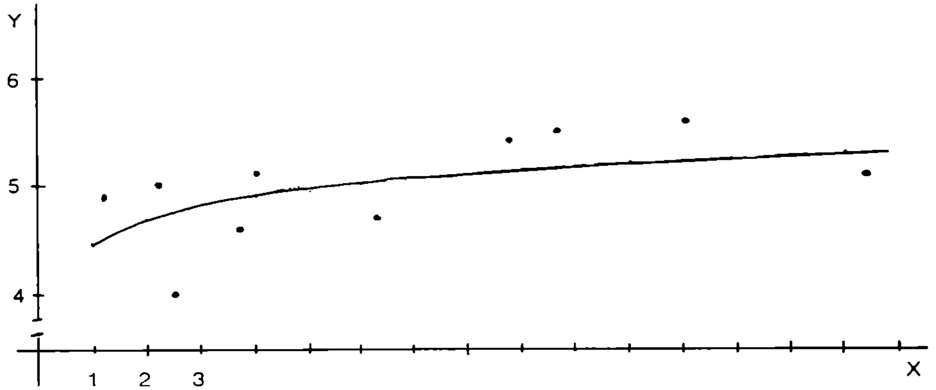
$$b = \frac{10 \cdot 81,349 - 16,063 \cdot 49,5}{10 \cdot 32,080 - 16,063^2} = 0,293;$$

$$a = \frac{49,5}{10} - 0,293 \cdot \frac{16,063}{10} = 4,479.$$

Die Regressionsgleichung lautet also:

$$Y_i = 4,479 + 0,293 \ln X_i.$$

Die nachstehende Tabelle zeigt die Anpassung der Regressionskurve an die Ausgangsdaten:



4.3. Regressionsgüte (Pr. 40)

In manchen Fällen wird man nach dem Augenschein nicht zweifelsfrei entscheiden können, welche Regressionslinie den Gesamttrend eines vorliegenden Datenmaterials am besten repräsentiert. Durch Quadrieren der Abweichungen der vorhergesagten von den tatsächlichen Y-Werten und durch Aufaddieren der Quadrate kann die Prüfgröße

$$S = \sum_{i=1}^{N} (Y_b - Y_e)^2 \tag{103}$$

berechnet werden. Die beste Regressionslinie ist diejenige, für welche S den kleinsten Wert hat.
Wir führen das Verfahren an dem nachstehenden Beispiel vor:

X	2	5	6	7	10	12	13	14	19	20
Y	3	9	11	6	18	12	15	4	7	24

Es ergeben sich folgende Werte der Prüfgröße S:

lineare Regression: S = 302,119,
quadratische Regression: S = 300,560,
kubische Regression: S = 263,226,
Potenzregression S = 313,996,
logarithmische Regression: S = 291,459,
exponentiale Regression: S = 326,654.

Demnach ist der Gesamttrend am besten durch eine kubische Regression erfaßbar.

4.4. Multiple Regression

Die Genauigkeit der Prognose mittels einer Regression kann im allgemeinen erheblich verbessert werden, wenn mehrere Prädiktorvariablen zur Vorhersage der Kriteriumsvariablen benützt werden. Nicht zuletzt diese Überlegungen haben beispielsweise in der Testtheorie zur Konstruktion ganzer Testbatterien geführt.

4.4.1. Multiple Regression mit zwei unabhängigen Variablen und einer abhängigen Variablen (Pr. 41)

Im einfachsten Fall einer multiplen Regression haben wir es mit zwei Prädiktor- und einer Kriteriumsvariablen zu tun. In diesem Fall gilt, wenn X und Z die unabhängigen Prädiktorvariablen sind und die Kriteriumsvariable Y genannt wird, folgende Regressionsgleichung:

$$z_{Y_i} = z_{X_i} \cdot b_X + z_{Z_i} \cdot b_Z . \tag{104}$$

Die Regression wird über die nach (28) z-standardisierten Werte gerechnet, d.h. es ist:

$$z_{Y_i} = \frac{Y_i - \bar{Y}}{SD_Y}\ ; \qquad z_{X_i} = \frac{X_i - \bar{X}}{SD_X}\ ; \qquad z_{Z_i} = \frac{Z_i - \bar{Z}}{SD_Z}.$$

Die Koeffizienten b_X und b_Z werden nach folgenden Beziehungen errechnet:

$$b_X = \frac{r_{XY} - r_{YZ} \cdot r_{XZ}}{1 - r^2_{XZ}}\ ; \tag{105}$$

$$b_Z = \frac{r_{YZ} - r_{XY} \cdot r_{XZ}}{1 - r^2_{XZ}}. \tag{106}$$

Nach der Formel

$$R = \sqrt{b_X \cdot r_{XY} + b_Z \cdot r_{ZY}} \tag{107}$$

kann aus den Regressionskoeffizienten und aus den Korrelationen ein multipler Korrelationskoeffizient errechnet werden. Es ist sinnvoll, daß R nur zwischen 0 und 1 liegen kann, da der multiple Korrelationskoeffizient die Korrelation zwischen den prognostizierten und den tatsächlichen Werten von Y mißt.
Wir führen das Verfahren im folgenden anhand von Daten über Deutschnoten sowie Leistungen in einem Rechtschreib- und Lesetest vor. Die Regressionsgleichung soll dazu dienen, aufgrund der getesteten Rechtschreib- und Leseleistung die Deutschnote vorherzusagen.

Deutschnote(Y)	2	4	3	1	3	2	3	4	5	1
Rechtschreibtest(X)	30P	18P	28P	30P	20P	21P	17P	19P	11P	28P
Lesetest(Z)	14P	9P	13P	18P	17P	16P	12P	9P	6P	17P

$r_{XY} = -0{,}831 \qquad \bar{X} = 22{,}200 \qquad SD_X = 6{,}460$

$r_{XZ} = +0{,}772 \qquad \bar{Y} = 2{,}800 \qquad SD_Y = 1{,}317$

$r_{YZ} = -0{,}909 \qquad \bar{Z} = 13{,}100 \qquad SD_Z = 4{,}067$

$$b_X = \frac{-0{,}831 - (-0{,}909) \cdot 0{,}772}{1 - 0{,}772^2} = -0{,}320;$$

$$b_Z = \frac{-0{,}909 - (-0{,}831) \cdot 0{,}772}{1 - 0{,}772^2} = -0{,}662.$$

Die Regressionsgleichung lautet also:

$$Z_{Y_i} = -0{,}320 \cdot Z_{X_i} - 0{,}662 \cdot Z_{Z_i}.$$

Für die Werte $X_i = 30$ und $Z_i = 14$ rechnen wir für eine Prognose:

$$Z_{X_i} = \frac{30 - 22{,}2}{6{,}460} = 1{,}207; \quad Z_{Z_i} = \frac{14 - 13{,}1}{4{,}067} = 0{,}221;$$

$$Z_{Y_i} = -0{,}320 \cdot 1{,}207 - 0{,}662 \cdot 0{,}221 = -0{,}533;$$

$$Y_i = z_{Y_i} \cdot SD_Y + \overline{Y} = -0,533 \cdot 1,317 + 2,800 = 2,098.$$

Aus diesen Daten läßt sich ein multipler Korrelationskoeffizient von

$$R = \sqrt{-0,320 \cdot (-0,831) + (-0,662) \cdot (-0,909)} = 0,931$$

errechnen.
Die gemeinsame Varianz zwischen Prädiktor- und Kriteriumsvariablen beträgt nach (78) 86,7%.

4.4.2. Multiple Regression mit drei Prädiktorvariablen und einer Kriteriumsvariablen (Pr. 42)

Selbstverständlich ist es auch möglich, Regressionen mit mehr als zwei Prädiktorvariablen zu rechnen. Die Genauigkeit und Zuverlässigkeit einer Prognose wird auf diesem Weg meistens weiter erhöht. Jedoch können Regressionen mit mehr als drei unabhängigen Variablen praktisch nur noch über eine EDV-Anlage ermittelt werden. Der komplexeste Datensatz, der noch einigermaßen günstig per Hand oder mit Taschenrechnern bearbeitet werden kann, umfaßt drei unabhängige Variablen W, X, Z und eine abhängige Variable Y.[1)]
Hierfür gilt folgende Regressionsgleichung:

$$z_{Y_i} = z_{W_i} \cdot b_W + z_{X_i} \cdot b_X + z_{Z_i} \cdot b_Z, \tag{108}$$

wobei

$$z_{Y_i} = \frac{Y_i - \overline{Y}}{SD_Y}$$ und entsprechend z_{W_i}, z_{X_i} und z_{Z_i} (nach (28)).

Die Regressionskoeffizienten werden nach folgenden Formeln ermittelt:

$$b_W = \frac{r_{WY}(1-r_{XZ}^2) - r_{XY} \cdot (r_{WX} - r_{WZ} \cdot r_{XZ}) - r_{YZ} \cdot (r_{WZ} - r_{WX} \cdot r_{XZ})}{1 - r_{WX}^2 - r_{WZ}^2 - r_{XZ}^2 + 2 r_{WX} \cdot r_{WZ} \cdot r_{XZ}}; \tag{109}$$

$$b_X = \frac{r_{XY} - r_{YZ} \cdot r_{XZ} - b_W \cdot (r_{WX} - r_{WZ} \cdot r_{XZ})}{1 - r_{XZ}^2}; \tag{110}$$

$$b_Z = r_{YZ} - r_{WZ} \cdot b_W - r_{XZ} \cdot b_X \,. \tag{111}$$

Ein multipler Korrelationskoeffizient errechnet sich nach der Beziehung:

$$R = \sqrt{r_{WY} \cdot b_W + r_{XY} \cdot b_X + r_{YZ} \cdot b_Z} \,. \tag{112}$$

---

1) Auf die zugegebenermaßen recht rationelle Abwicklung des Verfahrens mit Matrizenalgebra wird hier verzichtet, da wir deren Beherrschung nicht voraussetzen wollen.

Nachstehend werden Daten über den Zusammenhang zwischen der physischen, emotionalen und geistigen Komponente des Biozyklus eines Schülers und Schulleistungen in einem Fach zu einer multiplen Regression verarbeitet, die eine Vorhersage der Schulleistung aufgrund der drei Komponenten des Biozyklus gestatten soll.

Schulleistung	Y	3	2	3	4	2	3	4	5	6	2
phys.Zyklus	W	0,89	-0,23	0,14	0,56	0,01	-0,19	-0,97	0,46	0,36	0,08
emot.Zyklus	X	-0,11	0,49	0,95	-0,43	0,37	-0,35	0,66	0,28	-0,77	0,22
geist.Zyklus	Z	0,06	0,55	0,12	-0,84	0,72	0,17	0,04	-0,53	-0,29	0,31

$r_{WY} = 0,206$ $\qquad SD_Y = 1,350$ $\qquad \bar{Y} = 3,4$
$r_{XY} = -0,480$ $\qquad SD_W = 0,514$ $\qquad \bar{W} = 0,111$
$r_{ZY} = -0,769$ $\qquad SD_X = 0,536$ $\qquad \bar{X} = 0,131$
$r_{WX} = -0,470$ $\qquad SD_Z = 0,475$ $\qquad \bar{Z} = 0,031$
$r_{WZ} = -0,432$
$r_{XZ} = 0,469$

Es ist

$$b_W = \frac{0,206(1-0,469^2)-(-0,48)[-0,47-(-0,432)\cdot(0,469)]-(-0,769)[-0,432-(-0,47)\cdot(0,469)]}{1-(-0,47)^2-(-0,432)^2-0,469^2+2\cdot(-0,47)\cdot(-0,432)\cdot 0,469} =$$

$$= -0,231;$$

$$b_X = \frac{-0,48-(-0,769)\cdot(0,469)-(-0,231)[-0,47-(-0,432)\cdot(0,469)]}{1-0,469^2} = -0,232;$$

$$b_Z = -0,769-(-0,432)\cdot(-0,231)-0,469\cdot(-0,232) = -0,760.$$

Also gilt die Regressionsgleichung:

$$z_{Y_i} = -0,231 z_{W_i} - 0,232 z_{X_i} - 0,760 z_{Z_i}.$$

Die Umformung der Werte erfolgt nach (28):

$$z_X = \frac{X-\bar{X}}{SD_X}.$$

Für $W_i = 0,89$; $X_i = -0,11$ und $Z_i = 0,06$ prognostizieren wir also ein

$$z_{Y_i} = \frac{0,89-0,111}{0,514}\cdot(-0,231) + \frac{-0,11-0,131}{0,536}\cdot(-0,232) + \frac{0,06-0,031}{0,475}\cdot(-0,76) = -0,292;$$

Da $z_Y = \frac{Y-\bar{Y}}{SD_Y}$, ist $Y = z_Y \cdot SD_Y + \bar{Y}$, so daß

$$Y_i = -0,292\cdot 1,35 + 3,4 = 3,005.$$

Für die multiple Korrelation R ergibt sich:

$$R = \sqrt{-0{,}231 \cdot 0{,}206 - 0{,}232 \cdot (-0{,}48) - 0{,}76 \cdot (-0{,}769)} = 0{,}805.$$

Dieser Wert liegt nur geringfügig über der Korrelation $r_{ZY} = -0{,}769$, was anzeigt, daß die durch die Variablen W und X zusätzlich vermittelte Information nicht sehr groß ist.

4.4.3. Signifikanzprüfung

Eine multiple Regression kann anhand des multiplen Korrelationskoeffizienten auf Signifikanz geprüft werden. Der nachstehende kritische Bruch ist mit V - 1 Zählerfreiheitsgraden und N - V Nennerfreiheitsgraden F-verteilt (wobei N = Größe der Stichprobe, aus welcher die Korrelationen errechnet wurden, V = Anzahl der Variablen):

$$CR = \frac{R^2(N - V)}{(1-R^2)\cdot(V-1)} \cdot \tag{113}$$

Fragen wir uns z.B., ob eine multiple Korrelation für 4 Variablen vom Wert 0,44 aus einer Stichprobe von 20 Versuchspersonen signifikant ist: Eine Korrelation von 0,44 wäre bei 20 Vpn gerade noch auf dem 5%-Niveau signifikant (Tabelle 9). Bilden wir den kritischen Bruch, so erhalten wir:

$$CR = \frac{0{,}44^2 \cdot (20-4)}{(1-0{,}44^2)\cdot(4-1)} = 1{,}280.$$

Damit erweist sich die multiple Korrelation als nicht signifikant. Für 4 - 1 = 3 Zähler- und 20 - 4 = 16 Nennerfreiheitsgrade beträgt der kritische Wert für das 25%-Niveau nach Tabelle 4 1,51.
Ist die multiple Korrelation signifikant, so können wir davon ausgehen, daß wir mit der Regressionsgleichung insgesamt nicht nur zufällige Effekte erklären.

Außer einer solchen pauschalen Signifikanzprüfung ist natürlich von besonderem Interesse, welche Signifikanz den einzelnen Regressionskoeffizienten (in der Fachliteratur spricht man häufig von sog. Beta-Gewichten) zukommt. Hierzu kann man eine Prüfung mittels eines t-verteilten kritischen Bruches vornehmen:

$$CR = \frac{b_W}{\frac{r^{WW}(1-R^2)}{N-V}}; \qquad (df = N - V). \tag{114}$$

Hierin ist R der multiple Korrelationskoeffizient und r^{WW} der Wert der Variablen W in der invertierten Matrix der Korrelationen der unabhängigen Variablen. Zur Bestimmung der invertierten Matrix bedarf es Verfahren der Matrizenrechnung, die normalerweise nur über EDV rationell abzuwickeln sind. Der TI-58 und der TI-59 verfügen aber im Standardmodul über ein Programm zur Matrizenrechnung, das auch die Durchführung der Inversion kleinerer Matrizen gestattet und für unse-

ren Bedarf völlig zureicht. Auch der HP 67 und der HP 69 enthalten im Magnetkartenstandardpaket ein Programm zur Inversion einer 3x3-Matrix.
Wir führen das Verfahren an unserem Biorhythmus-Beispiel vor:
Wir erstellen zunächst die Korrelationsmatrix:

	W	X	Z
W	1,000	-0,470	-0,432
X	-0,470	1,000	0,469
Z	-0,432	0,469	1,000

(Die Korrelation einer Variablen mit sich selbst wird als 1,000 angesetzt.)

Mittels des Matrizenrechnungsprogramms erhalten wir folgende invertierte Korrelationsmatrix:

	W	X	Z
W	<u>1,386</u>	0,475	0,376
X	0,475	<u>1,445</u>	-0,472
Z	0,376	-0,472	<u>1,384</u>

Für b_W rechnen wir also:

$$CR_W = \frac{-0{,}231}{\sqrt{\frac{1{,}386(1-0{,}805^2)}{10-4}}} = -0{,}810.$$

Entsprechend erhalten wir für b_X und b_Z:

$$CR_X = \frac{-0{,}232}{\sqrt{\frac{1{,}445(1-0{,}805^2)}{10-4}}} = -0{,}797;$$

$$CR_Z = \frac{-0{,}760}{\sqrt{\frac{1{,}384(1-0{,}805^2)}{10-4}}} = -2{,}667.$$

Bei df = 10 - 4 = 6 ist lediglich b_Z auf dem 5%-Niveau signifikant (kritischer Wert: 1,943). D.h. die Güte unserer Prognose mit Hilfe der multiplen Regressionsgleichung beruht also im Grunde nur auf den Daten über den Zusammenhang zwischen dem geistigen Zyklus und der Schulleistung. Angaben über den physischen und über den emotionalen Zyklus führen zu keiner überzufälligen Verbesserung der Prognose.
Da wir im Grunde nur an zwei bzw. drei Elementen der invertierten Matrix, überdies nur an Matrizen mit 2 mal 2 bzw. 3 mal 3 Feldern interessiert sind, können wir die invertierten Elemente aber einfacher algebraisch ermitteln.

Für eine 2 mal 2-Matrix (also für eine multiple Regression mit einer Kriteriums- und zwei Prädiktorvariablen) gilt:

$$r^{XX} = r^{ZZ} = \frac{1}{1 - r_{XZ}^2}$$ (wobei X und Z die Prädiktorvariablen sind).

Für eine 3 mal 3-Matrix (also für eine multiple Regression mit einer abhängigen und drei unabhängigen Variablen) gilt:

$$r^{WW} = \frac{1}{\textcircled{1}} \left[1 - \frac{\textcircled{4}\left(r_{WZ}\dfrac{\textcircled{1}}{\textcircled{3}} - r_{WX} \right)}{\textcircled{3} - \dfrac{\textcircled{1} \cdot \textcircled{2}}{\textcircled{3}}} \right]; \qquad \begin{matrix}(116)\\ (Pr.43)\end{matrix}$$

$$r^{XX} = \frac{1}{\textcircled{1}} \left(1 - \frac{\textcircled{3}}{\textcircled{3} - \dfrac{\textcircled{1} \cdot \textcircled{2}}{\textcircled{3}}} \right); \qquad \begin{matrix}(117)\\ (Pr.43)\end{matrix}$$

$$r^{ZZ} = - \frac{\dfrac{\textcircled{1}}{\textcircled{3}}}{\textcircled{3} - \dfrac{\textcircled{1} \cdot \textcircled{2}}{\textcircled{3}}}. \qquad \begin{matrix}(118)\\ (Pr.43)\end{matrix}$$

Zur größeren Übersichtlichkeit sind dabei folgende Kennziffern definiert:

$\textcircled{1} = 1 - r_{WX}^2$; $\textcircled{2} = 1 - r_{WZ}^2$; $\textcircled{3} = r_{XZ} - r_{WX} r_{WZ}$; $\textcircled{4} = r_{WZ} - r_{WX} r_{XZ}$.

5. Faktorenanalyse

5.1. Erstellen einer Korrelationsmatrix

Besonders im Zusammenhang mit der Intelligenzforschung ist in der Faktorenanalyse ein Verfahren entwickelt worden, welches es gestattet, eine Vielzahl von Korrelationen auf meistens erheblich weniger Faktoren zurückzuführen, aus denen die Varianz des Datenmaterials erklärt werden kann.
Wir führen das Verfahren an einem Beispiel vor, das wir dem Lehrbuch von Bortz entnehmen[1]. Die nachfolgende Aufstellung enthält Durchmesser (d), Länge (l), Grundfläche (G), Mantelfläche (M), Rauminhalt (R) und Raumdiagonale (t) von 27 Zylindern:

d (=X)	l (=Y)	G (=Z)	M (=U)	R (=V)	t (=W)
1	2	0,79	6,28	1,57	2,23
2	2	3,14	12,57	6,28	2,83
3	2	7,07	18,85	14,14	3,61
1	3	0,79	9,43	2,36	3,16
2	3	3,14	18,85	9,43	3,61
3	3	7,07	28,27	21,21	4,24
1	4	0,79	12,57	3,14	4,12
2	4	3,14	25,13	12,57	4,47
3	4	7,07	37,70	28,27	5,00
1	2	0,79	6,28	1,57	2,24
2	2	3,14	12,57	6,28	2,83
1	3	0,79	9,42	2,36	3,16
2	3	3,14	18,85	9,42	3,61
3	3	7,07	28,27	21,21	4,24
1	4	0,79	12,57	3,14	4,12
2	4	3,14	25,13	12,57	4,47
3	4	7,07	37,70	28,27	5,00
1	2	0,79	6,29	1,57	2,24
2	2	3,14	12,57	6,28	2,83
3	2	7,07	18,85	14,14	3,61
1	3	0,79	9,42	2,36	3,16
2	3	3,14	18,85	9,42	3,61
3	3	7,07	28,27	21,21	4,24
1	4	0 ,79	12,57	3,14	4,12
2	4	3,14	25,13	12,57	4,47
3	4	7,07	37,70	28,27	5,00
3	2	7,07	18,85	14,14	3,61

1) Allerdings wird hier nacn einem anderen Verfahren gerechnet. Bortz setzt Matrizenalgebra voraus.

Es ergeben sich folgende Korrelationen:

	X	Y	Z	U	V	W
X		0,00	0,99	0,81	0,90	0,56
Y			0,00	0,54	0,35	0,82
Z				0,80	0,91	0,56
U					0,97	0,87
V						0,77
W						

Diese Matrix muß nun vollständig angeschrieben werden. Das ist kein Problem, da sie ja diagonalsymmetrisch angelegt ist, bis auf den Umstand, welche Zahlenwerte wir den Korrelationen einer Variablen mit sich selbst zuteilen sollen. Es scheint nahezuliegen, dafür 1,00 einzusetzen. Doch ist zu bedenken, daß eine Korrelation nur lineare Zusammenhänge erfaßt. Man fährt darum im allgemeinen besser, für die sog. Kommunalitäten den größten Wert der zugehörigen Zeile oder Spalte einzusetzen[1]. Danach erhalten wir die nachstehende Korrelationsmatrix:

	X	Y	Z	U	V	W		a_1
X	(0,99)	0,00	0,99	0,81	0,90	0,56		0,85
Y	0,00	(0,82)	0,00	0,54	0,35	0,82		0,50
Z	0,99	0,00	(0,99)	0,80	0,91	0,56		0,85
U	0,81	0,54	0,80	(0,97)	0,97	0,87		0,99
V	0,90	0,35	0,91	0,97	(0,97)	0,77		0,97
W	0,56	0,82	0,56	0,87	0,77	(0,87)		0,88
$\sum$	4,25	2,53	4,25	4,96	4,87	4,45	25,31	
a_1	0,85	0,50	0,85	0,99	0,97	0,88		

5.2. Faktorisierbarkeit einer Matrix

Nun ist es in unserem Falle, da es sich um ein konstruiertes Beispiel handelt, außer Frage, daß eine Faktorenanalyse durchgeführt werden darf. Im Normalfall sollte einer Faktorenanalyse jedoch eine Prüfung vorausgehen, ob die Matrix überhaupt faktorisierbar ist, d.h. ob die Nullhypothese, alle Korrelationen beruhten auf Zufall, zurückgewiesen werden kann. Zu einer solchen Prüfung bedarf es aber Verfahren der Matrizenalgebra, die auf Taschenrechnern größtenteils nicht mehr abwickelbar sind. Die Rechner-Modelle TI-58/59 enthalten im Standardmodul jedoch ein Programm, welches Berechnungen an kleineren Matrizen erlaubt (bis zu einer 6 mal 6-Matrix beim TI-58 und bis zu einer 9 mal 9-Matrix beim TI-59). Damit können wir im vorliegenden Fall einen Signifikanz-Test nach Wilks durchführen. Die Prüfgröße ist ein Chi^2, das nach der folgenden Bestimmung errechnet wird:

1) Dies schlägt z.B. Hofstätter vor.

$$\mathrm{Chi}^2 = -\left[(N - 1) - \frac{1}{6}\cdot(2V + 5)\right] \ln |A| . \qquad (119)$$

Darin ist N die Anzahl der Untersuchungseinheiten in den zugrundeliegenden Stichproben, V die Anzahl der Variablen und $|A|$ die sog. Determinante der Korrelationsmatrix. Die Zahl der Freiheitsgrade beträgt $0{,}5\cdot(V^2 - V)$.
In unserem Fall erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
|A| &= 0{,}0000029745\\
\ln|A| &= -12{,}725\\
\mathrm{Chi}^2 &= -\left[(27 - 1) - \tfrac{1}{6}(12 + 5)\right]\cdot(-12{,}725) = 294{,}796\\
df &= 0{,}5\cdot(36 - 6) = 15.
\end{aligned}
$$

Das errechnete Chi^2 ist auf dem 0,1%-Niveau signifikant: Der kritische Wert hierfür beträgt bei 15 Freiheitsgraden 37,70.
Für den Fall, daß mit anderen Rechnermodellen gearbeitet wird, schlagen wir ein Schätzverfahren vor:
Man errechne den Z-Wert der mittleren Korrelation für die ganze Matrix (Programme 31 und 32). Dazu ermitteln wir einen kritischen Wert nach der Beziehung

$$\bar{Z}_{r_{crit}} = \frac{z_{p/2}}{\sqrt{2N - V}}, \qquad (120)$$

wobei $z_{p/2}$ jener z-Wert nach Tabelle 1 ist, den wir erhalten, wenn wir die Hälfte des gewünschten Signifikanz-Niveaus von 0,5 abziehen und zu der so ermittelten Fläche den z-Wert aufsuchen (1,96 für das 5%-, 2,58 für das 1%- und 3,29 für das 0,1%-Niveau).
In unserem Falle erhalten wir als Z-Wert der durchschnittlichen Korrelation $\bar{Z}_r = 1{,}205$.

$$\bar{Z}_{r_{crit(0,1\%)}} = \frac{3{,}29}{\sqrt{2\cdot 27 - 6}} = 0{,}475.$$

Mit beiden Verfahren können wir also die Nullhypothese, die Korrelationen der Matrix seien zufallsbedingt, auf dem 0,1%-Niveau zurückweisen.

5.3. Extraktion der Faktoren (Pr. 44)

Es kann jetzt mit der Faktorenextraktion begonnen werden: Zunächst bilden wir in jeder Spalte die Summe und addieren die Spaltensummen zu einer Gesamtsumme (25,31) auf. Aus dieser ziehen wir die Quadratwurzel (5,031). Durch den auf diese Weise erhaltenen Wert dividiert man in der Folge alle Spaltensummen und erhält damit die Ladungen des Faktors a_1 (siehe oben in der Tabelle). Es ist praktisch, diese Faktorladungen auch rechts an den Rand der Matrix zu schreiben.
Im weiteren Verlauf ziehen wir von jeder Zahl der Ausgangsmatrix das Produkt aus der Ladungszahl der Zeile und der Ladungszahl der Spalte ab. Wir erhalten so die 1. Restkorrelationsmatrix:

	X	Y	Z	U	V	W
X	(0,27)	-0,43	0,27	-0,03	0,08	-0,19
Y	-0,43	(0,57)	-0,43	0,05	-0,14	0,38
Z	0,27	-0,43	(0,27)	-0,04	0,09	-0,19
U	-0,03	0,05	-0,04	(-0,01)	0,01	0,00
V	0,08	-0,14	0,09	0,01	(0,03)	-0,08
W	-0,19	0,38	-0,19	0,00	-0,08	(0,10)
Σ	-0,03	0,00	-0,03	-0,02	-0,01	0,02

Wenn wir richtig gerechnet haben, müssen die Spaltensummen (bis auf kleine Rundungsungenauigkeiten) jeweils Null sein.
Nun schätzen wir zunächst die Restkommunalitäten neu. Wir machen damit im allgemeinen einen geringeren Fehler, als wenn wir mit den errechneten Restkommunalitäten weiterarbeiten. Sodann fällt auf, daß die Korrelationen mit X und Z überwiegend negativ geworden sind. In solchen Fällen nimmt man eine Reflexion vor: Die Vorzeichen aller Korrelationen der Variablen werden umgekehrt (die Kommunalitäten bleiben jedoch stets positiv). Eine Reflexion wird an der entsprechenden Variablen mit * vermerkt. Korrelationen, die mehrfach betroffen sind, wechseln mehrfach das Vorzeichen (hier r_{XZ}). Durch die Reflexion von X und Z erhalten so viele Korrelationen mit der Variablen V zusätzlich ein negatives Vorzeichen, daß schließlich auch noch hier eine Reflexion nötig wird. So erhalten wir die nachstehende modifizierte Restkorrelationsmatrix:

	X*	Y	Z*	U	V*	W	a_2
X*	(0,43)	0,43	0,27	0,03	0,08	0,19	0,55
Y	0,43	(0,43)	0,43	0,05	0,14	0,38	0,72
Z*	0,27	0,43	(0,43)	0,04	0,09	0,19	0,56
U	0,03	0,05	0,04	(0,05)	-0,01	0,00	0,06
V*	0,08	0,14	0,09	-0,01	(0,14)	0,08	0,20
W	0,19	0,38	0,19	0,00	0,08	(0,38)	0,47
Σ	1,43	1,86	1,45	0,16	0,52	1,22	6,64
a_2	0,55	0,72	0,56	0,06	0,20	0,47	

Mit dieser Matrix verfahren wir wie mit der Ausgangsmatrix: Wir ermitteln die Spaltensummen, addieren diese zu einer Gesamtsumme (6,64) auf und ziehen daraus die Quadratwurzel (2,577). Indem wir die Spaltensummen durch diese teilen, erhalten wir die Ladungszahlen von Faktor a_2. Daraus kann eine zweite Restkorrelationsmatrix errechnet werden (auf deren Abdruck verzichtet wurde), aus der sich in der aufgezeigten Weise ein dritter Faktor a_3 gewinnen läßt.

Hier halten wir zunächst einmal ein und fragen, wann die gesamte Prozedur abgebrochen und eine Matrix als erschöpft angesehen werden darf. Dazu gibt es eine ganze Reihe von Verfahren, die z.T. auch zu verschiedenen Ergebnissen führen. Wir stellen hier nur die Prüfung der sog. Eigenwerte der Faktoren vor. Die Eigenwerte erhalten wir, wenn wir alle Ladungszahlen der Faktoren quadrieren und addieren. Als Abbruchskriterium gilt: Eigenwerte kleiner als 1 zeigen die Unbrauchbarkeit eines Faktors an. Sobald Faktoren mit solchen Eigenwerten extrahiert werden, darf man die Faktorenanalyse abbrechen. Wir prüfen daraufhin die bisher extrahierten Faktoren (Ladungszahlen reflektierter Variabler erhalten ein negatives Vorzeichen):

	X	Y	Z	U	V	W	Eigenwert
a_1	0,85	0,50	0,85	0,99	0,97	0,88	4,39
a_2	-0,55	0,72	-0,56	0,06	-0,20	0,47	1,40
a_3	0,17	0,13	-0,14	0,06	0,10	0,13	0,10

Es zeigt sich, daß der dritte Faktor bereits bedeutungslos ist.
Als nächstes überprüfen wir unsere Schätzung der Kommunalitäten: Wir stellen den Schätzwerten errechnete Werte gegenüber, die wir erhalten, wenn wir jeweils die Ladungszahlen jeder Variablen mit den relevanten Faktoren quadrieren und addieren. Wir erhalten:

	X	Y	Z	U	V	W
a_1	0,85	0,50	0,85	0,99	0,97	0,88
a_2	-0,55	0,72	-0,56	0,06	-0,20	0,47
$h^2_{errechnet}$	1,03	0,77	1,04	0,98	0,98	1,00
$h^2_{geschätzt}$	0,99	0,82	0,99	0,97	0,97	0,87
$Z^2_{h(errechnet)}$	2,65	1,02	2,65	2,30	2,30	2,65
$Z^2_{h(geschätzt)}$	2,65	1,16	2,65	2,09	2,09	1,33
Differenz	0,00	-0,14	0,00	0,21	0,21	1,32

Wir betrachten die Kommunalitäten nun als Korrelationen und nehmen nach (88) Fishersche Z-Transformationen vor. (Vgl. dazu auch Tab.10.) Daraus errechnen wir die Differenzen $Z^2_{h\ err} - Z^2_{h\ gesch}$. An der größten dieser Differenzen prüfen wir die Nullhypothese, daß diese Differenzen als zufällig gelten können, mit folgenden Test:

$$CR = \frac{\Delta Z_{max}}{\sqrt{\frac{2}{N - 3}}} . \qquad (121)$$

Für $\Delta Z_{max} = 1,32$ und $N = 27$ rechnen wir:

$$CR = \frac{1,32}{\sqrt{\frac{2}{27 - 3}}} = 4,67.$$

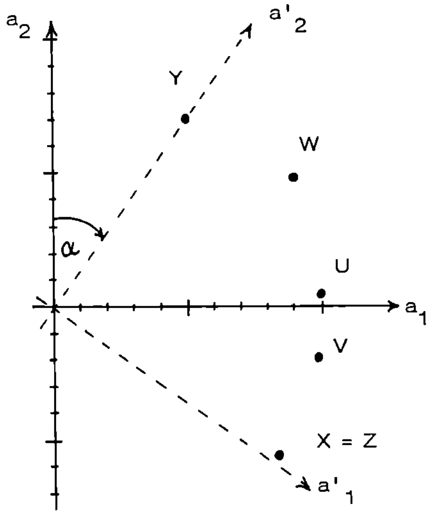
Der Wert nach (121) ist z-verteilt. Nach Tabelle 1 hat ein z-Wert von 4,57 eine Wahrscheinlichkeit von $p < 0,1\%$. Das bedeutet, daß die Unterschiede zwischen den geschätzten und den errechneten Kommunalitäten keineswegs zufällig sind und nicht vernachlässigt werden dürfen. Die gesamte bisher abgewickelte Prozedur ist mit den errechneten Kommunalitäten von vorne zu beginnen (wobei selbstverständlich nur maximale Kommunalitäten von 1,00 eingesetzt werden dürfen).[1] Dieser ungünstige Fall wird natürlich längst nicht immer bei der Durchführung einer Faktorenanalyse eintreten.

Als korrigierte Werte ergeben sich:

	X	Y	Z	U	V	W
a_1	0,84	0,49	0,84	0,99	0,97	0,91
a_2	-0,56	0,70	-0,56	0,04	-0,19	0,48

5.4. Rotation der Faktoren (Pr. 45)

Um uns die Interpretation zu erleichtern, stellen wir die Lage der Variablen graphisch dar, wobei wir die beiden Faktoren als Koordinaten (a_1 = X-Achse, a_2 = Y-Achse) verwenden:



Es erleichtert die Interpretation im allgemeinen sehr, wenn

- möglichst alle Variablen im positiven Quadranten liegen,
- möglichst viele Variablen mit wenigstens einem Faktor mit Null oder doch sehr gering laden.

Man kann diese Verhältnisse oft durch eine geschickte Drehung des Achsenkreuzes (der sog. Zentroidfaktoren) herbeiführen. In unserem Beispiel würde sich etwa eine Rotation der Faktoren in der Weise empfehlen, daß Y auf a_2 zu liegen kommt.

Soll die neue Achse durch einen bestimmten Punkt verlaufen, so läßt sich der Rotationswinkel berechnen nach

$$\tan \alpha = \frac{a_1}{a_2} . \qquad (122)$$

---

1) Die theoretisch nicht möglichen Werte über 1,00 ergeben sich aufgrund der anfänglichen Schätzfehler.

Die neuen Ladungszahlen ergeben sich dann nach:

$$a'_1 = a_1 \cos\alpha - a_2 \sin\alpha \tag{123}$$

$$a'_2 = a_1 \sin\alpha + a_2 \cos\alpha. \tag{124}$$

In unserem Beispiel ergibt sich:

$$\tan\alpha = \frac{0,49}{0,70} = 0,70; \quad \alpha = \arctan 0,70 = 34,99°.$$

Als neue Ladungszahlen der rotierten Faktoren erhalten wir nach (123) und (124):

	X	Y	Z	U	V	W	Varianzaufkl.
a_1	1,00	0,00	1,00	0,79	0,90	0,47	0,609
a_2	0,02	0,85	0,02	0,60	0,40	0,92	0,348

Die Varianzaufklärung eines Faktors wird berechnet nach der Beziehung:

$$VA = \frac{\sum_{i=1}^{v} a_i^2}{V}$$

(wobei a = die Ladungszahlen des betr. Faktors und V = die Zahl der Variablen).

In unserem Beispiel erklären die beiden Faktoren zusammen 60,9% + 34,8% = 95,7% der Gesamtvarianz, d.h. das Datenmaterial läßt sich praktisch vollständig aus den beiden ermittelten Faktoren interpretieren.
Es liegt nun nahe, den Faktor a_1' als Länge, den Faktor a_2' als Durchmesser zu bezeichnen. Durchmesser (X) und Grundfläche (Z) laden nicht mit der Länge, d.h. sind nicht von ihr abhängig, während die Länge nicht mit dem Durchmesser lädt. Mantel, Rauminhalt und Raumdiagonale laden mit beiden Faktoren, d.h. sie sind von Durchmesser und Länge abhängig, außerdem ist die Länge (Y) von sich selbst abhängig. Von den Berechnungsvorschriften für Grundfläche, Mantel, Rauminhalt und Raumdiagonale her ist plausibel, daß dies so sein muß, auch daß die Zahl der Faktoren gerade zwei beträgt. Man könnte sich allerdings fragen, warum sich für die gesamte Varianzaufklärung nicht 100% ergeben. Dabei ist zu bedenken, daß die Produktmomentkorrelation und ebenfalls die auf ihr aufbauende Faktorenanalyse nur lineare Zusammenhänge erfaßt, während die Zusammenhänge in unserem Beispiel z.T. auch quadratischer Art sind.
Während die Benennung der beiden Faktoren in unserem Beispiel keine Schwierigkeiten macht, weil wir wissen, was wir zu Beginn in die Faktorenanalyse eingebracht haben, ist sie in der Forschungspraxis oft sehr schwierig. Es kann nicht scharf genug vor voreiligen Verbalisierungen gewarnt werden: Die Faktoren sind zunächst einmal rechnerische Artefakte, die darum, weil sie "herauskommen", noch kein Pendant in der Wirklichkeit haben müssen. Oft ist eine solche Verbalisierung auch gar nicht nötig. Es genügt, die Zahl der Faktoren und das Verhältnis der einzelnen Variablen zu ihnen zu interpretieren.
Den Leser mag es befremdet haben, daß die ursprünglich ermittelten Zentroidfaktoren offenbar nach Belieben rotiert werden dürfen, um sie für eine Interpretation "passend" zu machen. Allerdings ist strenggenommen die Entscheidung, nicht zu rotieren, auch eine Entscheidung über Rotation: Es wird dann eben mit Null Grad rotiert. Wer keine Rotation vornimmt, verfährt darum nicht unbedingt redlicher und exakter, sondern zunächst einmal nur bequemer. Das muß natür-

lich nicht heißen, daß die Unterlassung einer Rotation nach reiflicher Überlegung nicht auch einmal ratsam sein kann, wenn die Merkmale bereits zu den Zentroid-Faktoren günstig liegen. Auch ist es irrig zu glauben, in einer Rotation werde alles verändert. Die Lage der Variablen zueinander in dem durch die Faktoren aufgespannten Raum bleibt nämlich unberührt, und in ihrer zahlenmäßigen Fixierung haben wir das eigentliche, "exakte" Ergebnis einer Faktorenanalyse zu sehen.

Falls wir mehr als 2 Faktoren erhalten haben, müssen wir entsprechend mehr Zeichnungen für die Interpretation anfertigen, im Falle von 4 Faktoren sind dies bereits 6, wobei in jeder Zeichnung 2 Faktoren kombiniert und die Variablen als Punkte eingetragen werden:

1 - 2	2 - 3
1 - 3	2 - 4
1 - 4	3 - 4

Allerdings sind keine 6 Rotationen sinnvoll, da sonst einige Rotationen das wiederum rückgängig machen würden, was durch andere bewirkt wurde. Im Falle von 4 Faktoren genügen 2 Rotationen (1 - 2 und 3 - 4), um alle Faktoren günstig zu legen. Allenfalls würde man prüfen, ob noch eine Rotation von 2 - 3 sinnvoll ist.

Wir sehen, daß sowohl die Interpretation als auch die optimale Rotation von Faktoren mit wachsender Faktorzahl rasch sehr komplex wird, so daß man sich in der Forschungspraxis meistens der Unterstützung durch eine EDV-Anlage versichern muß.

6. Varianzanalytische Methoden

6.1. Varianzanalyse mit unabhängigen Stichproben

Obwohl wir mit Hilfe des Programms 11 den Arbeitsaufwand, der beim Vergleich einer größeren Zahl von Mittelwerten durch den t-Test entsteht, in Grenzen halten können, wird sein Einsatz oberhalb einer gewissen Grenze doch wieder aufwendig. Und was noch bedeutsamer ist: Mit der Zahl der durchgeführten t-Tests wächst auch das Risiko, daß einer oder mehrere dieser Tests nur zufällig signifikant sind. Ein Verfahren, das uns zugleich gestattet, diese erhöhte Irrtumswahrscheinlichkeit zu vermeiden und rationeller zu arbeiten, ist die Varianzanalyse.

6.1.1. Die einfaktorielle Varianzanalyse (Pr. 46)

Im Rahmen einer Varianzanalyse berechnet man die Quadratsummen für die Varianzen zwischen den verschiedenen Untersuchungsgruppen (für die sog. "Treatment-Stufen"), eine Fehlervarianz-Quadratsumme und die Quadratsumme für die Gesamtvarianz.

Quadratsumme heißt der Zähler der bekannten Formel für die Berechnung einer Varianz

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})^2}{N - 1},$$

so daß gilt

$$QS \text{ (=Quadratsumme)} = \sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})^2. \qquad (126)$$

Für die Berechnung der genannten Quadratsummen gelten folgende Beziehungen:

$$QS_{total} = \sum_{i=1}^{c} \left(\sum_{i=1}^{m} X_i^2\right) - \frac{\left[\sum_{i=1}^{c} \left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right)\right]^2}{N} \; ; \; df = N - 1; \qquad (127)$$

$$QS_{treatment} = \sum_{i=1}^{c} \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right)^2}{n} - \frac{\left[\sum_{i=1}^{c} \left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right)\right]^2}{N} \; ; \; df = c = 1;$$

$$QS_{Fehler} = QS_{total} - QS_{treatment} \; ; \; df = N - c,$$

wobei N = Gesamtzahl aller in den verschiedenen Stichproben berücksichtigten Fälle,
n = Anzahl der Fälle in einer Stichprobe,
c = Anzahl der Stichproben (= Treatment-Stufen).

Für die Berechnung der Varianzen aus den Quadratsummen gilt dann folgende Beziehung:

$$\text{Varianz} = \frac{\text{Quadratsumme}}{\text{Freiheitsgrade}}. \qquad (128)$$

Um zu prüfen, ob die in Frage stehenden Mittelwertunterschiede signifikant sind, bildet man den Quotienten:

$$F = \frac{V_{\text{treatment}}}{V_{\text{Fehler}}}; \qquad \begin{aligned} df_{\text{Zähler}} &= c - 1 \\ df_{\text{Nenner}} &= N - c \end{aligned} \tag{129}$$

und sieht in Tabelle 4 den entsprechenden kritischen Wert nach.

Angenommen, wir möchten den durchschnittlichen Stundenlohn in 8 Berufsgruppen vergleichen:

	Gr.1	Gr.2	Gr.3	Gr.4	Gr.5	Gr.6	Gr.7	Gr.8	$\sum$
$\sum x$	522	457	381	421	198	765	583	394	3721
$\sum x^2$	4012	4784	3593	4645	987	15306	5120	3946	42393
$\bar{x}$	12,14	12,03	7,06	8,96	6,19	17,39	9,72	7,73	
n	43	38	54	47	32	44	60	51	369

Bei 8 Vergleichsgruppen hätten wir 28 t-Tests durchzuführen, von der Erniedrigung des Verläßlichkeitsniveaus ganz abgesehen. Im Rahmen einer Varianzanalyse brauchen wir lediglich zu rechnen:

$$QS_{\text{total}} = 42393 - \frac{(3721)^2}{369} = 4870{,}40;$$

$$QS_{\text{treatment}} = \frac{522^2}{43} + \frac{457^2}{38} + \frac{381^2}{54} + \frac{421^2}{47} + \frac{198^2}{32} + \frac{765^2}{44} + \frac{583^2}{60} + \frac{394^2}{51} - \frac{3721^2}{369} =$$

$$= 4003{,}86;$$

$$QS_{\text{Fehler}} = 4870{,}40 - 4003{,}86 = 866{,}54.$$

Aus diesen Werten bilden wir nun unter Berücksichtigung der zugehörigen Freiheitsgrade den Quotienten für F:

$$F = \frac{4003{,}86 : (8 - 1)}{866{,}54 : (369 - 8)} = 238{,}33.$$

In Tabelle 4 finden wir für 7 Freiheitsgrade (in der Horizontalen) und für 361 Freiheitsgrade (in der Vertikalen) einen kritischen Wert von 2,64 für das 1%-Niveau. Die mittleren Einkommensunterschiede zwischen den 8 Gruppen sind somit außerordentlich signifikant.

