hp 49g+ grafische rekenmachine

gebruikershandleiding

Editie 4
HP artikelnummer F2228-90011

Mededeling

Het REGISTER JE PRODUCT AAN: www.register.hp.com

Hewlett-Packard Company
4995 Murphy Canyon Rd,
Suite 301
San Diego,CA 92123

Oplage

Editie 4 April 2004

Voorwoord

U heeft een compacte symbolische en numerieke computer in handen die de berekening en wiskundige analyse van problemen in een verscheidenheid van disciplines vergemakkelijkt. Deze problemen kunnen variëren van elementaire wiskunde tot de gevorderde techniek en wetenschappelijke onderwerpen. Dit apparaat wordt een rekenmachine genoemd, maar vanwege het compacte formaat dat zeer veel lijkt op typische hand-held rekenapparaten, zou de hp 49g+ gezien moeten worden als een grafische en programmeerbare hand-held computer.

De hp 49g+ kan bediend worden in twee verschillende rekenmodi; de *Reverse Polish Notation* (RPN) modus en de *algebraïsche* (ALG) modus (zie pagina 1-11 in de gebruikshandleiding voor meer informatie). De RPN-modus is in rekenmachines opgenomen om berekeningen efficiënter te maken. In deze modus worden eerst de operanden ingevoerd in een berekening (bijv. '*2*' en '*3*' in de bewerking '2+3') in het scherm van de rekenmachine, *stapelgeheugen* genoemd. Vervolgens wordt de operator (bijv. '+' in de bewerking '2+3') ingevoerd om de berekening af te maken. De ALG-modus imiteert de manier waarop u rekenkundige uitdrukkingen op papier zet. Zo wordt de uitdrukking '*2+3*', in de ALG-modus in de rekenmachine ingevoerd met de toetsen '*2*', '*+*', en '*3*' in die volgorde. Om de bewerking af te maken, drukken we op de ENTER-toets. Voorbeelden van toepassingen van de verschillende functies en bewerkingen in deze rekenmachine worden voor beide modi weergegeven in deze gebruikshandleiding.

Deze handleiding bevat voorbeelden die het gebruik van de basisfuncties en bewerkingen van de rekenmachine weergeven. De hoofdstukken in deze gebruikshandleiding zijn op onderwerp gerangschikt in volgorde van moeilijkheidsgraad. De handleiding behandelt eerst het instellen van de modi van de rekenmachine en de weergaveopties en vervolgt dan met berekeningen met reële en complexe getallen, bewerkingen met reeksen, vectoren, matrices, gedetailleerde voorbeelden van grafische toepassingen, het gebruik van strings, basisprogrammeerhandelingen, grafische programmeerhandelingen, stringmanipulatie, gevorderde calculus en multivariant calculustoepassingen, gevorderde differentiaalvergelijkingtoepassingen (incl. Laplace-transformaties en Fourier-reeksen en -toepassingen) en kans- en statistische toepassingen.

Het hart van de rekenmachine bestaat uit een besturingssysteem dat u kunt updaten door nieuwe versies te downloaden van de webpagina van de rekenmachine. Voor symbolische bewerkingen beschikt de rekenmachine over een krachtig Computer Algebraïsch Systeem (CAS) dat u in staat stelt verschillende bewerkingsmodi te selecteren, bijv. complexe nummers vs. reële nummers of exacte (symbolisch) modus vs. benaderende (numerieke) modus. Het scherm kan zo aangepast worden dat het tekstboekuitdrukkingen kan weergeven. Deze kunnen handig zijn bij het werken met matrices, vectoren, breuken, optellingen, afgeleiden en integralen. De hoge snelheid in grafische toepassingen is erg handig om in heel korte tijd ingewikkelde afbeeldingen te maken.

Dankzij de infrarode poort en de USB-kabel die beschikbaar zijn bij uw rekenmachine, kunt u de rekenmachine verbinden aan andere rekenmachines of computers. De hogesnelheidsverbinding via infrarood of USB stelt u in staat snel en efficiënt programma's en gegevens uit te wisselen met andere rekenmachines of computers. De rekenmachine is voorzien van poorten voor een flashgeheugenkaart om het opslaan en uitwisselen van gegevens met andere gebruikers te vergemakkelijken.

De programmeermogelijkheden van de rekenmachine stellen u of andere gebruikers in staat om efficiënte toepassingen voor specifieke doeleinden te ontwikkelen. Of het nu gaat om gevorderde wiskundige toepassingen, specifieke probleemoplossingen of gegevensregistratie, de programmeertalen die de rekenmachine tot uw beschikking stelt, maken het een veelzijdig rekenapparaat.

Wij hopen dat uw rekenmachine een betrouwbare compagnon zal worden bij uw studie en beroep. Deze rekenmachine staat hoog aangeschreven onder de hand-held rekenapparaten.

Inhoudsopgave

Aanhangsels

Hoofdstuk 1
Beginnen

Dit hoofdstuk beschrijftde basisinformatie over het gebruik van uw rekenmachine. De doelstelling van de oefeningen is dat u vertrouwd raakt met de basisfuncties en instellingen voordat u daadwerkelijk een berekening maakt .

Basisbediening

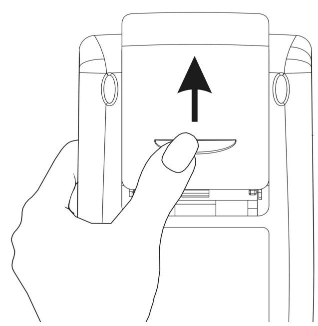
De volgende oefeningen zijn bedoeld om de hardware van uw rekenmachine beter te leren kennen.

Batterijen

De rekenmachine gebruikt 3 AAA(LR03)-batterijen als hoofdvoeding en een CR2032 lithiumbatterij voor geheugenbackup.
Plaats de batterijen volgens de onderstaande procedure alvorens de rekenmachine te gebruiken.

De hoofdbatterijen plaatsen

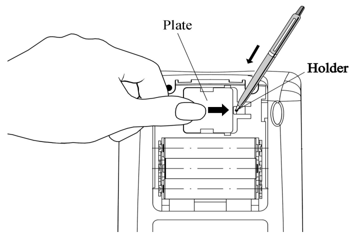
a. **Zorg ervoor dat de calculator uitgeschakeld is.** Schuif het deksel van de batterijhouder omhoog zoals in de afbeelding.



b. Plaats 3 nieuwe AAA(LR03)-batterijen in het batterijgedeeltevenster. Zorg ervoor dat elke batterij in de juiste richting wordt geplaatst.

De backupbatterij plaatsen

a. **Zorg ervoor dat de calculator uitgeschakeld is.** Druk de houder naar beneden. Duw het afdekplaatje in de getoonde richting en til het op.



b. Plaats een nieuwe CR2032 lithiumbatterij. Zorg ervoor dat de positieve kant (+) naar boven is geplaatst.
c. Plaats het afdekplaatje terug en duw het in de beginpositie.

Druk, nadat de batterijen zijn geplaatst, op [ON] om de rekenmachine in te schakelen.

Waarschuwing: als de pictogram van een zwakke batterij in het beeldscherm verschijnt, dienen de batterijen zo spoedig mogelijk vervangen te worden. De backupbatterij en de hoofdbatterijen echter nooit tegelijkertijd verwijderen om gegevensverlies te voorkomen.

De rekenmachine in- en uitschakelen

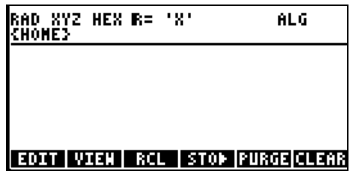
De toets [ON] bevindt zich in de linkeronderhoek van het toetsenbord. Druk één keer op deze toets om de rekenmachine in te schakelen. Druk, om de rekenmachine uit te schakelen, op de rechter rode shifttoets [→] (eerste toets in de tweede rij vanaf de onderzijde van het toetsenbord) en daarna op [ON]. De toets [ON] is in de rechterbovenhoek voorzien van een rode OFF-markering, als geheugensteuntje voor de OFF-functie van de rekenmachine .

Het beeldschermcontrast instellen

U kunt het beeldschermcontrast instellen door de tegelijkertijd op de toets [ON] te drukken terwijl u op de [+] of [−] toetsen drukt. De combinatie van [ON](vasthouden) [+] toets geeft een <u>donkerer beeldscherm</u>. De combinatie van [ON](vasthouden) [−] toets geeft een <u>helderer beeldscherm</u>.

Inhoud van het beeldscherm van de rekenmachine

Schakel uw rekenmachine opnieuw aan. Het beeldscherm moet er als volgt uitzien.



In het bovenste gedeelte van het beeldscherm worden twee regels met informatie getoond die de instellingen van de rekenmachine beschrijven. De eerste regel toont de lettertekens

RAD XYZ HEX R= 'X'

Raadpleeg Hoofdstuk 2 in de gebruikshandleiding van de rekenmachine voor meer informatie over de betekenis van deze specificaties.
De tweede regel toont de lettertekens: { HOME } en dit betekent dat de HOME-directory de huidige directory in het geheugen van de rekenmachine is. In Hoofdstuk 2 zult u leren dat u gegevens in uw rekenmachine kunt bewaren door ze in bestanden of variabelen op te slaan. Variabelen kunnen georganiseerd worden in directories en subdirectories. U kunt eventueel een boomstructuur van bestanddirectories aanmaken, vergelijkbaar met de boomstructuur van de harde schijf in een computer. U kunt dan door de hiërarchie van de bestanddirectory schuiven om elke willekeurige en interessante directory te selecteren. Als u door het bestanddirectory schuift, zal de tweede regel in het beeldscherm veranderen om de juiste bestanddirectory en subdirectory weer te geven.