Die Ergebnisse einer Varianzanalyse erlauben uns außerdem, zu beurteilen, in welchem Ausmaß die Unterschiedlichkeit der vorgefundenen Werte (die Varianz) aus den Treatment-Stufen erklärt werden kann. M.a.W.: Sie ermöglicht die Bestimmung desjenigen Varianzanteils der abhängigen Variablen (hier: Löhne), der durch die unabhängige Variable (hier: Berufszugehörigkeit) erklärt wird. Die sog. Varianzaufklärung (= VA) wird in Prozenten nach der Beziehung

$$VA = \frac{QS_{\text{treatment}}}{QS_{\text{total}}} \cdot 100\% \tag{130}$$

berechnet. Für unser obiges Beispiel ergibt sich:

$$VA = \frac{4003,86}{4870,40} \cdot 100\% = 82,21\%.$$

D.h. die Unterschiedlichkeit der Durchschnittslöhne läßt sich zu 82,21% aus der Berufsgruppenzugehörigkeit erklären. Die restlichen 17,79% werden durch andere (unbekannte) Faktoren und/oder Meßfehler bestimmt.
Aus der VA kann über die Formel

$$r = \sqrt{\frac{VA}{100}} = \sqrt{\frac{QS_{treat}}{QS_{tot}}} \tag{131}$$

ein Korrelationskoeffizient berechnet werden. In unserem Falle ermitteln wir:

$$r = \sqrt{\frac{4003,86}{4870,40}} = 0,907.$$

Dieser Korrelationskoeffizient kann nur Werte zwischen 0 und +1,0 annehmen.

Die Signifikanzprüfung für den F-Quotienten liefert nur einen allgemeinen Hinweis, ob die untersuchten Mittelwerte sich insgesamt in irgendeiner Hinsicht unterscheiden. Zum Zwecke einer differenzierten Interpretation ist es aber nötig zu wissen, welche Mittelwerte sich im einzelnen signifikant unterscheiden und welche nicht. Dazu müssen entsprechende Einzelvergleiche durchgeführt werden. Allgemein sind bei c verglichenen Gruppen $\binom{c}{2} = \frac{c(c-1)}{2}$ Einzelvergleiche möglich. In unserem Beispiel wären dies $\frac{8\ (8-1)}{2} = 28$ Einzelvergleiche. Nun taucht aber mit der Durchführung solcher Einzelvergleiche sofort wieder das Problem auf, daß mit zunehmender Anzahl der Einzelvergleiche auch die Wahrscheinlichkeit wächst, daß einer oder mehrere dieser Vergleiche nur zufällig signifikant ausfällt. Um dies zu vermeiden, können wir zweierlei tun:

- Man sollte so wenig Einzelvergleiche wie möglich durchführen. Am sinnvollsten ist es, vor der Untersuchung gezielte Hypothesen aufzustellen und diese dann zu prüfen,anstatt alle Unterschiede abzutesten.
- Liegen keine solchen a priori aufgestellten Hypothesen vor (und in der Praxis ist dies der häufigere Fall), besteht die Möglichkeit, die Verringerung der Signifikanz-Niveaus durch den sog. Scheffé-Test wieder auszugleichen. Wir berechnen dann eine "kritische Differenz" (= $Diff_{krit}$) nach der Beziehung:

$$Diff_{krit} = \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\left(c - 1\right) V_{Fehler} \cdot F_{c-1,N-c/100\%-p\%}}\ ; \tag{132}$$

darin ist n_1 = Umfang der einen der beiden verglichenen Stichproben,
n_2 = Umfang der anderen der beiden vergl. Stichproben,
c = Gesamtzahl der Stichproben,
$F_{c-1,N-c/100\%-p\%}$ = F-Wert nach Tabelle 4 für c-1 Zähler- und N-c Nenner-Freiheitsgrade auf einem Niveau, welches 100%-p% beträgt, wobei p% das gewünschte Signifikanz-Niveau ist.

In unserem Beispiel würden wir auf dem 1%-Niveau für den Unterschied zwischen den Berufsgruppen 7 und 8 zu rechnen haben:

$$\mathrm{Diff}_{krit} = \sqrt{\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{51}\right)\left(8-1\right)\frac{866{,}54}{369-8} \cdot 2{,}64} = 1{,}27.$$

Die tatsächliche mittlere Einkommensdifferenz beträgt 9,72 - 7,73 = 1,99.
Sie liegt über der kritischen Differenz für das 1%-Niveau, ist also sehr signifikant.
Es ist durchaus möglich, daß trotz einer insgesamt durchaus vorhandenen Signifikanz einer Varianzanalyse keiner der Einzelvergleiche signifikant ist.
Für die Zerlegung der totalen Quadratsumme in die Treatment- und Fehler-Quadratsumme sowie für die Überprüfung von Einzelvergleichen bedarf es keiner besonderen Voraussetzungen. JEDOCH IST FÜR DIE ANWENDUNG DES F-TESTS VORAUSSETZUNG, DASS DIE GRUNDGESAMTHEITEN, AUS DENEN DIE STICHPROBEN STAMMEN, NORMALVERTEILT UND DIE VARIANZEN GLEICH SIND SOWIE DASS DIE EINZELNEN FEHLERKOMPONENTEN VONEINANDER UNABHÄNGIG SIND.
Die Normalverteiltheit wird in der Praxis nur selten eigens kontrolliert, obgleich dies mittels der Normalitätsprüfung ohne weiteres möglich wäre. Die übrigen Voraussetzungen prüft man gewöhnlich mit dem sog. Bartlett-Test. Es wird ein Chi^2 nach der Formel

$$\mathrm{Chi}^2 = \frac{2{,}303}{1 + \frac{1}{3(c-1)}\left(\sum_{i=1}^{c}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{N-c}\right)}\left[(N-c)\log\frac{\sum_{i=1}^{c} V_{\mathrm{Fehler}_i}\cdot n}{N} - \sum_{i=1}^{c}(n-1)\log V_{\mathrm{Fehler}_i}\right]$$

(bei df = c-1) (133) (Pr.50)

berechnet. Dabei ist c = Anzahl der Stichproben,
N = Gesamtumfang aller Stichproben,
n = Umfänge der einzelnen Stichproben,
V_{Fehler_i} = einzelne Fehlervarianz.

Die einzelnen Fehlervarianzen werden nach der Formel:

$$V_{\mathrm{Fehler}_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n-1} \qquad (134)\ (\mathrm{Pr.}\ 1)$$

berechnet.
Wir führen die Berechnung anhand folgender Ausgangsdaten vor:

Stichproben	n	$\sum X$	$\sum X^2$	V_{Fehler_i}	$V_{\mathrm{Fehler}}\cdot n$	$\log V_{\mathrm{Fehler}_i}$	$(n-1)\log V_{\mathrm{Fehler}_i}$	$\frac{1}{n-1}$
1	9	71	767	25,86	232,75	1,41	11,30	0,125
2	13	264	5868	42,23	549,00	1,63	19,51	0,083
3	6	22	114	6,67	40,00	0,82	4,12	0,200
	N=28			74,76	821,75		34,93	0,408

$$\mathrm{Chi}^2 = \frac{2{,}303}{1 + \frac{1}{3(3-1)}\cdot\left(0{,}408 - \frac{1}{28-3}\right)}\cdot\left[(28-3)\log\frac{821{,}75}{28} - 34{,}93\right] = 3{,}82.$$

Da der kritische Wert für ein Chi^2 mit 3 - 1 = 2 Freiheitsgraden auf dem 5%-Niveau 5,99 beträgt, ist das ermittelte Chi^2 nicht signifikant, was bedeutet, daß die Varianzen der drei Stichproben nicht in einem Ausmaß inhomogen sind, das die Anwendung des F-Tests verbieten würde.
Sind die Stichproben gleich groß, dann läßt sich der wesentlich weniger aufwendige F_{max}-Test durchführen:
Wir bilden dann einfach den Quotienten aus der größten und der kleinsten Varianz:

$$F_{max} = \frac{V_{Fehler\,i(max)}}{V_{Fehler\,i(min)}} . \qquad (135)$$

Dieser Wert wird anhand einer besonderen Tabelle, Tabelle 13, auf seine Signifikanz überprüft. Für die Höhe des kritischen Wertes sind neben der Anzahl der Stichproben c die Freiheitsgrade (jeder!) der Fehlervarianzen (df = n - 1) maßgeblich.
Bei den vorliegenden Werten:

Gruppe	n	$\sum x$	$\sum x^2$	$V_{Fehler\ i}$	
1	30	78	806	20,800	$= V_{min}$
2	30	96	1851	53,234	
3	30	65	837	24,006	
4	30	115	2182	60,040	$= V_{max}$

$$F_{max} = \frac{60,040}{20,800} = 2,887.$$

Bei c = 4 und df = 30 - 1 = 29 ist dieser Wert, legen wir das 1%-Niveau zugrunde, nach Tabelle 13 nicht signifikant: Der kritische Wert würde rund 3,3 betragen.
Es kann also davon ausgegangen werden, daß die Varianzen hinreichend homogen sind.
Insgesamt ist die Varianzanalyse relativ robust gegen eine Verletzung ihrer Voraussetzungen, d.h. sie führt auch dann noch zu hinreichend richtigen Ergebnissen, wenn die Voraussetzungen nicht erfüllt sind. Im allgemeinen kann sowohl der Bartlett-Test als auch der F_{max}-Test entfallen, wenn die Stichproben jeweils größer als 15 sind. Besonders günstige Verhältnisse liegen vor, wenn sie außerdem gleich groß sind.

6.1.2. Zweifaktorielle Varianzanalyse (Pr. 47)

Oft werden wir daran interessiert sein, die Wirkungsweise mehrerer Faktoren zu untersuchen. In solchen Fällen können Verfahren der mehrfaktoriellen Varianzanalyse mit Vorteil angewandt werden.
In der zweifaktoriellen Varianzanalyse wird die Wirkung zweier unabhängiger Variablen auf eine abhängige analysiert. Im Falle gleich großer Stichproben pflegt man zum Zwecke einer einfacheren Darstellung des Rechengangs die nachstehenden Kennziffern zu definieren:

$$(1) = \frac{(\sum x)^2}{p \cdot q \cdot n}; \qquad (136)$$

n = Umfang jeder einzelnen der (gleichgroßen) Stichproben;

(2) $= \sum x^2$ (Summe der Quadrate aller Meßwerte über alle Gruppen hinweg);

(3) $= \dfrac{I,1^2 + I,2^2 + \dots I,p^2}{q \cdot n}$;

(4) $= \dfrac{II,1^2 + II,2^2 + \dots II,q^2}{p \cdot n}$;

(5) $= \dfrac{\sum Z_1^2 + \sum Z_2^2 + \dots \sum Z_{pq}^2}{n}$.

Zugrunde liegt ein Datenschema nach folgendem Muster:

		Faktor I Treatmentstufen				
		1	2	...	p	$\sum$
	Treat 1	⋮ $\overline{\sum Z_1}$	⋮ $\overline{\sum Z_2}$	⋮ $\overline{\sum Z_{\dots}}$	⋮ $\overline{\sum Z_p}$	II,1
Faktor II	ment- 2	⋮ $\overline{\sum Z_{1+p}}$	⋮ $\overline{\sum Z_{2+p}}$	⋮ $\overline{\sum Z_{\dots}}$	⋮ $\overline{\sum Z_{2p}}$	II,2
	stu- ⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	q fen	⋮ $\overline{\sum Z_{pq-p+1}}$	⋮ $\overline{\sum Z_{pq-p+2}}$	⋮	⋮ $\overline{\sum Z_{pq}}$	II,q
	$\sum$	I,1	I,2	...	I,p	$\sum X$

Die Quadratsummen (QS) werden dann nach folgenden Beziehungen ermittelt:

$$QS_{treat\,I} = (3) - (1)\,; \quad df = p - 1; \tag{137}$$

$$QS_{treat\,II} = (4) - (1)\,; \quad df = q - 1;$$

$$QS_{I \times II} = (5) - (3) - (4) + (1)\,; \quad df = (p-1)\cdot(q-1)\,;$$

$$QS_{Fehler} = (2) - (5)\,; \quad df = pq\cdot(n-1)\,;$$

$$QS_{total} = (2) - (1)\,; \quad df = pqn - 1.$$

Die $QS_{I \times II}$ gibt die Beeinflussung der abhängigen Variablen durch die Wechselwirkung der beiden unabhängigen Varaiblen I und II wieder. Durch Division der Quadratsummen durch die jeweiligen Freiheitsgrade ermittelt man die zugehörigen Varianzen. Zur Überprüfung der Varianzen der Faktoren I und II sowie ihrer Interaktion I xII bilden wir jeweils einen F-Bruch, in dessen Zähler die zu prüfende Varianz und in dessen Nenner die $\text{Varianz}_{\text{Fehler}}$ steht. Für die Varianzaufklärung wird wie bei einer einfaktoriellen Varianzanalyse gerechnet:

$$VA = \frac{QS}{QS_{tot}} \cdot 100\%. \tag{130}$$

Die beschriebene Berechnung der Varianzen ist nur dann zulässig, wenn die Stufen der geprüften Faktoren systematisch (und nicht zufällig) ausgewählt sind. Der Statistiker sagt: bei "festen Effekten".

Für den Paarvergleich einzelner Treatmentstufen gelten folgende Modifikationen des Scheffé-Tests:

$$\text{Diff}_{crit}{}^{I} = \sqrt{\frac{2(p-1)\ V_{\text{Fehler}} \cdot F_{p-1,\text{df}(\text{Fehler})/100\%-p\%}}{n \cdot q}}\ ; \tag{138}$$

$$\text{Diff}_{crit}{}^{II} = \sqrt{\frac{2(q-1)\ V_{\text{Fehler}}\ F_{q-1,\text{df}(\text{Fehler})/100\%-p\%}}{n \cdot p}}\ ;$$

$$\text{Diff}_{crit}{}^{I\times II} = \sqrt{\frac{2(p-1)(q-1)\,V_{\text{Fehler}} \cdot F_{(p-1)(q-1),\,p \cdot q \cdot (n-1)\ \ 100\%-p\%}}{n}}\,.$$

Auch diese Formeln dürfen nur angewendet werden, wenn die Stufen der beiden Faktoren systematisch ausgewählt sind.

Nachfolgend soll der Einfluß dreier verschiedener Unterrichtsfilme auf die reproduzierte Anzahl der Wissenselemente unter 4 verschiedenen Testbedingungen (unterschiedliche Dauer der verfügbaren Zeit für die Reproduktionen) untersucht werden. Es werden dazu 4 mal 3 = 12 Stichproben benötigt. Sie mögen je 5 Personen umfassen, und die ermittelten Daten seien die folgenden:

		TESTZEIT (FAKTOR I)				$\sum$
		30Min.	40 Min.	50 Min.	60 Min.	
	Film 1	5	6	6	4	
		3	3	6	5	
		4	5	4	5	
Unter-		2	2	4	6	
		2	3	4	6	
richts-		16	19	24	26	85
filme	Film 2	1	4	5	3	
		2	3	2	4	
(Fak-		3	3	3	4	
		3	2	3	3	
tor II)		4	4	3	3	
		13	16	16	17	62
	Film 3	3	3	2	6	
		2	3	6	5	
		2	4	5	4	
		3	4	4	4	
		3	4	5	4	
		13	18	22	23	76
	$\sum$	42	53	62	66	223

$$(1) = \frac{223^2}{4 \cdot 3 \cdot 5} = 828{,}817;$$

$$(2) = 5^2+3^2+4^2+2^2+2^2+6^2+3^2+5^2+2^2+3^2+\ldots 6^2+5^2+4^2+4^2+4^2 = 923{,}00;$$

$$(3) = \frac{42^2+53^2+62^2+66^2}{3 \cdot 5} = 851{,}533;$$

$$(4) = \frac{85^2+62^2+76^2}{4 \cdot 5} = 842{,}250;$$

$$(5) = \frac{16^2+19^2+24^2+26^2+13^2+16^2+16^2+17^2+13^2+18^2+22^2+23^2}{5} = 869{,}000;$$

$$QS_{I} = 851{,}533 - 828{,}817 = 22{,}716; \quad V_{I} = \frac{22{,}716}{4-1} = 7{,}572;$$

$$QS_{II} = 842{,}250 - 828{,}817 = 13{,}433; \quad V_{II} = \frac{13{,}433}{3-1} = 6{,}717;$$

$$QS_{I \times II} = 869{,}00 - 851{,}533 - 842{,}250 + 828{,}817 = 4{,}034; \quad V_{I \times II} = \frac{4{,}034}{(4-1)\cdot(3-1)} = 0{,}672;$$

$$QS_{Fehler} = 923{,}000 - 869{,}000 = 54{,}000; \quad V_{Fehler} = \frac{54}{3 \cdot 4 \cdot (5-1)} = 1{,}125;$$

$$QS_{total} = 923{,}000-828{,}817 = 94{,}183.$$

Varianzaufklärung:

$$VA_{I} = \frac{22{,}716}{94{,}183} \cdot 100 = 24{,}119\,\%;$$

$$VA_{II} = \frac{13{,}433}{94{,}183} \cdot 100 = 14{,}263\,\%;$$

$$VA_{I \times II} = \frac{4{,}034}{94{,}183} \cdot 100 = 4{,}283\,\%;$$

$$VA_{Fehler} = \frac{54{,}000}{94{,}183} \cdot 100 = 57{,}335.$$

F-Brüche:

$$F_{I} = \frac{7{,}752}{1{,}125} = 6{,}731; \quad \text{bei } df_{Zähler} = 3 \text{ und } df_{Nenner} = 48;$$

$$F_{II} = \frac{6{,}717}{1{,}125} = 5{,}971; \quad \text{bei } df_{Zähler} = 2 \text{ und } df_{Nenner} = 48;$$

$$F_{I \times II} = \frac{0{,}672}{1{,}125} = 0{,}597; \quad \text{bei } df_{Zähler} = 6 \text{ und } df_{Nenner} = 48.$$

Es zeigt sich also, daß beide Faktoren, Testzeit und Unterrichtsfilme,hingegen nicht ihre Interaktion, die Varianz der Meßwerte sehr signifikant beeinflussen. Dabei trägt der Faktor "Testzeit" am meisten, der Faktor "Unterrichtsfilme" etwas mehr als die Hälfte davon und das je spezifische Zusammenwirken von Testzeit und Art des Unterrichtsfilms nur ca. ein Sechstel davon zur Varianzaufklärung bei; mehr als die Hälfte der gesamten Varianz wird von anderen bzw. von Störfaktoren beeinflußt.
Nach dem Scheffé-Test berechnen wir folgende kritische Differenz für Faktor II:

$$Diff_{crit}II = \sqrt{\frac{2(3-1)\cdot 1{,}125 \cdot 5{,}08}{5 \cdot 4}} = 1{,}069; \quad (\text{für } p=1\%).$$

Die Differenz der Mittelwerte von Film I und Film II beträgt $\frac{85}{20} - \frac{62}{20} =$ 1,15. Sie ist größer als der entsprechende kritische Wert von 1,069 und damit sehr signifikant.

6.1.3. Varianzanalysen mit ungleichen Stichprobengrößen

Bisher wurde bei der 2-faktoriellen Varianz-Analyse vorausgesetzt, daß die verschiedenen Stichproben gleich groß sind.
Nun kann es selbstverständlich vorkommen, daß diese Bedingung in der Praxis nicht erfüllt werden kann. Von den geläufigen Verfahren, diesen Mangel rechnerisch auszugleichen, greifen wir nur die zwei einfachsten heraus:

Denkbar ist z.B. , daß die Populationen mit unterschiedlichen Faktorstufen-Kombinationen so verschieden groß sind, daß eine Zusammenstellung gleich großer

Stichproben einfach nicht zu leisten ist. In diesem Falle sollte man wenigstens darauf achten, daß sie sich proportional zueinander verhalten. In dem nachstehenden Beispiel verhalten sich die Zeilensummen jeweils wie 1:2:1:3:2 und die Spaltensummen wie 1:3:2 :

		Faktor I				
		1	2	3	4	5
	1	5	10	5	15	10
Faktor II	2	15	30	15	45	30
	3	10	20	10	30	20

Liegen so geartete Verhältnisse vor, können wir einen sogenannten PROPORTIONALITÄTSAUSGLEICH vornehmen. Dazu müssen die Kennziffern für die 2-faktorielle Varianzanalyse folgendermaßen korrigiert werden:

$$(1') = \frac{(\sum x)^2}{\sum_{i=1}^{c} n}; \qquad (139)$$

$$(2') = (2) = \sum_{i=1}^{c \cdot n} x_i^2;$$

$$(3') = \frac{I,1^2}{n_{I,1}} + \frac{I,2^2}{n_{I,2}} + \dots \frac{I,p^2}{n_{I,p}}$$ (wobei $n_{I,1}$ = Anzahl der Probanden auf der Treatmentstufe I,1 usw.);

$$(4') = \frac{II,1^2}{n_{II,1}} + \frac{II,2^2}{n_{II,2}} + \dots \frac{II,q^2}{n_{II,q}}$$ (wobei $n_{II,1}$ = Anzahl der Probanden auf der Treatmentstufe II,1 usw.);

$$(5') = \frac{\sum z_1^2}{n_1} + \frac{\sum z_2^2}{n_2} + \dots \frac{\sum z_{pq}^2}{n_{pq}}$$ (wobei n_1 = Anzahl der Probanden in der 1. Stichprobe bzw. Zelle usw.).

Die Berechnung der Quadratsummen kann dann wie oben aufgezeigt erfolgen. Dabei ist df für die $QS_{Fehler} = \sum_{i=1}^{c} n - p \cdot q$.

Nicht selten kommt es auch vor, daß zwar gleich große Stichproben gewählt waren, daß bei der Durchführung der Untersuchung jedoch einzelne Versuchspersonen ausfallen und nachher nicht mehr zu gleichen Testbedingungen in die Untersuchung einbezogen werden können. In solchen Fällen pflegen die Stichprobengrößen nicht sehr stark voneinander abzuweichen. Ist die kleinste Stichprobe nicht um einen Betrag von mehr als 20% kleiner als die größte, so können wir eine KORREKTUR DURCH DIE BERECHNUNG EINES HARMONISCHEN MITTELS FÜR DIE STICHPROBENGRÖSSEN herbeiführen.

Das harmonische Mittel ist für die 2-faktorielle Varianzanalyse

$$HM_n = \frac{p \cdot q}{\sum_{i=1}^{c} \frac{1}{n_i}}. \qquad (140)$$

Zunächst werden in einem solchen Fall in den einzelnen Zellen der Daten-Matrix bzw. Daten-Matrizen anstelle der Summen die arithmetischen Mittelwerte berechnet.

Für die 2-faktorielle Varianzanalyse ermittelt man dann folgende Kennziffern:

$$(1'') = \frac{(\sum_{i=1}^{c} \bar{Z}_i)^2}{p \cdot q}, \quad \text{wobei } \bar{Z} = \text{arith. Mittel in einer Zelle;} \qquad (141)$$

$$(3'') = \frac{\bar{Z}^2_{I,1} + \bar{Z}^2_{I,2} + \ldots \bar{Z}^2_{I,p}}{q}, \quad \text{wobei } \bar{Z}_{I,1} = \text{Summe aller Zellenmittelwerte der Faktorstufe I, 1 usw.;}$$

$$(4'') = \frac{\bar{Z}^2_{II,1} + \bar{Z}^2_{II,2} + \ldots \bar{Z}^2_{I,q}}{p};$$

$$(5'') = \sum_{i=1}^{c} \bar{Z}_i^2 .$$

Die Kennziffer 2 kann in diesem Falle nicht auf die übliche Weise berechnet werden. Das hat zur Folge, daß die QS_{Fehler}, zu deren Ermittlung 2 sonst eingesetzt wird, aus den Daten der einzelnen Zellen gesondert errechnet werden muß:

$$QS_{Fehler/Zelle} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n_Z}, \quad \text{wobei } n_Z = \text{Anzahl der Probanden in der Zelle;} \qquad (142)$$

$$QS_{Fehler} = \sum_{i=1}^{c} QS_{Fehler/Zelle}; \qquad df = N - pq. \qquad (143)$$

Die übrigen Quadratsummen werden aus den Kennziffern nach folgenden Beziehungen berechnet:

$$QS_I = HM_n \cdot ((3'') - (1'')); \qquad df = p - 1; \qquad (144)$$

$$QS_{II} = HM_n \cdot ((4'') - (1'')); \qquad df = q - 1;$$

$$QS_{IxII} = HM_n \cdot ((5'') - (3'') - (4'') + (1'')); \qquad df = (p-1)(q-1);$$

$$QS_{total} = QS_I + QS_{II} + QS_{IxII} + QS_{Fehler}.$$

Für die Durchführung mehrfaktorieller Varianzanalysen gelten keine anderen Voraussetzungen als für die einfaktorielle Varianzanalyse. Die Bedingung der Varianzhomogenität kann im Fall gleich großer Stichprobengrößen durch den F_{max}-Test, ansonsten durch den Bartlett-Test überprüft werden. Kommt der letztere zur Anwendung, so ist für die 2-faktorielle Varianzanalyse anstelle von p pq einzusetzen. Außerdem ist er über die Daten sämtlicher Zellen hinweg durchzuführen.

6.2. Varianzanalysen mit abhängigen Stichproben

Als Pendant zum t-Test für abhängige Stichproben können auch Varianzanalysen mit abhängigen Stichproben durchgeführt werden. Diese Verfahren wird man z.B. immer dann anwenden, wenn eine Stichprobe wiederholten Untersuchungen unterzogen wird.

6.2.1. Einfaktorielle Varianzanalyse mit Meßwiederholung (Pr. 48)

Bei einer einfaktoriellen Varianzanalyse mit Meßwiederholungen ergibt sich folgende Daten-Matrix:

		Faktor I (=Faktorstufen)					
		1	2	3	...	p	$\sum$
Faktor II (=Vpn)	Vp 1	X_1	X_2	X_3	...	X_p	$II_{,1}$
	Vp 2	X_{p+1}	X_{p+2}	X_{p+3}	...	X_{2p}	$II_{,2}$
	Vp 3	X_{2p+1}	X_{2p+2}	X_{2p+3}^4	...	X_{3p}	$II_{,3}$
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
	Vp q					X_{pq}	$II_{,q}$
	$\sum$	$I_{,1}$	$I_{,2}$	$I_{,3}$	...	$I_{,p}$	$\sum X$

Mit Bezug darauf werden folgenden Kennziffern definiert:

$$(1) = \frac{(\sum X_i)^2}{p \cdot q}; \qquad (145)$$

$$(2) = \sum_{i=1}^{pq} X_i^2;$$

$$(3) = \frac{I_{,1}^2 + I_{,2}^2 + I_{,3}^2 + \ldots I_{,p}^2}{q};$$

$$(4) = \frac{II_{,1}^2 + II_{,2}^2 + II_{,3}^2 + \ldots II_{,q}^2}{p}.$$

Für die Berechnung der Quadratsummen gelten dann folgende Beziehungen:

$$QS_{zwVpn} = (4) - (1); \qquad df = q - 1; \qquad (146)$$

$$QS_{inVpn} = (2) - (4)\,; \qquad df = q(p-1)\,;$$

$$QS_{treat\ I} = (3) - (1)\,; \qquad df = p - 1;$$

$$QS_{res} = (2) - (3) - (4) + (1)\,; \qquad df = (q-1)(p-1)\,;$$

$$QS_{total} = (2) - (1)\,; \qquad df = p \cdot q - 1.$$

QS_{zwVpn} repräsentiert die Unterschiede hinsichtlich des beobachteten Merkmals zwischen den verschiedenen Versuchspersonen, QS_{inVpn} Meßunterschiede der Versuchspersonen von Treatmentstufe zu Treatmentstufe. Die QS_{res}, die Residualquadratsumme, enthält die Fehlerquadratsumme und den Interaktionsanteil. Die Varianzen werden wie in allen bisherigen Untersuchungsdesigns durch Division der Quadratsummen durch die zugehörigen Freiheitsgrade (df) errechnet. Die Bildung der F-Brüche erfolgt mit Hilfe der V_{res}, die in den Nenner gesetzt wird.
Für die Unterschiede zwischen den Vpn und zwischen den einzelnen Meßwerten der Vpn führt dies zu konservativen Entscheidungen, die durch großzügige Handhabung des Signifikanz-Niveaus abgefangen werden sollten.
Für den Einzelvergleich ist wiederum die Ermittlung kritischer Differenzen nach dem Scheffé - Test nötig:

$$Diff_{crit} = \sqrt{\frac{2(p-1)\ V_{res} \cdot F_{p-1,\,df\ res\ /100\%-p\%}}{q}} \qquad (147)$$

(für Vergleiche der Treatmentstufen des Faktors I);

$$Diff_{crit} = \sqrt{\frac{2(q-1)\ V_{res} \cdot F_{q-1,\,df\ res/100\%-p\%}}{p}}$$

(für Vergleiche zwischen den Versuchspersonen).

Diese Formeln sind offensichtlich identisch mit denen für die Berechnung der kritischen Differenzen für die Faktoren I und II der 2-faktoriellen Varianzanalyse, nur daß hier (wie stets in Varianzanalysen mit abhängigen Stichproben) die V_{res} mit ihren Freiheitsgraden an der Stelle der V_{Fehler} steht.
Wir führen das Verfahren an 7 Schülern vor, deren Benotung im Fach Deutsch durch 4 Lehrer analysiert werden soll:

	Lehrer				
Schüler	1	2	3	4	$\sum$
1	1	1	3	2	7
2	3	4	5	4	16
3	2	3	4	4	13
4	2	3	5	4	14
5	4	4	5	5	18
6	3	3	5	4	15
7	1	2	4	3	10
$\sum$	16	20	31	26	93

$$① = \frac{93^2}{7 \cdot 4} = 308{,}893; \quad ② = 1^2+3^2+2^2+\ldots4^2+3^2 = 351;$$

$$③ = \frac{16^2 + 20^2 + 31^2 + 26^2}{7} = 327{,}571;$$

$$④ = \frac{7^2+16^2+13^2+14^2+18^2+15^2+10^2}{4} = 329{,}750.$$

Daraus errechnen wir folgende Ergebnisse:

QS		df	V	p	VA
QS_{zwVpn}	= 20,857	6	3,476	$p < 1\%$	49,53%
QS_{inVpn}	= 21,250	21	1,012	$p < 1\%$	50,47%
$QS_{treat\ I}$	= 18,678	3	6,226	$p < 1\%$	87,90%
QS_{res}	= 2,572	18	0,143		12,10%
QS_{total}	= 42,107	27	1,560		

F-Bruch für V_{zwVpn} : $F = \frac{3{,}476}{0{,}143} = 24{,}31$ (krit.Wert f.p =1%:4,01);

F-Bruch für V_{inVpn} : $F = \frac{1{,}012}{0{,}143} = 7{,}08$ (krit.Wert f.p=1%:3,08);

F-Bruch für $V_{treat\ I}$: $F = \frac{6{,}226}{0{,}143} = 43{,}54$ (krit.Wert f.p = 1%:5,09).

Bei der Interpretation ist zu beachten, daß sich die QS_{total} aus der QS_{zwVpn} und der QS_{inVpn} zusammensetzt: Demnach sind die beobachteten Unterschiede zu 49,53% auf Unterschiede zwischen den Schülern und zu 50,47% auf solche zwischen den jeweiligen Benotungen der einzelnen Schüler zurückzuführen.

Die QS_{inVpn} zerfällt wieder in einen Anteil, der auf den Treatmentfaktor I ("Lehrer") zurückzuführen ist und in den Residualanteil, der den Fehler- und den Interaktionsanteil enthält. Soweit die Unterschiede als solche zwischen den jeweiligen Benotungen der einzelnen Schüler zu verstehen sind, beruhen sie zu 87,90% auf dem Faktor "Lehrer", während nur 12,10% dieses Varianzanteils unaufgeklärt bleiben.
Nach dem Scheffé-Test errechnen wir folgende kritische Differenzen:

$$\text{Diff}_{crit\ zw\ Vpn} = \sqrt{\frac{2(7-1)0{,}143 \cdot 4{,}01}{4}} = 1{,}31 \quad (1\%\text{-Niveau});$$

$$\text{Diff}_{crit\ treat\ I} = \sqrt{\frac{2(4-1)0{,}143 \cdot 5{,}09}{7}} = 0{,}79 \quad (1\%\text{-Niveau}).$$

Benotungsunterschiede beim gleichen Schüler durch verschiedene Lehrer sind also bereits signifikant, wenn sie eine (genau:0,79) Notenstufe, bei verschiedenen Schülern und dem gleichen Lehrer sind sie erst signifikant, wenn sie mehr als eine (genau:1,31) Notenstufe betragen (falls man das 1%-Niveau zugrunde legt).

6.2.2. Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Meßwiederholung (Fr. 49)

Selbstverständlich können auch Varianzanalysen mit Meßwiederholungen über mehrere Faktoren gerechnet werden. Gruppieren wir die Vpn noch zusätzlich nach einem bestimmten Gesichtspunkt (Faktor III), so erhalten wir eine 2-faktorielle Varianzanalyse mit Meßwiederholungen. Die Datenmatrix gestaltet sich in diesem Fall wie auf S.86 dargestellt.

Mit Bezug darauf werden folgende Kennziffern definiert:

$$(1) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{pqr} X_i\right)^2}{p \cdot q \cdot r}; \quad (2) = \sum_{i=1}^{pqr} X_i^2; \quad (3) = \frac{I,1^2 + I,2^2 + \ldots I,p^2}{r \cdot q}; \tag{148}$$

$$(4) = \frac{III,1^2 + III,2^2 + \ldots III,r^2}{q \cdot p};$$

$$(5) = \frac{Vpl,1/III,1^2 + \; Vpl,2/III,1^2 + \ldots \; Vpl,1/III2^2 + \ldots \; Vpl,P/III,r^2}{q};$$

$$(6) = \frac{\sum Vp1/III,1^2 + \sum Vp2/III,1^2 + \ldots \sum Vp1/III,1^2 + \ldots \sum Vpq/III,r^2}{p}.$$

Die Quadratsummen und Freiheitsgrade werden dann folgendermaßen berechnet:

$$QS_{III} = (4) - (1); \qquad df = r - 1; \tag{149}$$

$$QS_{in\ Stpr} = (6) - (4); \qquad df = r(q-1);$$

$$QS_{zw\ Vpn} = (6) - (1); \qquad df = rq - 1;$$

$$QS_{I} = (3) - (1); \qquad df = p - 1;$$

$$QS_{IxIII} = (5) - (3) - (4) + (1); \qquad df = (p-1)(r-1);$$

$$QS_{IxVpn} = (2) - (5) - (6) + (4); \qquad df = r \cdot (p-1)(q-1);$$

$$QS_{in\ Vpn} = (2) - (6); \qquad df = r \cdot q \cdot (p-1);$$

$$QS_{total} = (2) - (1); \qquad df = q \cdot p \cdot r - 1.$$

Als Prüfvarianz für die V_{III} dient die $V_{in\ Stpr}$ (die Varianz innerhalb der Stichproben bzw. Gruppen), als solche für V_I und für die V_{IxIII} die V_{IxVpn}, vorausgesetzt, daß die Faktoren I und III "Feste Effekte" aufweisen.

		Stufen des Faktors I					
		1	2	3	...	p	
Stufen des Faktors III (=Gruppen)	1	Faktor II (=Vpn) Vp 1 Vp 2 ⋮ Vp q	⋮ ∑Vpl,1/III,1	⋮ ∑Vpl,2/III,1	⋮ ∑Vpl,3/III,1	⋮ ...	⋮ ∑Vpl,p/III,1	Vp1/III,1 Vp2/III,1 ⋮ Vpq/III,1 III,1
	2	Faktor II Vp 1 Vp 2 ⋮ Vp q	⋮ ∑Vpl,1/III,2	⋮ ∑Vpl,2/III,2	⋮ ∑Vpl,3/III,2	⋮ ...	⋮ ∑Vpl,p/III,2	Vp1/III,2 Vp2/III,2 ⋮ Vpq/III,2 III,2
	⋮	Faktor II Vp 1 Vp 2 ⋮ Vp q	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	r	Faktor II Vp 1 Vp 2 ⋮ Vp q	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮ ∑Vpl,p/III,r	⋮ Vpq/III,r III,r
			I,1	I,2	I,3	...	I,p	∑X

Die QS_{tot} zerfällt wiederum in die $QS_{zw\ Vpn}$ und die $QS_{in\ Vpn}$. Die erstere setzt sich aus der QS_{III} und der $QS_{in\ Stpr}$, die letztere aus der QS_{I}, der QS_{IxIII} und der QS_{IxVpn} zusammen.
Dazu können nach dem Scheffé-Test kritische Differenzen für den Faktor III und für den Faktor I berechnet werden.
Es gelten folgende Beziehungen:

$$\mathrm{Diff}_{crit\ I} = \sqrt{\frac{2(p-1)\cdot V_{IxVpn}\cdot F_{p-1,\ r(p-1)(q-1)/100-p\%}}{n\cdot q\cdot r}}\ ; \qquad (150)$$

$$\mathrm{Diff}_{crit\ III} = \sqrt{\frac{2(r-1)\cdot V_{in\ Stpr}\cdot F_{(r-1),\ r(q-1)/100-p\%}}{n\cdot p\cdot q}}\ .$$

Das Verfahren sei demonstriert an der Analyse des Erfolgs von vier Methoden des Intelligenztrainings (Faktor I) an drei Altersstufen (Faktor III), wozu jeweils Gruppen von 5 Personen (Faktor II) beobachtet werden:

			Stufen des Faktors I : Trainingsmethoden				
			1	2	3	4	$\sum$
Stufen des Faktors III: Altersgruppen	Vp 1	1	101	108	108	107	424
	Vp 2		95	100	102	109	406
	Vp 3		112	115	117	118	462
	Vp 4		89	92	92	96	369
	Vp 5		78	89	91	93	351
			475	504	510	523	2012
	Vp 1	2	120	125	128	131	504
	Vp 2		81	87	93	95	356
	Vp 3		83	88	90	89	350
	Vp 4		99	103	102	109	413
	Vp 5		104	107	108	109	428
			487	510	521	533	2051
	Vp 1	3	73	85	97	97	352
	Vp 2		97	109	111	109	426
	Vp 3		92	100	103	110	405
	Vp 4		117	121	121	125	484
	Vp 5		100	115	127	129	471
			479	530	559	570	2138
		$\sum$	1441	1544	1590	1626	6201

$$(1) = \frac{6201^2}{4 \cdot 3 \cdot 5} = 640873{,}340; \quad (2) = 101^2 + 95^2 + 112^2 + \ldots 125^2 + 129^2 = 651831;$$

$$(3) = \frac{1441^2 + 1544^2 + 1590^2 + 1626^2}{3 \cdot 5} = 642159{,}530;$$

$$(4) = \frac{2012^2 + 2051^2 + 2138^2}{4 \cdot 5} = 641289{,}450;$$

$$(5) = \frac{475^2 + 487^2 + 479^2 + \ldots 504^2}{5} = 642758{,}200;$$

$$(6) = \frac{424^2 + 406^2 + 462^2 + \ldots 471^2}{4} = 649981{,}250.$$

Es ergibt sich:

QS			df	V	p	VA
QS_{III}	=	416,11	2	208,06	$p > 25\%$	3,80%
$QS_{in\ Stpr}$	=	8691,8	12	724,32		79,32%
$QS_{zw\ Vpn}$	=	9107,91	14	650,57		83,12%
QS_{I}	=	1286,19	3	428,73	$p < 1\%$	11,74%
$QS_{I \times III}$	=	182,56	6	30,43	$p < 5\%$	1,67%
$QS_{I \times Vpn}$	=	381,0	36	10,58		3,48%
$QS_{in\ Vpn}$	=	1849,75	45	41,11		16,88%
QS_{total}	=	10957,66	59	185,72		

7. Skalierungsverfahren

Oft können Größen nicht exakt gemessen, sondern nur anhand irgendwelcher Kategorien einer Schätzung unterzogen werden, oder sie sind nicht direkt meßbar, man kann nur Reaktionen von Versuchspersonen erheben. Es ergibt sich dann das Problem, die Schätzurteile bzw. die Reaktionen im nachhinein in eine Ordnung zu bringen, die eine quantitative Weiterbearbeitung erlaubt.
Die Statistik kennt eine ganze Reihe von z.T. recht komplizierten Skalierungsverfahren. Wir beschränken uns im folgenden auf einige einfacher zu handhabende. Sie lassen sich unterteilen in solche, die zu Intervallskalen, und solche, die nur zu Rangskalen führen.

7.1. Erstellung von Intervallskalen

Als intervallskalierende Verfahren sehen wir solche an, die über eine bloße Rangfolge hinaus Skalen mit genauen Zahlenwerten liefern.

7.1.1. Rating (Pr. 51)

Beim Rating lassen wir durch Versuchspersonen einzelnen Objekten unmittelbar Zahlenwerte zuordnen.
Es sei angenommen, 4 Fahrlehrer hätten die Fahrtüchtigkeit von 10 Fahrschülern mit einer Punktzahl von 1 bis 10 zu bewerten:

Fahrschüler	Experten 1	2	3	4	$\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$	$\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}\right)^2$	$\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}$	$\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}\right)^2$
1	1	2	1	2	1,50	2,25	2,50	0,25
2	4	3	4	5	4,00	16,00	16,50	0,50
3	2	1	2	1	1,50	2,25	2,50	0,25
4	3	3	2	4	3,00	9,00	9,50	0,50
5	1	1	2	3	1,75	3,06	3,75	0,69
6	3	4	5	3	3,75	14,06	14,75	0,69
7	2	2	1	1	1,50	2,25	2,50	0,25
8	5	5	5	4	4,75	22,56	22,75	0,19
9	4	4	3	3	3,50	12,25	12,50	0,25
10	5	5	4	5	4,75	22,56	22,75	0,19
					30,00	106,24		3,76

Die Werte in der Spalte $\frac{\sum_{i=1}^{K} x_i}{N}$ sind die Skalenwerte für die einzelnen Objekte, hier die Fahrschüler.
Man sollte im allgemeinen den Übereinstimmungsgrad der Beurteiler mit kontrollieren. Man errechnet zu diesem Zweck als Prüfgröße:

$$\ddot{U} = 1 - \frac{\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{k}\left[\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i}{N}\right)^2\right]}{N-1}}{\sum\limits_{j=1}^{k}\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i}{N}\right)^2 - \dfrac{1}{k}\cdot\left[\sum\limits_{j=1}^{k}\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i}{N}\right)\right]^2} \cdot \qquad (151) \; (Pr.51)$$

Dabei ist N = Zahl der Beurteiler (Experten),
k = Zahl der Objekte.

In unserem Beispiel erhalten wir:

$$\ddot{U} = 1 - \frac{\dfrac{3{,}76}{4-1}}{106{,}24 - \dfrac{1}{10}\cdot 30^2} = 0{,}92.$$

Der Übereinstimmungsgrad kann maximal 1,00 und minimal 0 betragen. Ein geringer Übereinstimmunsgrad muß nicht unbedingt ein Anzeichen für die geringe Urteilskraft der Experten sein. Es kann sich auch um Objekte handeln, die schwierig zu beurteilen sind.

7.1.2. Paarvergleich

Ein Verfahren, das die Versuchspersonen nötigt, jeweils zwei Objekte gesondert miteinander zu vergleichen, und dadurch in vielen Fällen zu genaueren Ergebnissen führt, ist der sog. Paarvergleich.
Es sei der soziale Rangunterschied zwischen folgenden Gruppen zu ermitteln:
1. Arbeiter, 2. Industrielle ohne Studium, 3. Akademiker im öffentlichen Dienst, 4. leitende Angestellte mit akademischer Ausbildung, 5. Großbauern.
Nach den Urteilen einer Versuchsperson erstellen wir eine sog. Distanz-Matrix:

	1 -	2 -	3 -	4 -	5 -
- 1	0	10	8	7	6
- 2	- 10	0	- 1	- 3	- 4
- 3	- 8	1	0	1	- 5
- 4	- 7	3	- 1	0	- 3
- 5	- 6	4	5	3	0
Σ	- 31	18	11	8	- 6
$\frac{\Sigma}{k}$	- 6,2	3,6	2,2	1,6	- 1,2

Die Minuszeichen hinter den Zahlen an der Kopfleiste sollen bedeuten, daß von diesen Größen abzuziehen ist, die Minuszeichen vor den Zahlen an der linken Randspalte wollen darauf hinweisen, daß die Größen in Abzug zu bringen sind.

Die Zahl 10 in der ersten Zeile kommt demnach dadurch zustande, daß die Versuchsperson den Unterschied zwischen Personengruppe 2 (Industrielle ohne Studium) und Personengruppe 1 (Arbeiter) mit 10 veranschlagt, und zwar werden die Industriellen höher eingeschätzt: Der Status der Gruppe 2 minus dem Status der Gruppe 1 ergibt eine Differenz von 10. Entsprechend muß die Umkehrung dieser Fragestellung -10 ergeben (1. Zahl der 2. Zeile). Negative Zahlen bedeuten immer, daß das erstgenannte Objekt niedriger eingestuft wird. Die diagonalsymmetrisch zueinander liegenden Zahlen der Matrix ergeben zusammen jeweils Null, d.h. sie unterscheiden sich nur im Vorzeichen. Ein Objekt, das mit sich selbst verglichen wird, erhält den Betrag 0.
Wir addieren die Spalten einer solchen Distanz-Matrix auf und dividieren die Spaltensummen durch die Anzahl der Objekte (hier: 5). Die so erhaltenen Werte sind die gesuchten Skalenwerte. Es ergibt sich also folgende Rangordnung der Gruppen mit den nachstehenden Skalenwerten:

Industrielle ohne Studium	3,6
Akademiker im öffentl. Dienst	2,2
leitd.Angest.mit ak.Ausbildg.	1,6
Großbauern	-1,2
Arbeiter	-6,2

Beim Paarvergleich ist eine sog. Nullpunkttransformation statthaft. Durch Addition von 6,2 zu allen Skalenwerten erhalten wir die transformierte Skala:

0	5,0	7,8	8,4	9,8

Bei einer Skalierung durch mehrere Versuchspersonen werden die Differenzen für jede Stelle der Distanz-Matrix arithmetisch gemittelt.

Beim Rating und beim Paarvergleich empfiehlt es sich in manchen Fällen, den Beurteilungsspielraum vorzugeben. In unserem Beispiel zum Paarvergleich durften nur Differenzen zwischen 0 und 10 genannt werden. Darüber hinaus kann man die Gefahr, daß Versuchspersonen manchmal den gesamten verfügbaren Beurteilungsspielraum nicht genügend ausschöpfen, dadurch beseitigen, daß man vorschreibt, wie oft jede Bewertung vergeben werden darf. Im Beispiel zum Rating mußte jeder Fahrlehrer jede der Bewertungen von 1 bis 5 gleich häufig, in diesem Falle also zweimal, vergeben. Es lassen sich auch Fälle denken, in welchen andere Verteilungsformen vorgegeben werden können, z.B. eine Normalverteilung.

7.1.3. Likert-Skala (Pr. 52)

Unter der Voraussetzung, daß das zu skalierende Merkmal an sich normalverteilt ist, kann man eine sog. Likert-Skala erstellen, die auf eine Transformation der Häufigkeiten in z-Werte der Standardnormalverteilung hinausläuft.
Nehmen wir an, eine größere Zahl von Studenten sei gebeten worden, verbale Urteile über 3 Lehrveranstaltungen abzugeben:

Lehrveranstaltungen

	1	2	3	$\sum$	p	$S_{\%}$	PR	PR-50	Z
zu schwierig	82	123	101	306	13,15	13,15	6,58	-43,42	-1,51
sehr anspruchs-voll	130	133	99	362	15,56	28,71	20,93	-29,07	-0,81
anspruchsvoll	287	75	145	507	21,79	50,50	39,61	-10,39	-0,26
verständlich	73	305	133	511	21,96	72,46	61,48	11,48	0,29
leicht	62	256	179	497	21,36	93,82	83,14	33,14	0,96
primitiv	11	98	35	144	6,19	100,00	96,91	46,91	1,87
				2327 =100%					

Zunächst addieren wir die Zeilenwerte auf. In der anschließenden Spalte p formen wir diese in Prozente um. In der Spalte $S_{\%}$ werden die Prozente kumuliert, d.h. wir geben jeweils an, wieviele Prozente bis zu der betreffenden Kategorie liegen. Wir haben demnach für die zweite Kategorie zu rechnen 15,56 + 13,15 = 28,71; für die dritte 21,79 + 15,56 + 13,15 = 50,50 usw. Die Spalte PR enthält die Prozentränge, die wir nach der Beziehung:

$$PR = S_{\%} - \frac{p}{2} \tag{152}$$

errechnen. Für die erste Kategorie ergibt sich demnach

$$PR = 13,15 - \frac{13,15}{2} = 6,68,$$

für die dritte

$$PR = 28,71 - \frac{15,56}{2} = 20,93.$$

Die folgende Spalte erhalten wir, wenn wir von den errechneten Werten jeweils 50 abziehen. Zu den Werten dieser Spalte schlagen wir nun in Tabelle 1 die Flächen der z-Werte nach. Dabei sind die Prozente wieder in die dezimale Schreibweise rückzutransformieren, also

$$-43,42\,\% = -0,4342.$$

Diesem Wert kommt in Tabelle 1 die Fläche 0,4345 am nächsten. Der zugehörige z-Wert von 1,51 ist der Skalenwert der ersten Kategorie. Da der Wert in der vorhergehenden Spalte negativ war, erhält auch er ein negatives Vorzeichen.

Die z-Werte sind Skalenwerte der Beurteilungskategorien, nicht solche der beurteilten Objekte! Es ist jedoch ohne weiteres möglich, durch Anschreiben der Spalten als Zeilen auch Skalenwerte für die Objekte, hier die Lehrveranstaltungen, zu errechnen. Nur sollte dann in unserem Beispiel das Beurteilungskriterium einheitlich sein, etwa eine Klassifizierung als "schwierig".
Es ist zulässig, eine lineare Transformation vorzunehmen. Um die Skala mit 0 beginnen zu lassen, addieren wir zu allen z-Werten den Betrag 1,51. Es ergibt sich:

zu schwierig	0,00
sehr anspruchsvoll	0,70
anspruchsvoll	1,25
verständlich	1,80
leicht	2,47
primitiv	3,38

7.1.4. Häufigkeitsanalyse nach Guttmann (Pr. 53)

Eine Skalierung nach Guttmann wird man vornehmen, wo Phänomene hierarchisch geordnet sind. Bei 10 hierarchisch geordneten Testaufgaben würde das bedeuten, daß jeder, der die zweitleichteste lösen kann, auch die leichteste zu lösen vermag, daß die Lösung der nächsten Aufgabe die der beiden vorhergehenden impliziert usw.
Ein Beispiel hierfür mag die Beherrschung arithmetischer Grundfertigkeiten sein. Die folgenden Beziehungen scheinen z.T. plausibel: Wer addieren kann, beherrscht auch das Zählen. Wer subtrahieren (im Sinne des Daraufzählens) kann, vermag auch zu addieren und zu zählen. Ebenso setzt Multiplizieren die genannten Grundfertigkeiten voraus (das Subtrahieren in Form des Daraufzählens bei Überläufen) und Dividieren schließlich alle bisher genannten Operationen.
Nehmen wir an, wir hätten die Häufigkeit der Beherrschung dieser Operationen durch eine Stichprobe von Grundschülern erhoben:

		p	$S_{\%}$	PR
Zählen	4	1,30	1,30	0,65
Addieren	14	4,55	5,85	3,58
Subtrahieren	32	10,39	16,24	11,05
Multiplizieren	58	18,83	35,07	25,66
Dividieren	200	64,94	100,00	67,53

Die Häufigkeiten sind so zu verstehen, daß z.B. 14 Schüler nur addieren, damit natürlich auch zählen, aber nicht subtrahieren, multiplizieren und dividieren können usw.
Die Spalten p, $S_{\%}$ und PR werden wie in einer Likert-Skala berechnet. Die Werte in der Spalte PR sind hier bereits die Skalenwerte. Man kann sie einer Ähnlichkeitstransformation unterziehen und erhält dann (indem man alle Werte durch 0,65 dividiert):

Zählen	1,00
Addieren	5,51
Subtrahieren	17,00
Multiplizieren	39,48
Dividieren	103,89

7.2. Erstellung von Rangskalen

Rangordnungsverfahren ergeben keine Zahlenwerte für einzelne Skalenpunkte, sondern nur eine Reihenfolge von Objekten, Phänomenen oder Aussagen. Sie setzen der Weiterverarbeitung engere Grenzen, machen aber weniger theoretische Voraussetzungen als Verfahren der Intervallskalierung.

7.2.1. Rangordnungsverfahren

Hier handelt es sich eigentlich um ein Rating im Hinblick auf Rangplätze: Die Versuchspersonen werden gebeten, eine Anzahl von Objekten in eine Rangfolge zu bringen: verbundene Ränge (also das mehrmalige Vergeben desselben Ranges) sind verboten.
Die Beurteilung von 7 Schokolademarken im Hinblick auf ihre Qualität durch 5 Versuchspersonen möge folgende Daten ergeben haben:

		Schokolademarken							
		1	2	3	4	5	6	7	
Be-	1	4	1	5	3	2	7	6	
ur-	2	4	3	6	2	1	7	5	
	3	5	2	4	1	3	7	6	
tei-	4	6	1	5	3	2	7	4	
ler	5	4	1	5	3	2	6	7	
	$\sum R$	23	8	25	12	10	34	28	$\sum = 140$
	Skala	IV	I	V	III	II	VII	VI	MR= 140:7=20
	$\|MR - R\|$	3	12	5	8	10	14	8	

Die Ränge, die jedes Objekte erhalten hat, werden aufaddiert. Diese Rangsummen bilden die Grundlage für die Erstellung einer Rangskala nach der Größe der Rangsummen.
Der Leser dürfte bemerkt haben, daß dieses Verfahren eigentlich schon beim Konkordanzkoeffizienten (vgl. S.43) dargestellt wurde. So kann man denn auch den Konkordanzkoeffizienten berechnen, um das Maß der erreichten Übereinstimmung zu prüfen und eine Signifikanzprüfung vorzunehmen:

$$W = \frac{602}{\frac{1}{12} \cdot 5^2 \cdot (7^3 - 7)} = 0,86.$$

Der Zähler von 602 weist eine Signifikanz auf dem 1%-Niveau aus: Der kritische Wert, den wir in Tabelle 12 nachschlagen können, beträgt 343,8 und wird bei weitem überschritten.
Wollen wir eine Skala aus sehr vielen Objekten bilden, kann es sein, daß wir die

Kapazitäten des Programms für den Konkordanzkoeffizienten überschreiten. Man kann dann einen mittleren Rangkorrelationskoeffizienten berechnen nach der Beziehung:

$$\bar{R} = 1 - \frac{k\,(4N+2)}{(k-1)(N-1)} + \frac{12 \sum_{i=1}^{N} (\sum_{i=1} R)^2}{k\,(k-1)N(N^2-1)} . \qquad (153)$$

Dabei ist k = Anzahl der Beurteiler,
N = Anzahl der beurteilten Objekte.

In unserem Falle ergibt sich:

$$R = 1 - \frac{5(4 \cdot 7 + 2)}{(5-1) \cdot (7-1)} + \frac{12\,(23^2+8^2+25^2+12^2+10^2+34^2+28^2)}{5 \cdot (5-1) \cdot 7 \cdot (7^2 - 1)} = 0{,}825.$$

Zur Signifikanzprüfung ist zunächst zu überlegen, aus wieviel verschiedenen Korrelationen der errechnete mittlere Rangkorrelationskoeffizient **gemittelt ist**:

$$n = \frac{k(k-1)}{2} . \qquad (154)$$

In unserem Falle liegen also

$n = \frac{5(5-1)}{2} = 10$ Korrelationen zugrunde.

Damit können wir nach (44) den Standardfehler des Z-Wertes einer mittleren Korrelation ermitteln:

$$S = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot (7-3) + 3}} = 0{,}152.$$

Nach Tabelle 10 entspricht einer Korrelation von 0,825 ein Z-Wert von 1,19. Möchten wir die Signifikanz auf dem 1%-Niveau prüfen, so ergibt sich nach Tabelle 1 ein z-Wert der Standardnormalverteilung für p/2 von 2,58. Diesen Wert setzen wir nun in Beziehung (46) ein, um den Vertrauensbereich von R_z zu berechnen:

$$\text{Vertrauensbereich } \bar{R}_z = 1{,}19 \pm 2{,}58 \cdot 0{,}152;$$
$$= 1{,}19 \pm 0{,}392.$$

Der Wert 0 fällt also auf jeden Fall aus dem Vertrauensbereich heraus. R ist auf dem 1%-Niveau signifikant.
Diese Prüfung ist insofern nur ein Näherungsverfahren, als wir den durchschnittlichen Rangkorrelationskoeffizienten wie einen Produktmomentkorrelationskoeffizienten behandelt haben. Da der Wert eines Rangkorrelationskoeffizienten aber mit zunehmender Stichprobengröße ohnehin dem eines Produktmomentkorrelationskoeffizienten sehr nahe kommt und wir andererseits nur bei einer großen Anzahl

von Objekten nicht mit dem Konkordanzkoeffizienten arbeiten können, ist die Näherung recht gut.

7.2.2. Rangordnung durch Paarvergleich

Ein subtileres Verfahren ist die Rangordnung durch Paarvergleich. Hier werden die Versuchspersonen zu jedem möglichen Paar von Objekten befragt, welches sie höher einstufen (welches "dominiert"). Man kann auf diese Weise vor allen Dingen logische Widersprüche im Beurteilerverhalten zutage fördern und analysieren.

Wenn eine Person Dominanzurteile über die Größen von Hans, Maria und Karl abzugeben hat und die beiden Aussagen macht:

"Hans ist größer als Maria."
"Maria ist größer als Karl."

Dann folgt daraus, daß Hans größer als Karl sein muß. Würde die befragte Person urteilen "Karl ist größer als Hans", dann hätte sie widersprüchliche Aussagen gemacht. Eine solche Aussagengruppe heißt eine "zirkuläre Triade".
Bei der Rangordnung durch Paarvergleich kann die Konsistenz der Urteile über die Analyse solcher zirkulärer Triaden geprüft werden. Unzureichende Konsistenz kann im Unvermögen der befragten Person, aber auch in der Schwierigkeit der Materie liegen. Sie sollte jedenfalls immer davon abhalten, eine Rangskalierung vorzunehmen.
Wir nehmen an, eine Versuchsperson habe Dominanzurteile über die folgenden mathematischen Lehrstoffe hinsichtlich der Schwierigkeit abzugeben: 1. Klammerrechnungen, 2. lineare Gleichungen, 3. quadratische Gleichungen, 4. Wurzelrechnungen, 5. Exponentialrechnungen, 6. Logarithmen, 7. trignometrische Funktionen. Es sei folgende Dominanz-Matrix entstanden:

		Objekte						
		1	2	3	4	5	6	7
Objekte	1	-	1	1	1	0	1	1
	2	0	-	1	0	1	0	1
	3	0	0	-	0	1	1	0
	4	0	1	1	-	0	1	1
	5	1	0	0	1	-	1	0
	6	0	1	0	0	0	-	0
	7	0	0	1	0	1	1	-
	Sp	1	3	4	2	3	5	3

Zeile 1 bedeutet, daß die Versuchsperson folgendermaßen geurteilt hat:
2 ist schwerer als 1 (bei Dominanz des 1. Objektes wird eine 1, bei Dominanz des 2. Objektes eine 0 geschrieben), 3 ist schwerer als 1, 4 ist schwerer als 1, 5 ist leichter als 1, 6 ist schwerer als 1, 7 ist schwerer als 1.
Die diagonalsymmetrisch zueinander liegenden Werte müssen sich jeweils zu 1 ergänzen, d.h. einer 1 korrespondiert jeweils eine 0.
Wir addieren nun die Spalten auf und errechnen nach folgender Beziehung die Konsistenz:

$$K = \frac{2n(n-1)\cdot(2n-1) - 12\sum_{i=1}^{m}(Sp\Sigma)^2}{n\cdot(n^2-4)}, \quad \text{falls n geradzahlig;} \qquad (155)$$
(Pr.54)

$$K = \frac{2n(n-1)(2n-1) - 12\sum_{i=1}^{m}(Sp\Sigma)^2}{n\cdot(n^2-1)}, \quad \text{falls n ungeradzahlig}$$
(n=Zahl der Objekte).

In unserem Beispiel ergibt sich:

$$K = \frac{2\cdot 7\cdot(7-1)\cdot(2\cdot 7-1) - 12\cdot(1^2+3^2+4^2+2^2+3^2+5^2+3^2)}{7\cdot(7^2-1)} = 0{,}64.$$

Die Konsistenz der Urteile, die unsere Versuchsperson abgab, liegt somit etwas über dem Mittelmaß. Ob man sie als zureichend ansieht, dürfte in diesem Falle nicht ganz leicht zu entscheiden sein. Zur Entscheidungshilfe sehr nützlich ist ein Chi^2 - Test der Konsistenz, der aber nur durchgeführt werden kann, wenn es sich um mindestens 7 Objekte handelt. Chi^2 errechnet sich dann nach der Beziehung:

$$Chi^2 = \left(\frac{8}{n-4}\right)\left[\frac{n!}{24\cdot(n-3)!} - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(2n-1)}{12} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(Sp\Sigma)^2 + \frac{1}{2}\right] + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{(n-4)^2} \qquad (156)$$
(Pr.54)

$$\text{bei } df = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{(n-4)^2}.$$

In unserem Beispiel erhalten wir:

$$Chi^2 = \left(\frac{8}{7-4}\right)\left[\frac{7!}{24(7-3)!} - \frac{7(7-1)\cdot(2\cdot 7-1)}{12} + \frac{1}{2}\cdot 73 + \frac{1}{2}\right] + \frac{7\cdot(7-1)\cdot(7-2)}{(7-4)^2} = 24{,}00;$$

$$df = \frac{7\cdot(7-1)\cdot(7-2)}{(7-4)^2} = 23{,}33.$$

Für df = 23 finden wir in Tabelle 2 für das 5%-Niveau einen kritischen Wert von 35,17. Die Konsistenz ist also nicht signifikant, so daß es sich nicht empfiehlt, eine Rangordnung vorzunehmen.
Wäre Chi^2 signifikant gewesen, wäre die Rangordnung der Objekte einfach dadurch herzustellen gewesen, daß man sie nach ihren Spaltensummen geordnet

hätte. Es würde sich folgende Rangordnung ergeben haben:

Objekt	1	4		2,5,7		3	6
Rangplatz	1	2	3	4	5	6	7

(Die Objekte 2,5 und 7 haben gleiche Rangsummen. Sie werden darum gemeinsam dem mittleren der ihnen zukommenden Rangplätze 3 bis 5, dem Rangplatz 4, zugeteilt.)

Natürlich wird man zum Zwecke der Skalierung mehrere Versuchspersonen befragen. Die Dominanzmatrizen werden dann zu einer kombinierten Dominanzmatrix vereinigt, indem man einfach die Elemente an den gleichen Stellen aufaddiert. Es empfiehlt sich aber, den etwas umständlichen Weg zu gehen und zunächst die einzelnen Matrizen für die Versuchspersonen aufzustellen, weil man auf diese Weise vorher prüfen kann, ob eine solche Vereinigung überhaupt zulässig ist. Dazu müssen die einzelnen Versuchspersonen als derselben Stichprobe angehörig betrachtet werden können. Diese These prüft man, wie oben auf S.33 schon gezeigt, am besten mit einem Cochran-Test.

Wir führen nachstehend noch einmal die schon analysierte Dominanzmatrix mit drei weiteren auf und eine daraus gebildete kombinierte Dominanzmatrix:

	1	2	3	4	5	6	7
1	-	1	1	1	0	1	1
2	0	-	1	0	1	0	1
3	0	0	-	0	1	1	0
4	0	1	1	-	0	1	1
5	1	0	0	1	-	1	0
6	0	1	0	0	0	-	0
7	0	0	1	0	1	1	-
	1	3	4	2	3	5	3

	1	2	3	4	5	6	7
1	-	0	1	1	1	1	1
2	1	-	0	1	1	0	1
3	0	1	-	1	0	1	1
4	0	0	0	-	0	0	1
5	0	0	1	1	-	1	0
6	0	1	0	1	0	-	0
7	0	0	0	0	1	1	-
	1	2	2	5	3	4	4

	1	2	3	4	5	6	7
1	-	1	0	1	0	1	1
2	0	-	1	1	0	1	0
3	1	0	-	0	0	1	1
4	0	0	1	-	1	0	0
5	1	1	1	0	-	0	0
6	0	0	0	1	1	-	0
7	0	1	0	1	1	1	-
	2	3	3	4	3	4	2

	1	2	3	4	5	6	7
1	-	0	0	1	1	1	1
2	1	-	1	1	1	1	1
3	1	0	-	0	1	1	1
4	0	0	1	-	1	1	1
5	0	0	0	0	-	1	1
6	0	0	0	0	0	-	0
7	0	0	0	0	0	1	-
	2	0	2	2	4	6	5

	1	2	3	4	5	6	7
1	-	2	2	4	2	4	4
2	2	-	3	3	3	2	3
3	2	1	-	1	2	4	3
4	0	1	3	-	2	2	3
5	2	1	2	2	-	3	1
6	0	2	0	2	1	-	0
7	0	1	1	1	3	4	-
	6	8	11	13	13	19	14

Die für einen Cochran-Test benötigten Werte ermitteln wir auf folgende Weise:

Wir summieren alle Werte in der rechts oben von der Diagonale der Leerzellen liegenden Hälfte der kombinierten Dominanzmatrix. Diese Summe ist die $\sum U$, die in diesem Falle gleich der $\sum Vp$ ist.
Wir quadrieren jeden der eben aufaddierten Werte und summieren die Quadrate. Der Betrag , den wir auf diese Weise erhalten, ist die $\sum Vp^2$.
Wir addieren die Werte in jeder einzelnen Dominanzmatrix, die in der Hälfte rechts oben von der Diagonale liegen, und quadrieren die Summe für jede einzelne Matrix. Die Summe dieser Quadrate ist die $\sum U^2$.
In unserem Beispiel rechnen wir:

$2+2+4+2+\ldots 3+1 = 53 = \sum U = \sum Vp;$
$2^2+2^2+4^2+2^2+\ldots 3^2+1^2 = 157 = \sum Vp^2.$

Matrix	U	U^2
1	13	169
2	13	169
3	10	100
4	17	289
		$727 = \sum U^2,$

Zahl der einzelnen Dominanzmatrizen = 4 = k.
Nach (69) ist

$$\text{Chi}^2 = \frac{(4-1)\cdot(4\cdot 727 - 53^2)}{4\cdot 53 - 157} = 5{,}40.$$

Bei df = k - 1 = 3 ist dieser Wert auf dem 5%-Niveau nicht signifikant: Der kritische Wert nach Tab. 2 würde 7,82 betragen. Man darf also davon ausgehen, daß die 4 Versuchspersonen, von denen die einzelnen Dominanzmatrizen stammen, derselben Stichprobe angehören. Insofern wäre einer Zusammenfassung der Daten nichts entgegenzuhalten, wenn nur die Konsistenz hinreichte. Die Rangskala wird dann aus einer kombinierten Dominanzmatrix ebenso aus den Spaltensummen gewonnen, wie wir es oben an einer einzelnen Dominanzmatrix bereits vorführten.

7.3. Weitere Verfahren

Man kann nach einem Verfahren von Hull Rangplätze in Prozentränge umrechnen nach der Beziehung:

$$R_{\%} = (R - 0,5) \cdot \frac{100}{N}. \qquad (157)$$

Dabei ist R = Rangplatz,
N = Zahl der verglichenen Objekte.

Für die oben aus einer (allerdings recht inkonsistenten!) Dominanzmatrix gewonnenen Ränge (vgl. S. 98) hätten wir zu rechnen:

$N = 7$

$$R_{\%_1} = (1 - 0,5)\frac{100}{7} = 7,14$$

$$R_{\%_2} = (2 - 0,5)\frac{100}{7} = 21,43$$

$$R_{\%_3} = (4 - 0,5)\frac{100}{7} = 50,00$$

$$R_{\%_4} = (6 - 0,5)\frac{100}{7} = 78,57$$

$$R_{\%_5} = (7 - 0,5)\frac{100}{7} = 92,86$$

Zu diesen Prozenträngen können wir in Tabelle 14 Skalenplätze nachschlagen. Anstelle von 7,14 wählen wir den am nächsten liegenden Wert 6,81 und entnehmen dazu den Skalenplatz 2,1. Entsprechend verfahren wir mit den übrigen Prozenträngen und gewinnen folgende Skala:

Objekt	1	4	2,5,7	3	6
Skalenplatz	2,1	3,4	5,0	6,6	7,9

Auch die oben schon behandelten z-Standardisierungen und Prozentränge (vgl. S. 8) stellen in gewissem Sinne Skalen dar. Mit ihrer Hilfe können jedenfalls Messungen in verschiedenen Einheiten vergleichbar gemacht werden. Wenn wir wissen, daß ein Schüler 3,27m weit gesprungen und 75m in 13,6sec gelaufen ist, haben wir Schwierigkeiten, diese Leistungen in ein Verhältnis zu setzen. Die Aussage, er habe innerhalb der Altersgruppe an seiner Schule im Weitsprung einen Prozentrang von 87,3 und im 75m-Lauf einen solchen von 68,9 erreicht, erlaubt unmittelbar die Folgerung, daß er - wenn man die Leistungen seiner Altersgenossen zugrundelegt - offenbar im Weitsprung besser als im 75m-Lauf ist. In ähnlicher Weise hätten wir auch z-Werte verwenden können.

II. Teil: Programme

Die folgenden Programme sind jeweils in zwei Varianten ausgearbeitet: in algebraischer Eingabelogik (AOS), wie sie den Rechnern von Texas Instruments zugrundeliegt, und in umgekehrter polnischer Notation (UPN) für die Rechner von Hewlett & Packard.
Die Programme laufen so, wie sie sind, auf dem TI-58, TI-58C und TI-59 sowie auf dem HP 67 und dem HP 97. Die TI-Varianten können z.T. auch auf dem TI-57 abgewickelt werden, soweit sie nicht eine Speicherkapazität von mehr als 7 Datenregistern und mehr als ca. 60 - 65 Programmschritte benötigen.[1] Ferner darf keine indirekte Adressierung und keine mit "Op" aufzurufende festprogrammierte Operation vorkommen. Soweit nicht mehr als 98 Programmzeilen benötigt werden, laufen die HP-Varianten auch auf dem HP 19 C und 29 C. Allerdings müssen beim TI 57 die Labels anders gesetzt und beim HP 19C und 29 C Besonderheiten in der indirekten Adressierung, beim Aufrauf der Primär- und Sekundärregister und bei der Verwendung des I-Registers berücksichtigt werden. Um die Abänderung für die HP-Varianten nicht allzusehr zu erschweren, wurden bei geeigneten Programmen grundsätzlich numerische Labels verwendet, die zugegebenermaßen dem vorhandenen Bedienungskomfort des HP 67 und HP 97 nicht optimal gerecht werden. Auch wurde darauf verzichtet, die in diesen Rechnern festprogrammierte Funktion "Fakultät" (X!) zu verwenden. Besitzer dieser Modelle können leicht entsprechende Programmteile durch die X!-Taste ersetzen.
Auf spezielle Statistik-Software von Texas-Instruments und Hewlett & Packard wurde kein Bezug genommen, da wir nicht voraussetzen mochten, daß der Benutzer auch diese besitzt. Es sei aber betont, daß sich die Anschaffung in vielen Fällen lohnen dürfte, weil sie eine große Zahl weiterer Möglichkeiten eröffnet und die Arbeit in mancherlei Hinsicht komfortabler wird.
Bei der Programmierung sind nicht immer alle Möglichkeiten ausgeschöpft, um die Länge auf ein Minimum zu beschränken. Die Übersichtlichkeit der Programme auch für einen wenig eingeweihten Leser sollte nicht irgendwelchen Tricks und kunstvollen Techniken geopfert werden, mit deren Hilfe man da und dort noch ein paar Schritte einsparen könnte.

---

1) Der TI 57 hat eine Kapazität von 50 Programmschritten, wobei jedoch je nach Programm in die einzelnen Schritte bis zu einem Drittel mehr an Information verpackt werden kann.

Es wäre an sich wünschenswert, den Aufbau zumindest der komplizierteren Programme jeweils durch Ablaufschemata zu verdeutlichen. Angesichts des damit zwangsläufig verbundenen größeren Umfanges und höheren Preises des Buchs wurde davon Abstand genommen. Statt dessen analysieren wir in der Folge ein Programm exemplarisch, in der Hoffnung, dem Leser dadurch den Zugang zu den übrigen Programmen etwas zu erleichtern.
Die Anlage des Programms 55 ist in der Abbildung auf S. 104 dargestellt: Entsprechend den Rechenvorschriften für eine 1-faktorielle Varianzanalyse mit Meßwiederholungen (vgl. S.82) werden zunächst die Werte von p und q (= Anzahl der Faktorstufen und der Versuchspersonen) eingegeben (1.). Das Programm speichert diese Werte für weitere Berechnungen. Sodann werden alle X (alle Meßwerte der Varianzanalyse) zeilenweise eingetastet (2.). Das Programm prüft selbständig nach jeder Eingabe, ob eine Meßserie abgeschlossen ist: Solange dies nicht der Fall ist, läuft es in einer Schleife zurück und ist bereit für die Eingabe des nächsten X-Wertes. Ist eine Serie vollständig, werden zunächst einige zusätzliche Werte berechnet. Dann kehrt das Programm ebenfalls in einer Schleife wieder zurück, um weitere X-Werte zu verarbeiten. Sofern die Werte zeilenweise eingegeben werden, braucht man also nicht darauf zu achten, wann eine neue Serie von Messungen beginnt. Es folgt dann schließlich die Eingabe der Faktorstufensummen (3.), die vom Programm quadriert und gespeichert werden.
Nach dem Abschluß der Eingaben können die Quadratsummen berechnet werden: Zunächst ermittelt das Programm die dafür nötigen Kennziffern. Bei der Berechnung der Quadratsummen wird der Umstand ausgenutzt, daß für die QS_{zwVpn}, die QS_{treat} und die QS_{tot} jeweils die Kennziffer 1 von einer anderen abgezogen werden muß. Dieser sich dreimal wiederholende Vorgang ist als Unterprogramm ausgegliedert (5.), das immer dann aufgerufen wird und abläuft, wenn die genannte Subtraktion erforderlich ist. Da das Ergebnis jeweils die gesuchte Quadratsumme ist, enthält das Unterprogramm auch noch den Befehl für einen Programmstop, damit das Resultat abgelesen werden kann. Die Berechnung der übrigen Quadratsummen erfolgt ausschließlich im Hauptteil des Programms (4.).
Anschließend an das Ablaufschema sind alle Befehle in der Standarddarstellung aufgelistet, welche über den gesamten Programmteil hinweg durchgehalten ist. Diese Befehle müssen der Reihe nach programmiert werden, damit der Rechengang in der beschriebenen Weise abläuft. Informieren Sie sich anhand der Bedienungsanleitung für Ihren Rechner, wie Sie Programme eingeben müssen. Löschen Sie sicherheitshalber zuvor den Programmspeicher. Die Teile 1., 2., 3., 4. und 5. sind in der Programmauflistung durch Überschriften gekennzeichnet. In der Regel beginnen Programmteile mit Labels. Besonders hervorgehoben sind lediglich Entscheidungsstellen (durch ein Sechseck) und der Aufruf von Unterprogrammen (durch ein Rechteck). Auf Entscheidungsstellen folgt eine sog. bedingte Verzweigung. D.h. es hängt von der Beantwortung einer "Frage" ab, ob ein Sprung im Programmablauf und zu welcher Stelle er erfolgt. In dem hier analysierten Beispiel wird eine solche Frage bei den Schritten 021 und 022 gestellt: Ist die Eingabe einer Meßserie abgeschlossen? Mathematisch lautet diese Prüfung: Ist die Anzahl der verarbeiteten X-Werte ein ganzzahliges Vielfaches von p ? Wird die Frage verneint, springt das Programm sofort wieder zu Label B' zurück. Wird sie bejaht, werden die in den Schritten 024 bis 034 programmierten Operationen durchgeführt, bevor ebenfalls ein Rücksprung zu Label B' erfolgt. Unbedingte Sprünge, Schleifen und Verzweigungen sind nicht besonders hervor-

gehoben. Man erkennt sie ohnedies unschwer an dem Befehl GTO bzw. GOTO (dem dann allerdings keine Entscheidungsstelle vorausgehen darf) in Verbindung mit einem Label oder einer Programmadresse. Z.B. enthalten die Schritte 035 und 036 des hier analysierten Programms den Befehl, in jedem Falle zu Label B' zurückzukehren. Ohne besondere Markierung sind schließlich auch Unterbrechungen des Programmablaufes ersichtlich: Sie befinden sich immer dort, wo ein R/S-Befehl steht. Es müssen dann entweder Daten in das Programm eingegeben werden (hier z.B. bei 013), es kann oder muß ein ganzer Programmteil wiederholt werden (hier z.B. bei 042), oder es sind Ergebnisse abzulesen (hier z.B.bei 077).

Einige Erläuterungen scheinen auch noch zum Verständnis der den Programmen jeweils in Tabellenform beigegebenen Bedienungsanleitungen angebracht:

In der linken Spalte ("Eingaben") lesen Sie, welche Werte in welcher Reihenfolge einzugeben sind. In der zweiten Spalte von links ("Tasten") sind die Tasten angegeben, welche zur Durchführung des Programms zu betätigen sind. In der rechts anschließenden Spalte ("Ergebnisse") ist aufgeführt, welche Ergebnisse nach welchen Tastenbefehlen erscheinen.

Die Bedienungsanleitung zu Programm 55 wäre in Worten folgendermaßen zu beschreiben:

Tasten Sie den Betrag von p ein und drücken Sie anschließend 2nd und A'.

Geben Sie den Betrag von q ein und drücken Sie die Taste R/S.

Dann geben Sie alle Werte von X (die Meßwerte der Varianzanalyse) ein, wobei Sie nach jeder Eingabe die R/S-Taste betätigen müssen. Die Werte sind dabei nach Zeilen geordnet einzugeben. Es ist nicht erforderlich, nach dem Ende einer Zeile eine besondere Taste zu drücken. Die Bedienungsanleitung würde sonst entsprechende Angaben enthalten.

Wenn Sie mit dieser Prozedur fertig sind, tasten Sie die Werte für die Faktorstufensummen I,1 - I,2 - I,3 etc. ein, jeweils gefolgt von einem Druck auf die Taste A.

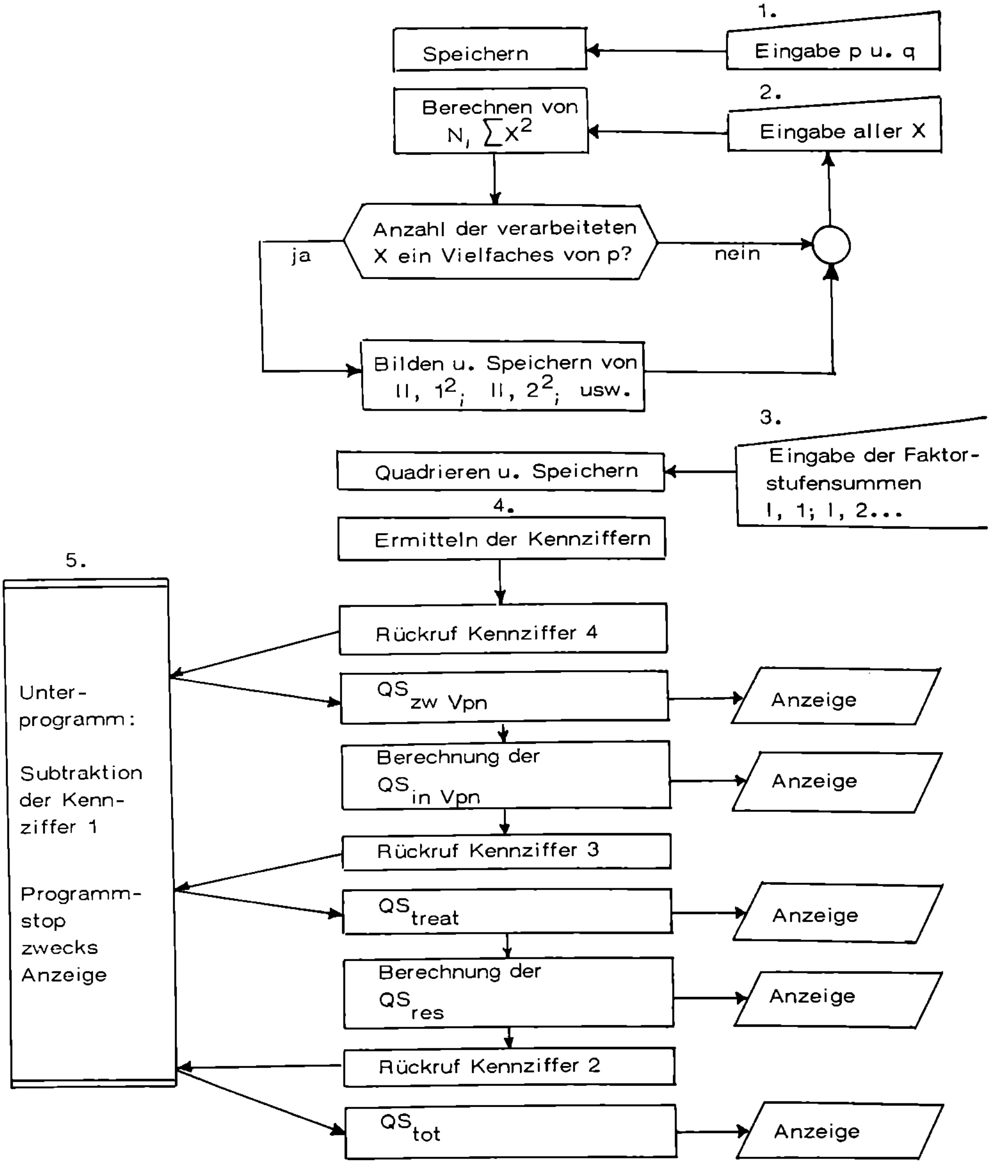
Damit ist der Eingabevorgang beendet: Für die folgenden Tasten enthält die Spalte "Eingaben" keine Anweisungen mehr.

Drücken Sie jetzt die Tasten 2nd und C'. Das Programm zeigt dann die QS_{zwVpn} an (Spalte "Ergebnisse"). Auf jeweils einen Druck der Taste R/S erscheinen die übrigen Quadratsummen. Mit der Anzeige der QS_{tot} ist das Programm beendet.

Vor der Anwendung eines Programms sollte man stets alle Speicher löschen. Sehen Sie in der Bedienungsanleitung Ihres Rechners nach, welche Manipulationen dazu erforderlich sind.

Die beiden rechten Spalten der meisten Programme enthalten Daten für eine Testrechnung. Sie sollten diese unbedingt durchführen, um sicherzugehen, daß Ihnen bei der Programmierung keine Fehler unterlaufen sind und daß Sie das Programm richtig bedienen. Geben Sie die Testdaten ein und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse anhand der abgedruckten Resultate. Stimmen sie überein, können Sie nach abermaliger Speicherlöschung mit Ihren Berechnungen beginnen. Für manche Programme (auch für das hier analysierte) ist wegen des Platzbedarfs für eine Testrechnung auf ein Rechenbeispiel im Textteil verwiesen, das Sie zur Prüfung verwenden können.

Beispielanalyse für Programm 48



Programm 48

1-faktorielle Varianzanalyse mit Meßwertwiederholungen

```
1. Vorbe-
reitung
000  Lbl
     A'
     STO
     00
     STO
005  02
     R/S
     STO
     01
     GTO
010  B'
2. Daten-
eingabe I
011  Lbl
     B'
     R/S
     SUM
015  03
     SUM
     04
     x^2
019  SUM
020  05
     DSZ
     0
     B'
     RCL
025  04
     x^2
     SUM
     06
     0
030  STO
     04
     RCL
     02
     STO
035  00
     GTO
     B'
3. Daten-
eingabe II
038  Lbl
     A
040  x^2
     SUM
     07
     R/S
4. Quadrat-
summen
044  Lbl
045  C'
     RCL
     03
     x^2
     STO
050  03
     RCL
     02
     INV
     Prd
055  03
     INV
     Prd
     06
     RCL
060  01
061  INV
     Prd
     03
     INV
065  Prd
     07
     RCL
     06
     SBR
070  1/x
     RCL
     05
     -
     RCL
075  06
     =
     R/S
     RCL
     07
080  SBR
     1/x
     RCL
     05
     -
085  RCL
     07
     -
     RCL
     06
090  +
     RCL
     03
     =
     R/S
095  RCL
     05
     SBR
     1/x
5. Unter-
programm
099  Lbl
100  1/x
     -
     RCL
     03
     =
105  R/S
     INV SBR
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
p	2nd	A'		Als Testrechnung möge das Beispiel auf S.83 benützt werden.	
q	R/S				
alle X (zeilenweise)					
	R/S				
I,1; I,2...I,p;	A				
	2nd	C'	QS zw Vpn		
	R/S		QS in Vpn		
	R/S		QS treat I		
	R/S		QS res		
	R/S		QS tot		

Programme in algebraischer Eingabelogik (AOS)

Programm 1 (Theorie S. 1, 3 - 6, Formel 1, 2, 6 - 11, 14 - 19)
Arithm. Mittel, Varianz, Standardabweichung (für tabellierte Daten[1])

1. Daten eingabe

```
000  Lbl
     A
     STO
     00
     x
005  R/S
     STO
     01
     SUM
     02
010  =
     SUM
     03
013  RCL
     00
015  x²
     x
     RCL
     01
     =
020  SUM
     04
     R/S
```

2. arithm. Mittel

```
023  Lbl
     B
025  RCL
     03
     :
     RCL
     02
030  =
     R/S
```

3. Varianz

```
032  Lbl
     C
     RCL
035  04
     -
     RCL
     03
039  x²
040  :
     RCL
     02
     =
     STO
045  05
     :
     (
     RCL
     02
050  -
     1*
     )
053  =
     STO
055  06
     R/S
```

4. Standardabweichung

```
057  Lbl
     D
     RCL
060  06
     √x
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten		Ergebnisse
				Intervall	f	
$IM_{1,2\ldots n}$[1]	A			0-2	2	$\bar{X}$ = 5,667
$f_{1,2\ldots n}$[1]	R/S			3-5	3	SD_{N-1} = 4,000
	B		$\bar{X}$	6-8	2	V_{N-1} = 16,000
	C		V	9-11	1	SD_N = 3,771
	D		SD	12-14	1	V_N = 14,222

[1]) Für Rohdaten sind diese Funktionen fest programmiert.
*) Falls V_N und SD_N erwünscht, ist hier 0 zu programmieren.
Eingabenreihenfolge IM, f_1, IM_2, f_2...

Programm 2 (Theorie S. 2 f., Formel 5)
Median, Quartile, Centile für maximal 40 Objekte bzw. Klassen

1. Eingabe v. Urdaten

```
000  Lbl
     A
     STO
     49
     1
005  SUM
     Ind 49
     .
     5 *)
     0 *)
010  SUM
     00
012  R/S
```

2. Eingabe v. tab. Daten

```
013  Lbl
     B
015  STO
     49
017  R/S
     SUM
     Ind 49
020  x
     .
     5 *)
     0 *)
024  =
025  SUM
     00
     R/S
```

3. Median, Quartile, Centile

```
028  Lbl
```

*) Bei anderen Centilen sind hier entsprechende andere Zahlen zu programmieren, z.B. 25 für C

029	C	039	-	049	30	059	:	068	E
030	1	040	RCL	050	R/S	060	RCL		0
	SUM		00		Lbl		Ind 46	070	STO
	46		=		D		x		45
	RCL		STO		RCL		RCL		STO
	Ind 46		48		46		44		46
035	SUM	045	$\langle x \geq t \rangle$	055	R/S	065	=		STO
	47		D		-		R/S	075	47
	RCL		GTO		RCL		4. Speicher-		STO
	47		0		48		vorbereitung		48
						067	Lbl		R/S

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
	5	2ndOp		a) Urdaten:	
	1	7		1; 1; 3; 4; 3; 3;	
Intervallbreite 1)	STO			5; 7; 8; 5; 2; 6;	
	4	4		8;	Z = 4
a) Urdaten:					
Codes 2)	A				
	C		Z	b) tab. Daten:	
b) tab. Daten				IC Intervall f	
Codes 2)	B			1 1-2,9 3	
f	R/S			2 3-4,9 4	
	C		Code der	3 5-6,9 3	
			Klasse, in	4 7-8,9 3	Z = 4,663
			welcher Z		
			liegt		
Obergrenze die-					
ser Klasse	R/S		Z		
Speichervorbe-					
reitung vor dem					
Abfragen weiterer					
Quartile/Centile	E				

1) Bei Urdaten ist als Intervallbreite 1 einzugeben.
2) Es sind Codes von 1 bis 40 zulässig.