Onder in het beeldscherm staan enkele labels, te weten,
EDIT VIEW RCL STO PURGE CLEAR
die bij de zes *softmenutoetsen*, F1 tot en met F6, horen*softmenutoets*:
F1 F2 F3 F4 F5 F6

De zes labels die in onder in het scherm worden weergegeven, kunnen veranderen als er een ander menu wordt getoond. F1 hoort altijd bij het eerste weergegeven label en F2 altijd bij het tweede label, enz .

Menu's

De zes labels die bij de toetsen F1 tot en met F6 horen, maken deel uit van een <u>menu</u> met functies. Omdat de rekenmachine slechts zes softmenutoetsen heeft, worden er maar 6 labels per keer weergegeven. Een menu kan echter uit meer dan zes invoeren bestaan softmenutoets . Elke groep van 6 ingangen wordt menupagina genoemd. Het huidige menu, bekend als het menu TOOL (zie hieronder), heeft acht ingangen gerangschikt over twee pagina's. De volgende pagina, die de volgende twee ingangen van het menu bevat, is beschikbaar door op de toets NXT (menu NEXT) te drukken. Deze toets is de derde toets links in de derde toetsenrij op het toetsbord. Druk opnieuw op NXT om naar het hoofdmenu TOOL terug te keren, of druk op de toets TOOL (de derde toets in de tweede toetsenrij boven in het toetsenbord).

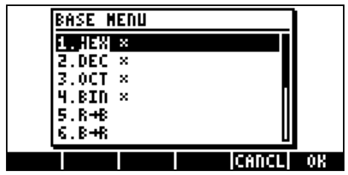
In de volgende paragraaf wordt het menu TOOL uitvoerig behandeld. Nu verduidelijken we enkele eigenschappen van de menu's die u handig zult vinden bij het gebruik van uw rekenmachine.

SOFT menu's versus CHOOSE boxes

Menu's, of SOFT menu's, verbinden labels in het onderste gedeelte van het beeldscherm met de zes softmenutoets (F1 tot en met F6). Door op de bijbehorende softmenutoets te drukken, wordt de functie geactiveerd die wordt weergegeven op het label. Bijvoorbeeld, wanneer het menu TOOL actief is en er op de toets CLEAR (F6) wordt gedrukt, wordt de functie CLEAR geactiveerd, die de inhoud van het beeldscherm wist. om deze functie in werking te zien Voer een getal in, bijvoorbeeld 1 2 3 ENTER, en druk dan op de toets F6 om deze functie in werking te zien.

SOFT menu's worden speciaal gebruikt om uit een aantal verwante functies te kiezen. SOFT menu's zijn echter niet de enige manier om toegang te krijgen tot verzamelingen van met elkaar verbonden functies in de rekenmachine. De andere methode wordt aangeduid met CHOOS venstersvenstervensters. vensterActiveer het menu TOOL (druk op TOOL) en druk dan op de toetsencombinatie → BASE (behorende bij toets 3) om een voorbeeld te zien van een choose boxes. Dit zal het volgende

CHOOSE box venstergeven:



Dit CHOOSE box draagt het label BASE MENU en verschaft een lijst van genummerde functies, van 1. HEX x tot en met 6. B→R. Dit beeldscherm betreft de eerste pagina van dit CHOOSE box en toont zes menufuncties. U kunt door het menu bladeren met de pijltoetsen omhoog en omlaag, ▲▼, die zich rechtsbovenin het toetsenbord bevinden, meteen onder de softmenutoetsen F5 en F6 softmenutoets. Markeer eerst de naam van de functie met de pijltoetsen omhoog en omlaag, ▲▼, of door te drukken op het nummer dat overeenstemt met de functie in het CHOOSE box om elke willekeurig gegeven functie te activeren. Druk op de softmenutoets OK (F6) nadat de naam van de functie geselecteerd is. Druk op 6 F6 als u op deze manier de functie R→B (Real to Binary) zou willen gebruiken.

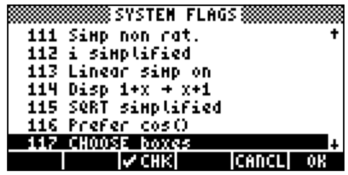
Gebruik ← ▲ indien u naar het bovenste gedeelte van de huidige menupagina in een CHOOSE box wilt gaan . Gebruik ← ▼ om naar het onderste gedeelte van de huidige pagina te gaan. Gebruik → ▲ om naar het bovenste gedeelte van het complete menu te gaan. Gebruik → ▼ om naar het bovenste gedeelte van het complete menu te gaan .

SOFT menu's of CHOOSE boxes selecteren

U kunt de opmaak waarin uw menu's worden getoond, selecteren door de instelling van de systeemvlaggen van de rekenmachine te verenderen. (Een systeemvlag is een variabele van de rekenmachine die een bepaalde bewerking of modus van de rekenmachine controleert. Raadpleeg hoofdstuk 24 voor meer informatie over vlaggen). Systeemvlag 117 kan ingesteld worden op SOFT menu's of CHOOSE boxes. Gebruik de volgende toetsencombinatie om deze vlag te activeren:

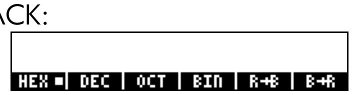
MODE FLAGS ▲ ← ▲ ▼

Uw rekenmachine zal het volgende beeld tonen, waarin de regel is gemarkeerd die met nummer 117 begint:

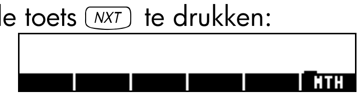


Standaard ziet de regel eruit zoals in de bovenstaande afbeelding. De gemarkeerde regel (117 CHOOSE boxes) geeft aan dat CHOOSE boxes kaste de huidige menuinstelling is. Indien u verkiest de Softmenutoets te gebruiken, druk dan op desoftmenutoets ✓CHK (F3), gevolgd door OK (F6). Druk opnieuw op OK (F6) om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

Als u nu op ↱ BASE drukt in plaats van op het eerder weergegeven CHOOSE box, zal het beeldscherm nu de zes softmenulabels tonen als eerste pagina in het menu STACK:

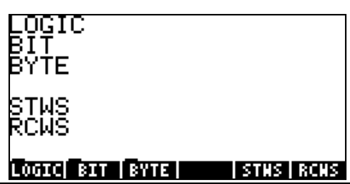


Druk op de toets NXT om naar de volgende pagina te gaan of op ↰ PREV (behorende bij de toets NXT) om naar de vorige pagina te gaan. De volgende afbeeldingen tonen de verschillende pagina's van het menu BASE en geven toegang door twee keer op de toets NXT te drukken:



Door nog één keer op de toets NXT te drukken, keren we terug naar de eerste menupagina.

Opmerking: met systeemvlag 117 ingesteld op SOFT menu , zal de toetsencombinatie ↱(vasthouden) ▼, een lijst tonen van de functies in het huidige softmenu. Voor de eerste twee pagina's in het menu BASE krijgt u bijvoorbeeld:



Gebruik om terug te keren naar de instelling van de CHOOSE boxes:

MODE FLAGS ▲ ← ▲ ▼ ✓CHK OK OK.

Opmerkingen:

1. Het menu TOOL, verkregen door op TOOL te drukken, zal altijd een SOFT menu produceren.
2. De meeste voorbeelden die in deze handleiding getoond worden, gebruiken zowel SOFT menus als CHOOSE boxes. Bij het programmeren van toepassingen (Hoofdstuk 21 en 22) worden uitsluitend SOFT menu's gebruikt.
3. Aanvullende informatie over SOFT menu's versus CHOOSE boxes worden in Hoofdstuk 2 in deze handleiding behandeld.

Het menu TOOL

De softmenutoetsen van het weergegeven menu, het menu TOOL, zijn voor het bewerken van variabelen (zie de paragraaf over variabelen in dit Hoofdstuk):

EDIT	F1	EDIT bewerken van de inhoud van een variabele (zie Hoofdstuk 2 en Bijlage L in de gebruikshandleiding voor meer informatie over bewerken)
VIEW	F2	VIEW bekijken van de inhoud van een variabele
RCL	F3	ReCaLl oproepen van de inhoud van een variabele
STO	F4	STOre opslaan van de inhoud van een variabele
PURGE	F5	PURGE verwijderen van een variabele
CLEAR	F6	CLEAR wissen van het beeldscherm of het stapelgeheugen

De rekenmachine heeft slechts zes softmenutoetsen, en kan alleen 6 labels op elk willekeurig tijdstip tonen. Een menu kan echter meer dan zes ingangen hebben. Elke groep van 6 ingangen wordt een menupagina genoemd. Het menu TOOL heeft 8 ingangen gerangschikt over twee pagina's. De volgende pagina met de volgende twee ingangen van het menu is beschikbaar door op detoets NXT (menu NEXT) te drukken. Deze toets is de derde toets links in de derde toetsenrij op het toetsenbord.

In dit geval zijn er alleen aan de eerste twee softmenutoetsen commando's verbonden.Deze commando's zijn:

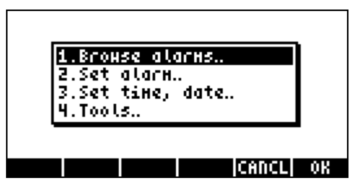
CASCM	F1	CASCMD: CAS CoMmanD, gebruikt om een commando te lanceren vanuit het CAS door middel van het selecteren van een lijst
HELP	F2	HELP voorziening die de beschikbare commando's beschrijft.

Door op de toets NXT te drukken, verschijnt het originele menu TOOL. Het menu TOOL kan ook worden verkregen door op de toets TOOL te drukken (dit is de derde toets van links in de tweede toetsenrij boven in het toetsenbord).