Programm 3 (Theorie S. 7, Formel 25, 26)
Schiefe und Exzeß

1. Daten-		004	R/S	010	STO	016	02	022	RCL
eingabe		005	STO		02		-		01
000	Lbl		01		R/S		RCL		=
	A		R/S		STO		00	025	STO
	STO		Lbl		03	020	=		07
	00		B	015	RCL		:		INV

```
028  x≥t
     A'
030  Yx
     3
     =
     GTO
     B'
035  R/S
     Lbl
     A'
     +/-

039  Yx
040  3
     =
     +/-
     GTO
     B'
045  R/S
     Lbl
     B'
     x
     RCL

050  03
     =
     SUM
     04
     RCL
055  07
     IXI
     Yx
     4
     x
060  RCL
     03

062  SUM
     05
     =
065  SUM
     06
     R/S

2. Schiefe u.
Exzeß
068  Lbl
     C
070  RCL
     05

072  INV
     Prd
     04
075  INV
     Prd
     06
     RCL
     04
080  R/S
     RCL
     06
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten		Testrechnung Ergebnisse
$\bar{x}$	A			10, 141		
SD_x	R/S			5,039		
$IM_{1,2\ldots m}$ 1)	B			Interv.	f	
$f_{1,2\ldots m}$ 1)	R/S			0-4	12	
	C		Schiefe	5-9	23	Schiefe =
	R/S		Exzeß	10-14	25	-0,122
				15-19	18	Exzeß =
						1,891

1) Eingabereihenfolge: IM_1, f_1, IM_2, f_2 etc.

Programm 4 (Theorie S. 8, Formel 27)
Prozentränge für maximal 40 Objekte bzw. Klassen

```
1. Eingabe
v. Urdaten
000  Lbl
     A
     STO
     49
     1
005  SUM
     48
     SUM
     Ind 49
     R/S

2. Eingabe
v. tab. Daten
010  Lbl
     B
012  STO
     49
     R/S
015  SUM
     Ind 49
     SUM
     48
     R/S

3. Prozent-
ränge
020  Lbl
     C
     STO
     45
     STO
025  47

026  RCL
     Ind 47
     SUM
     46
030  RCL
     47
     -
     1
     =
035  x=t
     D
     1
     INV
     SUM
040  47
     GTO

042  0
     26
     R/S
045  Lbl
     D
     RCL
     46
     :
050  RCL
     48
     x
     RCL
     41
055  -
     RCL
     Ind 45

058  :
     2
060  :
     RCL
     48
     x
     RCL
065  41
     =
     R/S
     0
     STO
070  45
     STO
     46
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung	
				Eingabedaten	Ergebnisse
	5	2ndOp		a) Urdaten:	
	1	7		1;1;3;4;3;	
Intervallbreite[1]	STO	00		3;5;7;8;8;	
100	STO	41		5;2;6;	
a) Urdaten:				PR von 3	PR = 34,62
Codes[2] (C)$_{1,2,\ldots,n}$	A				
C des X-Wertes,				b) tab. Daten:	
f. den ein PR ge-				C Intervall f	
sucht wird	C		PR	1 1-2,9 3	
b) tab. Daten:				2 3-4,9 1	
Codes[2] (C)	B			3 5-6,9 2	
f	R/S			4 7-8,9 4	
C des X-Wertes,				5 9-10,9 0	
f. den ein PR ge-				6 11-12,9 2	
sucht wird	C		PR	PR von C = 4	PR = 66,67
vor Aufruf eines					
weiteren PR	R/S				

1) Bei Urdaten ist als Intervallbreite 1 einzugeben.
2) Es sind Codes von 1 bis 40 zulässig.

Programm 5/6 (Theorie S. 8, Formel 28)
Standardisierung von Verteilungen

```
1. Eingabe
v. Urdaten
000 Lbl
    A
    SUM
    00
    x²
005 SUM
    01
    1
    SUM
    02
010 R/S

2. Eingabe
v. tab. Daten
011 Lbl
    B
    STO
    03
015 x
016 R/S
    STO
    04
    SUM
020 02
    =
    SUM
    00
    RCL
025 03
    x²
    x
    RCL
    04
030 =
    SUM
    01
    R/S

3. Standardi-
sierungsvor-
bereitung
034 Lbl
035 C
    RCL
    00
    :
    RCL
040 02
    =
    STO
    05
    RCL
045 00
    x²
    :
    RCL
    02
050 =
    INV
    SUM
    01
    RCL
055 02
    -
    1
    =
    INV
060 Prd
    01
    RCL
    01
    √x
065 STO
    06
    R/S

4. z-Werte
068 Lbl
    D
070 -
    RCL
    05
    =
    :
074 RCL
075 06
    =
    R/S

5. x-Werte
078 Lbl
    E
080 x
    RCL
    06
    +
    RCL
085 05
    =
    R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
a) Urdaten:				a) Urdaten: 5; 3;	
alle X	A			2; 1; 7; 0; 8; 4; 6;	
	C			3; 6; 12;	
b) tab. Daten:				X_i = 0; z_i = 2	z_i = -1,425
$IM_{1,2 \ldots m}$ 1)	B			b) tab. Daten:	X_i = 11,417
$f_{1,2 \ldots m}$ 1)	R/S			f	
	C			0-2 3	
X_i (Int.Mitte)	D		z_i	3-5 4	
z_i	E		X_i	6-8 4	
				9-11 0	
				12-14 1	
				X_i = 0	z_i = 1,443
				z_i = 2	X_i = 11,928

1) Eingabereihenfolge: IM_1, f_1, IM_2, f_2 etc.

Programm 7 (Theorie S. 10, Formel 30)
Binomialverteilung

1. Daten-eingabe

```
000  Lbl
     A
     STO
     00
     -
005  R/S
     STO
     01
     =
     STO
010  02
     1
     -
     R/S
     STO
015  03
```

2. Berechnung v. p(x)

```
016  =
     STO
     04
     RCL
020  03
     Y^x
     RCL
     01
     =
025  STO
     03
     RCL
     04
     Y^x
030  RCL
     02
     =
     Prd
     03
035  [SBR
      x²]
     STO
     04
     RCL
040  00
     STO
     01
     [SBR
      x²]
045  STO
     00
     RCL
     02
     STO
050  01
     [SBR
      x²]
     x
     RCL
055  04
     =
     INV
     Prd
     00
060  RCL
     00
     x
     RCL
     03
065  =
     R/S
```

3. Unterprogramm "Fakultät"

```
067  Lbl
     x²
     RCL
070  01
071  <x=t>
     √x
     Lbl
     1/x
075  RCL
     01
     x
     <DSZ>
     1
080  1/x
     Lbl
     √x
     1
     =
085  INVSBR
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
N	A			N = 10	
k	R/S			k = 7	
p	R/S		p(x)	p = 0,5	p(x) = 0,1172

Programm 8 (Theorie S. 11, Formel 31)
Poissonverteilung

1. Daten		2. Ermitt-		021	Y^x	033	RCL	044	03
eingabe		lung v.p(x)			RCL		01	045	RCL
000	Lbl	010	1		01	035	x		04
	A		INV		=		DSZ		:
	:		Lnx	025	STO		1		RCL
	R/S		Y^x		04		B'		02
	=		RCL		RCL		Lbl	050	:
005	STO	015	00		01	040	A'		RCL
	00		=		x=t		1		03
	R/S		STO	030	A'		=		=
	STO		02		Lbl		STO		R/S
	01		RCL		B'				
		020	00						

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
f	A			f = 319[1]	
N	R/S			N = 2450	
k	R/S		p(X)	k = 5	p(X) = 0,0000002738

1) f ist die Häufigkeit mit welcher das seltene Ereignis unter N Fällen auftritt.

Programm 9 (Theorie S. 14 f., Formel 36)
Normalitätsprüfung

```
1. Vorbe-
reitung
000  Lbl
     A
     STO
     00
     R/S
005  STO
     01
     R/S
     STO
     02
010  R/S

2. erwartete
Häufigkeiten
011  Lbl
012  B
     SBR
     E
015  R/S
     STO
     03
     R/S
     SBR
020  E
     R/S
     -
     RCL
     03
025  =
     IXI
     x
     RCL
029  02
030  =
     R/S
     Lbl
     C
     SBR
035  E
     R/S
     +/-
     +
     .
040  5
     =
     x
     RCL
     02
045  =
046  R/S

3. CHI-Qua-
drat
047  Lbl
     D
     -
050  R/S
     STO
     03
     =
     x²
055  :
     RCL
     03
     =
     SUM
060  04
     R/S

4. Unter-
programm :
z-Wert
062  Lbl
     E
     -
065  RCL
     00
     =
     :
     RCL
070  01
     =
     INV SBR
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten		Testrechnung: Ergebnisse
$\bar{X}$	A			$\bar{X}$ = 9,1		
SD_x	R/S			SD_x = 4,749		
N	R/S			N = 100		
Intervalle 2 bis						
n-1:						
Untergrenze	B		z +/-	Intervall	f_b	
$F_{+/-}$ 1)	R/S			1-5,9	25	25,14
Obergrenze	R/S		z +/-	6-10,9	38	39,02
$F_{+/-}$ 1)	R/S		fe	11-15,9	31	26,82
1.u. letztes				16-20,9	6	7,35
Intervall:						
Obergrenze 1./						
Untergrenze						
letztes Intervall	C		z			
|F|	R/S					Chi^2 = 0,927
beob.Häufigkeit	D					
erw. Häufigkeit	R/S					
	RCL	0 4	Chi^2			

1) F zu z in Tab. 1 nachschlagen und mit dem Vorzeichen von z eingeben.

Programm 10 (Theorie S. 19, Formel 48)
Unterschied von Prozentangaben

000	Lbl	011	R/S	022	0	033	01	044	RCL
	A		STO		0		x	045	04
	STO		03		-		(		=
	00		R/S	025	RCL		1		$\sqrt{x}$
	-	015	STO		00		0		INV
005	R/S		04		)		0		Prd
	STO		RCL		:		-	050	02
	01		00		RCL	040	RCL		RCL
	=		x	030	03		01		02
	STO	020	(		+		)		R/S
010	02		1		RCL		:		

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
p_1	A		p_1 = 4,8	
p_2	R/S		p_2 = 17,0	
N_1	R/S		N_1 = 386	
N_2	R/S	CR	N_2 = 245	CR = -4,63

Programm 11 (Theorie S. 20, Formel 49)
t-Test für unabhängige Stichproben

000	Lbl	005	STO	010	R/S	015	R/S	020	00
	A		00		+		=		RCL
	-		R/S		R/S		$\sqrt{x}$		00
	R/S		x^2		x^2		INV		R/S
	=		:		:		Prd		

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
$\overline{X}_1$	A		5,48	
$\overline{X}_2$	R/S		3,27	
SD_1	R/S		7,20	
N_1	R/S		215	
SD_2	R/S		9,14	
N_2	R/S	t	307	t = 3,08

Programm 12 (Theorie S. 21, Formel 53)
t-Test für abhängige Stichproben

```
1. Daten-
eingabe
000  Lbl
     A
     -
     R/S
     =
005  SUM
     00
     x²

008  SUM
     01
010  1
     SUM
     02
     R/S

2. Berechnung
von t
014  Lbl

015  B
     RCL
     02
     -
     1
020  =
     √x
     x
     RCL
     00

025  =
     STO
     03
     RCL
     01
030  x
     RCL
     02
     -
     RCL

035  00
     x²
     =
     √x
     INV
040  Prd
     03
     RCL
     03
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung	
				Eingabedaten	Ergebnisse
$X_{1,2\ldots n}$ [1] $X'_{1,2\ldots n}$ [1]	A R/S B		 t	X = 5; 4; 2; 6; X' = 2; 3; 5; 6;	 t = 0,20

1) Eingabereihenfolge X_1, X'_1, X_2, X'_2 etc.

Programm 13 (Theorie S. 23, Formel 57)
z-Wert für U-Test mit unverbundenen Rängen

```
1. Daten
eingabe
000  Lbl
     A
     STO
     00
     x
005  R/S
     STO
     01
     =

009  STO
010  03
     R/S
     STO
     04

2. Berechnung
von z
014  RCL
015  00
     +

017  RCL
     01
     +
020  1
     =
     STO
     05
     x
025  RCL
     03
     :

028  3
     =
030  √x
     STO
     03
     RCL
     00
035  x
     RCL
     05
     -

039  2
040  x
     RCL
     04
     =
     :
045  RCL
     03
     =
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung	
				Eingabedaten	Ergebnisse
n_1 n_2 T_1	A R/S R/S		 z	n_1 = 8 n_2 = 14 T_1 = 73	 z = 1,297

Programm 14 (Theorie S. 24, Formel 58)
z-Wert für U-Test mit verbundenen Rängen

```
1. Daten-
eingabe
000  Lbl
     A
     STO
     00
     R/S
005  STO
     01
     R/S
     STO
     02
010  GTO
     B
     Lbl
     B
     R/S
015  STO
     03
017  Y^x
     3
     -
020  RCL
     03
     =
     SUM
     04
025  GTO
     B
2. Berechnung z
027  Lbl
     C
     RCL
030  00
     x
     (
     CE
034  +
035  RCL
     01
     +
     1
     )
040  -
     2
     x
     RCL
     02
045  =
     STO
     03
     RCL
     00
050  +
     RCL
     01
053  =
     STO
055  05
     -
     1
     =
     x
060  3
     x
     RCL
     05
     :
065  RCL
     00
     :
     RCL
     01
070  :
     (
072  RCL
     05
     Y^x
075  3
     -
     RCL
     05
     -
080  RCL
     04
     )
     =
     √x
085  x
     RCL
     03
     =
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
n_1	A			$n_1 = 9$	
n_2	R/S			$n_2 = 28$	
T_1	R/S			$T_1 = 248$	
alle Rgl[1]	R/S			Rgl = 2;4;3	
	C		z		z = -2,728

1) Rgl ist die Anzahl der Objekte mit jeweils gleichem Rangplatz.

Programm 15 (Theorie S. 26 f., Formel 62)
Wilcoxen-Test

```
1. Daten
eingabe
000  Lbl
     A
     -
     R/S
     STO
005  00
2. Berechnung
von CR
006  x
007  (
     CE
     +
010  1
     )
     :
     4
     =
015  STO
016  01
     RCL
     00
     x
020  (
     CE
     +
     1
     )
025  x
026  (
     2
     x
     RCL
030  00
     +
     1
     )
     :
035  2
036  4
     =
     √x
     INV
040  Prd
     01
     RCL
     01
     R/S
```

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung	
			Eingabedaten	Ergebnisse
T_w n	A R/S	 CR	T_w = 50 n = 8	 CR = 4,481

Programm 16 (Theorie S. 27, Formel 63)
Vorzeichen-Test für N ⩽ 25

```
1. Daten-
eingabe
000  Lbl
     A
     STO
     00
     R/S
005  STO
     01
2. Berechnung
von p
007  SBR
     B
     STO
010  02
     RCL

012  00
     -
     RCL
015  01
     =
     SBR
     B
     Prd
020  02
     RCL
     00
     SBR
     B
025  INV
     Prd
     02

029  5
030  Y^x
     RCL
     01
     x
     .
035  5
     Y^x
     (
     RCL
     00
040  -
     RCL
     01
     )
     x
045  RCL

046  02
     1/x
     =
     R/S
3. Unterpro-
gramm "Fa-
kultät"
050  Lbl
     B
     x=t
     A'
     STO
055  03
     1
     STO
     04
     GTO

060  B'
     Lbl
     A'
     1
     INV SBR
065  Lbl
     B'
     RCL
     03
     Prd
070  04
     DSZ
     3
     B'
     RCL
075  04
     INV SBR
```

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung	
			Eingabedaten	Ergebnisse
N F	A R/S	 p	N = 24 F = 7	 p = 0,0206

Programm 17 (Theorie S. 29 f., Formel 65)

4-Felder-Chi-Quadrat

```
1. Daten-
eingabe
000  Lbl
     A
     STO
     00
     +
005  R/S
     STO
     01
     +
     R/S
010  STO
     02
     +
013  R/S
     STO
015  03
2. Ermittlung
des Chi^2
016  =
     STO
     04
     RCL
020  04
     x
     (
     RCL
     00
025  x
     RCL
     03
     -
     RCL
030  01
     x
     RCL
     02
     )
035  x^2
     :
     (
     RCL
     00
040  +
     RCL
     01
     )
     :
045  (
     RCL
     02
     +
     RCL
050  03
     )
     :
     (
     RCL
055  00
     +
     RCL
     02
     )
060  :
     (
     RCL
     01
     +
065  RCL
     03
     )
     =
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
a	A			a = 4	
b	R/S			b = 14	
c	R/S			c = 28	
d	R/S		Chi^2	d = 28	Chi^2 = 4,282

Programm 18 (Theorie S. 30 f., Formel 32, 66)

Kontingenztafel für maximal 24 Zeilen

```
1. Zeilen-
summen
000  Lbl
     A
     1
     STO
     00
005  GTO
     A'
     Lbl
     A'
     R/S
010  SUM
011  29
     STO
     Ind 00
     1
015  SUM
     00
     GTO
     A'
2. Spalten-
summe
019  Lbl
020  B
     STO
022  28
     1
     STO
025  00
     GTO
     B'
3. Zellen
028  Lbl
     B'
030  R/S
     STO
     25
     RCL
034  28
035  x
     RCL
     Ind 00
     :
     RCL
040  29
     =
     STO
     27
     -
045  RCL
     25
047  =
     x^2
     :
050  RCL
     27
     =
     SUM
     26
055  1
     SUM
     00
     GTO
     B'
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung
	A			
alle Zeilen-summen				
$Sp\sum_{1,2\ldots n}$ 1)	R/S			
$f_{Zeilen_{1,2\ldots n}}$ 1)	B			
	R/S			
	RCL			
	2	6	Chi^2	Chi^2=2,409

				Zs
	8	7	9	24
	4	3	5	12
	6	2	3	11
	3	4	4	11
Sps	21	16	21	58

1) Eingabereihenfolge: Spaltensumme $_1$, alle f_{Zellen} dieser Spalte, Spaltensumme $_2$ etc.

Programm 19 (Theorie S. 33, Formel 69)
Cochran-Test

```
1. Daten-          008 Lbl      018 STO            025 RCL      036 (
eingabe                B            04                 04           RCL
000 Lbl            010 SUM                             x            04
    A                  02       2. Berechnung          RCL          x
    SUM                x²       von Chi²               01       040 RCL
    00                 SUM      020 -              030 -            02
    x²                 03           1                  RCL          -
005 SUM            015 R/S          =                  00           RCL
    01                 Lbl          x                  x²           03
    R/S                C            (                  )        045 )
                                                   035 :            =
                                                                    R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
alle U	A			U = 3;2;1;	
alle Zeilen-summen				Zs=2;2;2;	
k	B			k = 3	
	C		Chi^2		Chi^2 = 2,0

Programm 20 (Theorie S. 34 ff., Formel 32, 70, 76)
KFA für 3 alternative Merkmale

```
000  Lbl        014  0          028  GTO        042  06         055  06
     A          015  20              0               GTO             RCL
     1               RCL        030  35              0               06
     STO             01              RCL        045  50              -
     06              Prd             03              RCL             R/S
005  R/S             06              Prd             05         060  =
     x=t        020  R/S             06              Prd             x²
     0               x=t        035  R/S             06              :
     16              0               x=t        050  RCL             RCL
     RCL             31              0               08              06
010  00              RCL             46              x²         065  =
     Prd        025  02              RCL             INV             SUM
     06              Prd        040  04              Prd             07
     GTO             06              Prd                             R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
ΣA_1	STO	00		400	
ΣA_0	STO	01		300	
ΣB_1	STO	02		200	
ΣB_0	STO	03		600	
ΣC_1	STO	04		500	
ΣC_0	STO	05		100	
N	STO	08		1000	
	A				
1.KZ der Konf.[1]	R/S				
2.KZ der Konf.[1]	R/S				fe 101 = 120,00
3.KZ der Konf.[1]	R/S		fe		
fb	R/S		Chi^2-Komponente	fb = 140	Chi^2-Komp. = 3,333
vor jeder neuen Konf.					
	A				
	RCL	07	Gesamt-Chi^2		

1) KZ = Kennziffer der Konfiguration (1 oder 0)

Programm 21 (Theorie S. 34 ff., Formel 32, 70, 76)
KFA für 4 alternative Merkmale

```
000 Lbl
    A
    1
    STO
    09
005 R/S
    x=t
    0
    16
    RCL
010 00
    Prd
    09
    GTO
    0
015 20
    RCL
    01
018 Prd
    09
020 R/S
    x=t
    0
    31
    RCL
025 02
    Prd
    09
    GTO
    0
030 35
    RCL
    03
    Prd
    09
035 R/S
036 x=t
    0
    46
    RCL
040 04
    Prd
    09
    GTO
    0
045 50
    RCL
    05
    Prd
    09
050 R/S
    x=t
    0
053 61
    RCL
055 06
    Prd
    09
    GTO
    0
060 65
    RCL
    07
    Prd
    09
065 RCL
    08
    Y^x
    3
    =
070 INV
    Prd
    09
    RCL
    09
075 -
    R/S
    =
    x²
    :
080 RCL
    09
    =
    SUM
    10
085 R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
ΣA_1	STO	00		600	
ΣA_0	STO	01		300	
ΣB_1	STO	02		500	
ΣB_0	STO	03		400	
ΣC_1	STO	04		200	
ΣC_0	STO	05		700	
ΣD_1	STO	06		100	
ΣD_0	STO	07		900	
N	STO	08		1000	Konfig. 1010:
vor jeder Konfi-					fe = 43,20
guration	A				
1.KZ der Konf.[1]	R/S				
⋮	⋮				
	·				
4.KZ der Konf.[1]	R/S		fe	fb = 50	Chi^2-Komp. =
fb	R/S		Chi^2-Kom-		1,07
			ponente		
	RCL	10	Gesamt-		
			Chi^2		

1) KZ = Kennziffer der Konfiguration (1 oder 0)

Programm 22 (Theorie S. 34 ff., Formel 32, 70, 76)
KFA für 5 alternative Merkmale

000	Lbl	020	R/S	040	04	060	65	080	RCL
	A		x=t		Prd		RCL		10
	1		0		11		07		Y^x
	STO		31		GTO		Prd		4
	11		RCL		0		11		=
005	R/S	025	02	045	50	065	R/S	085	INV
	x=t		Prd		RCL		x=t		Prd
	0		11		05		0		11
	16		GTO		Prd		76		RCL
	RCL		0		11		RCL		11
010	00	030	35	050	R/S	070	08	090	-
	Prd		RCL		x=t		Prd		R/S
	11		03		0		11		=
	GTO		Prd		61		GTO		x^2
	0		11		RCL		0		:
015	20	035	R/S	055	06	075	80	095	RCL
	RCL		x=t		Prd		RCL		11
	01		0		11		09		=
	Prd		46		GTO		Prd		SUM
	11		RCL		0		11		12
								100	R/S

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
ΣA_1	STO	00		300	
ΣA_0	STO	01		600	
ΣB_1	STO	02		400	
ΣB_0	STO	03		200	
ΣC_1	STO	04		1200	
ΣC_0	STO	05		800	
ΣD_1	STO	06		350	
ΣD_0	STO	07		700	
ΣE_1	STO	08		1500	
ΣE_0	STO	09		500	
N	STO	10		2000	
vor jeder Kon-					Konfiguration
figuration	A				01101:
1. KZ der Konf.[1]	R/S				fe = 18,9
⋮	⋮				Chi^2-Komponente=
5. KZ der Konf.[1]	R/S		fe	fb = 23	0,89
fb	R/S		Chi^2-Komponente		
	RCL	12	Gesamt-Chi^2		

1) KZ = Kennziffer der Konfiguration (1 oder 0)

Programm 23 (Theorie S. 34 ff., Formel 32, 70, 76)
KFA für 3 dreifach gestufte Merkmale

000	Lbl	022	RCL	044	05	066	1	087	Prd
	A		00	045	Prd		=		10
	1		Prd		10		x=t		RCL
	STO	025	10		GTO		0	090	09
	10		GTO		0	070	85		x^2
005	R/S		0		61		RCL		INV
	x=t		33	050	RCL		08		Prd
	0		RCL		03		Prd		10
	22	030	01		Prd		10	095	RCL
	-		Prd		10	075	GTO		10
010	1		10		GTO		0		-
	=		R/S	055	0		89		R/S
	x=t		x=t		61		RCL		=
	0	035	0		RCL		06	100	x^2
	29		50		04	080	Prd		:
015	RCL		-		Prd		10		RCL
	02		1	060	10		GTO		10
	Prd		=		R/S		0		=
	10	040	x=t		x=t		89	105	SUM
	GTO		0		0	085	RCL		11
020	0		57		78		07		R/S
	33		RCL	065	-				

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
ΣA_0	STO	00		50	
ΣA_1	STO	01		400	
ΣA_2	STO	02		300	
ΣB_0	STO	03		200	
ΣB_1	STO	04		100	
ΣB_2	STO	05		700	
ΣC_0	STO	06		500	
ΣC_1	STO	07		150	
ΣC_2	STO	08		250	
N	STO	09		1000	
vor jeder Kon-					Konfiguration
figuration	A				102:
1.KZ der Konf.[1)]	R/S				fe = 20,0
⋮	⋮				
3.KZ der Konf.[1)]	R/S		fe	fb = 32	Chi ^{2}-Komponente=
fb	R/S		Chi ^{2}-Komponente		7,20
	RCL	11	Gesamt-Chi ^{2}		

1) KZ = Kennziffer der Konfiguration (0, 1 oder 2)

Programm 24 (Theorie S. 38, Formel 77)
Produkt-Moment-Korrelation für TI 57 *

1. Daten-eingabe

000 R/S
SUM 1
x^2
SUM 2
x
005 R/S
SUM 4
x^2
008 SUM 5
=
010 $\sqrt{x}$
SUM 6
1
SUM 7
RST

2. Berechnung von r

015 RCL 7
016 $\sqrt{x}$
INV Prd 1
INV Prd 4
RCL 1
020 x
RCL 4
=
INV SUM 6
RCL 1
025 x^2
026 INV SUM2
RCL 4
x^2
INV SUM 5
030 RCL 5
Prd 2
RCL 2
$\sqrt{x}$
034 INV Prd6
035 RCL 6
R/S

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
$X_{1,2\ldots m}$ 1) $Y_{1,2\ldots m}$ 1)	RST R/S R/S R/S GTO 15 R/S	 r	X = 4; 3; 5; 8; Y = 4; 6; 1; 7;	 r = 0,292

*) Auf dem TI 58/59 ist diese Funktion fest programmiert.
1) Eingabereihenfolge X_1, Y_1, X_2, Y_2 etc.

Programm 25 (Theorie S. 38, Formel 77)
Korrelationsmatrix für 6 Variablen

1. Daten-eingabe

000 Lbl
A
6
STO
33
005 1
2
STO
34
R/S
010 SBR $1/x$
012 R/S
SBR $1/x$
015 R/S
SBR $1/x$
R/S
020 SBR $1/x$
R/S
SBR $1/x$
R/S
025 SBR
026 $1/x$
1
8
STO
030 36
0
STO
33
1
035 STO
34
5
STO
35
040 SBR x^2
1
STO
33
045 2
STO
34
4
STO
050 35
SBR x^2
2
054 STO
055 33
3
STO
34
3
060 STO
35
SBR x^2
3
065 STO
33
4

```
068  STO
     34
070  2
     STO
     35
     SBR
     x²
075  4
     STO
     33
     5
     STO
080  34
     1
     STO
     35
     SBR
085  x²
     0
     STO
     35
     1
090  SUM
     39
     GTO
     A
```

2. Unterprogramm I zur Datenaufnahme

```
094  Lbl
095  1/x
     STO
     Ind 35
     SUM
     Ind 33
100  x²
     SUM
     Ind 34
     1
     SUM
105  33
     SUM
     34
     SUM
     35
110  INV SBR
```

3. Unterprogramm II zur Datenaufnahme

```
111  Lbl
     x²
     RCL
     Ind 33
115  x
     RCL
     Ind 34
     =
     SUM
120  Ind 36
     1
     SUM
     34
     SUM
125  36
     INV
     SUM
     35
     RCL
130  35
     INV
     x=t
     x²
     INV SBR
```

4. Berechnung der Korrelationen

```
135  Lbl
     B
     1
     8
     STO
140  33
     6
     STO
     34
     7
145  STO
     35
     5
     STO
     04
150  STO
     38
152  SBR
     Lnx
     SBR
155  STO
     4
     STO
     05
     GTO
160  B'
     Lbl
     B'
     SBR
     RCL
165  SBR
     Lnx
     SBR
     STO
     DSZ
170  5
     B'
     1
     8
     STO
175  33
     GTO
     A'
```

5. Anzeige der Korrelationen

```
178  Lbl
     A'
180  RCL
     Ind 33
     R/S
     1
     SUM
185  33
     GTO
     A'
```

6. Unterprogramm I zur Korrelationsberechnung

```
188  Lbl
     RCL
190  1
191  SUM
     34
     RCL
     34
195  +
     1
     =
     STO
     35
200  1
     INV
     SUM
     38
     RCL
205  38
     STO
     04
     INV SBR
```

7. Unterprogramm II zur Korrelationsberechnung

```
209  Lbl
210  Lnx
     RCL
     Ind 34
     x²
     :
215  RCL
     39
     =
     +/-
     STO
220  00
     RCL
     Ind 34
     :
     RCL
225  39
     =
     STO
     01
     6
230  SUM
     34
     RCL
233  Ind 34
     SUM
235  00
     6
     INV
     SUM
     34
240  INV SBR
```

8. Unterprogramm II zur Korrelationsberechnung

```
241  Lbl
     STO
     RCL
     Ind 35
245  x²
     :
     RCL
     39
     =
250  +/-
     STO
     02
     RCL
     Ind 35
255  x
     RCL
     01
     =
     STO
260  03
     6
     SUM
     35
     RCL
265  Ind 35
     SUM
     02
     RCL
     Ind 33
270  -
     RCL
     03
     =
     STO
```

275	Ind 33	280	02	285	Ind 33	290	INV	294	4
	RCL		=		1		SUM	295	STO
	00		$\sqrt{x}$		SUM		35		INV SBR
	x		INV		33		⟨DSZ⟩		
	RCL		Prd		5				

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung	
				Eingabedaten	Ergebnisse
$U_{1,2\ldots n}$ 1)	A			U = 2;3;5;	
$V_{1,2\ldots n}$ 1)	R/S			V = 3;4;1;	
$W_{1,2\ldots n}$ 1)	R/S			W = 4;1;2;	
$X_{1,2\ldots n}$ 1)	R/S			X = 2;3;3;	
$Y_{1,2\ldots n}$ 1)	R/S			Y = 4;2;1;	
$Z_{1,2\ldots n}$ 1)	R/S			Z = 4;2;2;	
	B 2)		r_{uv}		r_{uv} = -0,79
	R/S		r_{uw}		r_{uw} = -0,50
	R/S		r_{ux}		r_{ux} = +0,76
	R/S		r_{uy}		r_{uy} = -0,93
	R/S		r_{uz}		r_{uz} = -0,76
	R/S		r_{vw}		r_{vw} = -0,14
	R/S		r_{vx}		r_{vx} = -0,19
	R/S		r_{vy}		r_{vy} = +0,50
	R/S		r_{vz}		r_{vz} = +0,19
	R/S		r_{wx}		r_{wx} = -0,94
	R/S		r_{wy}		r_{wy} = +0,79
	R/S		r_{wz}		r_{wz} = +0,94
	R/S		r_{xy}		r_{xy} = -0,94
	R/S		r_{xz}		r_{xz} = -1,00
	R/S		r_{yz}		r_{yz} = 0,94

1) Eingabereihenfolge $U_1, V_1, W_1, X_1, Y_1, Z_1, U_2, V_2, W_2, X_2, Y_2, Z_2$ etc.
2) Hier läuft das Programm ca. 70 sec.

Programm 26 (Theorie S. 39, Formel 79)
Rangkorrelation

```
1. Daten-
eingabe
000 Lbl
    A
    -
    R/S
    =
005 x²
006 SUM
    00
    1
    SUM
010 01
    R/S

2. Berech-
nung v. R
012 Lbl
    B
    1
015 -
    6
017 x
    RCL
    00
020 :
    (
    RCL
    01
    Yˣ
025 3
    -
    RCL
    01
    )
030 =
    R/S
```

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
$R_{x_{1,2\ldots m}}$ 1) $R_{y_{1,2\ldots m}}$ 1)	[A] [ ] [R/S] [ ] [B] [ ]	R	R_x = 1; 3; 5; 2; 4; R_y = 3; 4; 5; 2; 1;	R = 0,30

1) Eingabereihenfolge Rx_1, Ry_1, Rx_2, Ry_2 etc.

Programm 27 (Theorie S. 95, Formel 153)
Durchschnittliche Rangkorrelation

```
1. Daten-
eingabe
000 Lbl
    A
    STO
    00
    R/S
005 STO
    01
    GTO
    A'
    Lbl
010 A'
    R/S
    x²
    SUM
    02
015 GTO
    A'

2. Berechnung
von R
017 Lbl
    B
    RCL
020 00
    x
    (
    4
    x
025 RCL
    01
    +
    2
029 )
030 :
    (
    RCL
    00
    -
035 1
    )
    :
    (
    RCL
040 01
    -
    1
    )
    -
045 1
046 2
    x
    RCL
    02
050 :
    RCL
    00
    :
    RCL
055 01
    :
    (
    RCL
    00
060 -
    1
062 )
    :
    (
065 RCL
    01
    x²
    -
    1
070 )
    =
    +/-
    +
075 1
    =
    R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
k	[A]	[ ]		k=5, N=7,	
N	[R/S]	[ ]		ΣR=23;8;25;	
alle ΣR	[R/S]	[ ]		12;10;34;	
	[B]	[ ]	$\bar{R}$	28;	$\bar{R}$ = 0,83

Programm 28 (Theorie S. 43 f., Formel 85)
Konkordanzkoeffizient für maximal 35 Objekte

```
1. Daten-
eingabe
000  Lbl
     A
     STO
     Ind 39
     1
005  SUM
     39
     R/S
     Lbl
     B
010  STO
     38
2. Berechnung
von Z
012  GTO
     A'
     Lbl
015  A'
016  RCL
     Ind 37
     :
     RCL
020  39
     =
     SUM
     36
     RCL
025  37
     -
     RCL
     39
     +
030  1
     =
     x=t
     B'
     1
035  SUM
     37
037  GTO
     A'
     Lbl
040  B'
     0
     STO
     37
     GTO
045  C'
     Lbl
     C'
     RCL
     Ind 37
050  -
     RCL
     36
     =
     x²
055  SUM
     35
057  RCL
     37
     -
060  RCL
     39
     +
     1
     =
065  x=t
     D'
     1
     SUM
     37
070  GTO
     C'
     Lbl
     D'
     RCL
075  35
     R/S
3. Berech-
nung von W
077  :
     RCL
     38
080  x²
     x
     1
     2
     :
085  (
     RCL
     39
     yˣ
     3
090  -
     RCL
     39
     )
     =
095  R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
alle ΣR	[A]	[ ]		ΣR=14;13;8;	Zähler =
k	[B]	[ ]	Zähler	17;24;36;	870,00
	[R/S]	[ ]	W	31;37;	W = 0,829
	[ ]	[ ]		k = 5	

Porgramm 29 (Theorie S. 45, Formel 88, 90)
Durchschnittliche Korrelation bei gleichen n

```
1. Daten-
eingabe
000  Lbl
     A
     STO
     00
     +
005  1
     =
     :
     (
     1

010  -
     RCL
     00
     )
     =
015  Lnx
     :
     2
     =
     SUM
020  01
     1

022  SUM
     02
     R/S
2. Berechnung
von r̄
025  Lbl
     B
     RCL
     01
     :

030  RCL
     02
     x
     2
     =
035  INV
     Lnx
     STO
     00
     +
040  1

041  =
     :
     (
     RCL
045  00
     -
     1
     )
     =
050  1/x
     R/S
```

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung	
			Eingabedaten	Ergebnisse
alle r	A, B	$\bar{r}$	r = 0,51; 0,58; 0,90; -0,40	$\bar{r}$ = 0,51

Programm 30 (Theorie S. 45, Formel 88, 89)
Durchschnittliche Korrelation bei ungleichen n

```
1. Daten-
eingabe
000  Lbl
     A
     STO
     00
     +
005  1
     =
     :
     (
     1
010  -

011  RCL
     00
     )
     =
015  Lnx
     :
     2
     =
     STO
020  01
     R/S
     -
     3

024  =
025  SUM
     02
     x
     RCL
     01
030  =
     SUM
     03
     R/S
2. Berechnung
von r̄
034  Lbl

035  B
     RCL
     03
     :
     RCL
040  02
     x
     2
     =
     INV
045  Lnx
     STO
     00

048  +
     1
050  =
     :
     (
     RCL
     00
055  -
     1
     )
     =
     1/x
060  R/S
```

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung	
			Eingabedaten	Ergebnisse
$r_{1,2\ldots m}$ 1) $n_{1,2\ldots m}$ 1)	A, R/S, B	$\bar{r}$	r_1 = 0,28, n_1 = 39, r_2 = 0,45, n_2 = 18,	$\bar{r}$ = 0,33

1) Eingabereihenfolge r_1, n_1, r_2, n_2 etc.

Programm 31 (Theorie S. 45, Formel 91)
Partialkorrelation

1. Daten-eingabe
000 Lbl
A
-
R/S
STO
005 00
006 x
R/S
STO
01

2. Berechnung von $N_{1-2}(3)$
010 =
011 STO
02
1
-
015 RCL
00
x^2
=
019 x
020 (
1
-
RCL
01
025 x^2
)
027 =
$\sqrt{x}$
:
030 RCL
02
=
$1/x$
R/S

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung	
				Eingabedaten	Ergebnisse
r_{1-2} r_{1-3} r_{2-3}	A R/S R/S		$r_{1-2(3)}$	$r_{1-2} = 0{,}69$ $r_{1-3} = 0{,}81$ $r_{2-3} = 0{,}85$	$r_{1-2(3)} = 0{,}0049$

Programm 32 (Theorie S. 17 f., Formel 42, 46, 47)
Signifikanz-Test für den Unterschied zweier Korrelationen

1. Daten-eingabe
000 Lbl
A
SBR
A'
STO
005 00
R/S
SBR
008 A'
STO
010 01
R/S
-
3
=
015 $1/x$
STO
02
018 R/S
-
020 3
=
$1/x$
SUM
02
025 RCL
02
$\sqrt{x}$
028 STO
02
030 RCL
00
-
RCL
01
035 =
|X|
STO
038 00
R/S

2. 5%-Niveau
040 Lbl
B
RCL
00
-
045 1
.

```
047  9
     6
     x
050  RCL
     02
     =
     R/S
```

3. 1%-Niveau

```
054  Lbl
055  C
     RCL
     00
058  -
     2
060  .
     5
     8
     x
     RCL
065  02
     =
     R/S
```

4. 0.1%'Niveau

```
     Lbl
069  D
070  RCL
     00
     -
     3
     .
075  2
     9
     x
     RCL
     02
080  =
     R/S
```

5. Unterprogramm Z-Werte

```
082  Lbl
     A'
     STO
085  03
     +
     1
     =
     :
090  (
     1
     -
093  RCL
     03
095  )
     =
     Lnx
     :
     2
100  =
     INV SBR
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
r_1	A			r_1 = 0,846	
r_2	R/S			r_2 = 0,671	Rest 5%=0,218
N_1	R/S			N_1= 145	Rest 1%=0,152
N_2	R/S			N_2= 223	Rest 0,1%=0,075
	B		Rest 5%[1]		
	C		Rest 1%[1]		
	D		Rest 0,1%[1]		

1) Signifikanz auf dem entsprechenden Niveau liegt vor, wenn der Rest größer als 0 ist.

Programm 33 (Theorie S. 47, Formel 93, 94)
Lineare Regression für TI 57 *

1. Dateneingabe

```
000  R/S
     SUM 1
     STO 2
     x
     R/S
005  SUM 3
     =
     SUM 4
     RCL 2
009  x²
010  SUM 5
     1
     SUM 6
     RST
```

2. Koeffizienten

```
014  RCL 6
015  Prd 4
     Prd 5
     RCL 4
018  -
     RCL 1
020  x
     RCL 3
     =
     :
     (
025  RCL 5
     -
     RCL 1
     x²
     )
030  =
     STO 4
     R/S
     RCL 6
     INV Prd 1
035  INV Prd 3
     RCL 3
     -
     RCL 1
     x
040  RCL 4
     =
042  R/S
```

3. Prognose

```
043  R/S
     x
045  RCL 4
     +
     RCL 0
     =
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
	RST	R/S		X = 8; 7; 9;	
$X_{1,2\ldots n}$ 1)	R/S			Y = 2; 4; 7;	
$Y_{1,2\ldots n}$ 1)	R/S				
	GTO	14			
	R/S		b		b = 1,5
	R/S		a		a = -7,667
a	STO	0			
vor jeder Pro-					
gnose	GTO	43			
	R/S			X_i = 10	
X_i	R/S		Y_i		Y_i = 7,333

*) Im TI 58/59 ist diese Funktion fest programmiert.
1) Eingabereihenfolge X_1, Y_1, X_2, Y_2 etc.

Programm 34 (Theorie S. 48, Formel 95)
Vertrauensbereich für lineare Regression

```
1. Daten-
eingabe
000  Lbl
     A
     STO
     00
     R/S
005  STO
     01
     R/S
     STO
     02
010  R/S
     STO
     03
     R/S
     STO
     04
```

```
016  R/S
     STO
     05
     R/S
020  STO
     06
2. Berechnung
von △
022  RCL
     00
     x
025  RCL
     01
     x²
     -
     RCL
030  00
     x
```

```
032  RCL
     05
     x²
035  x
     RCL
     02
     x²
     =
040  :
     (
     RCL
     00
     -
045  2
     )
     =
     √x
```

```
049  STO
050  07
     1
     +
     RCL
     00
055  1/x
     +
     (
     RCL
     04
060  -
     RCL
     03
     )
     x²
065  :
```

```
066  RCL
     00
     :
     RCL
070  02
     x²
     =
     √x
     x
075  RCL
     07
     x
     RCL
     06
080  =
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung	
				Eingabedaten	Ergebnisse
N	A			10	
SD_{yN}	R/S			0,7	
SD_{xN}	R/S			12	
$\overline{X}$	R/S			100	
X_i	R/S			140	
b	R/S			0,03	
t	R/S		Δ [1]	2,3	Δ = 2,30

1) Vertrauensbereich = $X_i \pm \Delta$

Programm 35 (Theorie S. 49 f., Formel 97)
Quadratische Regression

```
1. Daten-
eingabe
000  Lbl
     A
     SUM
     00
     STO
005  01
     x
     R/S
     SUM
     02
010  STO
     03
     =
     SUM
     04
015  RCL
     01
     x²
     SUM
     05
020  SUM
     06
     x²
     SUM
     07
025  RCL
     01
     INV
     x≥t
029  0
030  37
     Yˣ
     3
     =
     GTO
035  0
     42
     +/-
     Yˣ
     3
040  =
     +/-
     SUM
     08
     SUM
045  09
     RCL
     01
     x²
     x
050  RCL
     03
     =
     SUM
     10
055  1
     SUM
     11
     R/S

2. Koeffi-
zienten
059  Lbl
060  B
     RCL
     00
     INV
     Prd
065  05
     INV
     Prd
     08
     INV
070  Prd
     04
     RCL
     06
     INV
075  Prd
     09
     INV
     Prd
     07
080  INV
     Prd
     10
     RCL
     11
085  INV
     Prd
087  00
     INV
     Prd
090  02
     INV
     Prd
     06
     RCL
095  04
     -
     RCL
     02
     =
100  STO
     04
     RCL
     05
     -
105  RCL
     00
     =
     STO
     05
110  RCL
     06
     -
     RCL
     08
115  =
     STO
117  08
     RCL
     10
120  -
     RCL
     02
     =
     STO
125  01
     RCL
     09
     -
     RCL
130  00
     =
     STO
     03
     RCL
135  06
     -
     RCL
     07
     =
140  STO
     00
     RCL
     01
     :
145  RCL
     03
```

147	-	164	:	180	=	196	07	211	07
	RCL	165	RCL		:		=		+
	04		03		RCL		+/-		RCL
150	:		)		05		+		00
	RCL		=		=	200	RCL	215	x
	05		STO	185	STO		10		RCL
	=	170	06		08		=		08
	:		R/S		R/S		STO		+
155	(		RCL		x		07		RCL
	RCL		04		RCL	205	R/S	220	00
	08		+	190	09	3.	Prognose		x^2
	:	175	RCL		+		Lbl		x
	RCL		06		RCL		C		RCL
160	05		x		06		STO		06
	-		RCL		x		00	225	=
	RCL		08	195	RCL	210	RCL		R/S
	00								

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
$X_{1,2,\dots n}$ 1)	A		X = 2;4;5;	
$Y_{1,2,\dots n}$ 1)	R/S		Y = 4;8;15;	
	B	b_2		b_2 = 1,67
	R/S	b_1		b_1 = -8,0
	R/S	a		a = 13,33
X_i	C	Y_i	X_i = 10	Y_i = 100,0

1) Eingabereihenfolge: X_1, Y_1, X_2, Y_2 etc.

Programm 36 (Theorie S. 50 f., Formel 99)
Kubische Regression

1.	Daten-	011	03	024	07	037	01	050	12
	eingabe		=	025	RCL		SBR		RCL
000	Lbl		SUM		01		A'		01
	A		04		SBR	040	SUM		SBR
	SUM	015	RCL		D		11		D
	00		01		SUM		RCL	055	x
	STO		x^2	030	08		01		RCL
005	01		SUM		SUM		x^2		03
	x		05		09	045	x		=
	R/S	020	SUM		x^2		RCL		SUM
	SUM		06		SUM		03	060	13
	02		x^2	035	10		=		1
010	STO		SUM		RCL		SUM		SUM

```
063  14
     R/S
```

2. Koeffizienten

```
065  Lbl
     B
     RCL
     08
     INV
070  Prd
     13
     INV
     Prd
     07
075  INV
     Prd
     11
     INV
     Prd
080  10
     RCL
     05
     INV
     Prd
085  12
     INV
     Prd
     08
     RCL
090  11
     x
     RCL
     09
     :
095  RCL
     05
     =
     STO
     03
100  RCL
     07
     x
     RCL
     09
105  :
     RCL
     05
     =
     STO
110  01
     RCL
     00
     INV
     Prd
115  04
     INV
     Prd
     05
     RCL
120  09
     :
     RCL
     00
     =
125  STO
     15
     RCL
     07
     x
130  RCL
     09
     :
     RCL
     00
135  =
     STO
     16
     RCL
     14
140  INV
     Prd
     02
     INV
     Prd
145  00
     INV
     Prd
     06
     INV
150  Prd
     09
     RCL
     02
     INV
155  SUM
     04
     INV
     SUM
159  12
160  -
     RCL
     13
     =
     +/-
165  STO
     17
     RCL
     00
     INV
170  SUM
     05
     INV
     SUM
     08
175  -
     RCL
     07
     =
     +/-
180  STO
     18
     RCL
     06
     INV
185  SUM
     15
     INV
     SUM
     01
190  -
     RCL
     11
     =
     STO
195  19
     RCL
     09
     INV
     SUM
200  16
     INV
     SUM
     03
     -
205  RCL
     10
     =
     STO
209  00
210  1
     +/-
     Prd
     15
     Prd
215  01
     Prd
     16
     Prd
     03
220  RCL
     08
     INV
     Prd
     12
225  INV
     Prd
     01
     INV
     Prd
230  03
     RCL
     05
     INV
     Prd
235  04
     INV
     Prd
     16
     INV
240  Prd
     15
     RCL
     18
     INV
245  Prd
     17
     INV
     Prd
     19
250  INV
     Prd
     00
     RCL
     00
255  STO
     14
     RCL
     17
259  STO
260  18
     RCL
     19
     STO
     05
265  RCL
     04
     INV
     SUM
     12
270  INV
     SUM
     17
     RCL
     16
275  INV
     SUM
     03
     INV
     SUM
280  00
     RCL
     15
     INV
     SUM
285  01
     INV
     SUM
     19
     1
290  +/-
     Prd
     01
     Prd
     19
295  RCL
     19
     INV
     Prd
     17
300  INV
     Prd
     00
     RCL
     01
305  INV
     Prd
     12
     INV
```

```
309  Prd
310  03
     RCL
     17
     -
     RCL
315  12
     =
     :
     (
     RCL
320  03
     -
     RCL
     00
     )
325  =
     STO
     01
     R/S
     RCL
330  17
     +
     RCL
     00
     x
335  RCL
     01
     =
     STO
339  02
340  R/S
     RCL
     18
     +
     RCL
345  05
     x
     RCL
     02
     +
350  RCL
     14
     x
     RCL
     01
355  =
     STO
     03
     R/S
     RCL
360  13
     -
     RCL
     03
     x
365  RCL
4    07
     -
     RCL
369  02
370  x
     RCL
     11
     -
     RCL
375  10
     x
     RCL
     01
     =
380  STO
     04
     R/S
```

3. Prognose

```
383  Lbl
     C
385  STO
     00
     RCL
     04
     +
390  RCL
     03
     x
     RCL
     00
395  +
     RCL
     02
398  x
     RCL
400  00
     x²
     =
     STO
     10
405  RCL
     00
     [SBR
      D]
     x
410  RCL
     01
     +
     RCL
     10
415  =
     R/S
```

4. Unterprogramm X^3

```
417  Lbl
     D
     INV
420  <x≥t>
     E
     Y^x
     3
     =
425  INV SBR
     Lbl
     E
     +/-
     Y^x
430  3
     =
     +/-
     INV SBR
```

5. Unterprogramm X^5

```
434  Lbl
435  A'
     INV
     <x≥t>
     B'
     Y^x
440  5
     =
     INV SBR
     Lbl
     B'
445  +/-
     Y^x
     5
     =
     +/-
450  INV SBR
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
$X_{1,2\ldots n}$ 1)	A			$X = 2\ 5\ 8$	
$Y_{1,2\ldots n}$ 1)	R/S			$Y = 4\ 9\ 2$	
	B		b_3		$b_3 = -0{,}04$
	R/S		b_2		$b_2 = -0{,}09$
	R/S		b_1		$b_1 = 3{,}80$
	R/S		a		$a = -2{,}93$
X_i	C		Y_i	$X_i = 10$	$Y_i = -12{,}40$

1) Eingabereihenfolge: X_1, Y_1, X_2, Y_2 etc.

Programm 37 (Theorie S. 52 f., Formel 100)
Potenzregression

1. Daten-		005	log	010	Op	017	Op	023	Op
eingabe			Σ+		12		13		14
000	Lbl		R/S		INV		R/S	025	INV
	A	2. Koeffi-			log	3. Prognose			log
	log	zienten			R/S	020	Lbl		R/S
	$x \gtrless t$	008	Lbl	015	$x \gtrless t$		C		
	R/S		B		R/S		log		

Bedienungsanleitung nach Programm 39!

Programm 38 (Theorie S. 54, Formel 101)
Exponentialregression

1. Daten-		005	Σ+	010	12	016	Op	021	Op
eingabe			R/S		INV		13		14
000	Lbl	2. Koeffi-			Lnx		R/S		INV
	A	zienten			R/S	3. Prognose			Lnx
	$x \gtrless t$	007	Lbl		$x \gtrless t$	019	Lbl	025	R/S
	R/S		B	015	R/S	020	C		
	Lnx	009	Op						

Bedienungsanleitung nach Programm 39!

Programm 39 (Theorie S. 55, Formel 102)
Logarithmische Regression

1. Daten-		004	R/S	008	B	014	Op	019	Lnx
eingabe		005	Σ+		Op	015	13	020	Op
000	Lbl		R/S	010	12		R/S		14
	A	2. Koeffi-			R/S	3. Prognose			R/S
	Lnx	zienten			$x \gtrless t$	017	Lbl		
	$x \gtrless t$	007	Lbl		R/S		C		

gemeinsame Bedienungsanleitung zu Programm 37/38/39

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung
$X_{1,2\ldots n}$ 1)	A			Eingabedaten:
$Y_{1,2\ldots n}$ 1)	R/S			X=3;6;9; Y=5;7;8;
Koeffizienten:				für alle R.: X_i=10
	B		a	Ergebnisse:
	R/S		b	1.Potenz-R.:a=3,134; b=0,434; r=0,996; Y_i=8,513;
	R/S		r 2)	2.Exponential-R.:a=4,089; b=0,078; r=0,970; Y_i=8,950;
Prognose:				3.logarithmische R.:a=2,007; b=2,747; r=0,999; Y_i=8,334;
X_i	C		Y_i	

1) Eingabereihenfolge X_1, Y_1, X_2, Y_2, etc. Negative X sind nicht erlaubt!

Programm 40 (Theorie S. 56, Formel 103)
Regressionsgüte

1. Daten-
eingabe

```
000  Lbl
     A
     STO
     00
     R/S
005  STO
     01
```

2. Ermitteln
von S

```
007  4
     STO
     02
010  RCL
     29
     x=t
     0
     26
015  +
     RCL
     28
     x
     RCL
020  00
     =
     STO
     03
     SBR
025  B
     1
     SUM
     02
     RCL
030  27
     x=t
     0
     52
     +
035  RCL
     00
     x
     RCL
     26
040  +
     RCL
     00
     x^2
     x
045  RCL
     25
     =
     STO
     03
050  SBR
     B
     1
     SUM
     02
055  RCL
     24
     x=t
     1
     01
060  +
     RCL
     00
     x
     RCL
065  23
     +
     RCL
     00
     x^2
070  x
     RCL
     22
     =
     STO
075  03
     RCL
     00
     INV
     x≥t
080  0
     88
     Y^x
     3
084  =
085  GTO
     0
     93
     +/-
     Y^x
090  3
     =
     +/-
     x
     RCL
095  21
     =
     SUM
     03
     SBR
100  B
     1
     SUM
     02
     RCL
105  20
     x=t
     1
     36
     RCL
110  00
     INV
     x≥t
     1
     22
115  Y^x
     RCL
     19
     =
     GTO
120  1
     28
     +/-
     Y^x
     RCL
125  19
     =
     +/-
128  x
     RCL
130  20
     =
     STO
     03
     SBR
135  B
     1
     SUM
     02
     RCL
140  17
     x=t
     1
     64
     x
145  RCL
     00
     =
     STO
     03
150  1
     INV
     Lnx
     Y^x
     RCL
155  03
     x
     RCL
     18
     =
160  STO
     03
     SBR
     B
     1
165  SUM
     02
     RCL
     16
     x=t
170  1
     84
172  +
     RCL
     15
175  x
     RCL
     00
     Lnx
     =
180  STO
     03
     SBR
     B
     R/S
```

3. Unterpro-
gramm (Be-
rechnung v.S)

```
185  Lbl
     B
     RCL
     03
     -
190  RCL
     01
     =
     x^2
     SUM
195  Ind 02
     INV SBR
```

4. Aufruf
von S

```
     Lbl
     C
     4
200  STO
     02
     RCL
     Ind 02
     R/S
205  1
     SUM
     02
     GTO
     2
210  02
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
1. lineare Regression:					
a[1]	STO	29		0,5	
b	STO	28		2	
2. quadr. Regression:					
a[1]	STO	27		0,4	
b_1	STO	26		0,3	
b_2	STO	25		1	
3. kub. Regression:					
a[1]	STO	24		3	
b_1	STO	23		0,1	
b_2	STO	22		2	
b_3	STO	21		0,2	
4. Potenz-Regression:					
a[1]	STO	20		4	
b	STO	19		0,6	
5. Exponential-Regression					
a	STO	18		3	
b[1]	STO	17		1,5	
6. logarithm. Regression					
a[1]	STO	16		5	
b	STO	15		6	
$X_{1,2\ldots n}$[2]	A			X = 3;6;10;	
$Y_{1,2\ldots n}$[2]	R/S			Y = 4;8;11;	S =
	C		S(lin.)		116,75
	R/S		S(quadr.)		9489,49
	R/S		S(kub.)		167240,93
	R/S		S(Potenz)		52,02
	R/S		S(Exp.)		$9{,}62 \cdot 10^{13}$
	R/S		S(log.)		178,79

1) Diese Koeffizienten dürfen nicht 0 sein.
2) Eingabereihenfolge: X_1, Y_1, X_2, Y_2 etc.

Programm 41 (Theorie S. 56 f., Formel 105, 106, 107)
Multiple Regression für 2 unabhängige Variablen

1. Berech-		005	00	014	02	023	STO	032	RCL
nung des			x^2	015	x		10		01
Koeffi-			=		RCL	025	R/S		=
zienten			STO		00		RCL		:
000	Lbl		09		=		02		RCL
	A'	010	RCL		:		-		09
	1		01	020	RCL		RCL		=
	-		-		09	030	00		STO
	RCL		RCL		=		x	040	11

```
041  R/S

2. Prognosen
042  Lbl
     D
     -
045  RCL
     03
     =
     :
     RCL
050  06
     x
052  RCL
     10
     +
055  (
     R/S
     -
     RCL
     05
060  )
     :
     RCL
063  08
     x
065  RCL
     11
     =
     x
     RCL
070  07
     +
     RCL
073  04
     =
075  R/S

3. Korrela-
tionen
076  Lbl
     E
     RCL
     10
080  x
081  RCL
     01
     +
     RCL
085  11
     x
     RCL
     02
     =
090  √x
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung	
				Eingabedaten	Ergebnisse
r_{xz}	STO	00		0,772	
r_{xy}	STO	01		-0,831	
r_{yz}	STO	02		-0,909	
$\overline{X}$	STO	03		22,2	
$\overline{Y}$	STO	04		2,8	
$\overline{Z}$	STO	05		13,1	
SD_x	STO	06		6,46	
SD_y	STO	07		1,317	
SD_z	STO	08		4,067	
	2nd	A'	b_x		b_x = -0,320
	R/S		b_z		b_z = -0,662
X_i	D			X_i = 30	
Z_i	R/S		Y_i	Z_i = 14	Y_i = 2,098
	E		R		R = 0,931

Programm 42 (Theorie S. 58, Formel 109, 110, 111, 112)
Regression dreier unabhängiger Variablen mit einer abhängigen

```
1. Berech-
nung der
Koeffizienten
000  Lbl
     A
     RCL
     00
004  x
005  (
     1
     -
     RCL
     04
010  x²
011  )
     -
     RCL
     03
015  x
     (
     RCL
018  01
     -
020  RCL
     02
     x
     RCL
     04
025  )
     -
     RCL
     05
     x
030  (
     RCL
```

```
032 02
    -
    RCL
035 01
    x
    RCL
    04
    )
040 =
    STO
    14
    1
    -
045 RCL
    01
    x²
    -
    RCL
050 02
    x²
    -
    RCL
    04
055 x²
    +
    2
    x
    RCL
060 01
    x
    RCL
    02
    x
065 RCL
066 04
    =
    INV
    Prd
070 14
    RCL
    14
    R/S
    RCL
075 03
    -
    RCL
    05
    x
080 RCL
    04
    -
    RCL
    14
085 x
    (
    RCL
    01
    -
090 RCL
    02
    x
    RCL
    04
095 )
    =
    :
    (
    1
100 -
    RCL
    04
    x²
    )
105 =
    STO
    15
    R/S
    RCL
110 05
    -
    RCL
    02
    x
115 RCL
    14
    -
    RCL
    04
120 x
    RCL
    15
    =
    STO
125 16
    R/S
```

2. Prognose

```
127 Lbl
    B
    -
130 RCL
    07
132 =
    :
    RCL
135 11
    x
    RCL
    14
    +
140 (
    R/S
    -
    RCL
    08
145 )
    :
    RCL
    12
    x
150 RCL
    15
    +
    (
    R/S
155 -
    RCL
    09
    )
    :
160 RCL
    13
    x
    RCL
    16
    =
166 x
    RCL
    10
    +
170 RCL
    06
    =
    R/S
```

3. multiple Korrelation

```
174 Lbl
175 C
    RCL
    00
    x
    RCL
180 14
    +
    RCL
    03
    x
185 RCL
    15
    +
    RCL
    05
190 x
    RCL
    16
    =
    √x
195 R/S
```

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung	
			Eingabedaten	Ergebnisse
r_{wy}	STO 00		0,206	
r_{wx}	STO 01		-0,470	
r_{wz}	STO 02		-0,432	
r_{xy}	STO 03		-0,480	
r_{xz}	STO 04		0,469	
r_{yz}	STO 05		-0,769	
$\bar{Y}$	STO 06		3,4	
$\bar{W}$	STO 07		0,111	
$\bar{X}$	STO 08		0,131	
$\bar{Z}$	STO 09		0,031	
SD_y	STO 10		1,350	
SD_w	STO 11		0,514	

SD_x	STO	12		0,536	
SD_z	STO	13		0,475	
	A		b_w		b_w = -0,232
	R/S		b_x		b_x = -0,232
	R/S		b_z		b_z = -0,760
W_i	B			W_i = 0,89	
X_i	R/S			X_i = -0,11	
Z_i	R/S		Y_i	Z_i = 0,06	Y_i = 3,005
	C		R		R = 0,805

Programm 43 (Theorie S. 62, Formel 116, 117, 118)
Invertierte Elemente einer 3 x 3-Matrix

000	Lbl	022	01	044	04	066	x	088	+/-
	B'		x	045	x		RCL		+
	1		RCL		RCL		07	090	1
	-	025	00		05		:		=
	RCL		=		:	070	RCL		:
005	00		STO		RCL		08		RCL
	x^2		06	050	06		=		04
	=		RCL		=		+/-	095	=
	STO	030	01		STO		+		R/S
	04		-		08	075	1		RCL
010	1		RCL		RCL		=		04
	-		00	055	01		:		:
	RCL		x		x		RCL	100	RCL
	01	035	RCL		RCL		04		06
	x^2		02		04	080	=		=
015	=		=		:		R/S		+/-
	STO		STO	060	RCL		RCL		:
	05		07		06		06	105	RCL
	RCL	040	RCL		-		:		08
	02		06		RCL	085	RCL		=
020	-		-		00		08		R/S
	RCL		RCL	065	=		=		

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
r_{wx}	STO	00		r_{wx} = -0,47	
r_{wz}	STO	01		r_{wz} = -0,432	
r_{xz}	STO	02		r_{xz} = 0,469	
	2nd	B'	r^{ww}		r^{ww} = 1,386
	R/S		r^{xx}		r^{xx} = 1,445
	R/S		r^{zz}		r^{zz} = 1,384

Programm 44 (Theorie S. 65 f.)
Restkorrelationsmatrix

1. Eingabe der Ladungszahlen
000 Lbl
A
STO
Ind 49
1
005 SUM
49
007 R/S

2. Berechnung der Restkorrelation
008 Lbl
B
010 0
STO
49
013 GTO
A'
015 Lbl
A'
R/S
-
RCL
020 Ind 49
x
RCL
023 Ind 48
=
025 R/S
1
SUM
48
GTO
030 A'
Lbl
C
033 1
SUM
035 49
RCL
49
STO
48
040 GTO
A'

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung
alle Ladungs- zahlen 1)	A		Ladungszahlen: 0,86;0,45;0,93; Korrelations- matrix: (0,95) 0,95 (0,76) 0,53 0,76 (0,81) Rest-Matrix: (0,21) 0,56 (0,56) -0,27 0,34 (-0,06)
	B		
r 2)	R/S	r_{Rest}	
nach Ablesen von r_{Rest}	R/S		
nach Abarbeiten jeder Spalte	C		

1) zeilenweise eingeben, mit der obersten beginnend.
2) spaltenweise eingeben, mit der Kommunalität beginnend.

Programm 45 (Theorie S. 68 f., Formel 123, 124)
Rotation von Faktoren

1. Dateneingabe
000 Lbl
A
STO
00
004 R/S
005 STO
01
R/S
STO
02

2. Berechnung der rot. Faktoren
010 RCL
01
x
013 RCL
00
015 COS
-
RCL
02
019 x
020 RCL
00
sin
=
R/S

```
025  RCL      028  RCL      031  +        034  x        037  COS
     01            00            RCL      035  RCL           =
     x        030  sin           02            00            R/S
```

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
α	A		$\alpha = 26{,}288°$	
a_1	R/S		$a_1 = 0{,}84$	
a_2	R/S	a'_1	$a_2 = -0{,}47$	$a'_1 = 0{,}96$
	R/S	a'_2		$a'_2 = -0{,}05$

Programm 46 (Theorie S. 71 f., Formel 127)
1-faktorielle Varianzanalyse

```
1. Daten-     012  SUM      027  STO      037  :        051  RCL
eingabe            04            00            RCL           05
000  Lbl           R/S           STO           04            -
     A        015  Lbl      030  03       040  =             RCL
     SUM           B             R/S           STO      055  00
     00            RCL                         00            =
     SUM           00       2. Berech-         -             R/S
005  01            x2       nung der           RCL           -
     x2       020  :        Quadrat-      045  02            RCL
     SUM           RCL      summen             =        060  01
     02            03       032  Lbl           +/-           =
     1             =             C             STO           +/-
010  SUM           SUM           RCL           01            R/S
     03       025  05       035  01       050  R/S
                   0             x2
```

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
alle X einer Stichprobe nach jeder Stichprobe	A		Faktorstufen	
			I II III	
	B		3 4 6	
	C	QS_{tot}	2 3 4	$QS_{tot} = 70{,}67$
	R/S	QS_{treat}	4 5 9	$QS_{treat} = 22{,}17$
	R/S	QS_{Fehler}	8 6 10	$QS_{Fehler} = 48{,}50$
			1.Stpr. 2.Stpr. 3.Stpr.	

Programm 47 (Theorie S. 75 ff., Formel 136, 137)
2-faktorielle Varianzanalyse

1. Dateneingabe I	
000	Lbl
	A
	SUM
	00
	x^2
005	SUM
	01
	1
	SUM
	02
010	R/S
	Lbl
	B
	RCL
	00
015	R/S
	SUM
	03
	x^2
	SUM
020	04
	RCL
	02
	STO
	05
025	0
	STO
	00
	STO
	02
030	R/S
2. Dateneingabe II	
031	Lbl
	C
	x^2
	SUM
035	06
	1
	SUM
	08
	R/S
3. Dateneingabe III	
040	Lbl
	D
	x^2
	SUM
	07
045	1
	SUM
047	09
	R/S
4. Berechnung der Quadratsummen	
049	Lbl
050	E
	RCL
	03
	x^2
	STO
055	03
	RCL
	08
	INV
	Prd
060	03
	INV
	Prd
	07
	RCL
065	09
	INV
	Prd
	03
	INV
070	Prd
	06
	RCL
	05
	INV
075	Prd
	03
	INV
	Prd
	06
080	INV
	Prd
	07
	INV
	Prd
085	04
	RCL
	06
	-
	RCL
090	03
	=
	R/S
	RCL
	07
095	-
	RCL
	03
098	=
	R/S
100	RCL
	04
	-
	RCL
	06
105	-
	RCL
	07
	+
	RCL
110	03
	=
	R/S
	RCL
	01
115	-
	RCL
	04
	=
	R/S
120	RCL
	01
	-
	RCL
	03
125	=
	R/S

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
alle X einer					
Stichprobe	A				
nach jeder					
Stichprobe	B		Zellen-Σ		
	R/S				
I,1; I,2; ... I,p	C			Als Testrechnung möge das Beispiel auf S. 78 benützt werden.	
II,1; II,2; ... II,q	D				
	E		QS_I		
	R/S		QS_{II}		
	R/S		$QS_{I \times II}$		
	R/S		QS_{Fehler}		
	R/S		QS_{tot}		

Programm 48 (Theorie S. 82 ff., Formel 145, 146)
1-faktorielle Varianzanalyse mit Meßwiederholungen
vgl. Beispielanalyse Seite 105

Programm 49 (Theorie S. 85 ff., Formel 148, 149)
2-fache Varianzanalyse mit Meßwiederholungen

```
1. Vorbereitung
000  Lbl
     A'
     STO
     00
     STO
005  01
     R/S
     STO
     02
     STO
010  03
     R/S
     STO
     04
     GTO
015  B'

2. Daten-
eingabe I
016  Lbl
     B'
     R/S
     SUM
020  05
     SUM
     06
     x^2
     SUM
025  12
     DSZ
     0
     B'
     RCL
030  06
     R/S
     SUM
033  07
     x^2
035  SUM
     08
     0
     STO
     06
040  RCL
     01
     STO
     00
     DSZ
045  2
     B'
     RCL
     07
     x^2
050  SUM
     09
     0
     STO
     07
055  RCL
     03
     STO
     02
     GTO
060  B'

3. Daten-
eingabe II
061  Lbl
     A
     x^2
     SUM
065  10
     R/S

4. Daten-
eingabe III
067  Lbl
     B
     x^2
070  SUM
     11
     R/S

5. Berech-
nung der
Quadrat-
summen
073  Lbl
     C'
075  RCL
     05
     x^2
     STO
     05
080  RCL
     01
     INV
     Prd
     05
085  INV
     Prd
     09
     INV
     Prd
090  08
     RCL
     03
     INV
     Prd
095  05
     INV
     Prd
     10
     INV
100  Prd
     09
     INV
     Prd
     11
105  RCL
     04
     INV
     Prd
     05
110  INV
     Prd
     10
     RCL
     09
115  SBR
     1/x
     RCL
     08
     -
120  RCL
     09
     =
     R/S
     RCL
125  08
     SBR
     1/x
     RCL
     10
130  SBR
     1/x
     RCL
     11
     -
135  RCL
     10
     -
     RCL
139  09
140  +
     RCL
     05
     =
     R/S
145  RCL
     12
     -
     RCL
     11
150  -
     RCL
     08
     +
     RCL
155  09
     =
     R/S
     RCL
     12
160  -
     RCL
     08
     =
     R/S
165  RCL
     12
     SBR
     1/x

6. Unter-
programm
169  Lbl
170  1/x
     -
     RCL
     05
     =
175  R/S
     INV SBR
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung
p	2nd	A'		
q	R/S			
r	R/S			Als Testrechnung möge das Beispiel auf S.87 benützt werden.
alle X (zeilenweise)	R/S		Zeilensumme (nach je 1 Zeile)	
nach Ablesen jeder Zeilensumme				
	R/S			
I,1,I,2...,I,p	A			
ΣVpl,1/III,1; ΣVpl,2/III,1...				
ΣVpl,1/III,2... ΣVpl,p/III,r	B			
	2nd	C'	QS_{III}	
	R/S		$QS_{in\ Stpr.}$	
	R/S		QS zw Vpn	
	R/S		QS_{I}	
	R/S		QS_{IxII}	
	R/S		QS_{IxVpn}	
	R/S		$QS_{in\ Vpn}$	
	R/S		QS_{tot}	

Programm 50 (Theorie S. 74, Formel 133, 134)
Bartlett-Test

```
1. Daten-
eingabe
000  Lbl
     A
     SUM
     00
     SUM
005  01
     x²
     SUM
     02
     1
010  SUM
     03
     R/S
     Lbl
     A'
015  RCL
     02
     -
     RCL
     01
020  x²
021  :
     RCL
     03
     SUM
025  04
     =
     :
     (
     RCL
030  03
     -
     1
     )
     =
035  SUM
     05
     STO
     06
     x
040  RCL
     03
     =
     SUM
044  07
045  RCL
     03
     -
     1
     =
050  STO
     08
     x
     RCL
     06
055  log
     =
     SUM
     09
     RCL
060  08
     1/x
     SUM
     10
     1
065  SUM
     11
067  0
     STO
     01
070  STO
     02
     STO
     03
     R/S
2. Ermittlung
von Chi
075  Lbl
     B'
     RCL
     07
     :
080  RCL
     04
     =
     log
     STO
085  00
     RCL
     04
088  -
     RCL
090  11
     =
     Prd
     00
     1/x
095  +/-
     SUM
     10
     RCL
     09
100  INV
     SUM
     00
     3
     x
105  (
     RCL
     11
     -
     1
110  )
```

111	=	115	1	119	.	123	:	127	RCL
	$^1/_x$		SUM	120	3		RCL		00
	Prd		10		0	125	10		=
	10		2		3		x	130	R/S

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung	
				Eingabedaten	Ergebnisse
alle X einer Stichprobe nach jeder Stichprobe	 A 2nd 2nd 	 A' B' 	Chi^2	1.Stpr.:99; 105;86;121; 2.Stpr.:67; 134;119; 3.Stpr.:77;98; 104;107;112;	Chi^2 = 3,38

Programm 51 (Theorie S. 89 f., Formel 151)
Rating

```
1. Vor-
bereitung
000  Lbl
     A'
     STO
     00
     STO
005  01
     R/S
     STO
     02
     GTO
010  B'
2. Daten-
eingabe u.
Skalenwerte
011  Lbl
     B'
     R/S
014  SUM
015  03
     x²
     SUM
     04
     DSZ
020  0
     B'
     RCL
     03
     :
025  RCL
     01
     =
     R/S
     SUM
030  05
     x²
     STO
033  06
     SUM
035  07
     RCL
     04
     :
     RCL
040  01
     -
     RCL
     06
     =
045  SUM
     08
     0
     STO
     03
050  STO
     04
052  RCL
     01
     STO
055  00
     GTO
     B'
3. Überein-
stimmung
058  Lbl
     C'
060  RCL
     08
     :
     (
     RCL
065  01
     -
     1
     )
069  :
070  (
     RCL
     07
     -
     RCL
075  05
     x²
     :
     RCL
     02
080  )
     -
     1
     =
     +/-
085  R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung	
				Eingabedaten	Ergebnisse
N	2nd	A'		N = 3, k = 4,	Skalenwerte:
k	R/S			2 2 3	2,33
alle X einer				2 3 3	2,67
Zeile	R/S		Skalenwert	1 2 2	1,67
nach Ablesen				3 4 2	3,00
des Skalenwer-					Ü = 0,31
tes	R/S				
	2nd	C'	Ü		

Programm 52 (Theorie S. 91 ff.)
Likert-Skala für 37 Objekte

```
1. Vorbe-
reitung
000  Lbl
     A'
     STO
     00
     STO
005  38
     1
     STO
     39
     GTO
010  B'

2. Daten-
eingabe
011  Lbl
     B'
     R/S
     SUM
015  Ind 39
016  SUM
     37
     DSZ
     0
020  B'
     1
     SUM
     39
     RCL
025  38
     STO
     00
     GTO
     B'

3. Skalen-
werte
030  Lbl
     C'
     RCL
     39
034  STO
035  00
     GTO
     D'
     Lbl
     D'
040  RCL
     37
     INV
     Prd
     Ind 00
045  DSZ
     0
     D'
     1
     STO
050  00
     STO
     39
     0
     STO
055  38
     GTO
     E'
     Lbl
     E'
060  RCL
     Ind 00
     SUM
     38
     DSZ
065  0
     E'
     RCL
     39
     STO
070  00
     RCL
     38
     -
     RCL
075  Ind 00
076  :
     2
     -
     .
080  5
     =
     R/S
     1
     SUM
085  39
     SUM
     00
     0
     STO
090  38
     GTO
     E'
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Ergebnisse
Zahl der Ob-					
jekte	2nd	A'		2	
Meßwerte					
(zeilenweise)[2]	R/S			14 21	
	2nd	C'	F_1 [1]	35 48	F = -0,3517
	R/S		$F_{2,3\ldots n}$ [1]		F = +0,1483

1) Es erscheinen die Flächen, deren z-Werte nach Tab.1 die Skalenwerte sind.
2) Es können maximal 37 Kategorien skaliert werden.

Programm 53 (Theorie S. 93)
Guttmann-Skala für 37 Objekte

1. Daten-		2. Skalen-		026	STO	043	Lbl	060	0
eingabe		werte			48		B'		=
000	Lbl	012	Lbl		STO	045	RCL		R/S
	A		B		00		48		1
	1		RCL	030	GTO		STO		SUM
	SUM	015	49		A'		00	065	48
	00		INV		Lbl		RCL		RCL
005	R/S		Prd		A'	050	49		48
	STO		Ind 00		RCL		-		STO
	Ind 00		DSZ	035	Ind 00		RCL		00
	SUM	020	0		SUM		Ind 00	070	0
	49		B		49		:		STO
010	GTO		0		DSZ	055	2		49
	A		STO		0		=		GTO
			49	040	A'		x		A'
		025	1		GTO		1		
					B'		0		

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Ergebnisse
	A			f = 12;18;32	
alle f	R/S				Skalenwerte:
	B		1.Skalen-		9,68
			wert		33,87
	R/S		übrige Ska-		74,19
			lenwerte		

Programm 54 (Theorie S. 96 ff., Formel 155, 156)
Konsistenz mit Signifikanztest

```
1. Daten-
eingabe
000  Lbl
     A
     x²
     SUM
     00
005  1
     SUM
     01
     R/S

2. Konsistenz
009  Lbl
010  A'
     RCL
     01
     :
     2
015  =
     INV
     Int
     x=t
     B'
020  RCL
     01
     x²
     -
     1
025  =
     STO
     02
     GTO
     C'
030  Lbl
     B'
     RCL
     01
     x²
035  -
     4
037  =
     STO
     02
040  GTO
     C'
     Lbl
     C'
     RCL
045  01
     x
     2
     x
     (
050  2
     x
     RCL
     01
     -
055  1
     )
     x
     (
     RCL
060  01
     -
     1
     )
     -
065  1
     2
     x
     RCL
     00
070  =
     :
     RCL
     01
     :
075  RCL
     02
077  =
     R/S

3. Signifi-
kanz-Test
079  RCL
080  01
     SBR
     1/x
     STO
     03
085  RCL
     01
     -
     3
     =
090  SBR
     1/x
     x
     2
     4
095  =
     INV
     Prd
     03
     RCL
100  01
     x
     (
     CE
     -
105  1
     )
     x
     (
     RCL
110  01
     x
     2
     -
114  1
115  )
     :
     1
     2
     -
120  RCL
     00
     :
     2
     -
125  .
     5
     =
     +/-
     SUM
130  03
     8
     :
     (
     RCL
135  01
     -
     4
     )
     =
140  Prd
     03
     RCL
     01
     x
145  (
     CE
     -
     1
     )
150  x
     (
     RCL
     01
     -
155  2
156  )
     :
     (
     RCL
160  01
     -
     4
     )
     x²
165  =
     R/S
     SUM
     03
     RCL
170  03
     R/S

4. Unter-
programm
172  Lbl
     1/x
     STO
175  09
     1
     STO
     08
     GTO
180  √x
     Lbl
     √x
     RCL
     09
185  Prd
     08
     DSZ
     9
     √x
190  RCL
     08
     INV SBR
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
alle Spalten-Σ	A			Spalten-Σ = 1; 3; 4; 2; 3; 5; 3	
	2nd	A'	K		K = 0,64
	R/S		df		df = 23,33
	R/S		Chi^2		Chi^2 = 24,00

Programme in umgekehrter polnischer Notation (UPN)

Programm 1 (Theorie S. 1, 3 - 6, Formel 1, 2, 6 - 11, 14 - 19)
Arithm. Mittel, Varianz u. Standardabweichung für ungruppierte u. für tabellierte Daten

1. Eingabe von tabellierten Daten

```
001  Lbl 1
     STO 3
     R/S
     STO 4
005  STO+0
     RCL 3
     ENT
     RCL 4
     x
010  STO+1
     RCL 3
     x²
     ENT
     RCL 4
015  x
     STO+2
     RTN
```

2. Errechnung von $\bar{x}$

```
018  Lbl 2
     RCL 1
020  ENT
     RCL 0
     :
     R/S
```

3. Errechnung von SD u. V

```
024  Lbl 3
025  RCL 1
     x²
     ENT
028  RCL 0
     :
030  RCL 2
     -
     RCL 0
     ENT
     1 (0)*
035  -
     :
     CHS
     R/S
     √x
040  R/S
```

4. Ermittlung v. SD_N u. V_N aus ungruppierten Daten 1)

```
041  Lbl 4
     P⪋S
     RCL 4
     x²
045  ENT
     RCL 9
     :
     RCL 5
     -
050  CHS
     RCL 9
     :
     R/S
     √x
055  R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
a) ungr. Daten:	[ ]	[ ]		x=4; 3; 5; 6;	
alle x	Σ+	[ ]		1; 0; 12; 7; 9	
	$\bar{x}$	[ ]	$\bar{x}$		$\bar{x}$ = 5,222
	s	[ ]	SD_{N-1}		SD_{N-1}=3,801
	x²	[ ]	V_{N-1}		V_{N-1}=14,444
	GSB	4	V_N	Interv. f	SD_N=3,583
	R/S	[ ]	SD_N	0-2 2	V_N=12,840
b) tab.Daten: 2)	[ ]	[ ]		3-5 3	$\bar{x}$ = 5,667
Intervall-	[ ]	[ ]		6-8 2	V_{N-1}=16,000
mitten $(IM)_{1,2...}$	GSB	1		9-11 1	SD_{N-1}=4,000
$f_{1,2...}$	R/S	[ ]		12-14 1	
	GSB	2	$\bar{x}$		
	GSB	3	V		
	R/S	[ ]	SD		

*) falls N-1-Gewichtung erwünscht, ist 1, falls -N-Gewichtung erwünscht, ist 0 zu programmieren.

1) Dieser Teil kann bei Bedarf auch gesondert (beginnend mit 001) programmiert und verwendet werden.

2) Eingabereihenfolge: IM_1, f_1, IM_2, f_2 etc.

Programm 2 (Theorie S. 2 f., Formel 5)
Median, Quartile, Centile für 24 Objekte oder Klassen

1. Eingabe von Daten f. Einzelobjekte

```
001  Lbl 1
     STO i
     1
     STO+ (i)
005  .
     5 *)
     0 *)
     STO+1
     RTN
```

2. Eingabe von Daten f. Objektklassen

```
010  Lbl 2
     STO i
     R/S
     STO(i)
     ENT
015  .
     5 *)
     0 *)
     x
     STO+1
020  RTN
```

3. Ermittlg. d. Medians (Quartils, Centils)

```
021  Lbl 3
     5
     STO i
     0
025  STO 2
     STO 3
     GTO 4
     Lbl 4
     RCL (i)
030  STO+2
     RCL 2
     ENT
     RCL 1
     -
     STO 3
036  x>0?
     GTO 5
     ISZ
     GTO 4
040  Lbl 5
     RCL 3
     ENT
     RCL (i)
     :
045  RCL 4
     x
     STO 3
     RCL i
     R/S
050  STO-3
     RCL 3
     CHS
     R/S
```

*) falls nicht der Median gewünscht wird, sind hier die entsprechenden anderen Ziffern einzuprogrammieren, z.B. 25 für das 25%-Quartil.

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
Rohdaten oder					
Intervalle müs-					
sen mit Codes					
(C) v.5-29 ver-					
sehen werden!				Codes:	
a) Rohdaten: 1	STO	4		6;6;8;9;8;8,	
$C_{1,2...}$	GSB	1		10;12;13;13;	
	GSB	3	Z(Q,Ce.)	10;7;11;	Z = 9
b) tab. Daten:					
Intervallbreite	STO	4		Code Inter- f	
$C_{1,2,...}$	GSB	2		vall	
$f_{1,2,...}$	R/S			5 1-2,9 3	
	GSB	3	C des betr. Intervalls	6 3-4,9 4	
				7 5-6,9 3	
Obergrenze des				8 7-8,9 3	Z = 4,663
betr. Intervalls	R/S		Z(Q,Ce.)		

1) Eingabereihenfolge: C_1, f_1, C_2, f_2 etc.

Programm 3 (Theorie S. 7, Formel 25, 26)
Schiefe und Exzeß

```
1. Eingabe von x̄ und SD
001  Lbl 1
     STO 0
     R/S
     STO 1
005  R/S

2. Eingabe der IM u. f
006  Lbl 2
     ENT
     RCL 0
     -
010  RCL 1
     :
     STO 2
     3
     Y^x
015  R/S
     STO 3
     STO+4
     x
     STO+5
020  RCL 2
021  ENT
     4
     Y^x
     RCL 3
025  x
     STO+6
     RTN

3. Berechnung v.
   Schiefe u. Exzeß
028  Lbl 3
029  RCL 5
030  ENT
     RCL 4
     :
     R/S
     RCL 6
035  ENT
     RCL 4
     :
     R/S
```

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
$\bar{x}$	GSB 1		$\bar{x}$ = 10,141	
SD	R/S		SD = 5,039	
$IM_{1,2 \ldots n}$ 1)	GSB 2		Interv. f	
$f_{1,2 \ldots n}$ 1)	R/S		0-4 12	
	GSB 3	Schiefe	5-9 23	Schiefe=-0,122
	R/S	Exzeß	10-14 25	Exzeß = 1,891
			15-19 18	

1) Eingabereihenfolge: IM_1, f_1, IM_2, f_2 etc.

Programm 4 (Theorie S. 8, Formel 27)
Prozentränge für 25 Objekte oder Klassen

```
1. Daten der
   Objekte eingeben
001  Lbl 1
     STO i
     1
     STO+(i)
005  STO+1
     RTN

2. Daten der
   Klassen eingeben
007  Lbl 2
     STO i
     R/S
010  STO+(i)
011  STO+1
     RTN

3. Ermitteln von
   Prozenträngen
013  Lbl 3
     STO i
015  STO 2
     GTO 4
     Lbl 4
     RCL (i)
     STO+3
020  RCL i
     ENT
     5
     -
024  x=0?
025  GTO 5
     DSZ
     GTO 4
     Lbl 5
     RCL 2
030  STO i
     RCL (i)
     ENT
     2
     :
035  RCL 1
     :
     1
     0
     0
040  x
     RCL 3
     ENT
     RCL 1
     :
045  1
     0
     0
     x
     -
050  CHS
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
den Objekten				C:5;5;7;8;7;	
bzw. Klassen				7;9;11;12;	
Codes(C) von				12;9;6;10;	
5 bis 29 zuwei-				$C_{\%}$ = 7	PR=34,62
sen!					
a)Objekte:					
$C_{1,2...n}$	GSB	1		C Klasse f	
$C_{\%}$ 1)	GSB	3	PR	5 1-2,9 3	
(vor neuem $C_{\%}$)				6 3-4,9 1	
0	STO	3		7 5-6,9 2	
b)Klassen:				8 7-8,9 4	
$C_{1,2...n}$ 2)	GSB	2		9 9-10,9 0	
$f_{1,2...n}$ 2)	R/S			10 11-12,9 2	
$C_{\%}$	GSB	3	PR	$C_{\%}$=8	
(vor neuem $C_{\%}$)				(Klasse 7-8,9)	PR = 66,67
0	STO	3			

1) $C_{\%}$ = Code des Objekts/der Klasse, wofür man den PR sucht.
2) Eingabereihenfolge: C_1, f_1, C_2, f_2 etc.

Programm 5 (Theorie S. 8, Formel 28)
Standardisierung von Verteilungen aus Urdaten

```
1. Ermittlung von
   z - Werten
001  Lbl 1
     ENT
     x̄
004  -
005  STO 0
     S
     STO : 0
     RCL 0
     R/S

2. Ermittlung v.
   x mit vorgege-
   benen z-Werten
010  Lbl 2
     S
     ENT
013  R/S
     x
015  STO 0
     x̄
     STO+0
     RCL 0
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
alle X	Σ+			X=5;3;2;1;7;0;8;4;6;3;6;12	
X_i	GSB	1	z_i		
z_i 1)	GSB	2			
	R/S		X_i	X_i=0	z_i = -1,425
				z_i=2	X_i = 11,417

1) falls x-Werte zu bestimmten z-Werten gesucht werden, muß vor der Eingabe eines z-Wertes immer zuerst GSB 2 gedrückt werden.