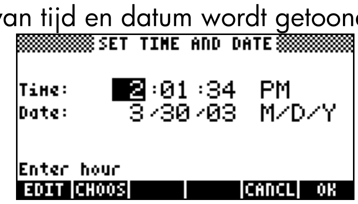
Tijd en datum instellen

De rekenmachine heeft een interne datum/tijd-klok. Deze klok kan ononderbroken uin het scherm worden getoond en kan worden gebruikt voor alarmen en voor geprogrammeerde taken. Deze paragraaf toont niet alleen hoe tijd en datum moeten worden ingesteld, maar ook de basiselementen voor het gebruik van de CHOOSE boxes en het invoeren van data in een dialoog-venster. De dialoogvensters in uw rekenmachine lijken op de dialoogvensters in uw computer.

Voor het instellen van tijd en datum wordt het keuzevenster TIME gebruikt die beschikbaar is als alternatieve functie voor detoets 9. Door het combineren van de rode rechtershifttoets, ↱, met de toets 9 wordt het keuzevenster TIME geactiveerd. Deze bewerking kan ook uitgevoerd worden met ↱ TIME. Het keuzevenster TIME wordt in de onderstaande afbeelding getoond:



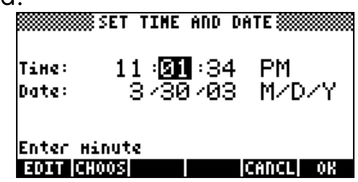
Zoals eerder aangegeven, biedt het menu TIME vier verschillende opties, die van 1 tot en met 4 genummerd zijn. Voor ons is optie 3. *Set time, date...* interessant. Met de pijltoets omlaag, ▽, wordt deze optie gemarkeerd en druk op de softmenutoets OK F6. Het volgende *invoerscherm* (zie bijlage 1-A) voor het instellen van tijd en datum wordt getoond:



Het instellen van het uur van de dag

Met de nummertoetsen 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 kan het uur van de dag worden ingesteld. Stel dat we het uur naar 11 veranderen door op 1 1 te drukken als het uurveld in het invoerscherm SET TIME AND DATE gemarkeerd is. Nummer *11* wordt nu in de onderste regel van het invoerscherm ingevoerd:

Druk op de softmenutoets OK F6 om de wijziging door te voeren. De waarde *11* wordt nu in het uurveld getoond en automatisch wordt het minutenveld gemarkeerd:



Laten we het minutenveld veranderen in 25 door op 2 5 OK te drukken. Nu wordt het secondenveld gemarkeerd. Stel dat u het secondenveld in 45 wilt veranderen, gebruik daarvoor 4 5 OK

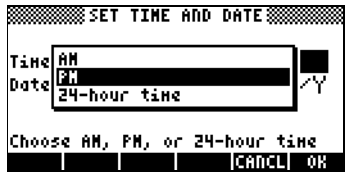
Nu wordt het tijdveld gemarkeerd. Om de huidige instelling van dit veld te veranderen, kunt u op de toets +/- (de tweede toets links in de vijfde toetsenrij onder in het toetsenbord) of op de softmenutoets CHOOS (F2) drukken.

- Wanneer u de toets +/- gebruikt, zal de instelling in het tijdveld veranderen naar een van de volgende opties:

    - AM : duidt aan dat de getoonde tijd in de AM-opmaak staat
    - PM : duidt aan dat de getoonde tijd in de PM-opmaak staat
    - 24-hr : duidt aan dat de getoonde tijd een 24 uuropmaak is, waar bijvoorbeeld 18:00 wordt gebruikt voor 6pm

Met deze procedure wordt de laatst geselecteerde optie de ingestelde optie voor de tijdopmaak.

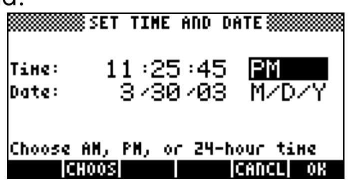
- Als de softmenutoets CHOOS gebruikt wordt, zijn de volgende opties beschikbaar.



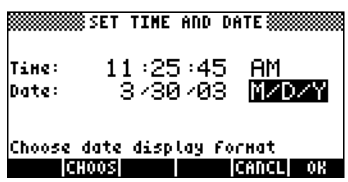
Gebruik de pijltoetsen omhoog en omlaag ,▲ ▼, om één van deze drie opties te selecteren (AM, PM, 24-hour time). Druk op de softmenutoets OK F6 om de keuze te maken.

Het instellen van de datum

Nadat de tijdopmaak ingesteld is, zal het invoerscherm SET TIME AND DATE als volgt worden getoond:



Om de datum in te stellen, moet eerst de datumopmaak worden ingesteld. De standaardopmaak is M/D/Y (maand/dag/jaar). Druk op de pijltoets omlaag om deze opmaak te wijzigen. Dit zal de datumopmaak als volgt markeren:

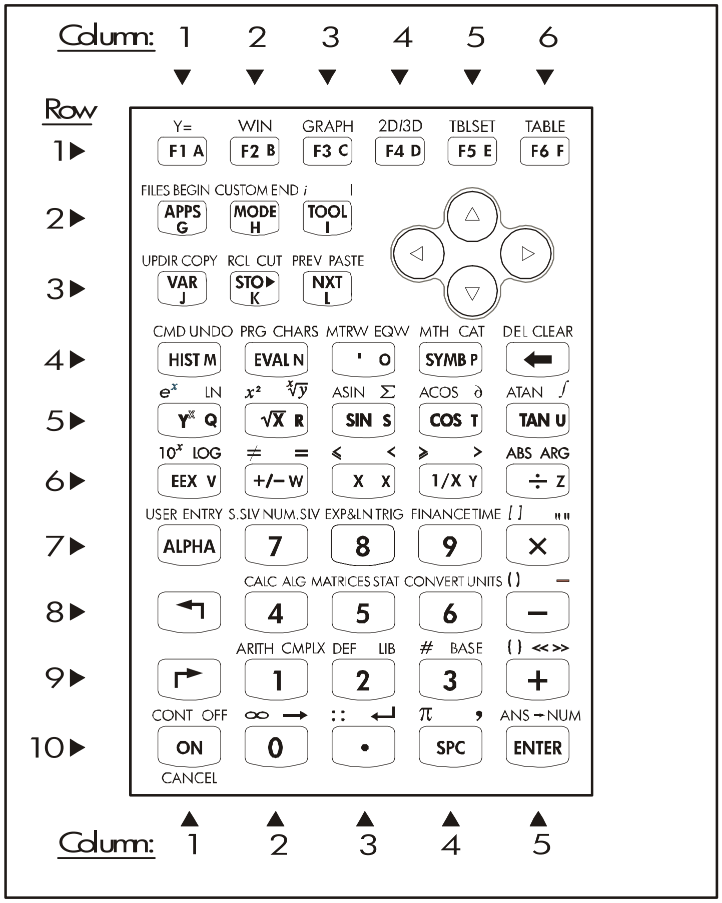


Gebruik de softmenutoets CHOOS (B) om de opties voor de datumopmaak te visualiseren:

Markeer uw keuze met de pijltoetsen omhoog en omlaag , , en druk op de softmenutoets OK F6 om uw keuze te maken.

Het toetsenbord van de rekenmachine

In onderstaande afbeelding ziet u een weergave van het toetsenbord van de rekenmachine met genummerde rijen en kolommen.

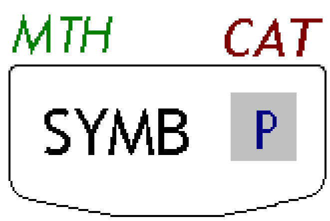


De afbeelding toont 10 toetsenrijen gecombineerd met 3, 5 of 6 kolommen Rij 1 heeft 6 toetsen, rijen 2 en 3 hebben elk 3 toetsen en rijen 4 tot en met 10 hebben elk 5 toetsen. Er zijn 4 pijltoetsen aan de rechterkant van het toetsenbord bij de rijen 2 en 3.

Elke toets heeft drie, vier of vijf functies. De hoofdfunctie van een toets heeft de meest zichtbare markering op de toets. De groene linkershifttoets, *toets (8,1)*, de rode rechtershifttoets, *toets (9,1)* en de blauwe toets ALPHA, *toets (7,1)* kunnen worden gecombineerd met enkele andere toetsen om de andere functies in het toetsenbord te activeren. Zo kan met toets SYMB, *toets(4,4)*, de volgende zes functies worden uitgevoerd :

SYMB	Hoofdfunctie, het activeren van het menu SYMBolic
← MTH	Functie links-shift, het activeren van het menu MTH (wiskundig)
→ CAT	Functie rechts-shift, het activeren van de functie CATalog
ALPHA P	functie ALPHA, het invoeren van de hoofdletter P
ALPHA ← P	functie ALPHA-Links-shift, het invoeren van de kleine letter p
ALPHA → P	functie ALPHA-Rechts-shift, het invoeren van het symbool P

Van de zes functies die met een toets kunnen worden uitgevoerd, worden alleen de eerste vier op het toetsenbord weergegeven. Zo ziet de toets eruit op het toetsenbord:



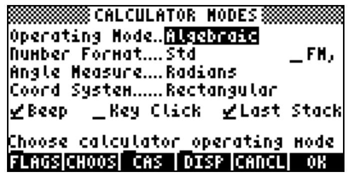
De kleur en de plaats van de markeringen op de toets, namelijk **SYMB**, *MTH*, *CAT* en **P**, geven aan wat de hoofdfunctie is (**SYMB**) en welke drie andere functies kunnen worden uitgevoerd met de toetsen links-shift ←(*MTH*), rechts-shift →(*CAT*) en ALPHA(**P**).

Raadpleeg Bijlage B in de gebruikshandleiding van de rekenmachine voor meer informatie over het gebruik van het toetsenbord van de rekenmachine.

Modi van de rekenmachine selecteren

In deze paragraaf gaan we er vanuit dat u al een beetje bekend bent met het gebruik van de kies- en dialoogvensters (Raadpleeg Hoofdstuk 2 in de gebruikshandleiding wanneer dit niet het geval is).

Druk op de toets MODE (tweede toets van links in de tweede toetsenrij boven in het toetsenbord) om het volgende invoervenster voor *CALCULATOR MODES* weer te geven:



Druk op de softmenutoets OK (F6) om terug te keren naar het normale beeldscherm. Hier volgen enkele voorbeelden voor het selecteren van verschillende rekenmachinemodi.

Bedieningsmodus

De rekenmachine bevat twee bedieningsmodi: de modus *Algebraic* en de modus *Reverse Polish Notation* (*RPN*). De rekenmachine staat standaard in de modus Algebraic (zoals in de bovenstaande afbeelding te zien is), maar gebruikers van oudere modellen van HP-rekenmachines zijn misschien meer bekend met de RPN-modus.

Als u een bedieningsmodus wilt selecteren, moet u eerst het invoervenster REKENMACHINE MODI openen met de toets MODE. Het Veld *Operating Mode* wordt gemarkeerd. Selecteer de bedieningsmodus *Algebraic* of *RPN* met de toets +/- (tweede van links in de vijfde rij onder in het toetsenbord) of door op de softmenutoets CHOOS (F2) te drukken. Bij de tweede methode kunt u de pijltjes omhoog en omlaag, ▲▼, gebruiken om de modus te selecteren. Druk daarna op de softmenutoets OK om de handeling te voltooien.

Om het verschil aan te geven tussen deze twee bedieningsmodi, voeren we de volgende uitdrukking op beide manieren uituitdrukking:

$$\sqrt{\frac{3\cdot\left(5-\frac{1}{3\cdot 3}\right)}{23^{3}}+e^{2.5}}$$

Om deze uitdrukking in de rekenmachine in te voeren, gebruiken we eerst de *vergelijkingenschrijver*, [↱] EQW . Zoek de volgende toetsen op het toetsenbord, samen met de numerieke toetsenuitdrukking:

[↰] [↱] [•] [SPC] [×] [+] [−] [÷] [√x]
[Y^x] e^x () [↱] EQW [◀] [▶] [▼] [▲] [ENTER]

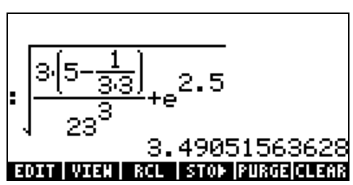
De vergelijkingenschrijver is een beeldschermmodus waarmee u wiskundige uitdrukkingen kunt opstellen met expliciet wiskundige aanduidingen, zoals breuken, afgeleiden, integralen, wortels, enz. Gebruik de volgende toetsen als u de vergelijkingenschrijver wilt gebruiken voor het opstellen van de hierboven weergegeven uitdrukkinguitdrukkinguitdrukking:

[↱] EQW [√x] [3] [×] [↰] () [5] [−]
[1] [÷] [3] [×] [3]
[▲] [▲] [▲] [▲] [▲] [▲] [▲]
[÷] [2] [3] [Y^x] [3] [▶] [▶] [+] [↰] e^x [2] [•] [5] [ENTER]

Als u op [ENTER] drukt, geeft de rekenmachine de volgende uitdrukking weeruitdrukking:

```
√(3*(5-1/(3*3))/23^3+EXP(2.5))
```

Als u opnieuw op [ENTER] drukt, krijgt u de volgende waarde (accepteer modus Approx. aan als u hierom wordt gevraagd door op OK te drukken). [**Opmerking**: De waarden van de gehele getallen die hierboven worden gebruikt, bijv. 3, 5, 1, staan voor exacte waarden. De EXP(2.5) kan echter niet worden uitgedrukt als een exacte waarde en daarom moet u overschakelen naar de modus Approx]:



U kunt de uitdrukking ook als volgt rechtstreeks in het beeldscherm typen zonder de vergelijkingenschrijver te gebruikenuitdrukking:

√x ← () 3 . × ← () 5 . −
1 . ÷ ← () 3 . × 3 . ▶ ▶
÷ 2 3 . y^x 3 + ← e^x 2 . 5 ENTER

Zo krijgt u hetzelfde resultaat.

Verander de bedieningsmodus in RPN door eerst op de toets MODE te drukken. Selecteer de bedieningsmodus *RPN* met de toets +/- of door op de softmenutoets CHOOS te drukken. Druk op de softmenutoets OK F6 om de handeling te voltooien. Het beeldscherm ziet er bij de RPN-modus als volgt uit:

U ziet dat het beeldscherm meerdere niveaus van de uitkomst heeft genummerd met van onder naar boven 1, 2, 3, enz. Dit wordt het stapelgeheugen van de rekenmachine genoemd. De verschillende niveaus worden *stapelgeheugenniveaus* genoemd, dus stapelgeheugenniveau 1, stapelgeheugenniveau 2, enz.

RPN wil dus eigenlijk zeggen dat u een handeling zoals 3 + 2, niet in de rekenmachine invoert met 3 + 2 ENTER, maar eerst de operanden, in de juiste volgorde invoert en dan de operator, d.w.z. 3 ENTER 2 ENTER +. Als u de operanden,invoert, bezetten zij verschillende stapelgeheugenniveaus. Als u 3 ENTER invoert, wordt het getal 3 op stapelgeheugenniveau 1 ingevoerd. Als u daarna 2 ENTER invoert, gaat het getal 3 naar stapelgeheugenniveau 2. Door vervolgens op + te drukken, vertellen we de rekenmachine dat hij de operator of het programma + moet toepassen op de objecten op niveaus 1 en 2. De uitkomst, 5, wordt vervolgens op niveau 1 geplaatst.. Een eenvoudigere wijze om deze bewerking te berekenen, is het gebruik van: 3 ENTER 2 +.

We proberen eerst enkele eenvoudige handelingen voordat we de moeilijkere uitdrukking uitproberen die eerder is gebruikt bij de algebraïsche modusuitdrukking:

123/32	`1` `2` `3` `ENTER` `3` `2` `÷`
4^2	`4` `ENTER` `2` `Yˣ`
$^3\sqrt{27}$	`2` `7` `ENTER` `3` `↱` `ˣ√y`

Let op de posities van de y en de x in de laatste twee handelingen. De basis in de exponentiële handeling is y (stapelgeheugenniveau 2), terwijl het exponent x is (stapelgeheugenniveau 1) voordat de toets `Yˣ` wordt ingedrukt. In de derdemachtswortel is y (stapelgeheugenniveau 2) het getal onder het wortelteken en x (stapelgeheugenniveau 1) de wortel.

Probeer de volgende oefening met de volgende 3 factoren: (5 + 3) × 2

`5` `ENTER` `3` `+`	Berekent eerst (5 + 3).
`2` `X`	Voltooit de berekening.

Probeer nu de eerder genoemde uitdrukkinguitdrukking:

$$\sqrt{\frac{3\cdot\left(5-\frac{1}{3\cdot 3}\right)}{23^3}+e^{2.5}}$$

`3` `.` `ENTER`	Voert 3 op niveau 1 in
`5` `.` `ENTER`	Voert 5 op niveau 1 in, 3 verplaatst zich naar y
`3` `.` `ENTER`	Voert 3 op niveau 1 in, 5 verplaatst zich naar niveau 2, 3 naar niveau 3
`3` `.` `×`	Plaatst 3 en vermenigvuldigt, 9 verschijnt op niveau 1
`1/x`	1/(3×3), laatste waarde op niveau. 1; 5 op niveau 2; 3 op niveau 3
`−`	5 – 1/(3x3), bezet nu niveau 1; 3 op niveau 2
`×`	3 x (5 – 1/(3x3)), bezet nu niveau 1
`2` `3` `.` `ENTER`	Voert 23 op niveau 1 in, 14.66666 verplaatst zich naar niveau 2.
`3` `.` `Yˣ`	Voert 3 in, berekent 23^3 op niveau 1. 14.666 op niveau. 2.
`÷`	(3× (5-1/(3×3)))/23^3 op niveau 1
`2` `.` `5`	Voert 2.5 op niveau 1 in

← e^x	$e^{2.5}$, gaat naar niveau 1, niveau 2 toont vorige waarde.
+	$(3\times (5 - 1/(3\times3)))/23^3 + e^{2.5}$ = 12.18369, op niveau. 1.
√x	$\sqrt{((3\times (5 - 1/(3\times3)))/23^3 + e^{2.5})}$ = 3.4905156, naar 1.

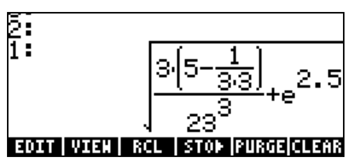
Alhoewel er in de RPN-modus wat meer nagedacht moet worden dan in de algebraïsche (ALG) modus, biedt het gebruik van RPN talrijke voordelen. In de RPN-modus kunt u bijvoorbeeld zien hoe de vergelijking zich stapsgewijs ontvouwt. Dit is buitengewoon nuttig om een mogelijke invoerfout te achterhalen. Zodra u efficiënter in deze modus wordt en de trucjes beter kent, zult u in staat zijn uitdrukkinguitdrukkingen sneller te berekenen met veel minder toetsaanslagen. Voer bijvoorbeeld de berekening uit van $(4\times6 - 5)/(1+4\times6 - 5)$. U kunt in de RPN-modus:

4 ENTER 6 × 5 − ENTER 1 + ÷

schrijven. U kunt natuurlijk zelfs in de RPN-modus een uitdrukkinguitdrukking invoeren in dezelfde volgorde als in de algebraïsche modus door de vergelijkingenschrijver te gebruiken. Bijvoorbeeld,

→ EQW √x 3 • × ← () 5 • − 1 ÷ 3 • × 3 •
▲ ▲ ▲ ▲ ▲ ▲ ▲
÷ 2 3 • y^x 3 ▶ ▶ + ← e^x 2 • 5 ENTER

De resulterende uitdrukkinguitdrukking wordt op stapelgeheugenniveau 1 als volgt getoond:



U ziet dat de uitdrukkinguitdrukking op stapelgeheugenniveau 1 wordt geplaatst nadat op ENTER wordt gedrukt. Door nu op de toets EVAL te drukken, wordt de numerieke waarde van die uitdrukking vastgesteld. Opmerking: in de RPN-modus voert het indrukken van ENTER wanneer er geen commandoregel is de functie DUP uit die de inhoud van niveau 1 van het stapelgeheugen op niveau 2 kopieert (en verplaatst de overige stapelgeheugenniveaus naar een niveau hoger). Dit is buitengewoon handig, zoals in het vorige voorbeeld wordt getoond.