Programm 6 (Theorie S. 8, Formel 28)
Standardisierung von Verteilungen aus tabellierten Daten

1. Dateneingabe

```
001  Lbl 1
     STO 0
     ENT
     R/S
005  STO 1
     STO+2
     x
     STO+3
     RCL 0
010  x^2
     ENT
     RCL 1
     x
014  STO+4
015  RTN
```

2. Ermittlung v. SD u. $\bar{x}$

```
016  Lbl 2
     RCL 3
     ENT
     RCL 2
020  :
     STO 0
     RCL 3
     x^2
     ENT
025  RCL 2
026  :
     RCL 4
     -
     1
030  ENT
     RCL 2
     -
     :
     √x
035  STO 1
     R/S
```

3. Ermittlung v. z-Werten

```
037  Lbl 3
     ENT
039  RCL 0
040  -
     RCL 1
     :
     R/S
```

4. Ermittlung von x-Werten mit vorgegebenen z-Werten

```
044  Lbl 4
045  ENT
     RCL 1
     x
     RCL 0
     +
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung	
				Eingabedaten	Ergebnisse
$IM_{1,2\ldots m}$ 1)	GSB	1		Interv. f	
$f_{1,2\ldots m}$ 1)	R/S			0-2 3	
	GSB	2		3-5 4	
X_i	GSB	3	z_i	6-8 4 $X_i=0$	$z_i = -1{,}443$
z_i	GSB	4	X_i	9-11 0	
				12-14 1 $z_i=2$	$X_i = 11{,}928$

1) Eingabereihenfolge: IM_1, f_1, IM_2, f_2 etc.

Programm 7 (Theorie S. 10, Formel 30)
Binomialverteilung

1. Dateneingabe

```
001  Lbl 0
     STO 0
     ENT
     R/S
005  STO 2
     -
     STO 3
     1
     ENT
010  R/S
     STO 4
```

2. Berechnung von p (x)

```
012  -
     RCL 3
     Y^x
015  RCL 4
     ENT
     RCL 2
     Y^x
     x
020  STO 5
     [GSB 1]
     STO x 5
023  RCL 2
     STO 0
025  [GSB 1]
     STO:5
     RCL 3
     STO 0
     [GSB 1]
030  STO:5
     RCL 5
     R/S
```

3. Unterprogramm "Fakultät"

```
033  Lbl 1
     x=0 ?
035  GTO 4
     1
     STO 1
     GTO 2
     Lbl 2
040  RCL 0
     STOx1
     1
     STO-0
```

```
044  RCL 0
045  x=0 ?
046  GTO 3
     GTO 2
048  Lbl 3
     RCL 1
050  RTN
051  Lbl 4
     1
     RTN
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
N	GSB	0		N = 8	
k	R/S			k = 4	
p	R/S		p (x)	p = 0,50	p(x) = 0,2734

Programm 8 (Theorie S. 11, Formel 31)
Poissonverteilung

```
1. Dateneingabe
001  Lbl 0
     ENT
     R/S
     :
005  STO 2
     R/S
     STO 0

2. Berechnung von p (x)
008  Y^x
009  STO 3
010  1
     e^x
     ENT
     RCL 2
     Y^x
015  STO:3
     GSB 1
     STO:3
     RCL 3
     R/S

3. Unterprogramm "Fakultät"
020  Lbl 1
     x=0 ?
     GTO 4
     1
     STO 1
025  GTO 2
     Lbl 2
     RCL0
     STOx1
029  1
030  STO-0
     RCL 0
     x=0 ?
     GTO 3
     GTO 2
035  Lbl 3
     RCL 1
     RTN
     Lbl 4
     1
040  RTN
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
f [1]	GSB	0		f = 319	
N	R/S			N = 2450	
k	R/S		p(x)	k = 5	p(x) = 0,000000274

1) f = Häufigkeit, mit welcher das seltene Ereignis unter N Fällen beobachtet wurde.

Programm 9 (Theorie S. 14 f., Formel 36)
Normalitätsprüfung

```
1. Eingabe der Ver-
   teilungskennwerte
   X, SD u. N
001  Lbl 1
     STO 0
     R/S
     STO 1
005  R/S
     STO 2
     GTO 2

2. Ermittlung der er-
   warteten Häufigkeiten
008  Lbl 2
     R/S
010  [GSB 5]
011  R/S
     STO 3
     R/S
     [GSB 5]
015  R/S
     ENT
     RCL 3
     -
     ABS
020  RCL 2
     x
     GTO 2
     Lbl 3
     [GSB 5]
025  R/S
026  CHS
     ENT
     .
     5
030  +
     RCL 2
     x
     RTN

3. Ermittlung
   von Chi²
034  Lbl 4
035  ENT
     R/S
     STO 4
     -
039  x²
040  RCL 4
     :
     STO+5
     RTN

4. Unterpro-
   gramm:
   z-Transfor-
   mation
044  Lbl 5
045  ENT
     RCL 0
     -
     RCL 1
     :
050  RTN
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
$\bar{X}$	GSB	1		$\bar{X}$ = 9,100	
SD	R/S			SD = 4,749	
N	R/S			N = 100	
$I_{2,3\ldots m-1}$				Interv. fb	fe:
(Untergrenze)	R/S		z	1-5,9 25	25,14
$F_{+/-}$ zu z 1)	R/S			6-10,9 38	39,02
$I_{2,3\ldots m-1}$				11-15,9 31	26,82
(Obergrenze)	R/S		z	16-20,9 6	7,35
$F_{+/-}$ zu z 1)	R/S		$fe_{2,3\ldots m-1}$		
I_1 (Obergrenze)					
I_n (Untergrenze)	GSB	3	z		
$\lvert F \rvert$ zu z 1)	R/S		$fe_{1,m}$		
$fb_{1,2\ldots m}$ 2)	GSB	4			
$fe_{1,2\ldots m}$ 2)	R/S				
	RCL	5	Chi^2		Chi^2 = 0,9269

1) Eingabereihenfolge: Untergrenze $Intervall_2$, $F_{+/-}$ (Fläche des z-Wertes, den das Programm anzeigt, nach Tab. 1 mit dem Vorzeichen dieses z-Werts), Obergrenze $Intervall_2$, $F_{+/-}$, Untergrenze $Intervall_3$... Obergrenze $Intervall_{n-1}$, $F_{+/-}$, dann Obergrenze $Intervall_1$, F_1, Untergrenze $Intervall_n$, F_n.

2) Eingabereihenfolge: fb_1, fe_1, fb_2, fe_2 etc.

Programm 10 (Theorie S. 19, Formel 48)
Unterschied von Prozentangaben

```
1. Dateneingabe
001  Lbl 1
     STO 0
     R/S
     STO 1
005  R/S
     STO 2
     R/S
     STO 3

2. Berechnung des
   krit. Bruchs
009  1
010  0
     0
     STO 4
     RCL 0
     ENT
015  RCL 1
     -
017  RCL 4
     ENT
     RCL 0
020  -
     RCL 0
     x
     RCL 2
     :
025  RCL 4
     ENT
027  RCL 1
     -
     RCL 1
030  x
     RCL 3
     :
     +
     √x
035  :
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
$p1$	GSB	1		$p_1 = 4,8$	
$p2$	R/S			$p_2 = 17,0$	
N_1	R/S			$N_1 = 386$	
N_2	R/S		CR	$N_2 = 245$	CR = -4,63

Programm 11 (Theorie S. 20, Formel 49)
t-Test für unabhängige Stichproben

```
1. Eingabe der
   Mittelwerte
001  Lbl 1
     ENT
     R/S
     -
005  STO 0

2. Eingabe der
   N und SD
006  R/S
     x²
     ENT
     R/S
010  :
011  STO 1
     R/S
     x²
     ENT
015  R/S

3. Ermittlung
   von t
016  :
     STO+1
     RCL 1
     √x
020  STO:0
     RCL 0
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
$\bar{X}_1$	GSB	1		$\bar{X}_1 = 5,48$	
$\bar{X}_2$	R/S			$\bar{X}_2 = 3,27$	
SD_1	R/S			$SD_1 = 7,20$	
N_1	R/S			$N_1 = 215$	
SD_2	R/S			$SD_2 = 9,14$	
N_2	R/S		t	$N_2 = 307$	t = 3,08

Programm 12 (Theorie S. 21, Formel 53)
t-Test für abhängige Stichproben

1. Eingabe der Paardifferenzen

001 Lbl 1
ENT
R/S
-
005 STO+0
x^2
STO+1
008 1
STO+2
010 RTN

2. Ermittlung von t

011 Lbl 2
RCL 2
ENT
1
015 -
$\sqrt{x}$
RCL 0
x
STO 3
020 RCL 2
ENT
RCL 1
x
024 RCL 0
025 x^2
-
$\sqrt{x}$
STO:3
RCL 3
030 R/S

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
$X_{1,2\ldots n}$ 1)	GSB 1		X = 5; 4; 2; 6;	
$X'_{1,2\ldots n}$ 1)	R/S		X' = 2; 3; 5; 6	
	GSB 2	t		t = 0,20

1) Eingabereihenfolge: X_1, X'_1, X_2, X'_2 etc.

Programm 13 (Theorie S. 23, Formel 57)
z-Wert für U-Test mit unverbundenen Rängen

1. Dateneingabe

001 Lbl 1
STO 0
ENT
R/S
005 STO 1
+
1
008 +
RCL 0
010 x
STO 3
R/S

2. Ermittlung des z-Wertes

013 ENT
014 2
015 x
RCL 3
-
CHS
STO 2
020 RCL 3
ENT
022 RCL 1
x
3
025 :
$\sqrt{x}$
STO:2
RCL 2
R/S

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
n_1	GSB 1		n_1 = 8	
n_2	R/S		n_2 = 14	
T_1	R/S	z	T_1 = 73	z = 1,297

Programm 14 (Theorie S. 24, Formel 58)
z-Wert für U-Test mit verbundenen Rängen

```
1. Eingabe der
   gleichen Ränge
001  Lbl 1
     STO 5
     ENT
     3
005  Y^x
     RCL 5
     -
     STO+6
     RTN
2. Eingabe der
   übrigen Daten
010  Lbl 2
011  STO 0
     ENT
     R/S
     STO 1
015  +
     STO 2
     1
     +
     RCL 0
020  x
     R/S
2. Berechnung von z
022  ENT
     2
024  x
025  -
     STO 3
     RCL 2
     ENT
     3
030  Y^x
     RCL 2
     -
     RCL 6
     -
035  RCL 0
     x
     RCL 1
038  x
     RCL 2
040  :
     3
     :
     RCL 2
     ENT
045  1
     -
     :
     √x
     STO:3
050  RCL 3
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
alle Rgl 1)	GSB	1		Rgl: 2;4;3	
n_1	GSB	2		$n_1 = 9$	
n_2	R/S			$n_2 = 28$	
T_1	R/S		z	$T_1 = 248$	z = -2,728

1) Anzahl von Objekten mit dem gleichen Rangplatz.

Programm 15 (Theorie S. 26 f., Formel 62)
Wilcoxen-Test

```
1. Datenein-
   gabe
001  Lbl 1
     STO 0
     ENT
     1
005  +
     STO 1
     RCL 0
     x
     4
010  :
011  R/S
2. Ermittlung d.
   krit. Bruchs
012  -
     CHS
     STO 2
015  RCL 0
     ENT
     2
     x
     1
020  +
```

```
021  RCL 1
     x
     RCL 0
024  x
025  2
     4
027  :
     √x
     STO:2
030  RCL 2
     R/S
```

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
n	[GSB] [1]		n = 8	
T_W	[R/S] [ ]	CR	T_W = 50	CR = 4,481

Programm 16 (Theorie S. 27, Formel 63)
Vorzeichen-Test für N ⩽ 25

```
1. Eingabe von
   N und F
001  Lbl 0
     STO 0
     ENT
     R/S
005  STO 2

2. Ermittlung von p
006  -
     STO 3
     .
     5
010  ENT
011  RCL 2
     Y^x
     .
     5
015  ENT
     RCL 3
     Y^x
     x
     STO 4
020  GSB 1
     STO x 4
     RCL 2
     STO 0
     GSB 1
025  STO:4
     RCL 3
     STO 0
     GSB 1
     STO:4
030  RCL 4
     R/S

3. Unterprogramm
   "Fakultät"
032  Lbl 1
     x=0 ?
     GTO 4
035  1
036  STO 1
     GTO 2
     Lbl 2
     RCL 0
040  STOx1
     1
     STO-0
     RCL 0
     x=0 ?
045  GTO 3
     GTO 2
     Lbl 3
     RCL 1
     RTN
050  Lbl 4
     1
     RTN
```

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
N	[GSB] [0]		N = 24	
F	[R/S] [ ]	p	F = 7	p = 0,0206

Programm 17 (Theorie S. 29 f., Formel 65)
4-Felder-Chi-Quadrat

```
1. Eingabe
   der Felder-
   häufigkeiten
001  Lbl 1
     STO 0
     ENT
     R/S
005  STO 1
     +
     R/S
     STO 2
     +
010  R/S
     STO 3

2. Ermittlung
   des Chi-
   Quadrat
012  +
     STO 4
     RCL 0
015  ENT
     RCL 3
     x
     RCL 1
     ENT
020  RCL 2
     x
     -

023  x²
     RCL 4
025  x
     STO 5
     RCL 0
     ENT
     RCL 1
030  +
     RCL 0
     ENT
     RCL 2
     +
035  x

036  RCL 1
     ENT
     RCL 3
     +
040  x
     RCL 2
     ENT
     RCL 3
     +
045  x
     STO:5
     RCL 5
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
a	GSB	1		a = 4	
b	R/S			b = 14	
c	R/S			c = 28	
d	R/S		Chi^2	d = 28	Chi^2 = 4,282

Programm 18 (Theorie S. 30 f., Formel 32, 66)
Kontigenztafel für maximal 19 Zeilen

```
1. Eingabe
   der Zeilen-
   codes u.
   -summen
001  Lbl 1
     STO i
     R/S
     STO(i)
005  STO+1
     RTN

2. Spalten-
   summen
007  Lbl 2
     STO 2
     6
010  STO i
     R/S

3. Abarbeiten
   der Zellen
012  Lbl 3
013  STO 3
     RCL 2
015  ENT
     RCL(i)
     x
     RCL 1
     :
020  STO 4
     RCL 3
     -

023  x²
     RCL 4
025  :
     STO+5
     ISZ
     RTN
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung
Zeilensummen mit Codes von 6bis24 versehen				Eingabedaten:
Codes: 6, 7, 8... 24 1)	GSB	1		
$Zs_{1,2\ldots n}$ 1)	R/S			
$Sps_{1,2\ldots m}$ 2)	GSB	2		
$Z_{1,2\ldots n}$ 1)	GSB	3		
	RCL	5	Chi^2	Ergebnisse: $Chi^2 = 2{,}409$

Testrechnung – Eingabedaten:

			Zs	C
8	7	9	24	6
4	3	5	12	7
6	2	3	11	8
3	4	4	11	9
Sps 21	16	21	58	

Abkürzungen: Zs=Zeilensumme, Sps=Spaltensumme, Z=Zellenhäufigkeit, C=Code.
1) Eingabereihenfolge: 6, Zs_1, 7, Zs_2, 8, Zs_3 etc.
2) Eingabereihenfolge: Sps_1, Z_1, Z_2, Z_3... (alle Zellen der Spalte von oben nach unten!) Sps_2, Z_1, Z_2, Z_3 (alle Zellen der folgenden Spalte) etc. Abarbeiten aller Zellen.

Programm 19 (Theorie S. 33, Formel 69)
Cochran-Test

```
1. Eingabe ΣU          009  STO+3          016  RCL 0      026  ENT
001  Lbl 1             010  RTN                 x²              RCL 2
     STO+0                                      -               x
     x²                3. Eingabe k             STO 1           RCL 3
     STO+1             011  Lbl 3          020  RCL 4      030  -
005  RTN                    STO 4               ENT             STO:1
2. Eingabe Zs          4. Ermittlung            1               RCL 1
006  Lbl 2                von Chi²              -               R/S
     STO+2             013  ENT                 STOx1
     x²                     RCL 1          025  RCL 4
                       015  x
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
ΣU_1, ΣU_2 etc.	GSB	1		$\Sigma U = 3; 2; 1$	
Zs_1, Zs_2 etc.	GSB	2		$Zs = 2; 2; 2$	
k	GSB	3	Chi^2	$k = 3$	$Chi^2 = 2{,}000$

Programm 20 (Theorie S. 34 ff., Formel 32, 70, 76)
KFA für 3 alternative Merkmale

```
Lbl 0
1
STO7
R/S
x=0 ?
GTO 1
RCL 1
STOx7
GTO 2
Lbl 1
RCL 2
STOx7
GTO 2
Lbl 2
R/S
x=0 ?
GTO 3
RCL 3
STOx7
GTO 4
Lbl 3
RCL 4
STOx7
GTO 4
Lbl 4
R/S
x=0 ?
GTO 5
RCL 5
STOx7
GTO 6
Lbl 5
RCL 6
STOx7
GTO 6
Lbl 6
RCL 0
x^2
STO:7
RCL 7
R/S
ENT
RCL 7
-
x^2
RCL 7
:
STO+8
R/S
GTO 0
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
N	STO	0		N = 1000	
ΣA_1	STO	1		ΣA_1 = 400	
ΣA_0	STO	2		ΣA_0 = 300	
ΣB_1	STO	3		ΣB_1 = 200	
ΣB_0	STO	4		ΣB_0 = 600	
ΣC_1	STO	5		ΣC_1 = 500	
ΣC_0	STO	6		ΣC_0 = 100	
	GSB	0			fe 101 = 120,00
1. KZ der Konf.[1]	R/S				Chi^2-Komponente = 3,333
2. KZ der Konf.[1]	R/S			fb = 140	
3. KZ der Konf.[1]	R/S		fe		
fb	R/S		Chi^2-Komp.		
vor jeder neuen					
Konf.	R/S				
	RCL	8	Gesamt-Chi^2		

1) KZ = Kennziffer; Eingabe der Konfiguration 101 z.B.: 1 R/S, 0 R/S, 1 R/S.

Programm 21 (Theorie S. 34 ff., Formel 32, 70, 76)
KFA für 4 alternative Merkmale

```
Lbl 0
1
STO 3
R/S
x=0 ?
GTO 1
RCL A
STOx3
GTO 2
Lbl 1
RCL B
STOx3
GTO 2
Lbl 2
R/S
x=0 ?
GTO 3
RCL C
STOx3
GTO 4
Lbl 3
RCL D
STOx3
GTO 4
Lbl 4
R/S
x=0 ?
GTO 5
RCL E
STOx3
GTO 6
Lbl 5
RCL i
STOx3
GTO 6
Lbl 6
R/S
x=0 ?
GTO 7
RCL 0
STOx3
GTO 8
Lbl 7
RCL 1
STOx3
GTO 8
Lbl 8
RCL 2
ENT
3
Y^x
STO:3
RCL 3
R/S
ENT
RCL 3
-
x^2
RCL 3
:
STO+4
R/S
GTO 0
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
ΣA_1	STO	A		ΣA_1 = 600	
ΣA_0	STO	B		ΣA_0 = 300	
ΣB_1	STO	C		ΣB_1 = 500	
ΣB_0	STO	D		ΣB_0 = 400	
ΣC_1	STO	E		ΣC_1 = 200	
ΣC_0	STO	i		ΣC_0 = 700	
ΣD_1	STO	0		ΣD_1 = 100	
ΣD_0	STO	1		ΣD_0 = 900	
N	STO	2		N = 1000	
	GSB	0			Konfiguration
1.KZ der Konf.[1]	R/S				1010 :
2.KZ der Konf.[1]	R/S				fe = 43,20
3.KZ der Konf.[1]	R/S			fb = 50	Chi^2 - Kompo-
4.KZ der Konf.[1]	R/S		fe		nente = 1,07
fb	R/S		Chi^2-Komp.		
nach jeder Konf.	R/S				
	RCL	4	Gesamt-Chi^2		

1) KZ = Kennziffer, Eingabe der Konfiguration 0110 z.B.: 0 R/S, 1 R/S, 1 R/S, 0 R/S.

Programm 22 (Theorie S. 34 ff., Formel 32, 70, 76)
KFA für 5 alternative Merkmale

```
001  Lbl 0
     1
     STO 6
     6
005  CHS
     STO i
     GTO 1
     RCL C
     STOx6
010  GTO 2
     Lbl 1
     R/S
     x=0 ?
     GTO(i)
015  RCL B
     STOx6
     GTO 2
     RCL E
     STOx6
020  GTO 3
     Lbl 2
     R/S
     x=0 ?
     GTO(i)
025  RCL D
     STOx6
     GTO 3
     RCL 1
     STOx6
030  GTO 4
     Lbl 3
     R/S
     x=0 ?
     GTO(i)
035  RCL 0
     STOx6
     GTO 4
     RCL 3
039  STOx6
040  GTO 5
     Lbl 4
     R/S
     x=0 ?
     GTO(i)
045  RCL 2
     STOx6
     GTO 5
     RCL 5
     STOx6
050  GTO 6
     Lbl 5
     R/S
     x=0 ?
     GTO(i)
055  RCL 4
     STOx6
     GTO 6
058  Lbl 6
     RCL A
060  ENT
     4
     Y^x
     STO:6
     RCL 6
065  R/S
     ENT
     RCL 6
     -
     x^2
070  RCL 6
     :
     STO+7
     R/S
     GTO 0
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
N	STO	A		N = 2000	
ΣA_1	STO	B		$\Sigma A_1 = 300$	
ΣA_0	STO	C		$\Sigma A_0 = 600$	
ΣB_1	STO	D		$\Sigma B_1 = 400$	
ΣB_0	STO	E		$\Sigma B_0 = 200$	
ΣC_1	STO	0		$\Sigma C_1 = 1200$	
ΣC_0	STO	1		$\Sigma C_0 = 800$	
ΣD_1	STO	2		$\Sigma D_1 = 350$	Konfiguration
ΣD_0	STO	3		$\Sigma D_0 = 700$	01101 :
ΣE_1	STO	4		$\Sigma E_1 = 1500$	fe = 18,9
ΣE_0	STO	5		$\Sigma E_0 = 500$	
	GSB	0			
1.KZ der Konf.[1]	R/S				
2.KZ der Konf.[1]	R/S			fb = 23	
⋮	⋮				
5.KZ der Konf.[1]	R/S		fe		Chi^2-Kompo-
fb	R/S		Chi^2-Komp.		nente = 0,89
nach jeder Konf.	R/S				
	RCL	7	Gesamt-Chi^2		

1) KZ = Kennziffer der Konfiguration

Programm 23 (Theorie S. 34 ff., Formel 32, 70, 76)
KFA für 3 dreifach gestufte Merkmale

```
Lbl 0
1
STO 5
1
0
CHS
STO i
GTO 2
RCL B
STOx5
GTO 4
Lbl 1
RCL C
STOx5
GTO 4
Lbl 2
R/S
x=0 ?
GTO(i)
ENT
1
-
x=0 ?
GTO 1
RCL D
STOx5
GTO 4
RCL E
STOx5
GTO 6
Lbl 3
RCL 0
STOx5
GTO 6
Lbl 4
R/S
x=0 ?
GTO(i)
ENT
1
-
x=0 ?
GTO 3
RCL 1
STOx5
GTO 6
RCL 2
STOx5
GTO 7
Lbl 5
RCL 3
STOx5
GTO 7
Lbl 6
R/S
x=0 ?
GTO(i)
ENT
1
-
x=0 ?
GTO 5
RCL 4
STOx5
GTO 7
Lbl 7
RCL A
x^2
STO:5
RCL 5
R/S
ENT
RCL 5
-
x^2
RCL 5
:
STO+6
R/S
GTO 0
```

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung	
			Eingabedaten	Ergebnisse
N	STO A		N = 1000	
ΣA_0	STO B		ΣA_0 = 50	
ΣA_1	STO C		ΣA_1 = 400	
ΣA_2	STO D		ΣA_2 = 300	
ΣB_0	STO E		ΣB_0 = 200	
ΣB_1	STO 0		ΣB_1 = 100	
ΣB_2	STO 1		ΣB_2 = 700	
ΣC_0	STO 2		ΣC_0 = 500	
ΣC_1	STO 3		ΣC_1 = 150	
ΣC_2	STO 4		ΣC_2 = 250	Konfiguration
	GSB 0			102:
1.KZ der Konf.	R/S			fe = 20,00
2.KZ der Konf.	R/S		fb = 32	Chi^2-Komponen-
3.KZ der Konf.	R/S	fe		te = 7,20
fb	R/S	Chi^2-Komp.		
nach jeder Konfiguration				
	R/S			
	RCL 6	Gesamt-Chi^2		

1) KZ = Kennziffer der Konfiguration

Programm 24 (Theorie S. 38, Formel 77)
Produkt-Moment-Korrelation

```
001  Lbl 1
     P≶S
     RCL 4
     ENT
005  RCL 6
     x
     RCL 9
     :
009  RCL 8
010  -
     CHS
     STO 0
     RCL 4
     x²
015  ENT
     RCL 9
017  :
     RCL 5
     -
020  STO 1
     RCL 6
     x²
     ENT
     RCL 9
025  :
     RCL 7
     -
     STO×1
     RCL 1
030  √x
     STO:0
     RCL 0
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung	
				Eingabedaten	Ergebnisse
$X_{1,2\ldots,n}$ 1) $Y_{1,2\ldots,n}$ 1)	E↑ Σ+ GSB	 1	r_{xy}	X = 4; 3; 5; 8; Y = 4; 6; 1; 7;	r_{xy} = 0,29

1) Eingabereihenfolge: X_1, Y_1, X_2, Y_2 etc.

Programm 25 (Theorie S. 38, Formel 77)
Korrelationsmatrix für 5 Variablen

```
1. Eingabe der
   Variablen
001  Lbl 0
     R/S
     STO 0
     STO+5
005  R/S
     STO 1
     STO+6
     R/S
     STO 2
010  STO+7
     R/S
     STO 3
     STO+8
     R/S
015  STO 4
     STO+9
     1
     0
019  STO i
020  RCL 0
     GSB 1
     RCL 1
     GSB 1
     RCL 2
025  GSB 1
     RCL 3
     GSB 1
     RCL 4
     GSB 1
030  RCL 0
     ENT
     RCL 1
     x
     STO+(i)
035  ISZ
     RCL 0
     ENT
     RCL 2
039  x
040  STO +(i)
     ISZ
     RCL 0
     ENT
     RCL 3
045  x
     STO +(i)
     ISZ
     RCL 0
     ENT
050  RCL 4
     x
     STO+(i)
     ISZ
     RCL 1
055  ENT
     RCL 2
     x
     STO+(i)
059  ISZ
060  RCL 1
     ENT
     RCL 3
     x
     STO+(i)
065  ISZ
     RCL 1
     ENT
     RCL 4
     x
070  STO+(i)
     ISZ
     RCL 2
     ENT
     RCL 3
075  x
     STO+(i)
     ISZ
     RCL 2
```

```
079  ENT
080  RCL 4
     x
     STO+(i)
     ISZ
     RCL 3
085  ENT
     RCL 4
     x
     STO+(i)
     GTO 0
```

2. Unterprogramm

```
090  Lbl 1
     x²
     STO+(i)
     ISZ
     RTN
```

3. Berechnung der Korrelationskoeffizienten

```
095  Lbl 2
     STO 4
     1
     5
     STO 0
100  5
     GSB 7
     GSB 5
     5
     GSB 7
105  7
     GSB 8
     5
     GSB 7
     8
110  GSB 8
     5
     GSB 7
113  9
     GSB 8
115  6
     GSB 7
     GSB 5
     6
     GSB 7
120  8
     GSB 8
     6
     GSB 7
     9
125  GSB 8
     7
     GSB 7
     GSB 5
     7
130  GSB 7
     9
     GSB 8
     8
     GSB 7
135  GSB 5
     1
     5
     STO i
     GTO 6
```

4. Unterprogramm

```
140  Lbl 3
     RCL (i)
     ENT
     RCL 4
     :
145  STO 1
     x²
     RCL 4
     x
     CHS
150  STO 2
     GSB 4
152  RCL (i)
     STO+2
     RCL i
155  ENT
     4
     -
     STO i
     RTN
```

5. Unterprogramm

```
160  Lbl 4
     5
     ENT
     RCL i
     +
165  STO i
     RTN
```

6. Unterprogramm

```
167  Lbl 5
     RCL(i)
     CHS
170  ENT
     RCL 1
     x
     STO 1
     RCL(i)
175  x²
     ENT
     RCL 4
     :
     CHS
180  STO 3
     GSB 4
     RCL(i)
     STO+3
     RCL 3
185  STO×2
     RCL 0
     STO i
188  RCL(i)
     STO+1
190  RCL 1
     ENT
     RCL 2
     √x
     :
195  STO(i)
     1
     STO+0
     RTN
```

7. Abruf de Korrelationen

```
199  Lbl 6
200  RCL(i)
     R/S
     ISZ
     GTO 6
```

8. Unterprogramm

```
204  Lbl 7
205  STO i
     GSB 3
     RTN
```

9. Unterprogramm

```
208  Lbl 8
     STO i
210  GSB 5
     RTN
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
	GSB	0		V = 2;3;5	
$V_{1,2\ldots n}$ 1)	R/S			W = 3;4;1	
$W_{1,2\ldots n}$ 1)	R/S			X = 4;1;2	
$X_{1,2\ldots n}$ 1)	R/S			Y = 2;3;3	
$Y_{1,2\ldots n}$ 1)	R/S			Z = 4;2;1	
$Z_{1,2\ldots n}$ 1)	R/S				
N	GSB	2	2)		
	R/S		r_{vw}		$r_{vw} = -0{,}79$
	R/S		r_{vx}		$r_{vx} = -0{,}50$
	R/S		r_{vy}		$r_{vy} = +0{,}76$
	R/S		r_{vz}		$r_{vz} = -0{,}93$
	R/S		r_{wx}		$r_{wx} = -0{,}14$
	R/S		r_{wy}		$r_{wy} = -0{,}19$
	R/S		r_{wz}		$r_{wz} = +0{,}50$
	R/S		r_{xy}		$r_{xy} = -0{,}94$
	R/S		r_{xz}		$r_{xz} = +0{,}79$
	R/S		r_{yz}		$r_{yz} = -0{,}94$

1) Eingabereihenfolge: V_1, W_1, X_1, Y_1, Z_1, V_2, W_2, X_2, Y_2, Z_2 etc.
2) Hier rechnet das Programm ca. 50 sec.

Programm 26 (Theorie S. 39, Formel 79)
Rangkorrelation

```
1. Daten-
   eingabe
001  Lbl 1
     ENT
     R/S
     -
005  x²
     STO+0
007  1
     STO+1
     RTN

2. Ermittlung
   von R
010  Lbl 2
     6
012  ENT
     RCL 0
     x
015  RCL 1
     ENT
     3
     Yˣ
     RCL 1
020  -
     :
     1
     -
     CHS
025  R/S
```

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung	
			Eingabedaten	Ergebnisse
$Rx_{1,2\ldots n}$ 1) $Ry_{1,2\ldots n}$ 1)	GSB 1 R/S GSB 2	 Rxy	Rx=1;3;5;2;4 Ry=3;4;5;2;1	 Rxy = 0,3000

1) Eingabereihenfolge: R_{x_1}, R_{y_1}, R_{x_2}, R_{y_2} etc.

Programm 27 (Theorie S. 95, Formel 153)
Durchschnittliche Rangkorrelation

```
1. Daten-
   eingabe
001  Lbl 0
     STO 0
     R/S
     STO 1
005  GTO 1
     Lbl 1
     R/S
     x²
     STO+2
010  GTO 1

2. Ermittlung
   von R̄
011  Lbl 2
012  1
     2
     STOx2
015  RCL 0
     STO:2
     ENT
     1
     -
020  STO:2
     RCL 1
     STO:2
     x²
     ENT
025  1
026  -
     STO:2
     RCL 1
     ENT
030  4
     x
     2
     +
     RCL 0
035  x
     STO 3
     RCL 0
     ENT
     1
040  -
041  STO:3
     RCL 1
     ENT
     1
045  -
     STO:3
     RCL 3
     STO-2
     1
050  ENT
     RCL 2
     +
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung	
				Eingabedaten	Ergebnisse
k	GSB	0		k = 5	
N	R/S			N = 7	
alle $\sum R$	R/S			$\sum R$: 23; 8; 25;	
	GSB	2	$\bar{R}$	12; 10; 34;	
				28	$\bar{R}$ = 0,83

Programm 28 (Theorie S. 43 f., Formel 85)
Konkordanzkoeffizient für maximal 20 Objekte

1. Vorbereitung

```
001 Lbl 1
    5
    STO i
    R/S
```

2. Einspeichern der Rangsummen, Ermittlung von N

```
005 Lbl 2
    STO+1
    STO(i)
    1
    STO+3
010 ISZ
    RTN
```

3. Einspeichern von k, Ermittlung $\sum R_M$

```
012 Lbl 3
    STO 4
    RCL 1
015 ENT
    RCL 3
    :
    STO 2
    2
020 4
    STO i
    0
    STO 1
```

```
024   GTO 4
4. Ermittlung
   von(ΣR-ΣR_M)^2
   u. Summierung
025   Lbl 4
      RCL(i)
      x=0 ?
      GTO 5
      ENT
030   RCL 2
      -
      x^2
```

```
033   STO+1
      DSZ
035   RCL i
      ENT
      4
      -
      x=0 ?
040   GTO 6
      GTO 4
      Lbl 5
      DSZ
      GTO 4
```

```
045   Lbl 6
      RCL 1
      R/S
5. Berechnung
   von W
      Lbl 7
      RCL 4
050   x^2
      ENT
      1
      2
```

```
054   :
055   RCL 3
      ENT
      3
      Y^x
      RCL 3
060   -
      x
      STO:1
      RCL 1
      R/S
```

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung	
			Eingabedaten	Ergebnisse
alle ΣR k	GSB 1 GSB 2 GSB 3 GSB 7	Zähler von W W	Rangsummen: $R_1=14$, $R_2=13$, $R_3=8$, $R_4=17$, $R_5=24$, $R_6=36$, $R_6=31$, $R_7=37$ k = 5	Zähler =870,00 W = 0,829

Porgramm 29 (Theorie S. 45, Formel 88, 90)
Durchschnittliche Korrelation bei gleichen n

```
1. Eingabe
   aller r
001   Lbl 1
      STO 0
      ENT
      1
005   +
      1
      ENT
      RCL 0
```

```
009   -
010   :
      LN
      ENT
      2
      :
015   STO+2
      1
      STO+1
      RTN
```

```
2. Berechnung
   von r̄
019   Lbl 2
020   RCL 2
      ENT
      RCL 1
      :
      2
025   x
      e^x
```

```
027   STO 0
      1
      -
030   RCL 0
      ENT
      1
      +
      :
035   R/S
```

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung	
			Eingabedaten	Ergebnisse
alle r	GSB 1 GSB 2	$\bar{r}$	$r_1= 0,51$, $r_2= 0,58$, $r_3= 0,90$, $r_4= -0,40$	$\bar{r} = 0,51$

Programm 30 (Theorie S. 45, Formel 88, 89)
Durchschnittliche Korrelation bei ungleichen n

```
1. Eingabe
   der r u.n
001  Lbl 1
     STO 0
     ENT
     1
005  +
     1
     ENT
     RCL 0
     -
010  :
     LN
     ENT
     2
     :
015  STO 0
     R/S
     ENT
     3
     -
020  STO+1
021  STOx0
     RCL 0
     STO+2
     RTN
2. Berechnung
   von r̄
025  Lbl 2
     RCL 2
     ENT
     RCL 1
     :
030  2
     x
     e^x
     STO 0
     1
035  -
     RCL 0
     ENT
     1
     +
040  :
     R/S
```

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
$r_1, r_2, r_3 \ldots$ 1) $n_1, n_2, n_3 \ldots$ 1)	GSB 1 R/S GSB 2	$\bar{r}$	$r_1 = 0{,}28$; $r_2 = 0{,}45$; $n_1 = 39$; $n_2 = 18$;	$\bar{r} = 0{,}33$

1) Eingabereihenfolge: r_1, n_1, r_2, n_2 etc.

Programm 31 (Theorie S. 45, Formel 91)
Partialkorrelation

```
Eingabe der
Korrelationen,
Errechnung der
Partialkorrela-
tion
001  Lbl 1
     STO 0
003  ENT
     R/S
005  STO 1
     x
     R/S
     -
     CHS
010  STO 2
     1
     ENT
     RCL 0
     x^2
015  -
     1
     ENT
018  RCL 1
     x^2
020  -
     x
     √x
     STO:2
     RCL 2
025  R/S
```

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
r_{1-3} r_{2-3} r_{1-2}	GSB 1 R/S R/S	$r_{1-2(3)}$	$r_{1-3} = 0{,}81$ $r_{2-3} = 0{,}85$ $r_{1-2} = 0{,}69$	$r_{1-2(3)} =$ 0,0049

Programm 32 (Theorie S. 17 f., Formel 42, 46, 47)
Signifikanzprüfung für den Unterschied zweier Korrelationen

```
1. Daten-
   eingabe
001  Lbl 1
     STO 0
     R/S
     STO 1
005  R/S
     STO 2
     R/S
     STO 3

2. Ermittlung
   der Differenz
   u. des Stan-
   dardfehlers
009  RCL 0
010  STO 4
     [GSB 2]
     STO 0
     RCL 1
     STO 4
015  [GSB 2]
     ENT
     RCL 0
     -
     ABS
020  STO 0
     3
     STO-2
     STO-3
     RCL 2
025  1/x
     ENT
     RCL 3
     1/x
     +
030  √x
     STO 1
     R/S

3. Unterpro-
   gramm:
   Fisher'sche
   Z-Transfor-
   mation
033  Lbl 2
     ENT
035  1
     +
     1
     ENT
     RCL 4
040  -
     :
     LN
     ENT
     2
045  :
     RTN

4. Prüfung auf
   5%-Niveau
047  Lbl 3
     1
     .
050  9
     6
     ENT
     RCL 1
     x
055  RCL 0
     -
     CHS
     R/S

5. Prüfung auf
   1%-Niveau
059  Lbl 4
060  2
     .
     5
     8
     ENT
065  RCL 1
     x
     RCL 0
     -
     CHS
070  R/S

6. Prüfung auf
   0.1% Niveau
071  Lbl 5
     3
     .
     2
075  9
     ENT
     RCL 1
     x
     RCL 0
080  -
     CHS
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
r_1	GSB	1		$r_1 = 0{,}846$	
r_2	R/S			$r_2 = 0{,}671$	
N_1	R/S			$N_1 = 145$	
N_2	R/S			$N_2 = 223$	Rest 5% =0,218
	GSB	3	Rest 5% [1]		Rest 1% =0,152
	GSB	4	Rest 1% [1]		Rest 0,1%=0,075
	GSB	5	Rest 0,1% [1]		

1) Signifikanz liegt vor, wenn der Rest > 0 ist.

Programm 33 (Theorie S. 47, Formel 93, 94)
Lineare Regression

1. Einspeichern der x_i u. y_i
2. Errechnung von a u. b

```
001  Lbl 1
     P≷S
     RCL 9
     ENT
005  RCL 8
     x
     RCL 4
     ENT
009  RCL 6
010  x
     -
     STO 0
     RCL 9
     ENT
015  RCL 5
     x
     RCL 4
     x²
     -
020  STO:0
     RCL 0
022  STO C
     R/S
     P≷S
025  x̄
     STO A
     X⇄Y
     STO B
     P≷S
030  RCL A
     ENT
     RCL 0
     x
     RCL B
035  -
     CHS
     STO 1
     R/S
```

3. Prognose

```
     Lbl 2
040  ENT
     RCL C
     x
     RCL 1
     +
045  R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
$Y_{1,2 \dots n}$ 1)	ENT			Y = 2;4;7	b = 1,500
$X_{1,2 \dots n}$ 1)	Σ+			X = 8;7;9	a = -7,667
	GSB	1	b	X_i = 10	Y_i = 7,333
	R/S		a		
X_i	GSB	2	Y_i		

1) Eingabereihenfolge: Y_1, X_1, Y_2, X_2 etc.

Programm 34 (Theorie S. 48, Formel 95)
Vertrauensbereich für lineare Regression

Eingabe der Daten u. Berechnung von △

```
001  Lbl 1
     STO 0
     R/S
     STO 1
005  R/S
     STO 2
007  R/S
     STO 3
     R/S
010  STO 4
     R/S
     STO 5
     R/S
     STO 6
015  RCL 0
016  ENT
     RCL 2
     x²
     x
020  STO 7
     RCL 1
     x²
     ENT
     RCL 5
025  x²
     x
     RCL 0
     x
     STO-7
030  RCL 0
     ENT
     2
     -
```

```
034  STO:7
035  RCL 3
     ENT
     RCL 4
     -
     x²
040  RCL 0
     :
     RCL 1
     x²
     :
045  1
046  +
     RCL 0
     1/x
     +
050  STO×7
     RCL 7
052  √x
     ENT
     RCL 6
055  ×
     R/S
```

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung	
			Eingabedaten	Ergebnisse
N	GSB 1		N = 10	
SD_{XN}	R/S		SD_{XN} = 12	
SD_{YN}	R/S		SD_{YN} = 0,7	
X_i	R/S		X_i = 140	
$\overline{X}$	R/S		$\overline{X}$ = 100	
b	R/S		b = 0,03	
$t_{p/2}$	R/S	△	$t_{p/z}$ = 2,3	△ = 2,30

Programm 35 (Theorie S. 49 f., Formel 97)

Quadratische Regression

```
1. Daten-
   eingabe
001  Lbl 0
     R/S
     STO 0
     STO+1
005  ENT
     R/S
     STO 2
     STO+3
     x
010  STO+4
     RCL 0
     x²
     STO+5
     x²
015  STO+6
     RCL 0
     ENT
018  3
     y^x
020  STO+7
     RCL 0
     x²
     ENT
     RCL 2
025  x
     STO+8
     1
     STO+9
     GTO 0

2. Berechnung
   der Regres -
   sionskoeffi-
   zienten
030  Lbl 1
     RCL 5
032  STO:8
     STO:6
     ENT
035  RCL 7
     :
     1/x
     STO 0
     RCL 1
040  STO:4
     STO:7
     ENT
     RCL 5
     :
045  1/x
     STO 2
     RCL 9
     STO:3
     STO:1
050  STO:5
051  RCL 4
     ENT
     RCL 3
     -
055  RCL 2
     ENT
     RCL 1
     -
     :
060  STO A
     RCL 5
     ENT
     RCL 7
     -
065  RCL 2
     ENT
     RCL 1
     -
```

```
070  STO B
     RCL 8
     ENT
     RCL 3
     -
075  RCL 0
     ENT
     RCL 1
     -
     :
080  STO C
     RCL 5
     ENT
     RCL 6
     -
085  RCL 0
     ENT
     RCL 1
     -
     :
090  STO D
     RCL C
     ENT
     RCL A
     -
095  RCL B
     ENT
     RCL D
     -
     :
100  STO E
     R/S
     RCL 5
     ENT
     RCL 6
105  -
     RCL E
     x
     RCL 8
     +
110  RCL 3
     -
     RCL 0
     ENT
     RCL 1
115  -
     :
     STO D
     R/S
     ENT
120  RCL 1
     x
     RCL E
     ENT
     RCL 5
125  x
     +
     RCL 3
     -
129  CHS
130  STO C
     R/S
3. Prognose
     Lbl 2
     STO 0
     ENT
135  RCL D
     x
     RCL 0
     x^2
     ENT
140  RCL E
     x
     +
     RCL C
     +
145  R/S
```

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung	
			Eingabedaten	Ergebnisse
	GSB 0		X = 2;4;5	
$X_{1,2,\dots n}$ 1)	R/S		Y = 4;8;15	
$Y_{1,2\dots n}$ 1)	R/S			
	GSB 1	b_2		b_2 = 1,67
	R/S	b_1		b_1 = -8,00
	R/S	a		a = 13,33
X_i	GSB 2	Y_i	X_i = 10	Y_i = 100,00

1) Eingabereihenfolge: X_1, Y_1, X_2, Y_2, etc.

Programm 36 (Theorie S. 50 f., Formel 99)
Kubische Regression

```
1. Daten-
   eingabe
001  Lbl 0
     R/S
     STO A
     STO+1
005  ENT
006  R/S
     STO+3
     x
     STO+4
010  RCL A
     x
     STO+5
013  RCL A
     x
015  STO+6
     RCL A
     x^2
     STO+0
     x^2
020  STO+2
     RCL A
     ENT
     3
     y^x
025  STO+7
     x^2
```

```
STO+8
RCL A
ENT
5
y^x
STO+9
P≷S
1
STO+0
P≷S
GTO 0
```

2. Regressions-koeffizienten

```
Lbl 1
P≷S
RCL 0
STO A
P≷S
RCL 0
ENT
RCL 1
:
RCL 1
ENT
RCL A
:
-
STO B
RCL 4
ENT
RCL 1
:
RCL 3
ENT
RCL A
:
-
STO C
RCL 0
ENT
RCL A
:
RCL 7
ENT
RCL 1
:
-
STO D
RCL 7
ENT
RCL A
:
RCL 2
ENT
RCL 1
:
-
STO E
1
0
STO i
RCL 7
ENT
RCL 0
:
RCL 1
ENT
RCL A
:
-
STO(i)
ISZ
RCL 5
ENT
RCL 0
:
RCL 3
ENT
RCL A
:
-
STO(i)
ISZ
RCL 0
ENT
RCL A
:
RCL 2
ENT
RCL 0
:
-
STO(i)
ISZ
RCL 7
ENT
RCL A
:
RCL 9
ENT
RCL 0
:
-
STO(i)
ISZ
RCL 2
ENT
RCL 7
:
RCL 1
ENT
RCL A
:
-
STO(i)
ISZ
RCL 6
ENT
RCL 7
:
RCL 3
ENT
RCL A
:
-
STO(i)
ISZ
RCL 0
ENT
RCL A
:
RCL 9
ENT
RCL 7
:
-
STO(i)
ISZ
RCL 7
ENT
RCL A
:
RCL 8
ENT
RCL 7
:
-
STO(i)
P≷S
1
0
STO i
RCL D
ENT
RCL B
:
RCL 2
ENT
RCL 0
:
-
STO(i)
ISZ
RCL 1
ENT
RCL 0
:
RCL C
ENT
RCL B
:
-
STO(i)
ISZ
ISZ
RCL 3
ENT
RCL 0
:
RCL E
ENT
RCL B
:
-
STO(i)
ISZ
RCL 5
ENT
RCL 4
:
RCL C
```

```
ENT
RCL B
:
-
STO(i)
ISZ
RCL D
ENT
RCL B
:
RCL 6
ENT
RCL 4
:
-
STO(i)
RCL 7
ENT
RCL 4
:
RCL E
ENT
RCL B
:
-
STO B
P≷S
RCL 4
ENT
RCL 5
:
RCL 1
ENT
RCL 0
:
-
STO C
RCL 3
ENT
RCL 0
:
RCL B
ENT
RCL 5
:
-
RCL C
:
1/x
STO C
R/S
RCL B
ENT
RCL 5
:
RCL C
x
RCL 4
ENT
RCL 5
:
+
STO D
R/S
P≷S
RCL 5
ENT
RCL 4
:
STO 0
RCL 6
ENT
RCL 4
:
RCL D
x
STO+0
RCL 7
ENT
RCL 4
:
RCL C
x
STO+0
RCL 0
STO B
R/S
P≷S
RCL 7
STO:6
STO:2
STO:9
STO:8
RCL B
STOx2
RCL 2
STO-6
RCL D
STOx9
RCL 9
STO-6
RCL C
STOx8
RCL 8
STO-6
RCL 6
R/S
```

3. Prognose

```
Lbl 2
STO 1
ENT
RCL B
x
STO 2
RCL 1
x²
ENT
RCL D
x
STO+2
RCL 1
ENT
3
y^x
RCL C
x
STO+2
RCL 6
STO+2
RCL 2
R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
	GSB	0		$X = 2;5;8;6$	
$X_1, X_2, \dots X_n$ 1)	R/S			$Y = 4;9;2;3$	
$Y_1, Y_2, \dots Y_n$ 1)	R/S				
	GSB	1	b_3		$b_3 = 0{,}63$
	R/S		b_2		$b_2 = -10{,}04$
	R/S		b_1		$b_1 = 47{,}58$
	R/S		a		$a = -56{,}00$
X_i	GSB	2	Y_i		$Y_i = 40{,}67$

1) Eingabereihenfolge: X_1, Y_1, X_2, Y_2 etc.

Programm 37 (Theorie S. 52 f., Formel 100)
Potenzregression

```
1. Daten-
   eingabe
001  Lbl 0
     LOG
     ENT
     R/S
005  LOG
     Σ+
     RTN

2. Errechnung
   der Regres-
   sionskoeffi-
   zienten
008  Lbl 1
     P⪌S
010  RCL 9
     ENT
     RCL 8
     x
     RCL 4
015  ENT
     RCL 6
     x
     -
     STO 0
020  RCL 9
     ENT
     RCL 5
     x
     RCL 4
025  x²
     -
     STO:0
     RCL 0
     STO C
030  R/S
     P⪌S
     x̄
     STO A
     x⇄y
035  STO B
     P⪌S
     RCL A
     ENT
     RCL 0
040  x
     RCL B
     -
     CHS
     10^x
045  STO 1
     R/S

3. Prognose
047  Lbl 2
     ENT
     RCL C
050  y^x
     RCL 1
     x
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
$Y_{1,2\ldots n}$ 1)	GSB	0			
$X_{1,2\ldots n}$ 1)	R/S			Y = 5;6;7	
	GSB	1	b	X = 3;6;9	b = 0,302
	R/S		a		a = 3,564
X_i	GSB	2	Y_i	X_i = 10	Y_i = 7,138

1) Eingabereihenfolge: X_1, Y_1, X_2, Y_2 etc.