Om tussen de ALG-modus en de RPN-modus te kiezen, kunt u ook systeemvlag 95 instellen met de volgende toetsencombinatie:

MODE FLAGS ▲ ← ▲ ← ▲ ← ▲ ✓CHK OK OK

Als alternatief kunt u een van de volgende snelkoppelingen gebruiken:

- In de ALG-modus,
  CF(-95) selecteert de RPN-modus

- In de RPN-modus,
  95 +/- ENTER SF selecteert de ALG-modus

meer informatie over het systeemvlaggen van de rekenmachine Raadpleeg Hoofdstuk 2 voor meer informatie over het systeemvlaggen van de rekenmachine.

Getalopmaak en decimale punt of komma

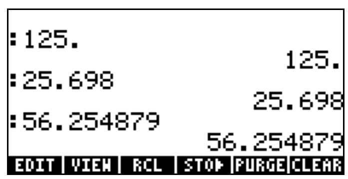
Door de getalopmaak te wijzigen, kunt u de manier aanpassen waarop reële cijfers worden weergegeven door de rekenmachine. Deze functie is bijzonder handig bij handelingen met tiende machten of om het aantal decimalen van een uitkomst te beperken.

Om een getalopmaak te selecteren, moet u eerst het invoervenster REKENMACHINE MODI openen door op de toets MODE te drukken. Gebruik daarna de toets pijltje omlaag, ▼, om de optie *Number format* te selecteren. De standaardwaarde is *Std*, oftewel *St*an*d*aardopmaak. In de standaardopmaak geeft de rekenmachine getallen met zwevende komma weer met de maximaal door de rekenmachine toegestane precisie (12 significante cijfers). U leest meer over reële getallen in Hoofdstuk 2 van deze handleiding. Probeer ter verduidelijking van bovengenoemde en andere getalopmaken de volgende oefeningen:

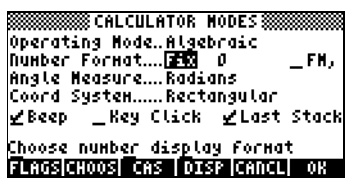
- **Standaardopmaak**:

Deze modus wordt het meeste gebruikt, omdat de cijfers in de meest bekende notatie worden weergegeven.
Druk op de softmenutoets OK, met *Number format* ingesteld op *Std*, om terug te keren naar het beeldscherm van de rekenmachine. Voer het getal 123.4567890123456 in (met 16 significante cijfers). Druk op de toets ENTER. Het getal wordt afgerond op maximaal 12 significante cijfers en wordt als volgt weergegeven:

In de standaardopmaak van de decimale weergave, worden volledige getallen altijd zonder decimale nullen getoond. Getallen met verschillende decimale cijfers worden in het beeldscherm aangepast, zodat alleen de noodzakelijke decimale cijfers worden getoond. Hieronder worden meer voorbeelden van getallen in standaardopmaak getoond:



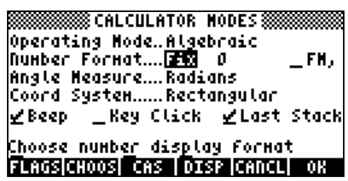
- **Vaste opmaak zonder decimalen**: Druk op de toets MODE. Selecteer daarna met de toets pijltje omlaag, ▼, de optie . Druk op de softmenutoets CHOOS (F2) en selecteer de optie *Fixed* met de toets pijltje omlaag ▼.



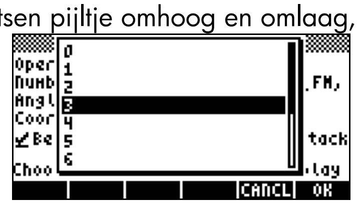
U ziet dat de getalopmaak ingesteld is op *Fix* gevolgd door een nul (0). Dit getal duidt het aantal decimalen aan die na de decimale punt op het beeldscherm getoond moeten worden. Druk op de softmenutoets OK om naar het normale beeldscherm terug te keren. Het getal wordt nu getoond als.

Deze instelling verplicht dat alle resultaten worden afgerond op het dichtstbijzijnde volledige getal (0 cijfers na de komma). Het getal is echter nog steeds in de rekenmachine opgeslagen met de complete 12 significante cijferprecisie. Als we het aantal weer te geven decimalen veranderen, zult u zien dat de aanvullende cijfers opnieuw worden getoond.

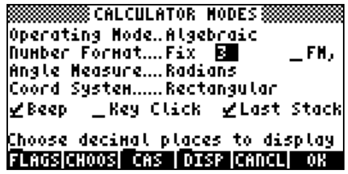
- **Vaste opmaak met decimalen**:
  Deze modus wordt hoofdzakelijk gebruikt wanneer met eindige precisie wordt gewerkt. Als u bijvoorbeeld financiële berekeningen maakt is het raadzaam een FIX 2-modus te gebruiken, aangezien het gemakkelijk munteenheden tot een 1/100-precisie kan weergeven.
  Druk op de toets MODE. Selecteer daarna met de toets pijltje omlaag, , de optie . Druk op de softmenutoets CHOOS (F2) en selecteer de optie *Fixed* met de toets pijltje omlaag



Druk op de toets pijltje rechts, , om de nul voor de optie *Fix* te markeren. Druk op de softmenutoets CHOOS en selecteer bijvoorbeeld 3 decimalen met de toetsen pijltje omhoog en omlaag, .



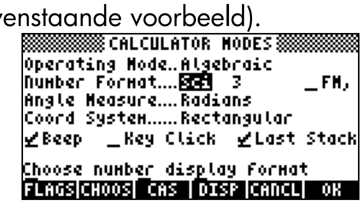
Druk op de softmenutoets OK om de selectie te voltooien.



Druk op de softmenutoets OK om terug te keren naar het beeldscherm van de rekenmachine. Het getal wordt nu weergegeven als:

U ziet dat het getal is afgerond en niet afgekapt. Het getal 123.4567890123456 wordt voor deze instelling dus weergegeven als 123.457 en niet als 123.456, omdat het cijfer na 6 > 5 is):

- **Wetenschappelijke opmaak**:
  De wetenschappelijke opmaak wordt hoofdzakelijk gebruikt bij het oplossen van problemen in de fysica waar getallen meestal weergegeven worden als een getal met eindige precisie vermenigvuldigd met een macht van tien.
  U stelt deze opmaak in door op de toets MODE te drukken. Selecteer daarna met de toets pijltje omlaag, ▼, de optie *Number format.* Druk op de softmenutoets CHOOS (F2) en selecteer de optie *Scientific* met de toets pijltje omlaag ▼. Het getal 3 moet voor *Sci* blijven staan. (Dit getal kan op dezelfde manier worden gewijzigd als het *Fixed* aantal decimalen in het bovenstaande voorbeeld).

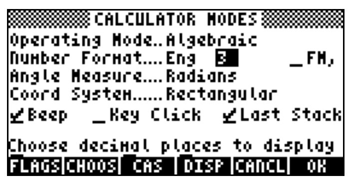


Druk op de softmenutoets OK om terug te keren naar het beeldscherm van de rekenmachine. Het getal wordt nu weergegeven als:

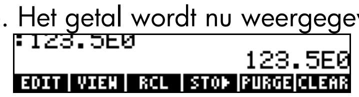
De uitkomst, 1.235E2, is de rekenmachineversie van de notatie voor tiende machten, dus 1.235×10^2. In deze zogenaamde wetenschappelijke notatie geeft het getal *3* voor de getalopmaak *Sci* (zoals eerder getoond) het aantal significante cijfers na de komma weer. De wetenschappelijke notatie heeft altijd één geheel getal, zoals hierboven. In dit geval is het aantal significante cijfers dus vier..

- **Technische opmaak**

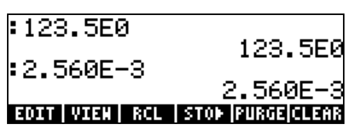
  De technische opmaak (Engineering) lijkt sterk op de wetenschappelijke opmaak, maar de tiende machten zijn hier meervouden van drie. U stelt deze opmaak in door op de toets MODE te drukken. Selecteer daarna met de toets pijltje omlaag, ▼, de optie *Number format* . Druk op de softmenutoets CHOOS (F2) en selecteer de optie *Engineering* met de toets pijltje omlaag ▼. Het getal 3 moet voor *Eng blijven staan.* (Dit getal kan op dezelfde manier worden gewijzigd als het *Fixed* aantal decimalen in het bovenstaande voorbeeld).



Druk op de softmenutoets OK om terug te keren naar het beeldscherm van de rekenmachine. Het getal wordt nu weergegeven als:

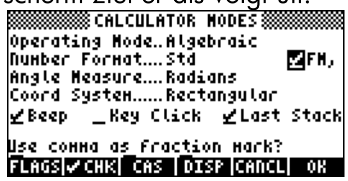


Omdat er bij dit getal drie cijfers in het gehele getal staan, wordt het weergegeven met vier significante cijfers en een tiende macht van nul in de Technische opmaak. Het getal 0.00256 wordt bijvoorbeeld als volgt weergegeven:



- **Decimale komma versus decimale punt**

- **Decimale komma versus decimale punt**
  De punten in cijfers met zwevende punten kunnen worden vervangen door komma's als de gebruiker hier liever mee werkt. Om de punten te vervangen door komma's wijzigt u de optie *FM* in CALCULATOR MODES als volgt naar komma's (U ziet dat we *Number Format* hebben gewijzigd in *Std*).
- Druk op de toets MODE. Druk daarna een keer op de toets pijltje omlaag, ▼, en keer op het pijltje rechts, ▶, om de optie __*FM,* te markeren. Om komma's te selecteren, drukt u op de softmenutoets ✓CHK (dus de toets F2). Het invoerscherm ziet er als volgt uit:



- Druk op de softmenutoets OK om terug te keren naar het beeldscherm van de rekenmachine. Het getal 123.456789012, dat we eerder hebben ingevoerd, wordt nu weergegeven als:

Hoekmeting

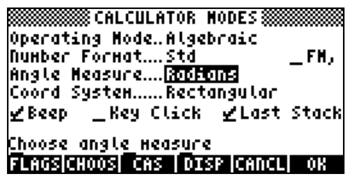
Trigonometrische functies, bij voorbeeld, vereisen argumenten die vlakke hoeken voorstellen. De rekenmachine voorziet in drie verschillende modi voor *Hoekmeting* om met hoeken te werken, namelijk:

- Graden: Er zitten 360 graden (*360°*) in een complete omtrek, of 90 graden (*90°*) in een rechte hoek. Deze voorstelling wordt hoofdzakelijk gebruikt bij basismeetkunde, mechanische of bouwkunde en topografie.
- *Radialen*: Er zitten 2π radialen ($2\pi^{\,r}$) in een complete omtrek, of $\pi/2$ radialen ($\pi/2^{\,r}$) in een rechte hoek. Deze notatie wordt hoofdzakelijk gebruikt bij het oplossen van wiskundige en fysische problemen. Dit is de standaardmodus van de rekenmachine.
- Graden: Er zitten 400 graden ($400^{\,g}$) in een complete omtrek, of 100 graden ($100^{\,g}$) in een rechte hoek. Deze notatie lijkt op de graden modus en werd ingevoerd om de gradennotatie te "vereenvoudigen", maar wordt nu echter zelden gebruikt.

De hoekmeting is van invloed op trigonometrische functies als SIN, COS, TAN en de bijbehorende functies.

Gebruik de volgende procudure om de hoekmetingmodus te wijzigen:

- Druk op de toets MODE. Druk daarna twee keer op de toets pijltje omlaag, ▼. Selecteer de modus *Hoekmeting* met de toets +/- (tweede van links in de vijfde rij onder in het toetsenbord) of door op de softmenutoets CHOOS (F2) te drukken. Bij de tweede methode kunt u de pijltjes omhoog en omlaag, ▲▼, gebruiken om de gewenste modus te selecteren. Druk daarna op de softmenutoets OK (F6) om de handeling te voltooien. In het volgende scherm is bijvoorbeeld de modus Radians geselecteerd:



Coördinatenstelsel

Als u het coördinatenstelsel selecteert, heeft dit invloed op de manier waarop vectoren en complexe getallen worden weergegeven en ingevoerd. Raadpleeg Hoofdstuk 4 en 9 in deze handleiding voor meer informatie over respectievelijk complexe getallen en vectoren.

Twee- en drie-dimensionele vector componenten en complexe getallen kunnen in elk van de 3 coördinatenstelsels worden weergegeven: De Cartesische (2 dimensionaal) of Rechthoekige (3 dimensionaal), Cilindrische (3 dimensionaal) of Polaire (2 dimensionaal), en Sferische (alleen 3 dimensionaal). In een Cartesisch of Rechthoekig coördinatenstelsel heeft een punt P drie lineaire coördinaten (x,y,z), gemeten vanaf het beginpunt waarlangs elk van drie onderling perpendiculaire assen (in 2 d modus, z wordt voorgesteld als 0). Bij een Cilindrisch of Polair coördinatenstelsel worden de puntcoördinaten gegeven door (r,θ,z), waar r een radiale afstand is gemeten van het beginpunt op het xy-vlak, θ de hoek is die de radiale afstand r vormt met de positieve x-as – als positief gemeten tegen de de klok in –, en z gelijk is als de z-coördinaat in een Cartesisch stelsel (in de 2 d modus, z wordt voorgesteld als 0). De Rechthoekige en Polaire stelsels worden door de volgende hoeveelheden voorgesteld:

$$x = r \cdot \cos(\theta) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r \cdot \sin(\theta) \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = z$$

In een Sferisch coördinatenstelsel worden de coördinaten gegeven door (ρ,θ,φ) waar ρ een radiale afstand is gemeten vanaf het beginpunt van een Cartesisch stelsel, θ een hoek is die de hoek vormd door de projectie van de lineaire afstand ρ tot aan de xy-as voorstelt (zoals θ bij Polaire coördinaten) en ϕ de hoek is van de positieve z-as naar de radiale afstand ρ. De Rechthoekige en Sferische coördinatenstelsels worden als volgt weergegeven:

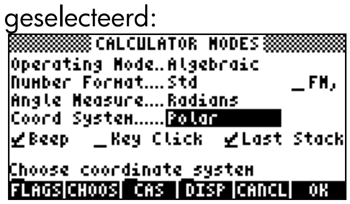
$$x = \rho \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(\theta) \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y = \rho \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(\theta) \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = \rho \cdot \cos(\phi) \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$

Voer de volgende stappen uit om het coördinatenstelsel in uw rekenmachine te wijzigen:

- Druk op de MODE toets. Gebruik daarna drie keer de pijltoets omlaag, ▼. Selecteer de modus *Angle Measure* met de toets +/- (de tweede links in de vijfde rij onder in het toetsenbord) of door te drukken op de softmenutoets CHOOS (F2). Bij de tweede methode kunt u de pijltjes omhoog en omlaag, ▲▼, gebruiken om de gewenste modus te selecteren. Druk daarna op de softmenutoets OK (F6) om de handeling te voltooien. In het volgende scherm is bijvoorbeeld het coördinatenstelsel Polar geselecteerd:



De opties Beep, Key Click en Last Stack

De laatste regel in het invoerscherm CALCULATOR MODES bevat de opties:

_Beep _Key Click _Last Stack

Door het aankruisvakje naast elk van deze opties te kiezen, wordt de overeenkomstige optie geactiveerd. Deze opties worden hierna beschreven:

_Beep : Indien geselecteerd, wordt het geluidssignaal van de rekenmachine geactiveerd. Deze functie wordt hoofdzakelijk toegepast bij foutmeldingen, evenals voor enkele gebruikersfuncties zoals BEEP.
_Key Click : Indien geselecteerd, laat elke toetsaanslag een "klikkend" geluid horen.
_Last Stack: Bewaart de inhoud van de laatste invoer in het stapelgeheugen voor gebruik met de functies UNDO en ANS (zie Hoofdstuk 2).

De optie *_Beep* kan handig zijn om de gebruiker over fouten te verwittigen. U kunt deze optie uitschakelen wanneer u uw rekenmachine in een klaslokaal of een bibliotheek gebruikt.
De optie *_Key Click*kan handig zijn om te akoestisch te controleren of elke toetsaanslag ingevoerd is zoals bedoeld.
De optie *_Last Stack* is zeer handig om de laatste bewerking te achterhalen wanneer die weer voor een nieuwe berekening gebruikt kan worden.

Druk eerst op de toets MODE om een van deze drie opties te selecteren of uit te schakelen. Gebruik daarna

- vier keer de pijltoets omlaag, ▼, om de optie *_Last Stack* te selecteren. Gebruik de softmenutoets ✓CHK (d.w.z. de toets F2) om de keuze te wijzigen.
- Druk op de pijltoets naar links ◄ om de optie *_Key Click* te selecteren. Gebruik de softmenutoets ✓CHK (d.w.z. de toets F2) om de keuze te wijzigen.
- Druk op de pijltoets naar links ◄ om de optie *_Beep* te selecteren. Gebruik de softmenutoets ✓CHK (d.w.z. de toets F2) om de keuze te wijzigen.
  Druk op de softmenutoets OK F6 om de bewerking te voltooien.

CAS-instellingen selecteren

CAS staat voor *C*omputer *A*lgebraic *S*ystem. Dit is het wiskundige hart van de rekenmachine waar de symbolisch wiskundige bewerkingen en functies geprogrammeerd en uitgevoerd worden. Het CAS biedt een aantal instellingen die aangepast kunnen worden in overeenstemming met de gewenste bewerking. Deze instellingen zijn:

- De standaard onafhankelijke variabel
- De numerieke modus versus symbolische modus
- De Benaderingsmodus versus Exacte modus
- De wijdlopige modus versus niet wijdlopige modus
- Stap-voor-stap modus voor bewerkingen
- Toenemende macht-opmaak voor polynomen
- Rigoureuze modus
- Vereenvoudiging van niet rationele uitdrukkingen

Raadpleeg Annex C voor informatie over de selectie van CAS-instellingen.

Beeldschermmodi selecteren

Het beeldscherm van de rekenmachine kan naar wens worden aangepast door verschillende beeldschermmodi te selecteren. Zo krijgt u de mogelijke beeldscherminstellingen te zien:

- Druk eerst op de toets MODE om het invoervenster CALCULATOR MODES te activeren. Druk in het invoervenster CALCULATOR MODES op de softmenutoets DISP (F4) om het invoervenster DISPLAY MODES weer te geven.