Programm 38 (Theorie S. 54, Formel 101)
Exponentialregression

```
1. Daten-
   eingabe
001  Lbl 0
     LN
     ENT
     R/S
005  Σ+
     RTN

2. Errechnung
   der Regres-
   sionskoeffi-
   zienten
007  Lbl 1
     P⪌S
     RCL 9
010  ENT
     RCL 8
012  x
     RCL 4
     ENT
015  RCL 6
     x
     -
     STO 0
     RCL 9
020  ENT
021  RCL 5
     x
     RCL 4
     x²
025  -
     STO:0
     RCL 0
     STO C
     R/S
```

```
030  P⪌S          038  RCL 0        3. Prognose        053  ENT
     x̄                 x            046  Lbl 2              RCL 2
     STO A        040  RCL B             ENT           055  y^x
     x⇄y               -                 RCL C              RCL 1
     STO B             CHS               x                  x
035  P⪌S               e^x          050  STO 2              R/S
     RCL A             STO 1             1
     ENT          045  R/S               e^x
```

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
$Y_{1,2\ldots m}$ 1)	GSB 0		Y=2,1; 1,6; 1,2	
$X_{1,2\ldots m}$ 1)	R/S		X=0,7; 1,3; 2,0	
	GSB 1	b		b = -0,430
	R/S	a		a = 2,824
X_i	GSB 2	Y_i	X_i = 5	Y_i = 0,329

1) Eingabereihenfolge: Y_1, X_1, Y_2, X_2 etc.

Programm 39 (Theorie S. 55, Formel 102)
Logarithmische Regression

```
1. Daten-          012  x            027  RCL 0        041  -
   eingabe              RCL 4             STO C             CHS
001  Lbl 0              ENT               R/S               STO 1
     ENT                RCL 6        030  P⪌S               R/S
     R/S                x                 x̄
     LN                 -                 STO A        3. Prognose
005  Σ+                 STO 0             x⇄y          045  Lbl 2
     RTN                RCL 9             STO B             LN
                   020  ENT          035  P⪌S               ENT
2. Berechnung           RCL 5             RCL A             RCL C
   von a u. b           x                 ENT               x
007  Lbl 1              RCL 4             RCL 0        050  RCL 1
     P⪌S                x^2               x                 +
     RCL 9         025  -            040  RCL B             R/S
010  ENT                STO:0
     RCL 8
```

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
$Y_{1,2\ldots m}$ 1)	GSB 0		Y=4,9; 5,0; 4,0	
$X_{1,2\ldots m}$ 1)	R/S		X=1,2; 2,1; 2,5	
	GSB 1	b		b = -0,883
	R/S	a		a = 5,175
X_i	GSB 2	Y_i	X_i = 5	Y_i = 3,754

1) Eingabereihenfolge: Y_1, X_1, Y_2, X_2 etc.

Programm 40 (Theorie S. 56, Formel 103)
Regressionsgüte

```
1. Datenein-
   gabe
001  Lbl 0
     R/S
     STO C
     R/S
005  STO D

2. Ermitteln
   von S
006  RCL 1
     x=0 ?
     GTO 1
     STO 0
010  RCL C
     ENT
     RCL 2
     x
     STO+0
015  1
     4
     STO i
     GSB 9
     GTO 1
020  Lbl 1
     RCL 3
     x=0 ?
     GTO 2
     STO 0
025  RCL C
     ENT
     RCL 4
     x
     RCL C
030  x^2
     ENT
     RCL 5
     x
     +
035  STO+0
036  1
     5
     STO i
     GSB 9
040  GTO 2
     Lbl 2
     RCL 6
     x=0 ?
     GTO 3
045  STO 0
     RCL C
     ENT
     RCL 7
     x
050  RCL C
     x^2
     ENT
     RCL 8
     x
055  +
     STO+0
     RCL C
     ENT
     3
060  y^x
     RCL 9
     x
     STO+0
     1
065  6
     STO i
     GSB 9
     GTO 3
     Lbl 3
070  P≷S
     RCL 0
     x=0 ?
     GTO 4
074  RCL C
075  ENT
     RCL 1
     y^x
     RCL 0
     x
080  P≷S
     STO 0
     1
     7
     STO i
085  GSB 9
     GTO 4
     Lbl 4
     P≷S
     RCL 3
090  x=0 ?
     GTO 5
     ENT
     RCL C
     x
095  STO E
     1
     e^x
     ENT
     RCL E
100  y^x
     RCL 2
     x
     P≷S
     STO 0
105  1
     8
     STO i
     GSB 9
     GTO 5
110  Lbl 5
     RCL A
112  x=0 ?
     GTO 0
     STO 0
115  RCL C
     LN
     ENT
     RCL B
     x
120  STO+0
     1
     9
     STO i
     GSB 9
125  GTO 0

3. Abrufen
   von S
126  Lbl 6
     1
     4
     STO i
130  GTO 7
     Lbl 7
     RCL(i)
     R/S
     ISZ
135  GTO 7

4. Unter-
   programm
136  Lbl 9
     RCL 0
     ENT
     RCL D
140  -
     x^2
     STO+(i)
     RTN
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
lin.R.: a[4)]	STO	1		a = 0,5	
b	STO	2		b = 2	
quadr.R.: a[4)]	STO	3		a = 0,4	
b_1	STO	4		b_1= 0,3	
b_2	STO	5		b_2= 1	
kub.R.: a[4)]	STO	6		a = 3	
b_1	STO	7		b_1= 0,1	
b_2	STO	8		b_2= 2	
b_3	STO	9		b_3= 0,2	
Speicherum-					
stellung[1)]	P⇄S				
Potenz-R.: a[4)]	STO	0		a = 4	
b	STO	1		b = 0,6	
Exp.-R.: a	STO	2		a = 3	
b[4)]	STO	3		b = 1,5	
log. R.: a[4)]	STO	A		a = 5	
b	STO	B		b = 6	
Speicherum-					
stellung[1)]	P⇄S				
	GSB	0			
$X_{1,2 \ldots n}$[3)]	R/S			X = 3;6;10	
$Y_{1,2 \ldots n}$[3)]	R/S			Y = 4;8;11	S =
	GSB	6	S linear[2)]		116,75
	R/S		S quadr.[2)]		9489,49
	R/S		S kub.[2)]		167240,93
	R/S		S Potenz[2)]		52,02
	R/S		S Exponent[2)]		$9{,}61 \cdot 10^{13}$
	R/S		S log.[2)]		
					178,79

1) Falls eine Potenz- Exponential- oder logarithmische Regression geprüft wird, ist jeweils vor und nach Eingabe der entsprechenden Koeffizienten eine Speicherumstellung vorzunehmen.

2) Die Prüfgrößen S für die 6 Regressionsarten erscheinen immer in dieser Reihenfolge. Wurden für eine oder mehrere Regressionen keine Koeffizienten eingegeben, erscheinen Nullen. Das Programm überspringt dann die nicht relevanten Teile.

3) Eingabereihenfolge: X_1, Y_1, X_2, Y_2 etc.

4) Diese Koeffizienten dürfen nicht 0 sein. Ansonsten empfiehlt es sich, mit sehr kleinen Näherungswerten zu arbeiten.

Programm 41 (Theorie S. 56 f., Formel 105, 106, 107)
Multiple Regression für 2 unabhängige Variablen

1. Berechnung der Regressionskoeffizienten

```
001  Lbl 1
     RCL 1
     ENT
     RCL 2
005  x
     RCL 0
     -
     STO 9
     RCL 2
010  x2
     ENT
     1
     -
014  STO:9
015  RCL 9
     R/S
     1
     0
     STO i
020  RCL 0
     ENT
     RCL 2
     x
     RCL 1
025  -
     STO(i)
     RCL 2
     x2
     ENT
030  1
     -
     STO:(i)
     RCL(i)
     R/S
```

2. Prognose

```
035  Lbl 2
     ENT
     RCL 3
     -
     RCL 6
040  :
     RCL 9
     x
     STO 0
044  R/S
045  ENT
     RCL 5
     -
     RCL 8
     :
050  RCL(i)
     x
     STO+0
     RCL 0
     ENT
055  RCL 7
     x
     RCL 4
     +
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
r_{xy}	STO	0		r_{xy} = -0,831	
r_{yz}	STO	1		r_{yz} = -0,909	
r_{xz}	STO	2		r_{xz} = 0,772	
$\bar{X}$	STO	3		$\bar{X}$ = 22,2	
$\bar{Y}$	STO	4		$\bar{Y}$ = 2,8	
$\bar{Z}$	STO	5		$\bar{Z}$ = 13,1	
SD_x	STO	6		SD_x = 6,46	
SD_y	STO	7		SD_y = 1,317	
SD_z	STO	8		SD_z = 4,067	
	GSB	1	b_x		
	R/S		b_z		b_x = -0,32
X_i	GSB	2			b_z = -0,662
Z_i	R/S		Y_i	X_i = 30	
				Z_i = 14	Y_i = 2,098

Programm 42 (Theorie S. 58, Formel 109, 110, 111, 112)
Regression dreier unabhängiger Variablen mit einer abhängigen

1. Koeffizienten

```
Lbl 0
1
ENT
RCL 4
x²
-
RCL 1
x
STO 6
RCL 2
ENT
RCL 4
x
RCL 0
-
RCL 3
x
STO+6
RCL 0
ENT
RCL 4
x
RCL 2
-
RCL 5
x
STO+6
2
ENT
RCL 0
x
RCL 2
x
RCL 4
x
STO 7
1
ENT
RCL 0
x²
-
RCL 2
x²
-
RCL 4
x²
-
STO+7
RCL 7
STO:6
RCL 6
R/S
RCL 2
ENT
RCL 4
x
RCL 0
-
RCL 6
x
STO 7
RCL 5
ENT
RCL 4
x
STO-7
RCL 3
STO+7
1
ENT
RCL 4
x²
-
STO:7
RCL 7
R/S
ENT
RCL 4
x
RCL 6
ENT
RCL 2
x
+
RCL 5
-
CHS
STO 8
R/S
```

2. Multiple Korrelation

```
ENT
RCL 5
x
RCL 7
ENT
RCL 3
x
+
RCL 6
ENT
RCL 1
x
+
√x
R/S
```

3. Prognose

```
Lbl 1
RCL 6
STO A
RCL 7
STO B
RCL 8
STO C
P⇄S
GTO 2
Lbl 2
R/S
ENT
RCL 4
-
RCL 0
:
RCL B
x
STO 8
R/S
ENT
RCL 7
-
RCL 3
:
RCL A
x
STO+8
R/S
ENT
RCL 6
-
RCL 2
:
RCL C
x
STO+8
RCL 1
STOx8
RCL 5
STO+8
RCL 8
GTO 2
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
r_{wx}	STO	0		$r_{wx} = -0{,}47$	
r_{wy}	STO	1		$r_{wy} = 0{,}206$	
r_{wz}	STO	2		$r_{wz} = -0{,}432$	
r_{xy}	STO	3		$r_{xy} = -0{,}48$	
r_{xz}	STO	4		$r_{xz} = 0{,}469$	
r_{yz}	STO	5		$r_{yz} = -0{,}769$	
	P⇄S				
SD_x	STO	0		$SD_x = 0{,}536$	
SD_y	STO	1		$SD_y = 1{,}35$	
SD_z	STO	2		$SD_z = 0{,}475$	
SD_w	STO	3		$SD_w = 0{,}514$	
$\overline{X}$	STO	4		$\overline{X} = 0{,}131$	
$\overline{Y}$	STO	5		$\overline{Y} = 3{,}4$	
$\overline{Z}$	STO	6		$\overline{Z} = 0{,}031$	
$\overline{W}$	STO	7		$\overline{W} = 0{,}111$	
	P⇄S				
	GSB	0	b_w		$b_w = -0{,}232$
	R/S		b_x		$b_x = -0{,}232$
	R/S		b_z		$b_z = -0{,}760$
	R/S		R		R = 0,805
vor der ersten					
Prognose	GSB	1			
X_i	R/S			$X_i = -0{,}11$	
W_i	R/S			$W_i = 0{,}89$	
Z_i	R/S		Y_i	$Z_i = 0{,}06$	$Y_i = 3{,}005$

Programm 43 (Theorie S. 62, Formel 116, 117, 118)
Invertierte Elemente einer 3 x 3-Korrelationsmatrix

```
1. Berechnung
   von r^ww
001  Lbl 1
     1
     ENT
     RCL 1
005  x²
     -
     STO 4
008  1
     ENT
010  RCL 2
     x²
     -
     STO 5
     RCL 1
015  ENT
     RCL 2
017  x
     RCL 3
     -
020  CHS
     STO 6
     RCL 1
     ENT
     RCL 3
025  x
026  RCL 2
     -
     CHS
     STO 7
030  RCL 4
     ENT
     RCL 5
     x
     RCL 6
```

```
035   :
      RCL 6
      -
      CHS
      STO 8
040   RCL 4
      ENT
      RCL 6
      :
      RCL 2
045   x
      RCL 1
047   -
      RCL 7
      x
050   RCL 8
      :
      1
      -
      CHS
055   RCL 4
      :
      R/S
```

2. Berechnung von r^{xx}

```
058   RCL 6
      ENT
060   RCL 8
      :
      1
      -
      CHS
065   RCL 4
      :
067   R/S
```

3. Berechnung von r^{zz}

```
068   RCL 4
      ENT
070   RCL 6
      :
      RCL 8
      :
      CHS
075   R/S
```

Eingaben	Tasten	Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
r_{wx}	STO 1		$r_{wx} = -0{,}470$	
r_{wz}	STO 2		$r_{wz} = -0{,}432$	
r_{xz}	STO 3		$r_{xz} = 0{,}469$	
	GSB 1	r^{ww}		$r^{ww} = 1{,}386$
	R/S	r^{xx}		$r^{xx} = 1{,}445$
	R/S	r^{zz}		$r^{zz} = 1{,}384$

Programm 44 (Theorie S. 65 f.)

Restkorrelationsmatrix

1. Vorbereitung

```
001   Lbl 1
      3
      STO i
      R/S
```

2. Eingabe der Ladungszahlen

```
005   Lbl 2
006   STO(i)
      ISZ
      RTN
```

3. Vorbereitung

```
009   Lbl 3
010   2
      STO 1
      GTO 4
```

4. Restkorrelationen

```
013   Lbl 4
      1
015   STO+1
      RCL 1
      STO i
      RCL(i)
      STO 2
020   GTO 5
      Lbl 5
      RCL 2
      ENT
      RCL (i)
025   x
      R/S
      -
      CHS
      R/S
030   ISZ
      GTO 5
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung
$a_{1,2,\dots}$ 1)	GSB	1		Ladungszahlen:
	GSB	2		0,86; 0,45; 0,93
$r_{1,2,3,\dots}$ 2)	GSB	3		Korrelationsmatrix:
	R/S		r_{Rest}	(0,95)
	R/S			0,95 (0,76)
nach jeder Spalte				0,53 0,76 (0,81)
	GSB	4		Rest-Matrix:
				(0,21)
				0,56 (0,56)
				-0,27 0,34 -0,06

1) alle Ladungszahlen der Zeilen mit der 1. (obersten) beginnend.
2) Korrelationen der 1. Spalte mit der Kommunalität beginnend, jeweils nach Ablesen von r_{Rest} R/S drücken, nach Abarbeiten der 1. Spalte GSB 4, dann 2. Spalte (wieder mit der Kommunalität beginnend) etc.

Programm 45 (Theorie S. 68 f., Formel 123, 124)
Rotation von Faktoren

```
1. Eingabe des
   Rotationswin-
   kels
001   Lbl 1
      STO 0
      SIN
      STO 1
005   RCL 0
      COS
      STO 0
008   R/S
2. Eingabe der
   ursprünglichen
   Ladungszahlen
009   Lbl 2
010   STO 2
      ENT
      RCL 0
      x
      R/S
3. Berechnung
   der rotierten
   Ladungszahlen
015   STO 3
      ENT
      RCL 1
      x
      -
020   R/S
021   RCL 2
      ENT
      RCL 1
      x
025   RCL 3
      ENT
      RCL 0
      x
      +
030   R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
α	GSB	1		$\alpha = 26{,}288°$	
$a_{1\,1,2\dots m}$ 1)	GSB	2		$a_1 = 0{,}84$	
$a_{2\,1,2\dots m}$ 1)	R/S		$a'_{1,1,2\dots m}$	$a_2 = -0{,}47$	$a'_1 = 0{,}96$
	R/S		$a'_{2,1,2\dots m}$		$a'_2 = -0{,}05$

1) Reihenfolge der Bearbeitung: a_{11}, a_{21}, dann a'_{11} und a'_{21} ablesen, a_{12}, a_{22}, a'_{12} und a'_{22} ablesen etc.

Programm 46 (Theorie S. 71 f., Formel 127)
1-faktorielle Varianzanalyse

```
1. Daten-
   eingabe
001  Lbl 1
     R/S
     STO+0
     STO+2
005  x²
     STO+1
     1
     STO+3
     GTO 1
010  Lbl 2
011  RCL 2
     x²
     ENT
     RCL 3
015  :
     STO+4
     RCL 3
     STO+5
     0
     STO 2
     STO 3
     GTO 1
2. Berechnung
   der Quadrat-
   summen
023  Lbl 3
     RCL 0
025  x²
     ENT
     RCL 5
     :
     STO 2
030  RCL 1
     -
032  CHS
     R/S
     STO 3
035  RCL 4
     ENT
     RCL 2
     -
     R/S
040  STO-3
     RCL 3
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten			Testrechnung: Ergebnisse
				Faktorstufen			
	GSB	1		I	II	III	
alle X einer				3	4	6	
Stichprobe	R/S			2	3	4	
nach jeder				4	5	9	
Stichprobe	GSB	2		8	6	10	QS_{tot} = 70,67
	GSB	3	QS_{tot}				QS_{treat} = 22,17
	R/S		QS_{treat}				QS_{Fehler} = 48,50
	R/S		QS_{Fehler}	1.Stpr.	2.Stpr.	3.Stpr.	

Programm 47 (Theorie S. 75 ff., Formel 136, 137)
2-faktorielle Varianzanalyse

```
1. Daten-
   eingabe I
001  Lbl 0
     R/S
     STO+1
     STO+8
005  x²
     STO+0
     1
008  STO+9
     GTO 0
010  Lbl 1
     RCL 1
     R/S
     x²
     STO+2
015  RCL 9
     STO 3
017  0
     STO 1
     STO 9
020  GTO 0
2. Daten-
   eingabe II
021  Lbl 2
     R/S
     x²
024  STO+4
025  1
     STO+5
     GTO 2
3. Daten-
   eingabe III
     Lbl 3
     R/S
030  x²
```

```
031  STO+6
     1
     STO+7
     GTO 3
```

4. Berechnung der Quadratsummen

```
035  Lbl 4
     RCL 8
     x²
     ENT
     RCL 5
040  :
     RCL 7
042  :
     RCL 3
     :
045  STO 8
     RCL 3
     STO:2
     STO:4
     STO:6
050  RCL 7
     STO:4
     RCL 5
     STO:6
     RCL 4
055  ENT
056  RCL 8
     -
     R/S
     RCL 6
060  ENT
     RCL 8
     -
     R/S
     RCL 2
065  ENT
     RCL 4
     -
     RCL 6
     -
070  RCL 8
     +
     R/S
     RCL 0
     ENT
075  RCL 2
     -
     R/S
     RCL 0
     ENT
080  RCL 8
     -
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
	GSB	0			
alle X einer					
Stichprobe				Als Testrechnung möge das Beispiel auf S.78 benützt werden.	
(="Zelle")	R/S				
nach jeder Zelle	GSB	1	$\sum$Zelle		
nach Ablesen					
der $\sum$Zelle	R/S				
	GSB	2			
I,1; I,2;...I,p	R/S				
	GSB	3			
II,1; II,2...II,q	R/S				
	GSB	4	QS_I		
	R/S		QS_{II}		
	R/S		QS_{IxII}		
	R/S		QS_{Fehler}		
	R/S		QS_{tot}		

Programm 48 (Theorie S. 82 ff., Formel 145, 146)
1-faktorielle Varianzanalyse mit Meßwiederholungen

1. Programmvorbereitung

```
001  Lbl 0
     STO 0
     STO i
     R/S
005  STO 1
     GTO 1
```

2. Dateneingabe

```
007  Lbl 1
     R/S
     STO+2
010  x²
     STO+3
     DSZ
013  GTO 1
     RCL 2
015  STO+4
     x²
     STO+5
     0
     STO 2
020  RCL 0
021  STO i
     GTO 1
     Lbl 2
     R/S
025  x²
     STO+6
     GTO 2
```

3. Berechnung der Quadratsummen

```
028  Lbl 3         038  ENT           051  R/S           064  RCL 6
     RCL 4               RCL 1              RCL 3         065  -
030  x²             040  :                  ENT                RCL 5
     ENT                 STO 6              RCL 5              -
     RCL 0               RCL 5         055  -                  RCL 4
     :                   ENT                R/S                +
     RCL 1               RCL 0              RCL 6         070  R/S
035  :              045  :                  ENT                RCL 3
     STO 4               STO 5              RCL 4              ENT
     RCL 6               RCL 5         060  -                  RCL 4
                         ENT                R/S                -
                         RCL 4              RCL 3         075  R/S
                    050  -                  ENT
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
p	GSB	0		Als Testrechnung möge das Beispiel auf S. 83 benützt werden.	
q	R/S				
alle X (zeilenweise)					
	R/S				
	GSB	2			
I,1;I,2...I,p	R/S				
	GSB	3	$QS_{zw\ Vpn}$		
	R/S		$QS_{in\ Vpn}$		
	R/S		QS_{treat}		
	R/S		QS_{res}		
	R/S		QS_{tot}		

Programm 49 (Theorie S. 85 ff., Formel 148, 149)
2-faktorielle Varianzanalyse mit Meßwiederholungen

```
1. Programm-
   vorbereitung
001  Lbl 0
     STO 0
     STO i
     R/S
005  STO 1
     R/S
     STO 2
     GTO 1

2. Daten-
   eingabe
     Lbl 1
010  R/S
     STO+3
     x²
     STO+4
     DSZ
015  GTO 1
     RCL 3
     R/S
     STO+5
     0
020  STO 3
     RCL 0
     STO i
     GTO 1
     Lbl 2
025  R/S
     x²
     STO+6
     GTO 2
     Lbl 3
030  R/S
     x²
     STO+7
     GTO 3
     Lbl 4
035  R/S
     x²
     STO+8
     GTO 4
     Lbl 5
040  R/S
     x²
     STO+9
     GTO 5

3. Berechnung
   der Quadrat-
   summen
044  Lbl 6
045  RCL 5
     x²
     ENT
     STO 5
     RCL 0
050  STO:5
051  STO:7
     STO:9
     RCL 1
     STO:5
055  STO:7
     STO:6
     STO:8
     RCL 2
     STO:6
060  STO:5
     RCL 7
     ENT
     RCL 5
     -
065  R/S
     RCL 9
     ENT
     RCL 7
     -
070  R/S
     RCL 9
     ENT
     RCL 5
     -
075  R/S
     RCL 6
     ENT
     RCL 5
     -
080  R/S
     RCL 8
     ENT
     RCL 6
     -
085  RCL 7
     -
     RCL 5
     +
     R/S
090  RCL 4
     ENT
     RCL 8
     -
     RCL 9
095  -
     RCL 7
     +
     R/S
     RCL 4
100  ENT
     RCL 9
     -
     R/S
     RCL 4
105  ENT
     RCL 5
     -
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
p	GSB	0		Als Testrechnung möge das Beispiel auf S.87 benützt werden.	
q	R/S				
r	R/S				
alle X (zeilen-					
weise)	R/S		Zeilensumme (nach jeder Zeile)		
nach Ablesen					
jeder Zeilen-					
summe	R/S				
	GSB	2			
I,1; I,2;...I,p	R/S				
	GSB	3			
III,1;III,2...					
III,r	R/S				

	GSB	4			
ΣVpl, 1/III, 1;					
ΣVpl, 2/III, 1...					
ΣVpl, p/III, r	R/S				
	GSB	5			
ΣVp1/III, 1;					
ΣVp2/III, 1...					
ΣVPq/III, r	R/S				
	GSB	6	QS_{III}		
	R/S		QS_{inStpr}		
	R/S		$QS_{zw\ Vpn}$		
	R/S		QS_{I}		
	R/S		QS_{IxIII}		
	R/S		QS_{IxVpn}		
	R/S		$QS_{in\ Vpn}$		
	R/S		QS_{tot}		

Programm 50 (Theorie S. 74, Formel 133, 134)
Bartlett-Test

```
1. Daten-
   eingabe
001  Lbl 1
     R/S
     STO+1
     x^2
005  STO+2
     1
     STO+3
     GTO 1
     Lbl 2
010  RCL 1
     x^2
     ENT
     RCL 3
     STO+9
015  :
016  CHS
     RCL 2
     +
     RCL 3
020  ENT
     1
     -
     :
     STO 4
025  ENT
     RCL 3
     x
     STO+5
     RCL 3
030  ENT
     1
     -
     STO 3
034  ENT
035  RCL 4
     LOG
     x
     STO+6
     RCL 3
040  1/x
     STO+7
     1
     STO+8
     0
045  STO 1
     STO 2
     STO 3
     GTO 1

2. Berechnung
   des Chi^2
049  Lbl 3
050  RCL 9
     ENT
     RCL 8
     -
     1/x
055  CHS
     ENT
     RCL 7
     +
     STO 1
060  RCL 8
     ENT
     1
     -
     3
```

```
065  x
     1/x
     STOx1
     1
     STO+1
070  2
     .
     3
     0
074  3
075  STO:1
     RCL 5
     ENT
     RCL 9
     :
080  LOG
     STO 2
     RCL 9
083  ENT
     RCL 8
085  -
     STOx2
     RCL 6
     STO-2
     RCL 2
090  ENT
091  RCL 1
     :
     R/S
     RCL 8
095  ENT
     1
     -
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung Eingabedaten	Testrechnung Ergebnisse
	GSB	1		1. Stichprobe:	
alle X einer				99; 105; 86;	
Stichprobe	R/S			121	
nach jeder				2. Stichprobe:	
Stichprobe	GSB	2		67; 134; 119	
	GSB	3	Chi^2	3. Stichprobe:	Chi^2 = 3,38
	R/S		df	98; 104; 107;	df = 2
				112; 77,	

Programm 51 (Theorie S. 89 f., Formel 151)
Rating

```
1. Programm-
   vorbereitung
001  Lbl 0
     STO i
     STO E
     GTO 1

2. Eingabe
   der Schät-
   zungen
005  Lbl 1
     R/S
     STO D
     ENT
     RCL C
010  +
     STO C
     RCL D
013  x^2
     ENT
015  RCL B
     +
     STO B
     DSZ
     GTO 1
020  GTO 2

3. Skalen-
   werte
021  Lbl 2
     2
     1
     STO i
025  RCL E
     STO :(i)
     ISZ
028  STO:(i)
     DSZ
030  DSZ
     RCL B
     ENT
     RCL C
     R/S
035  x^2
     -
     STO+(i)
     DSZ
     RCL C
040  STO+(i)
     DSZ
     x^2
     STO+(i)
     RCL E
045  STO i
046  0
     STO C
     STO B
     GTO 1

4. Urteiler-
   überein-
   stimmung
050  Lbl 3
     RCL E
     ENT
     1
     -
055  RCL A
     :
     1/x
     STO 0
     1
```

```
060  9
     STO i
     RCL(i)
     x²
     ENT
065  R/S
     :
     STO 1
     DSZ
     RCL(i)
070  STO-1
     RCL 1
     CHS
     STO:0
     1
075  ENT
     RCL 0
     -
     R/S
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung	
				Eingabedaten	Ergebnisse
N	GSB	0		N=3, K=4	
Schätzwerte					
(zeilenweise)	R/S		Skalen-	2;3;2	2,33
			werte 1)	2;3;3	2,67
nach Anzeige				1;2;2	1,67
jedes Skalen-				3;4;2	3,00
wertes	R/S				
	GSB	3			
K	R/S		Ü		Ü = 0,31

1) Nach Eingabe jeweils einer Zeile erscheint der Skalenwert.

Programm 52 (Theorie S. 91 ff.)
Likert-Skala

```
1. Programm-
   vorbereitung
001  Lbl 0
     STO i
     STO E
     2
005  STO 1
     GTO 1

2. Daten-
   eingabe
007  Lbl 1
     R/S
     STO+0
010  DSZ
     GTO 1
     1
     STO+1
     RCL 1
015  STO i
     RCL 0
     STO(i)
     1
     STO+2
020  0
     STO 0
022  RCL E
     STO i
     GTO 1

3. Berechnung
   der Skala
025  Lbl 2
     2
     4
     STO i
     GTO 3
030  Lbl 3
     RCL(i)
     STO+0
     RCL i
     ENT
035  3
     -
     x=0 ?
     GTO 4
     DSZ
040  GTO 3
     Lbl 4
     RCL 0
     STO:(i)
044  ISZ
045  RCL i
     ENT
     2
     4
     -
050  x=0 ?
     GTO 5
     GTO 4
     Lbl 5
     0
055  STO 0
     3
     STO i
     STO 1
     GTO 6
060  Lbl 6
     RCL(i)
     STO+0
     RCL i
     ENT
065  3
     -
     x=0 ?
068  GTO 7
     DSZ
070  GTO 6
     Lbl 7
     RCL 1
     STO i
     RCL(i)
075  ENT
     2
     :
     RCL 0
     -
080  CHS
     .
     5
     -
     R/S
085  1
     STO+1
     RCL 1
     STO i
     0
090  STO 0
     GTO 6
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung	
				Eingabedaten	Ergebnisse
Zahl der Objekte 1)	GSB	0		2	
Meßwerte (zeilenweise)	R/S			14; 21; 35; 48;	
	GSB	2	F2)		F:
nach jedem Skalenwert	R/S				-0,3542 0,1375

1) Die Zahl der Objekte darf maximal 20 betragen.
2) Es erscheinen die Flächen, deren z-Wert nach Tab. 1 die Skalenwerte sind.

Programm 53 (Theorie S. 93)
Guttmann-Skala

```
1. Eingabe
   der Häufig-
   keiten
001  Lbl 0
     2
     STO i
     GTO 1
005  Lbl 1
     R/S
     STO+0
     STO(i)
     ISZ
010  GTO 1
2. Skalierung
011  Lbl 2
     RCL 0
     STO:(i)
014  DSZ
015  RCL i
     ENT
     1
     -
     x=0 ?
020  GTO 3
     GTO 2
     Lbl 3
     0
     STO 0
025  2
     STO i
     STO 1
     GTO 4
     LBl 4
030  RCL(i)
31   STO+0
     RCL i
     ENT
     2
035  -
     x=0 ?
     GTO 5
     DSZ
     GTO 4
040  Lbl 5
     RCL 1
     STO i
     RCL(i)
     ENT
045  2
     :
047  RCL 0
     -
     CHS
050  ENT
     1
     0
     0
     ×
055  R/S
     1
     STO+1
     RCL 1
     STO i
060  0
     STO 0
     GTO 4
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung	
				Eingabedaten	Ergebnisse
	GSB	0		f : 12; 18; 32	
alle f1)	R/S				Skalenwerte:
	GSB	2	Skalenwerte		9,68
nach jedem					33,87
Skalenwert	R/S				74,19

1) in aufsteigender Reihenfolge: die Zahl der f darf maximal 22 sein.

Programm 54 (Theorie S. 96 ff., Formel 155, 156)
Konsistenz mit Signifikanztest

1. Programmvorbereitung

```
001  Lbl 1
     STO 0
     ENT
     2
005  :
     FRAC
     x=0 ?
     GTO 2
     RCL 0
010  x²
     ENT
     1
     -
     STO 1
015  GTO 3
     Lbl 2
     RCL 0
     x²
     ENT
020  4
     -
     STO 1
     GTO 3
```

2. Eingabe der Spaltensummen

```
024  Lbl 3
025  R/S
     x²
     STO+2
     STO+4
     GTO 3
```

3. Errechnung von K

```
030  Lbl 4
     RCL 0
     ENT
     2
     x
035  STO 3
     1
     -
     STOx3
     RCL 0
040  ENT
     1
     -
     STOx3
     1
045  2
     STOx2
     RCL 2
     STO-3
     RCL 1
050  STO:3
     RCL 0
     STO:3
     RCL 3
     R/S
```

4. Signifikanz-Test

```
055  RCL 0
     STO i
     1
     STO 5
059  GSB 5
060  STO 6
     RCL 0
     ENT
     3
     -
065  STO i
     1
     STO 5
     GSB 5
     STO:6
070  2
     4
     STO:6
     RCL 0
     ENT
075  1
     -
     STO 7
     RCL 0
     x
080  STO 8
     RCL 0
     ENT
     2
     x
085  1
     -
     STOx8
     1
     2
090  STO:8
     .
     5
093  STOx4
     STO+4
     RCL 4
     STO+6
     RCL 8
     STO-6
     RCL 0
100  ENT
     4
     -
     STO 5
     8
105  :
     STO:6
     RCL 0
     ENT
     2
110  -
     RCL 0
     x
     RCL 7
     x
115  RCL 5
     x²
     :
     R/S
     STO+6
120  RCL 6
     R/S
```

5. Unterprogramm "Fakultät"

```
122  Lbl 5
     RCL i
     STOx 5
125  DSZ
     GTO 5
     RCL 5
     RTN
```

Eingaben	Tasten		Ergebnisse	Testrechnung: Eingabedaten	Testrechnung: Ergebnisse
n	GSB	1		n = 7	
	GSB	3		Spaltensummen:	
alle Spaltensummen				1;3;4;2;3;5,3	
	R/S				
	GSB	4	K		K = 0,64
	R/S		df		df = 23,33
	R/S		Chi²		Chi² = 24,00

III. Teil: Tabellen

Tabelle 1

Flächenstücke und Ordinaten der Gaußschen Normalverteilungs-Kurve

z	Fläche	Ordinate	z	Fläche	Ordinate	z	Fläche	Ordinate
.00	.0000	.3989	.40	.1554	.3683	.80	.2881	.2897
.01	.0040	.3989	.41	.1591	.3668	.81	.2910	.2874
.02	.0080	.3989	.42	.1628	.3653	.82	.2939	.2850
.03	.0120	.3988	.43	.1664	.3637	.83	.2967	.2827
.04	.0160	.3986	.44	.1700	.3621	.84	.2996	.2803
.05	.0199	.3984	.45	.1736	.3605	.85	.3023	.2780
.06	.0239	.3982	.46	.1772	.3589	.86	.3051	.2756
.07	.0279	.3980	.47	.1808	.3572	.87	.3078	.2732
.08	.0319	.3977	.48	.1844	.3555	.88	.3106	.2709
.09	.0359	.3973	.49	.1879	.3538	.89	.3133	.2685
.10	.0398	.3970	.50	.1915	.3521	.90	.3159	.2661
.11	.0438	.3965	.51	.1950	.3503	.91	.3186	.2637
.12	.0478	.3961	.52	.1985	.3485	.92	.3212	.2613
.13	.0517	.3956	.53	.2019	.3467	.93	.3238	.2589
.14	.0557	.3951	.54	.2054	.3448	.94	.3264	.2565
.15	.0596	.3945	.55	.2088	.3429	.95	.3289	.2541
.16	.0636	.3939	.56	.2123	.3410	.96	.3315	.2516
.17	.0675	.3932	.57	.2157	.3391	.97	.3340	.2492
.18	.0714	.3925	.58	.2190	.3372	.98	.3365	.2468
.19	.0754	.3918	.59	.2224	.3352	.99	.3389	.2444
.20	.0793	.3910	.60	.2258	.3332	1.00	.3413	.2420
.21	.0832	.3902	.61	.2291	.3312	1.01	.3438	.2396
.22	.0871	.3894	.62	.2324	.3292	1.02	.3461	.2371
.23	.0910	.3885	.63	.2357	.3271	1.03	.3485	.2347
.24	.0948	.3876	.64	.2389	.3251	1.04	.3508	.2323
.25	.0987	.3867	.65	.2422	.3230	1.05	.3531	.2299
.26	.1026	.3857	.66	.2454	.3209	1.06	.3554	.2275
.27	.1064	.3847	.67	.2486	.3187	1.07	.3577	.2251
.28	.1103	.3836	.68	.2518	.3166	1.08	.3599	.2227
.29	.1141	.3825	.69	.2549	.3144	1.09	.3621	.2203
.30	.1179	.3814	.70	.2580	.3123	1.10	.3643	.2179
.31	.1217	.3802	.71	.2612	.3101	1.11	.3665	.2155
.32	.1255	.3790	.72	.2642	.3079	1.12	.3686	.2131
.33	.1293	.3778	.73	.2673	.3056	1.13	.3708	.2107
.34	.1331	.3765	.74	.2704	.3034	1.14	.3729	.2083
.35	.1368	.3752	.75	.2734	.3011	1.15	.3749	.2059
.36	.1406	.3739	.76	.2764	.2989	1.16	.3770	.2036
.37	.1443	.3725	.77	.2794	.2966	1.17	.3790	.2012
.38	.1480	.3712	.78	.2823	.2943	1.18	.3810	.1989
.39	.1517	.3697	.79	.2852	.2920	1.19	.3830	.1965

z	Fläche	Ordinate	z	Fläche	Ordinate	z	Fläche	Ordinate
1.20	.3849	.1942	1.60	.4452	.1109	2.00	.4772	.0540
1.21	.3869	.1919	1.61	.4463	.1092	2.01	.4778	.0529
1.22	.3888	.1895	1.62	.4474	.1074	2.02	.4783	.0519
1.23	.3907	.1872	1.63	.4484	.1057	2.03	.4788	.0508
1.24	.3925	.1849	1.64	.4495	.1040	2.04	.4793	.0498
1.25	.3944	.1826	1.65	.4505	.1023	2.05	.4798	.0488
1.26	.3962	.1804	1.66	.4515	.1006	2.06	.4803	.0478
1.27	.3980	.1781	1.67	.4525	.0989	2.07	.4808	.0468
1.28	.3997	.1758	1.68	.4535	.0973	2.08	.4812	.0459
1.29	.4015	.1736	1.69	.4545	.0957	2.09	.4817	.0449
1.30	.4032	.1714	1.70	.4554	.0940	2.10	.4821	.0440
1.31	.4049	.1691	1.71	.4564	.0925	2.11	.4826	.0431
1.32	.4066	.1669	1.72	.4573	.0909	2.12	.4830	.0422
1.33	.4082	.1647	1.73	.4582	.0893	2.13	.4834	.0413
1.34	.4099	.1626	1.74	.4591	.0878	2.14	.4838	.0404
1.35	.4115	.1604	1.75	.4599	.0863	2.15	.4842	.0396
1.36	.4131	.1582	1.76	.4608	.0848	2.16	.4846	.0387
1.37	.4147	.1561	1.77	.4616	.0833	2.17	.4850	.0379
1.38	.4162	.1539	1.78	.4625	.0818	2.18	.4854	.0371
1.39	.4177	.1518	1.79	.4633	.0804	2.19	.4857	.0363
1.40	.4192	.1497	1.80	.4641	.0790	2.20	.4861	.0355
1.41	.4207	.1476	1.81	.4649	.0775	2.21	.4864	.0347
1.42	.4222	.1456	,182	.4656	.0761	2.22	.4868	.0339
1.43	.4236	.1435	1.83	.4664	.0748	2.23	.4871	.0332
1.44	.4251	.1415	1.84	.4671	.0734	2.24	.4875	.0325
1.45	.4265	.1394	1.85	.4678	.0721	2.25	.4878	.0317
1.46	.4279	.1374	1.86	.4686	.0707	2.26	.4881	.0310
1.47	.4292	.1354	1.87	.4693	.0694	2.27	.4884	.0303
1.48	.4306	.1334	1.88	.4700	.0681	2.28	.4887	.0297
1.49	.4319	.1315	1.89	.4706	.0669	2.29	.4890	.0290
1.50	.4332	.1295	1.90	.4713	.0656	2.30	.4893	.0283
1.51	.4345	.1276	1.91	.4719	.0644	2.31	.4896	.0277
1.52	.4357	.1257	1.92	.4726	.0632	2.32	.4898	.0270
1.53	.4370	.1238	1.93	.4732	.0620	2.33	.4901	.0264
1.54	.4382	.1219	1.94	.4738	.0608	2.34	.4904	.0258
1.55	.4394	.1200	1.95	.4744	.0596	2.35	.4906	.0252
1.56	.4406	.1182	1.96	.4750	.0584	2.36	.4909	.0246
1.57	.4418	.1163	1.97	.4756	.0573	2.37	.4911	.0241
1.58	.4430	.1145	1.98	.4762	.0562	2.38	.4913	.0235
1.59	.4441	.1127	1.99	.4767	.0551	2.39	.4916	.0229

z	Fläche	Ordinate	z	Fläche	Ordinate	z	Fläche
2.40	.4918	.0224	2.80	.4974	.0079	3.40	.49966
2.41	.4920	.0219	2.81	.4975	.0077	3.42	.49969
2.42	.4922	.0213	2.82	.4976	.0075	3.44	.49971
2.43	.4925	.0208	2.83	.4977	.0073	3.46	.49973
2.44	.4927	.0203	2.84	.4977	.0071	3.48	.49975
2.45	.4929	.0198	2.85	.4978	.0069	3.50	.49977
2.46	.4931	.0194	2.86	.4979	.0067	3.55	.49981
2.47	.4932	.0189	2.87	.4980	.0065	3.60	.49984
2.48	.4934	.0184	2.88	.4980	.0063	3.65	.49987
2.49	.4936	.0180	2.89	.4981	.0061	3.70	.49989
2.50	.4938	.0175	2.90	.4981	.0060	3.75	.49991
2.51	.4940	.0171	2.91	.4982	.0058	3.80	.49993
2.52	.4941	.0167	2.92	.4982	.0056	3.85	.49994
2.53	.4943	.0163	2.93	.4983	.0055	3.90	.49995
2.54	.4945	.0158	2.94	.4984	.0053	3.95	.49996
2.55	.4946	.0154	2.95	.4984	.0051	4.00	.49997
2.56	.4948	.0151	2.96	.4985	.0050	4.10	.499979
2.57	.4949	.0147	2.97	.4985	.0048	4.20	.499987
2.58	.4951	.0143	2.98	.4986	.0047	4.30	.499991
2.59	.4952	.0139	2.99	.4986	.0046	4.40	.499995
2.60	.4953	.0136	3.00	.4987	.0044	4.50	.499997
2.61	.4955	.0132	3.02	.4987		4.60	.499998
2.62	.4956	.0129	3.04	.4988		4.70	.499999
2.63	.4957	.0126	3.06	.4989		4.80	.4999992
2.64	.4959	.0122	3.08	.4990		4.90	.4999995
2.65	.4960	.0119	3.10	.49903		5.00	.4999998
2.66	.4961	.0116	3.12	.49910		5.10	.4999999
2.67	.4962	.0113	3.14	.49916		5.20	.4999999
2.68	.4963	.0110	3.16	.49921		5.30	.49999994
2.69	.4964	.0107	3.18	.49926		5.40	.49999997
2.70	.4965	.0104	3.20	.49931		5.50	.49999998
2.71	.4966	.0101	3.22	.49936		5.60	.49999999
2.72	.4967	.0099	3.24	.49940		5.70	.499999994
2.73	.4968	.0096	3.26	.49944		5.80	.499999997
2.74	.4969	.0093	3.28	.49948		5.90	.499999998
2.75	.4970	.0091	3.30	.49952		6.00	.499999999
2.76	.4971	.0088	3.32	.49955		6.10	.4999999995
2.77	.4972	.0086	3.34	.49958		6.20	.4999999997
2.78	.4973	.0084	3.36	.49961		6.30	.4999999999
2.79	.4974	.0081	3.38	.49964			

Tabelle 2
Kritische Werte der Chi-Quadrat-Verteilung

df	25%	5%	1%	0.1%
1	1.32330	3.84146	6.63490	10.828
2	2.77259	5.99147	9.21034	13.816
3	4.10835	7.81473	11.3449	16.266
4	5.38527	9.48773	13.2767	18.467
5	6.62568	11.0705	15.0863	20.515
6	7.84080	12.5916	16.8119	22.458
7	9.03715	14.0671	18.4753	24.322
8	10.2188	15.5073	20.0902	26.125
9	11.3887	16.9190	21.6660	27.877
10	12.5489	18.3070	23.2093	29.588
11	13.7007	19.6751	24.7250	31.264
12	14.8454	21.0261	26.2170	32.909
13	15.9839	22.3621	27.6883	34.528
14	17.1170	23.6848	29.1413	36.123
15	18.2451	24.9958	30.5779	37.697
16	19.3688	26.2962	31.9999	39.252
17	20.4887	27.5871	33.4087	40.790
18	21.6049	28.8693	34.8053	42.312
19	22.7178	30.1435	36.1908	43.820
20	23.8277	31.4104	37.5662	45.315
21	24.9348	32.6705	38.9321	46.797
22	26.0393	33.9244	40.2894	48.268
23	27.1413	35.1725	41.6384	49.728
24	28.2412	36.4151	42.9798	51.179
25	29.3389	37.6525	44.3141	52.620
26	30.4345	38.8852	45.6417	54.052
27	31.5284	40.1133	46.9630	55.476
28	32.6205	41.3372	48.2782	56.892
29	33.7109	42.5569	49.5879	58.302
30	34.7998	43.7729	50.8922	59.703
40	45.6160	55.7585	63.6907	73.402
50	56.3336	67.5048	76.1539	86.661
60	66.9814	79.0819	88.3794	99.607
70	77.5766	90.5312	100.425	112.317
80	88.1303	101.879	112.329	124.839
90	98.6499	113.145	124.116	137.208
100	109.141	124.342	135.807	149.449

Tabelle 3
Kritische Werte der t-Verteilung

df	5%	1%	0.1%	df	5%	1%	0.1%
1	12.706	63.657	636.619	18	2.101	2.878	3.922
2	4.303	9.925	31.598	19	2.093	2.861	3.883
3	3.182	5.841	12.941	20	2.086	2.845	3.850
4	2.776	4.604	8.610	21	2.080	2.831	3.819
5	2.571	4.032	6.859	22	2.074	2.819	3.792
6	2.447	3.707	5.959	23	2.069	2.807	3.767
7	2.365	3.499	5.405	24	2.064	2.797	3.745
8	2.306	3.355	5.041	25	2.060	2.787	3.725
9	2.262	3.250	4.781	26	2.056	2.779	3.707
10	2.228	3.169	4.587	27	2.052	2.771	3.690
11	2.201	3.106	4.437	28	2.048	2.763	3.674
12	2.179	3.055	4.318	29	2.045	2.756	3.659
13	2.160	3.012	4.221	30	2.042	2.750	3.646
14	2.145	2.977	4.140	40	2.021	2.704	3.551
15	2.131	2.947	4.073	60	2.000	2.660	3.460
16	2.120	2.921	4.015	120	1.980	2.617	3.373
17	2.110	2.898	3.965				

Tabelle 4
Kritische Werte der F-Verteilung

Nenner-df.	Fläche	Zähler-df 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	o.75	5.83	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.26	9.32
	0.90	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9	60.2
	0.95	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242
2	0.75	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.37	3.38
	0.90	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39
	0.95	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4
	0.99	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4
3	0.75	2.02	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.44
	0.90	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23
	0.95	10.1	9.55	9.28	9.12	9.10	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
	0.99	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2

Nenner-df	Fläche	Zähler-df 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	0.75	1.81	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
	0.90	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92
	0.95	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
	0.99	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5
5	0.75	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89
	0.90	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30
	0.95	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
	0.99	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1
6	0.75	1.62	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.77	1.77	1.77
	0.90	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94
	0.95	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
	0.99	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87
7	0.75	1.57	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	1.69
	0.90	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70
	0.95	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
	0.99	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62
8	0.75	1.54	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.64	1.63
	0.90	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54
	0.95	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
	0.99	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81
9	0.75	1.51	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59
	0.90	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42
	0.95	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
	0.99	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26
10	0.75	1.49	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55
	0.90	3.28	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32
	0.95	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
	0.99	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85
11	0.75	1.47	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.52
	0.90	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25
	0.95	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
	0.99	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54
12	0.75	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50
	0.90	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19
	0.95	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
	0.99	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30
13	0.75	1.45	1.54	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48
	0.90	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14
	0.95	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67
	0.99	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10

Nenner-df	Fläche	Zähler-df 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
14	0.75	1.44	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.48	1.48	1.47	1.46
	0.90	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10
	0.95	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60
	0.99	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94
15	0.75	1.43	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45
	0.90	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06
	0.95	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
	0.99	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80
16	0.75	1.42	1.51	1.51	1.50	1.48	1.48	1.47	1.46	1.45	1.45
	0.90	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03
	0.95	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
	0.99	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69
17	0.75	1.42	1.51	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.43
	0.90	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00
	0.95	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.40	2.45
	0.99	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59
18	0.75	1.41	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42
	0.90	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98
	0.95	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
	0.99	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51
19	0.75	1.41	1.49	1.49	1.47	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41
	0.90	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96
	0.95	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38
	0.99	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43
20	0.75	1.40	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.42	1.42	1.41	1.40
	0.90	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94
	0.95	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
	0.99	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.97	3.70	3.56	3.46	3.37
22	0.75	1.40	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39
	0.90	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90
	0.95	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30
	0.99	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26
24	0.75	1.39	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.38
	0.90	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88
	0.95	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
	0.99	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17
26	0.75	1.38	1.46	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.37	1.37
	0.90	2.91	2.25	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86
	0.95	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22
	0.99	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09

Nenner-df	Fläche	Zähler-df 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
28	0.75	1.38	1.46	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36
	0.90	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84
	0.95	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
	0.99	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03
30	0.75	1.38	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35
	0.90	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82
	0.95	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16
	0.99	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98
40	0.75	1.36	1.44	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33
	0.90	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76
	0.95	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08
	0.99	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80
60	0.75	1.35	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30
	0.90	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71
	0.95	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99
	0.99	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63
120	0.75	1.34	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28
	0.90	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65
	0.95	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91
	0.99	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47
200	0.75	1.33	1.39	1.38	1.36	1.34	1.32	1.31	1.29	1.28	1.27
	0.90	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66	1.63
	0.95	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88
	0.99	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41
∞	0.75	1.32	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25
	0.90	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60
	0.95	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83
	0.99	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32

Nenner-df	Fläche	Zähler-df 15	20	30	40	50	100	200	500	∞
1	0.75	9.49	9.58	9.67	9.71	9.74	9.78	9.82	9.84	9.85
	0.90	61.2	61.7	62.3	62.5	62.7	63.0	63.2	63.3	63.3
	0.95	246	248	250	251	252	253	254	254	254
2	0.75	3.41	3.43	3.44	3.45	3.45	3.47	3.48	3.48	3.48
	0.90	9.42	9.44	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49	9.49	9.49
	0.95	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
	0.99	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5

Nenner-df	Fläche	Zähler-df 15	20	30	40	50	100	200	500	∞
3	0.75	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47
	0.90	5.20	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.14	5.14	5.13
	0.95	8.70	8.66	8.62	8.59	8.58	8.55	8.54	8.53	8.53
	0.99	26.9	26.7	26.5	26.4	26.4	26.2	26.2	26.1	26.1
4	0.75	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
	0.90	3.87	3.84	3.82	3.80	3.80	3.78	3.77	3.76	3.76
	0.95	5.86	5.80	5.75	5.72	5.70	5.66	5.65	5.64	5.63
	0.99	14.2	14.0	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5	13.5	13.5
5	0.75	1.89	1.88	1.88	1.88	1.88	1.87	1.87	1.87	1.87
	0.90	3.24	3.21	3.17	3.16	3.15	3.13	3.12	3.11	3.10
	0.95	4.62	4.56	4.50	4.46	4.44	4.41	4.39	4.37	4.36
	0.99	9.72	9.55	9.38	9.29	9.24	9.13	9.08	9.04	9.02
6	0.75	1.76	1.76	1.75	1.75	1.75	1.74	1.74	1.74	1.74
	0.90	2.87	2.84	2.80	2.78	2.77	2.75	2.73	2.73	2.72
	0.95	3.94	3.87	3.81	3.77	3.75	3.71	3.69	3.68	3.67
	0.99	7.56	7.40	7.23	7.14	7.09	6.99	6.93	6.90	6.86
7	0.75	1.68	1.67	1.66	1.66	1.66	1.65	1.65	1.65	1.65
	0.90	2.63	2.59	2.56	2.54	2.52	2.50	2.48	2.48	2.47
	0.95	3.51	3.44	3.38	3.34	3.32	3.27	3.25	3.24	3.23
	0.99	6.31	6.16	5.99	5.91	5.86	5.75	5.70	5.67	5.6[illegible]
8	0.75	1.62	1.61	1.60	1.59	1.59	1.58	1.58	1.58	1.58
	0.90	2.46	2.42	2.38	2.36	2.35	2.32	2.31	2.30	2.29
	0.95	3.22	3.15	3.08	3.04	3.02	2.97	2.95	2.94	2.93
	0.99	5.52	5.36	5.20	5.12	5.07	4.96	4.91	4.88	4.86
9	0.75	1.57	1.56	1.55	1.55	1.54	1.53	1.53	1.53	1.53
	0.90	2.34	2.30	2.25	2.23	2.22	2.19	2.17	2.17	2.16
	0.95	3.01	2.94	2.86	2.83	2.80	2.76	2.73	2.72	2.71
	0.99	4.96	4.81	4.65	4.57	4.52	4.42	4.36	4.33	4.31
10	0.75	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.48
	0.90	2.24	2.20	2.16	2.13	2.12	2.09	2.07	2.06	2.06
	0.95	2.85	2.77	2.70	2.66	2.64	2.59	2.56	2.55	2.54
	0.99	4.56	4.41	4.25	4.17	4.12	4.01	3.96	3.93	3.91
11	0.75	1.50	1.49	1.48	1.47	1.47	1.46	1.46	1.45	1.45
	0.90	2.17	2.12	2.08	2.05	2.04	2.00	1.99	1.98	1.97
	0.95	2.72	2.65	2.57	2.53	2.51	2.46	2.43	2.42	2.40
	0.99	4.25	4.10	3.94	3.86	3.81	3.71	3.66	3.62	3.60
12	0.75	1.48	1.47	1.45	1.45	1.44	1.43	1.43	1.42	1.42
	0.90	2.10	2.06	2.01	1.99	1.97	1.94	1.92	1.91	1.90
	0.95	2.62	2.54	2.47	2.43	2.40	2.35	2.32	2.31	2.30
	0.99	4.01	3.86	3.70	3.62	3.57	3.47	3.41	3.38	3.36

Nenner-df	Fläche	Zähler-df 15	20	30	40	50	100	200	500	∞
13	0.75	1.46	1.45	1.43	1.42	1.42	1.41	1.40	1.40	1.40
	0.90	2.05	2.01	1.96	1.93	1.92	1.88	1.86	1.85	1.85
	0.95	2.53	2.46	2.38	2.34	2.31	2.26	2.23	2.22	2.21
	0.99	3.82	3.66	3.51	3.43	3.38	3.27	3.22	3.19	3.17
14	0.75	1.44	1.43	1.41	1.41	1.40	1.39	1.39	1.38	1.38
	0.90	2.01	1.96	1.91	1.89	1.87	1.83	1.82	1.80	1.80
	0.95	2.46	2.39	2.31	2.27	2.24	2.19	2.16	2.14	2.13
	0.99	3.66	3.51	3.35	3.27	3.22	3.11	3.06	3.03	3.00
15	0.75	1.43	1.41	1.40	1.39	1.39	1.38	1.37	1.36	1.36
	0.90	1.97	1.92	1.87	1.85	1.83	1.79	1.77	1.76	1.76
	0.95	2.40	2.33	2.25	2.20	2.18	2.12	2.10	2.08	2.07
	0.99	3.52	3.37	3.21	3.13	3.08	2.98	2.92	2.89	2.87
16	0.75	1.41	1.40	1.38	1.37	1.37	1.36	1.35	1.34	1.34
	0.90	1.94	1.89	1.84	1.81	1.79	1.76	1.74	1.73	1.72
	0.95	2.35	2.28	2.19	2.15	2.12	2.07	2.04	2.02	2.01
	0.99	3.41	3.26	3.10	3.02	2.97	2.86	2.81	2.78	2.75
17	0.75	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.34	1.33	1.33
	0.90	1.91	1.86	1.81	1.78	1.76	1.73	1.71	1.69	1.69
	0.95	2.31	2.23	2.15	2.10	2.08	2.02	1.99	1.97	1.96
	0.99	3.31	3.16	3.00	2.92	2.87	2.76	2.71	2.68	2.65
18	0.75	1.39	1.38	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.32	1.32
	0.90	1.89	1.84	1.78	1.75	1.74	1.70	1.68	1.67	1.66
	0.95	2.27	2.19	2.11	2.06	2.04	1.98	1.95	1.93	1.92
	0.99	3.23	3.08	2.92	2.84	2.78	2.68	2.62	2.59	2.57
19	0.75	1.38	1.37	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.31	1.30
	0.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.71	1.67	1.65	1.64	1.63
	0.95	2.23	2.16	2.07	2.03	2.00	1.94	1.91	1.89	1.88
	0.99	3.15	3.00	2.84	2.76	2.71	2.60	2.55	2.51	2.49
20	0.75	1.37	1.36	1.34	1.33	1.33	1.31	1.30	1.30	1.29
	0.90	1.84	1.79	1.74	1.71	1.69	1.65	1.63	1.62	1.61
	0.95	2.20	2.12	2.04	1.99	1.97	1.91	1.88	1.86	1.84
	0.99	3.09	2.94	2.78	2.69	2.64	2.54	2.48	2.44	2.42
22	0.75	1.36	1.34	1.32	1.31	1.31	1.30	1.29	1.29	1.28
	0.90	1.81	1.76	1.70	1.67	1.65	1.61	1.59	1.58	1.57
	0.95	2.15	2.07	1.98	1.94	1.91	1.85	1.82	1.80	1.78
	0.99	2.98	2.83	2.67	2.58	2.53	2.42	2.36	2.33	2.31
24	0.75	1.35	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.27	1.26
	0.90	1.78	1.73	1.67	1.64	1.62	1.58	1.56	1.54	1.53
	0.95	2.11	2.03	1.94	1.89	1.86	1.80	1.77	1.75	1.73
	0.99	2.89	2.74	2.58	2.49	2.44	2.33	2.27	2.24	2.21

Nenner df	Fläche	Zähler-df 15	20	30	40	50	100	200	500	∞
26	0.75	1.34	1.32	1.30	1.29	1.28	1.26	1.26	1.25	1.25
	0.90	1.76	1.71	1.65	1.61	1.59	1.55	1.53	1.51	1.50
	0.95	2.07	1.99	1.90	1.85	1.82	1.76	1.73	1.71	1.69
	0.99	2.81	2.66	2.50	2.42	2.36	2.25	2.19	2.16	2.13
28	0.75	1.33	1.31	1.29	1.28	1.27	1.26	1.25	1.24	1.24
	0.90	1.74	1.69	1.63	1.59	1.57	1.53	1.50	1.49	1.48
	0.95	2.04	1.96	1.87	1.82	1.79	1.73	1.69	1.67	1.65
	0.99	2.75	2.60	2.44	2.35	2.30	2.19	2.13	2.09	2.06
30	0.75	1.32	1.30	1.28	1.27	1.26	1.25	1.24	1.23	1.23
	0.90	1.72	1.67	1.61	1.57	1.55	1.51	1.48	1.47	1.46
	0.95	2.01	1.93	1.84	1.79	1.76	1.70	1.66	1.64	1.62
	0.99	2.70	2.55	2.39	2.30	2.25	2.13	2.07	2.03	2.01
40	0.75	1.30	1.28	1.25	1.24	1.23	1.21	1.20	1.19	1.19
	0.90	1.66	1.61	1.54	1.51	1.48	1.43	1.41	1.39	1.38
	0.95	1.92	1.84	1.74	1.69	1.66	1.59	1.55	1.53	1.51
	0.99	2.52	2.37	2.20	2.11	2.06	1.94	1.87	1.83	1.80
60	0.75	1.27	1.25	1.22	1.21	1.20	1.17	1.16	1.15	1.15
	0.90	1.60	1.54	1.48	1.44	1.41	1.36	1.33	1.31	1.29
	0.95	1.84	1.75	1.65	1.59	1.56	1.48	1.44	1.41	1.39
	0.99	2.35	2.20	2.03	1.94	1.88	1.75	1.68	1.63	1.60
120	0.75	1.24	1.22	1.19	1.18	1.17	1.14	1.12	1.11	1.10
	0.90	1.55	1.48	1.41	1.37	1.34	1.27	1.24	1.21	1.19
	0.95	1.75	1.66	1.55	1.50	1.46	1.37	1.32	1.28	1.25
	0.99	2.19	2.03	1.86	1.76	1.70	1.56	1.48	1.42	1.38
200	0.75	1.23	1.21	1.18	1.16	1.14	1.11	1.09	1.08	1.06
	0.90	1.52	1.46	1.38	1.34	1.31	1.24	1.20	1.17	1.14
	0.95	1.72	1.62	1.52	1.46	1.41	1.32	1.26	1.22	1.19
	0.99	2.13	1.97	1.79	1.69	1.63	1.48	1.39	1.33	1.28
	0.75	1.22	1.19	1.16	1.14	1.13	1.09	1.07	1.04	1.00
	0.90	1.49	1.42	1.34	1.30	1.26	1.18	1.13	1.08	1.00
	0.95	1.67	1.57	1.46	1.39	1.35	1.24	1.17	1.11	1.00
	0.99	2.04	1.88	1.70	1.59	1.52	1.36	1.25	1.15	1.00

Tabelle 5
Kritische Werte für den U-Test

Kritische Werte von U für den Test von Mann u. Whitney
für den einseitigen Test bei a = 0.01, für den zweiseitigen Test bei a = 0.02

	n_2											
n_1	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1												
2					0	0	0	0	0	0	1	1
3	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4	5
4	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
6	7	8	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22
7	9	11	12	14	16	17	19	21	23	24	26	28
8	11	13	15	17	20	22	24	26	28	30	32	34
9	14	16	18	21	23	26	28	31	33	36	38	40
10	16	19	22	24	27	30	33	36	38	41	44	47
11	18	22	25	28	31	34	37	41	44	47	50	53
12	21	24	28	31	35	38	42	46	49	53	56	60
13	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67
14	26	30	34	38	43	47	51	56	60	65	69	73
15	28	33	37	42	47	51	56	61	66	70	75	80
16	31	36	41	46	51	56	61	66	71	76	82	87
17	33	38	44	49	55	60	66	71	77	82	88	93
18	36	41	47	53	59	65	70	76	82	88	94	100
19	38	44	50	56	63	69	75	82	88	94	101	107
20	40	47	53	60	67	73	80	87	93	100	107	114

für den einseitigen Test bei a = 0.025, für den zweiseitigen Test bei a = 0.050

n_1 \ n_2	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1												
2	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
3	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	13
5	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76
14	31	36	40	45	50	55	59	64	67	74	78	83
15	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90
16	37	42	47	53	59	64	70	75	81	86	92	98
17	39	45	51	57	63	77	75	81	87	93	99	105
18	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112
19	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119
20	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127

für den einseitigen Test bei a = 0.05, für den zweiseitigen Test bei a = 0.10

n_1 \ n_2	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1											0	0
2	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11
4	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17	18
5	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22	23	25
6	12	14	16	17	19	21	23	25	26	28	30	32
7	15	17	19	21	24	26	28	30	33	35	37	39
8	18	20	23	26	28	31	33	36	39	41	44	47
9	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54
10	24	27	31	34	37	41	44	48	51	55	58	62
11	27	31	34	38	42	46	50	54	57	61	65	69
12	30	34	38	42	47	51	55	60	64	68	72	77
13	33	37	42	47	51	56	61	65	70	75	80	84
14	36	41	46	51	56	61	66	71	77	82	87	92
15	39	44	50	55	61	66	72	77	83	88	94	100
16	42	48	54	60	65	71	77	83	89	95	101	107
17	45	51	57	64	70	77	83	89	96	102	109	115
18	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109	116	123
19	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	130
20	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138

Tabelle 6
Kritische Werte für den H-Test

Gruppen-Größen n_1	n_2	n_3	H	p
2	1	1	2.7000	.500
2	2	1	3.6000	.200
2	2	2	4.5714	.067
			3.7143	.200
3	1	1	3.2000	.300
3	2	1	4.2857	.100
			3.8571	.133
3	2	2	5.3572	.029
			4.7143	.048
			4.5000	.067
			4.4643	.105
3	3	1	5.1429	.043
			4.5714	.100
			4.0000	.129
3	3	2	6.2500	.011
			5.3611	.032
			5.1389	.061
			4.5556	.100
			4.2500	.121
3	3	3	7.2000	.004
			6.4889	.011
			5.6889	.029
			5.6000	.050
			5.0667	.086
			4.6222	.100
4	1	1	3.5714	.200
4	2	1	4.8214	.057
			4.5000	.076
			4.0179	.114
4	2	2	6.0000	.014
			5.3333	.033
			5.1250	.052
			4.4583	.100
			4.1667	.105

Gruppen-Größen n_1	n_2	n_3	H	p
4	3	1	5.8333	.021
			5.2083	.050
			5.0000	.057
			4.0556	.093
			3.8889	.129
4	3	2	6.4444	.008
			6.3000	.011
			5.4444	.046
			5.4000	.051
			4.5111	.098
			4.4444	.102
4	3	3	6.7455	.010
			6.7091	.013
			5.7909	.046
			5.7273	.050
			4.7091	.092
			4.7000	.101
4	4	1	6.6667	.010
			6.1667	.022
			4.9667	.048
			4.8667	.054
			4.1667	.082
			4.0667	.102
4	4	2	7.0364	.006
			6.8727	.011
			5.4545	.046
			5.2364	.052
			4.5545	.098
			4.4455	.103
4	4	3	7.1439	.010
			7.1364	.011
			5.5985	.049
			5.5758	.051
			4.5455	.099
			4.4773	.102
4	4	4	7.6538	.008
			7.5385	.011

Gruppen-Größen n_1	n_2	n_3	H	p
			5.6923	.049
			5.6538	.054
			4.6539	.097
			4.5001	.104
5	1	1	3.8571	.143
5	2	1	5.2500	.036
			5.0000	.048
			4.4500	.071
			4.2000	.095
			4.0500	.119
5	2	2	6.5333	.008
			6.1333	.013
			5.1600	.034
			5.0400	.056
			4.3733	.090
			4.2933	.122
5	3	1	6.4000	.012
			4.9600	.048
			4.8711	.052
			4.0178	.095
			3.8400	.123
5	3	2	6.9091	.009
			6.8218	.010
			5.2509	.049
			5.1055	.052
			4.6509	.091
			4.4945	.101
5	3	3	7.0788	.009
			6.9818	.011
			5.6485	.049
			5.5152	.051
			4.5333	.097
			4.4121	.109
5	4	1	6.9545	.008
			6.8400	.011
			4.9855	.044
			4.8600	.056
			3.9873	.098
			3.9600	.102

Gruppen-Größen n_1	n_2	n_3	H	p
5	4	2	7.2045	.009
			7.1182	.010
			5.2727	.049
			5.2682	.050
			4.5409	.098
			4.5182	.101
5	4	3	7.4449	.010
			7.3949	.011
			5.6564	.049
			5.6308	.050
			4.5487	.099
			4.5231	.103
5	4	4	7.7604	.009
			7.7440	.011
			5.6571	.049
			5.6176	.050
			4.6187	.100
			4.5527	.102
5	5	1	7.3091	.009
			6.8364	.011
			5.1273	.046
			4.9091	.053
			4.1091	.086
			4.0364	.105
5	5	2	7.3385	.010
			7.2692	.010
			5.3385	.047
			5.2462	.051
			4.6231	.097
			4.5077	.100
5	5	3	7.5780	.010
			7.5429	.010
			5.7055	.046
			5.6264	.051
			4.5451	.100
			4.5363	.102
5	5	4	7.8229	.010
			7.7914	.010
			5.6657	.049

Gruppen-Größen			H	p
n_1	n_2	n_3		
5	5	4	5.6429	.050
			4.5229	.099
			4.5200	.101

Gruppen-Größen			H	p
n_1	n_2	n_3		
5	5	5	8.000	.009
			7.9800	.010
			5.7800	.049
			5.6600	.051
			4.5600	.100
			4.5000	.102

Tabelle 7
Kritische Werte für Chi² Friedman

Zufallswahrscheinlichkeiten von bestimmten Chi^2-Werten im Friedman-Test für c = 3 Gruppen

N = 2

Chi^2	p
0	1.000
1	.833
3	.500
4	.167

N = 3

Chi^2	p
.000	1.000
.667	.944
2.000	.528
2.667	.361
4.667	.194
6.000	.028

N = 4

Chi^2	p
.0	1.000
.5	.931
1.5	.653
2.0	.431
3.5	.273
4.5	.125
6.0	.069
6.5	.042
8.0	.0046

N = 5

Chi^2	p
.0	1.000
.4	.954

N = 5

Chi^2	p
1.2	.691
1.6	.522
2.8	.367
3.6	.182
4.8	.124
5.2	.093
6.4	.039
7.6	.024
8.4	.0085
10.0	.00077

N = 6

Chi^2	p
.00	1.000
.33	.956
1.00	.740
1.33	.570
2.33	.430
3.00	.252
4.00	.184
4.33	.142
5.33	.072
6.33	.052
7.00	.029
8.33	.012
9.00	.0081
9.33	.0055
10.33	.0017
12.00	.00013

N = 7

Chi^2	p
.000	1.000
.286	.964
.857	.768
1.143	.620
2.000	.486
2.571	.305
3.429	.237
3.714	.192
4.571	.112
5.429	.085
6.000	.052
7.143	.027
7.714	.021
8.000	.016
8.857	.0084
10.286	.0036
10.571	.0027
11.143	.0012
12.286	.00032
14.000	.000021

N = 8

Chi^2	p
.00	1.000
.25	.967
.75	.794
1.00	.654
1.75	.531
2.25	.355
3.00	.285
3.25	.236

N = 8

Chi^2	p
4.00	.149
4.75	.120
5.25	.079
6.25	.047
6.75	.038
7.00	.030
7.75	.018
9.00	.0099
9.25	.0080
9.75	.0048
10.75	.0024
12.00	.0011
12.25	.00086
13.00	.00026
14.25	.000061
16.00	.0000036

N = 9

Chi^2	p
.000	1.000
.222	.971
.667	.814
.889	.865
1.556	.569
2.000	.398
2.667	.328
2.889	.278
3.556	.187
4.222	.154
4.667	.107
5.556	.069

N = 9

Chi^2	p
6.000	.057
6.222	.048
6.889	.031
8.000	.019

N = 9

Chi^2	p
8.222	.016
8.667	.010
9.556	.0060
10.667	.0035

N = 9

Chi^2	p
10.889	.0029
11.556	.0013
12.667	.00066
13.556	.00035

N = 9

Chi^2	p
14.000	.00020
14.222	.000097
14.889	.000054
16.222	.000011
18.000	.0000006

für c = 4 Gruppen

N = 2

Chi^2	p
.0	1.000
.6	.958
1.2	.834
1.8	.792
2.4	.625
3.0	.542
3.6	.458
4.2	.375
4.8	.208
5.4	.167
6.0	.042

N = 3

Chi^2	p
.2	1.000
.6	.958
1.0	.910
1.8	.727
2.2	.608
2.6	.524
3.4	.446
3.8	.342
4.2	.300
5.0	.207
5.4	.175
5.8	.148
6.6	.075
7.0	.054
7.4	.033
8.2	.017
9.0	.0017

N = 4

Chi^2	p	Chi^2	p
.0	1.000	5.7	.141
.3	.992	6.0	.105
.6	.928	6.3	.094
.9	.900	6.6	.077
1.2	.800	6.9	.068
1.5	.754	7.2	.054
1.8	.677	7.5	.052
2.1	.649	7.8	.036
2.4	.524	8.1	.033
2.7	.508	8.4	.019
3.0	.432	6.7	.014
3.3	.389	9.3	.012
3.6	.355	9.6	.0069
3.9	.324	9.9	.0062
4.5	.242	10.2	.0027
4.8	.200	10.8	.0016
5.1	.190	11.1	.00094
5.4	.158	12.0	.000072

Tabelle 8
Kritische Werte für den Wilcoxen-Test

	Irrtumswahrscheinlichkeit für einseitige Fragestellung						
	0.025	0.01	0.005		0.025	0.01	0.005
	Irrtumswahrscheinlichkeit für zweiseitige Fragestellung						
n	0.05	0.02	0.01	n	0.05	0.02	0.01
6	0			16	30	24	20
7	2	0		17	35	28	23
8	4	2	0	18	40	33	28
9	6	3	2	19	46	38	32
10	8	5	3	20	52	43	38
11	11	7	5	21	59	49	43
12	14	10	7	22	66	56	49
13	17	13	10	23	73	62	55
14	21	16	13	24	81	69	61
15	25	20	16	25	89	77	68

Tabelle 9
Kritische Werte für einen Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten

Freiheits-Grade	5 %	1 %	Freiheits-Grade	5 %	1 %	Freiheits-Grade	5 %	1 %
1	.997	1.000	21	.413	.526	70	.232	.302
2	.950	.990	22	.404	.515	80	.217	.283
3	.878	.959	23	.396	.505	90	.205	.267
4	.811	.917	24	.388	.496	100	.195	.254
5	.754	.874	25	.381	.487	125	.174	.228
6	.707	.834	26	.374	.478	150	.159	.208
7	.666	.798	27	.367	.470	200	.138	.181
8	.632	.765	28	.361	.463	300	.113	.148
9	.602	.735	29	.355	.456	400	.098	.128
10	.576	.708	30	.349	.449	500	.088	.115
11	.553	.684	35	.325	.418	1000	.062	.081
12	.532	.661	40	.304	.393			
13	.514	.641	45	.288	.372			
14	.497	.623	50	.273	.354			
15	.482	.606	60	.250	.325			
16	.468	.590						
17	.456	.575						
18	.444	.561						
19	.433	.549						
20	.423	.537						

df = N - 2

Tabelle 10
Fishers Z-Werte für Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten

r_{xy}	Z	r_{xy}	Z	r_{xy}	Z	r_{xy}	Z	r_{xy}	Z
.00	.00	.20	.20	.40	.42	.60	.69	.80	1.10
.01	.01	.21	.21	.41	.44	.61	.71	.81	1.13
.02	.02	.22	.22	.42	.45	.62	.73	.82	1.16
.03	.03	.23	.23	.43	.46	.63	.74	.83	1.19
.04	.04	.24	.24	.44	.47	.64	.76	.84	1.22
.05	.05	.25	.26	.45	.48	.65	.78	.85	1.26
.06	.06	.26	.27	.46	.50	.66	.79	.86	1.29
.07	.07	.27	.28	.47	.51	.67	.81	.87	1.33
.08	.08	.28	.29	.48	.52	.68	.83	.88	1.38
.09	.09	.29	.30	.49	.54	.69	.85	.89	1.42
.10	.10	.30	.31	.50	.55	.70	.87	.90	1.47
.11	.11	.31	.32	.51	.56	.71	.89	.91	1.53
.12	.12	.32	.33	.52	.58	.72	.91	.92	1.59
.13	.13	.33	.34	.53	.59	.73	.93	.93	1.66
.14	.14	.34	.35	.54	.60	.74	.95	.94	1.74
.15	.15	.35	.37	.55	.62	.75	.97	.95	1.83
.16	.16	.36	.38	.56	.63	.76	1.00	.96	1.95
.17	.17	.37	.39	.57	.65	.77	1.02	.97	2.09
.18	.18	.38	.40	.58	.66	.78	1.05	.98	2.30
.19	.19	.39	.41	.59	.68	.79	1.07	.99	2.65

Tabelle 11
Maximalwerte für Kontingenzkoeffizienten

K	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
C_{max}	0.707	0.816	0.866	0.894	0.913	0.926	0.935	0.943	0.949	
K	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C_{max}	0.953	0.957	0.961	0.964	0.966	0.968	0.970	0.972	0.973	0.975
K	22	24	26	28	30	35	40	45	50	100
C_{max}	0.977	0.979	0.981	0.982	0.983	0.986	0.987	0.989	0.990	0.995

Tabelle 12
Kritische Werte für den Zähler des Konkordanzkoeffizienten

	N					
k	3	4	5	6	7	8
	Werte auf dem 5%-Verläßlichkeitsniveau					
3			64.4	103.9	157.3	253.3
4		49.5	88.4	143.3	217.0	336.0
5		62.6	112.3	182.4	276.2	420.0
6		75.7	136.1	221.4	335.2	514.1
8	48.1	101.7	183.7	299.0	453.1	672.0
10	60.0	127.8	231.2	376.7	571.0	840.0
15	89.8	192.9	349.8	570.5	864.9	1228.5
20	119.7	258.0	468.5	764.4	1158.7	1680.0
	Werte auf dem 1%-Verläßlichkeitsniveau					
3			75.6	122.8	185.6	332.6
4		61.4	109.3	176.2	265.0	443.5
5		80.5	142.8	229.4	343.8	556.5
6		99.5	176.1	282.4	422.6	665.3
8	66.8	137.4	242.7	388.3	579.9	887.0
10	85.1	175.3	309.1	494.0	737.0	1092.0
15	131.0	269.8	475.2	758.2	1129.5	1701.0
20	177.0	364.2	641.2	1022.2	1521.9	2184.0

Tabelle 13
Kritische Werte für den F_{max}-Test

df	Fläche	Anzahl der Varianzen								
		2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	0.95	9.60	15.5	20.6	25.2	29.5	33.6	37.5	41.4	44.6
	0.99	23.2	37	49	59	69	79	89	97	106
5	0.95	7.15	10.8	13.7	16.3	18.7	20.8	22.9	24.7	26.5
	0.99	14.9	22	28	33	38	42	46	50	54
6	0.95	5.82	8.38	10.4	12.1	13.7	15.0	16.3	17.5	18.6
	0.99	11.1	15.5	19.1	22	25	27	30	32	34
7	0.95	4.99	6.94	8.44	9.70	10.8	11.8	12.7	13.5	14.3
	0.99	8.89	12.1	14.5	16.5	18.4	20	22	23	24
8	0.95	4.43	6.00	7.18	8.12	9.03	9.78	10.5	11.1	11.7
	0.99	7.50	9.9	11.7	13.2	14.5	15.8	16.9	17.9	18.9
9	0.95	4.03	5.34	6.31	7.11	7.80	8.41	8.95	9.45	9.91
	0.99	6.54	8.5	9.9	11.1	12.1	13.1	13.9	14.7	15.3

df für	Fläche	Anzahl der Varianzen 2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0.95	3.72	4.85	5.67	6.34	6.92	7.42	7.87	8.28	8.66
	0.99	5.85	7.4	8.6	9.6	10.4	11.1	11.8	12.4	12.9
12	0.95	3.28	4.16	4.79	5.30	5.72	6.09	6.42	6.72	7.00
	0.99	4.91	6.1	6.9	7.6	8.2	8.7	9.1	9.5	9.9
15	0.95	2.86	3.54	4.01	4.37	4.68	4.95	5.19	5.40	5.59
	0.99	4.07	4.9	5.5	6.0	6.4	6.7	7.1	7.3	7.5
20	0.95	2.46	2.95	3.29	3.54	3.76	3.94	4.10	4.24	4.37
	0.99	3.32	3.8	4.3	4.6	4.9	5.1	5.3	5.5	5.6
30	0.95	2.07	2.40	2.61	2.78	2.91	3.02	3.12	3.21	3.29
	0.99	2.63	3.0	3.3	3.4	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
60	0.95	1.67	1.85	1.96	2.04	2.11	2.17	2.22	2.26	2.30
	0.99	1.96	2.2	2.3	2.4	2.4	2.5	2.5	2.6	2.6
∞	0.95	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Tabelle 14

Prozentränge und Skalenplätze nach Hull

$R_{\%}$	S	$R_{\%}$	S	$R_{\%}$	S	$R_{\%}$	S	$R_{\%}$	S
0.09	0.1	6.81	2.1	32.42	4.1	71.14	6.1	94.49	8.1
0.20	0.2	7.55	2.2	34.25	4.2	72.85	6.2	95.08	8.2
0.32	0.3	8.33	2.3	36.15	4.3	74.52	6.3	95.62	8.3
0.45	0.4	9.17	2.4	38.06	4.4	76.12	6.4	96.11	8.4
0.61	0.5	10.06	2.5	40.01	4.5	77.68	6.5	96.57	8.5
0.78	0.6	11.03	2.6	41.97	4.6	79.17	6.6	96.99	8.6
0.97	0.7	12.04	2.7	43.97	4.7	80.61	6.7	97.37	8.7
1.18	0.8	13.11	2.8	45.97	4.8	81.99	6.8	97.72	8.8
1.42	0.9	14.25	2.9	47.98	4.9	83.31	6.9	98.04	8.9
1.68	1.0	15.44	3.0	50.00	5.0	84.56	7.0	98.32	9.0
1.96	1.1	16.69	3.1	52.02	5.1	85.75	7.1	98.58	9.1
2.28	1.2	18.01	3.2	54.03	5.2	86.89	7.2	98.82	9.2
2.63	1.3	19.39	3.3	56.03	5.3	87.96	7.3	99.03	9.3
3.01	1.4	20.83	3.4	58.03	5.4	88.97	7.4	99.22	9.4
3.43	1.5	22.32	3.5	59.99	5.5	89.94	7.5	99.39	9.5
3.89	1.6	23.88	3.6	61.94	5.6	90.83	7.6	99.55	9.6
4.38	1.7	25.48	3.7	63.85	5.7	91.67	7.7	99.68	9.7
4.92	1.8	27.15	3.8	65.75	5.8	92.45	7.8	99.80	9.8
5.51	1.9	28.86	3.9	67.48	5.9	93.19	7.9	99.91	9.9
6.14	2.0	30.61	4.0	69.39	6.0	93.86	8.0	100.00	10.0

Abkürzungen

		Formel	Seite	Tab.
A	Determinante		65	
a_1, a_2 etc.	Faktoren		65 ff.	
a, b	Regressionskoeffizienten	92 – 111	47 – 58	
c	Anzahl der Stichproben			
C	Kontigenzkoeffizient	83	41	
C_{25}, C_{60} etc.	25%-, 60%-Centil		3	
Chi^2	Chi-Quadrat	32	12	2
CR	kritischer Bruch („Critical Ratio")			
df	Freiheitsgrade („degrees of freedom")			
E	Exzeß	24, 26	7	
F	Wert der F-Verteilung			4
f	Häufigkeit („frequency")			
f_e	erwartete (theoretische) Häufigkeit			
f_b	beobachtete (empirische) Häufigkeit			
Fr	Teststatistik für Rangvarianzanalyse nach Friedman	60	25	7
H	Teststatistik der Rangvarianzanalyse nach Kruscal & Wallis	59	25	6
h^2	Kommunalität		67	
HM	harmonisches Mittel	4	2	
K	Urteilskonsistenz	155	97	
MG	geometrisches Mittel	3	1	
Mo	Modal-/Gipfelwert		3	
N	Umfang einer Grundgesamtheit			
n	Umfang einer Stichprobe			
p	Wahrscheinlichkeit („probability")			
Phi	Vierfelder-Korrelations-Koeffizient	80, 81	39 f.	

		Formel	Seite	Tab.
PR	Prozentrang	27, 152	8, 92	
Q	Prägnanzkoeffizient	73	36	
QD	mittlerer Quartilabstand („Quarter Deviation")	20	6	
QS	Quadratsumme	126	71	
r	Produkt-Moment-Korrelations-Koeffizient	77	38	
r^{ww}, r^{xx} etc.	invertierte Elemente einer Korrelationsmatrix	116 – 118	60 – 62	
R	Rang-Korrelations-Koeffizient	79	39	
R	multipler Korrealtions-Koeffizient	107, 112	57 f.	
$\overline{R}$	mittlerer Rang-Korrelations-Koeffizient	86, 153	44, 95	
S	Regressionsgüte	103	56	
Sch	Schiefe	22, 23, 25	7	
SD	Standardabweichung („Standard Deviation")	6 – 11	4	
s	Standardfehler	37 – 45, 47	17 f.	
t	Wert der t-Verteilung			3
T_w	Teststatistik für Wilcoxen-Test	61	27	8
U	Teststatistik für Rangsummentest	56	23	5
Ü	Urteilsübereinstimmung	151	90	
V	Varianz	14 – 19	5 f.	
VA	Varianzaufklärung	78, 130	38, 72	
VB	Vertrauensbereich	46	18	
VK	Variabilitätskoeffizient	21	6	
W	Konkordanz-Koeffizient	85	44	
$\overline{X}$	arithmetisches Mittel	1, 2	1	
z	Standardwert	28	8	1
Z	Fishers Z-Transformation einer Produkt-Moment-Korrelation	88	45	10
Z	Zentralwert, Median	5	2	

Literaturhinweise

Die nachstehend angeführte Literatur ist die vor allem vom Verfasser benutzte. Das Verzeichnis ist keine auch nur einigermaßen repräsentative Bibliographie. Einen guten Überblick über die neuere Literatur findet man z.B. bei Bortz.

Aiken, L.R.: Some simple computational formulas for multiple regression. In: Educational and Psychological Measurement, 34, 1974, p.767 - 769.

Basler, H.: Aufgabensammlung zur statistischen Methodenlehre u. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Würzburg, Wien 1975.

Benninghaus, H.: Deskriptive Statistik, Stuttgart 1974.

Bortz, J.: Lehrbuch der Statistik für Sozialwissenschaftler. Berlin u.a. 1977.

Bradley, J.: Probability, decision, statistics. Englewood Cliffs 1976.

Clauß, G., u. Ebner, H.: Grundlagen der Statistik für Psychologen, Pädagogen u. Soziologen. Zürich, Frankfurt a.M.[2] 1975.

Christmann, G.: Statistische Verfahren. Baden-Baden [2]1973.

Gaensslen, H., u. Schubö, W.: Einfache u. komplexe statistische Analyse. München, Basel [2]1976.

Gotkin, L.G., u. Goldstein, L.S.: Grundkurs in Statistik. Ein programmiertes Lehrbuch in 2 Bänden. München, Wien [2]1969.

Hamm,G.: Methodenlehre der Statistik. München 1974.

Hays, W.L.: Statistics for the Social Sciences. 2nd. Ed. London u.a. 1978

Hofstätter, P.R., u. Wendt, D.: Quantitative Methoden der Psychologie. Frankfurt a.M. [4]1974.

Krauth, J., u. Lienert, G.A.: KFA - Die Konfigurationsfrequenzanalyse. Freiburg 1973.

Kreyszig, E.: Statistische Methoden u. ihre Anwendung. Göttingen [4]1973.

Lippe, P.: Einführung in die Statistik und den Umgang mit statistischen Daten. München 1974.

Lohnes, P.R., u. Cooley, W.W.: Einführung in die Statistik mit EDV-Übungen. Hannover 1976.

Morony, M.J.: Einführung in die Statistik. München, Wien 1970.

Sachs, L.: Statistische Auswertungsmethoden. Berlin u.a. [3]1972.

Sixtl. F.: Meßmethoden der Psychologie. Weinheim 1967.

Sachregister

Es wird nur auf Fundstellen im Theorie-Teil verwiesen. Zugehörige Programme sind dort mit der entsprechenden Nummer benannt.

Dieses Buch richtet sich hauptsächlich an Leser, die empirisch arbeiten möchten. Es ist daher betont pragmatisch konzipiert.

Der 1. Teil bietet eine leichtverständliche Übersicht über die wichtigsten Verfahren und Tests der Statistik mit zahlreichen Beispielrechnungen. Der 2. Teil enthält je 54 gebrauchsfertige Programme für Rechner mit Algebraischer Eingabelogik (AOS bzw. AEL) und Umgekehrter Polnischer Notation (UPN). Diese Programme laufen auf allen handelsüblichen Rechnern. Der 3. Teil besteht aus 14 Tabellen, die für die statistische Alltagsarbeit unerläßlich sind.

Diese Anlage erlaubt einen raschen und rationellen Zugriff auf die üblichen statistischen Verfahren.

Oldenbourg Verlag ISBN 3-486-20762-8