- Met de pijltjestoetsen kunt u door de vele opties van het invoervenster DISPLAY MODES navigeren: ◀ ▶ ▼ ▲.
- Als u een van de bovenstaande aan te vinken instellingen wilt selecteren of deselecteren, moet u het onderliggende streepje voor de gewenste

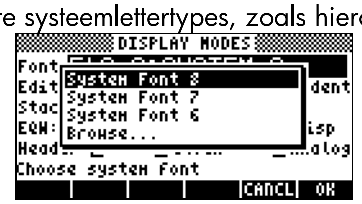
optie selecteren en op de softmenutoets ✓CHK drukken totdat u de gewenste instelling krijgt. Als er een optie is geselecteerd, verschijnt er een vinkje op het onderliggende streepje (bijvoorbeeld de bovenstaande optie *Textbook* in de *Stapelgeheugen*:-regel). De ongeselecteerde opties hebben geen vinkje op het onderliggende streepje voor de gewenste optie (bijvoorbeeld de bovenstaande opties *_Small, _Full page,* en *_Indent*) in de bovenstaande *Edit:*-regel)..

- Als u het lettertype voor het beeldscherm wilt selecteren, markeert u het veld voor de optie *Font:* in het invoerveld DISPLAY MODES en drukt u op de softmenutoets CHOOS (F2).
- Druk op de softmenutoets OK als u alle gewenste opties in het invoervenster DISPLAY MODES heeft geselecteerd en gedeselecteerd. U keert nu terug naar het invoervenster CALCULATOR MODES. Druk nogmaals op de softmenutoets OK om weer terug te keren naar het normale rekenmachinebeeldscherm.

Lettertype van het beeldscherm selecteren

Het wijzigen van het lettertype van het beeldscherm staat u toe de rekenmachine naar uw eigen voorkeur te wijzigen en haar een persoonlijk aspect te geven. Door het gebruik van een 6-pixel lettertype bijvoorbeeld, kunt u tot 9 stapelgeheugenniveaus zichtbaar maken! Volg deze instructies voor het selecteren van het lettertype van uw beeldscherm:

Druk eerst op de toets MODE om het invoerscherm CALCULATOR MODES te activeren. Druk daarna in het invoerscherm CALCULATOR MODES op de softmenutoets DISP (F4) zodat het invoerscherm DISPLAY MODES wordt getoond. Het *Font:*-veld wordt gemarkeerd en de optie *Ft8_0:system 8* wordt geselecteerd. Dit is de standaardwaarde van het lettertype van het beeldscherm. Door op de softmenutoets CHOOS (F2) te drukken verschijnt er een lijst van beschikbare systeemlettertypes, zoals hieronder wordt getoond:



De beschikbare opties zijn drie standaard *systeemlettertypes* (grootte *8, 7* en 6) en de optie *Browse...* Met de optie kunt u door het geheugen van de rekenmachine bladeren voor aanvullende lettertypes die u eventueel aangemaakt (zie Hoofdstuk 23) of gedownload heeft in de rekenmachine.

Oefen in het wijzigen van de lettertypes van het beeldscherm naar de groottes 7 en 6. Druk op de softmenutoets OK om de keuze uit te voeren. Wanneer een lettertype keuze gedaan is Druk op de softmenutoets OK om naar het invoerscherm CALCULATOR MODES terug te keren wanneer de keuze is gemaakt. Om nu naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren, drukt u opnieuw op de softmenutoets OK en bekijk hoe het beeldscherm van het stapelgeheugen wijzigt in het andere lettertype.

Eigenschappen van de regeleditor selecteren

Druk eerst op de toets MODE om het invoervenster REKENMACHINE MODI te activeren. Druk in het invoervenster REKENMACHINE MODI op de softmenutoets DISP (F4) om het invoervenster BEELDSCHERM MODI weer te geven. Druk een keer op de toets pijltje omlaag, ▼, om naar de *Edit*-regel te gaan. In deze regel staan drie eigenschappen die kunnen worden aangepast. Als deze eigenschappen zijn geselecteerd (aangevinkt), worden de volgende effecten actief:

_Small	Het lettertype wordt gewijzigd naar klein
_Full page	De cursor wordt aan het eind van de regel geplaatst
_Indent	Automatische inspringing van de cursor bij een regelterugloop wordt ingevoerd

In Hoofdstuk 2 van deze handleiding vindt u aanwijzingen over het gebruik van de regeleditor.

Eigenschappen van het stapelgeheugen selecteren

Druk eerst op de toets MODE om het invoervenster REKENMACHINE MODI te activeren. Druk in het invoervenster REKENMACHINE MODI op de softmenutoets DISP (F4) om het invoervenster BEELDSCHERM MODI weer te geven. Druk een keer op de toets pijltje omlaag, ▼, om naar de *Edit*-regel te gaan. In deze regel staan drie eigenschappen die kunnen worden aangepast. Als deze eigenschappen zijn geselecteerd (aangevinkt), worden de volgende effecten actief:

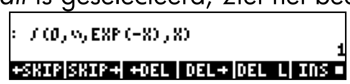
_Small	Het lettertype wordt gewijzigd naar klein. Zo staat er zoveel mogelijk informatie op het scherm. Let op, deze selectie overschrijft het lettertype voor de stapelgeheugen-weergave.
_Textbook	De wiskundige uitdrukkingen worden in grafische wiskundige notatie weergegeven.

Ter illustratie van deze instellingen, zowel in de algebraïsche modus als de RPN-modus, kunt u de vergelijkingenschrijver gebruiken om de volgende definitieve integraal in te voeren:

[→] EQW [→] ∫ [0] [▶] [←] ∞ [▶] [←] e^x [+/-] [X] [▶] [X] [ENTER]

In de algebraïsche modus toont het volgende scherm het resultaat van deze toetsencombinaties terwijl *_Small* en *_Textbook* beide niet zijn geselecteerd:

Als alleen de optie *_Small* is geselecteerd, ziet het beeldscherm er als volgt uit:



Als de optie *_Textbook* is geselecteerd (standaardwaarde), ongeacht of de optie *_Small* is geselecteerd, geeft het beeldscherm het volgende resultaat weer:

Eigenschappen van de vergelijkingenschrijver (EQW) selecteren

Druk eerst op de toets [MODE] om het invoervenster REKENMACHINE MODI te activeren. Druk in het invoervenster REKENMACHINE MODI op de softmenutoets DISP ([F4]) om het invoervenster BEELDSCHERM MODI weer te geven. Druk drie keer op de toets pijltje omlaag, [▼], om naar de regel *EQW* (Vergelijkingenschrijver) te gaan. In deze regel staan twee eigenschappen die kunnen worden aangepast. Als deze eigenschappen zijn geselecteerd (aangevinkt), worden de volgende effecten actief:

_Small	De grootte van het lettertype wordt gewijzigd naar klein tijdens het gebruik van de vergelijkingeneditor
_Small Stack Disp	Een klein lettertype wordt in het stapelgeheugen weergegeven na het gebruik van de vergelijkingeneditor

Gedetailleerde instructies over het gebruik van de equatie editor (EQW) zijn in een ander gedeelte van deze handleiding te vinden.

In het bovenstaande voorbeeld van de integraal $\int_0^{\infty} e^{-X}\,dX$, krijgt u het volgende resultaat als u *_Small Stack Disp* selecteert in de *EQW*-regel van het invoervenster DISPLAY MODES:

De grootte van de kop selecteren

Druk eerst op de toets MODE om het invoerscherm CALCULATOR MODES te activeren. Druk daarna in het invoerscherm CALCULATOR MODES op de softmenutoets DISP (F4) zodat het invoerscherm DISPLAY MODES wordt getoond. Druk vier keer op de pijltoets naar omlaag, ▼, om naar de regel *Header* te gaan. De waarde 2 wordt standaard toegekend aan het veld *Header*. Dit betekent dat het bovenste gedeelte in het beeldscherm twee regels bevat, de eerste toont de huidige instellingen van de rekenmachine en de tweede toont de huidige subdirectory in het geheugen van de rekenmachine (deze regels zijn al eerder in deze handleiding beschreven). De gebruiker kan kiezen om deze instelling naar *1* of *0* te wijzigen om het aantal kopregels in het beeldscherm te verminderen.

Het beeldscherm van de klok selecteren

Druk eerst op de toets MODE om het invoerscherm CALCULATOR MODES te activeren. Druk daarna in het invoerscherm CALCULATOR MODES op de softmenutoets DISP (F4) zodat het invoerscherm DISPLAY MODES wordt getoond. Druk vier keer op de pijltoets naar omlaag, ▼, om naar de regel

Header te gaan. Het *Header*-veld wordt gemarkeerd. Druk op de pijltoets naar rechts (▶), om een markering te plaatsen op het onderliggende streepje voor de opties _*Clock* of _*Analog*. Gebruik de softmenutoets ✓CHK totdat de gewenste instelling geselecteerd is. Als de optie _*Clock* geselecteerd is, worden de tijd en de datum in de rechterbovenhoek in het beeldscherm getoond. Als de optie _*Analog* geselecteerd is, wordt eerder een analoge dan een digitale klok in de rechterbovenhoek in het beeldscherm getoond. Indien de optie _*Clock* niet geselecteerd is, of er is geen kop, of deze is te klein, worden datum en tijd niet in het beeldscherm getoond.

Hoofdstuk 2
Introductie van de rekenmachine

In dit hoofdstuk laten we een aantal basisbewerkingen zien van de rekenmachine, waaronder het gebruik van de vergelijkingenschrijver en de bewerkingen van gegevensobjecten in de rekenmachine. Bestudeer de voorbeelden in dit hoofdstuk om een goed overzicht te krijgen van de capaciteiten van de rekenmachine voor toekomstige toepassingen.

Objecten van de rekenmachine

Elk getal, uitdrukking, letterteken, variabele, enz., dat op de rekenmachine aangemaakt en bewerkt kan worden, wordt aangeduidt als object. Hierna volgt een lijst met de handigste objecttypen.

Reël. Dit object stelt een positief of negatief getal voor, met 12 significante cijfers en een exponent van -499 tot +499. Voorbeelden van reële getallen zijn: 1., -5., 56.41564 1.5E45, -555.74E-95

Wanneer u een reël getal invoert, kunt u de toets EEX gebruiken om de exponent in te voeren en de toets +/- om het teken van de exponent of mantissa te veranderen.

U ziet dat het reële getal ingevoerd dient te worden met een decimale punt, zelfs als het getal geen gedeelte van een breuk heeft. Anders wordt het getal aangezien als een heel getal, hetgeen een verschillend berekeningsobject is. Reële getallen gedragen zich zoals u zou verwachten van een getal in een wiskundige bewerking.

Hele getallen. Deze objecten stellen hele getallen voor (getallen zonder gedeelte met breuk) en zijn oneindig (behalve het geheugen van de rekenmachine). Voorbeelden van hele getallen zijn: 1, 564654112, -413165467354646765465487. U ziet dat deze getallen geen decimale punt hebben.

Vanwege hun opslagformaat, behouden hele getallen in hun berekening altijd volledige precisie. Een bewerking zoals 30/14, met hele getallen, zal 15/7 als resultaat en niet 2.142…. Om een reëel (of drijvende punt) resultaat te forceren, kunt u gebruik maken van de functie →NUM ↱ →NUM .

Hele getallen worden veel gebruikt bij functies die op het CAS zijn gebaseerd, omdat ze zijn ontworpen om een volledige precisie te behouden tijdens hun bewerking.

Indien u de benaderingsmodus (APPROX) in het CAS selecteert (zie bijlage C), worden hele getallen automatisch omgezet in reëele getallen. Indien u niet van plan bent het CAS te gebruiken, kan het een goed idee zijn direct in te stellen op de benaderingsmodus. Raadpleeg bijlage C voor meer informatie.

Het komt vaak voor dat hele en reëele getallen door elkaar gebruikt worden of dat een heel getal in de war wordt gehaald met een reël getal. De rekenmachine spoort zulke verwarringen op en vraagt dan om de benaderingsmodus in te stellen.

Complexe getallen zijn een uitbreiding van reële getallen en bevatten het imaginaire eenheidsnummer, i^2= -1. Een complex getal, bijvoorbeeld *3 + 2i*, wordt in de rekenmachine geschreven als *(3, 2)*.

Complexe getallen kunnen in de Cartesische of polaire modus getoond worden, afhankelijk van de geselecteerde instelling. Complexe getallen worden altijd opgeslagen in de Cartesische modus en alleen het beeldscherm wordt veranderd. Hierdoor kan de rekenmachine gedurende de berekeningen zoveel precisie handhaven als mogelijk is.

Het merendeel van de wiskundige functies werkt met complexe getallen. Het is niet nodig de speciale functie "complex +" te gebruiken om complexe getallen toe te voegen, u kunt dezelfde functie + gebruiken als die voor reëlle of hele getallen.

Vector- en matrix-bewerkingen maken gebruik van objecten type 3, **reële arrays**, en indien nodig, type 4, **complexe arrays**. Objecttype 2, **ketens**, zijn eenvoudigweg regels met tekst (tussen haakjes) aangemaakt met het alfanumerieke toetsenbord.

Een **lijst** is alleen maar een verzameling objecten tussen aanhalingstekens en gescheiden door spaties in de RPN-modus (de spatietoets heeft het label SPC) of door komma's in de algebraïsche modus. De lijsten, objecttype 5, kunnen zeer handig zijn bij het verwerken van verzamelingen van getallen. De kolommen van een tabel bijvoorbeeld kunnen als lijsten ingevoerd worden. Indien gewenst kunt u een tabel invoeren als een matrix x of array.

Het objecttype 8 zijn *programma's in de User RPL-taal*. Dit zijn instructieparen ingesloten tussen de symbolen << >>.

Objecttypes 6 en 7 zijn met programma's verbonden; **Globale** en **Locale namen**, respectievelijk. Deze namen, of variabelen, worden gebruikt voor het opslaan van elk willekeurig objecttype. Het begrip van globale of locale namen hangt samen met de omvang of het bereik van de variabele in een gegeven programma.

Een **algebraïsch object**, of eenvoudigweg, een **algebraïsche** (objecttype 9), is een geldige algebraïsche uitdrukking tussen apostroffen.

Binaire hele getallen, objecttype 10, worden in enkele computertoepassingen gebruikt.

Grafische objecten, objecttype 11, slaan de door de rekenmachine voortgebrachte grafische informatie op.

Gemerkte objecten, objecttype 12, worden in vele programma's gebruikt om resultaten te identificeren. In het gemerkte object: Mean: 23.2 betekent het woord Mean: bijvoorbeeld de tag gebruikt om het getal 23.2 te identificeren als de betekenis van een model.

Eenheidobjecten,, objecttype 13, zijn numerieke waarden met een gekoppelde fysieke eenheid.

Directories, objecttype 15, zijn geheugenlokaties die gebruikt worden voor het organiseren van uw variabelen op een vergelijkbare manier als voor de mappen in een computer.

Bibliotheek, objecttype 16, zijn de programma's die zich in de geheugenpoorten bevinden en toegankelijk zijn in elk willekeurig directory (of sub-directory) in uw rekenmachine. Zij lijken op *built-in functies*, objecttype 18, en *built-in commando's*, objecttype 19, in de wijze waarop ze gebruikt worden.

Het opmaken van uitdrukking in het beeldscherm

In deze paragraaf laten we voorbeelden zien van het opmaken van uitdrukking rechtstreeks in het beeldscherm van de rekenmachine (algebraïsche geheugen of RPN-stapelgeheugen).

Het aanmaken van aritmetische uitdrukking

Voor dit voorbeeld selecteert u de Algebraïsche modus en selecteert u de opmaak *Fix* met drie decimalen voor het beeldscherm. We voeren nu de aritmetische uitdrukking in:

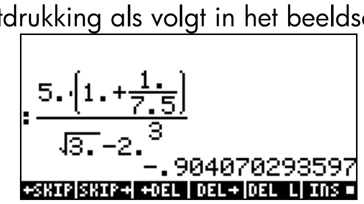
$$5.0 \cdot \frac{1.0 + \frac{1.0}{7.5}}{\sqrt{3.0} - 2.0^3}$$

Voor de invoer van deze uitdrukking maakt u gebruik van de volgende toetsencombinaties:

5 . × ← () 1 . + 1 . ÷ 7 . 5 ▶ ÷
← () √x 3 . − 2 . y^x 3

Hetgeen resulteert in deuitdrukking: 5.*(1.+1./7.5)/(√3.-2.^3).

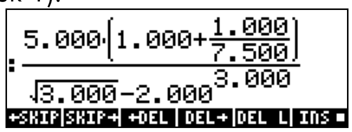
Druk op ENTER om de uitdrukking als volgt in het beeldscherm te krijgen:



U ziet dat als uw CAS ingesteld is op EXACT (zie bijlage C) en de uitdrukking wordt ingevoerd met hele getallen voor hele getalwaarde, het resultaat een symbolische hoeveelheid is, bijvoorbeeld,

5 × ← () 1 + 1 ÷ 7 . 5 ▶ ÷
← () √x 3 − 2 y^x 3

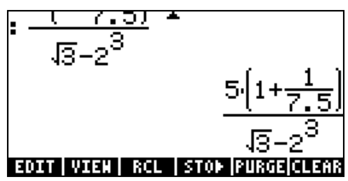
Alvorens een resultaat geproduceerd wordt, wordt u verzocht de Benaderingsmodus in te stellen. Accepteer de verandering teneinde het volgende resultaat te krijgen (weergegeven in de decimale modus Fix met drie decimalen– zie Hoofdstuk 1):



In dit geval, wanneer u de uitdrukking rechtstreeks in het stapelgeheugen invoert, en zodra u op [ENTER] drukt, zal de rekenmachine proberen een waarde voor de uitdrukking te berekenen. Indien de uitdrukking echter tussen haakjes is ingevoerd, reproduceert de rekenmachine de uitdrukking zoals ingevoerd. In het volgende voorbeeld voert u dezelfde uitdrukking in als hierboven, maar dan tussen haakjes. Hiervoor stelt u de modus in op Alg, de CAS-modus op Exact (verwijder markering bij_*Approx*), met het beeldscherm ingesteld op *Textbook*. De toetsencombinaties voor de invoer van de uitdrukking uitdrukkingzijn de volgende:

['] [5] [×] [←] () [1] [+] [1] [÷] [7] [.] [5] [▶] [÷]
[←] () [√x] [3] [−] [2] [y^x] [3] [ENTER]

Het resultaat:



Om de uitdrukking te evalueren, kunnen we de functie EVAL als volgt gebruiken:

[EVAL] [←] ANS [ENTER]

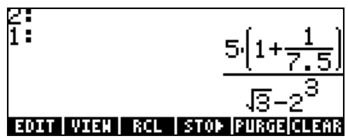
Zoals in het vorige voorbeeld wordt u gevraagd de verandering van de CAS-instelling naar *Approx*. te accepteren. Wanneer dit gedaan is, krijgt u hetzelfde resultaat als tevoren.

Voor een andere wijze van evalueren van de uitdrukking, die eerder tussen haakjes is ingevoerd, dient u te optie [→] →NUM .te gebruiken. Gebruik voor het achterhalen van de uitdrukking uit het bestaande stapelgeheugen gebruik de volgende toetsencombinaties: [◀] [◀] [→] →NUM

Wij voeren nu de bovenvermelde uitdrukking in terwijl de rekenmachine op de RPN-modus is ingesteld. Ook moet het CAS ingesteld zijn op *Exact* en het beeldscherm op *Textbook*. De toetsencombinaties voor de invoer van de uitdrukking zijn dezelfde als die eerder zijn gebruikt:

' 5 × ↰ () 1 + 1 ÷ 7 . 5 ▶ ÷
↰ () √x 3 − 2 yˣ 3 ENTER

Het resultaat:



Druk opnieuw op ENTER zodat er twee kopieën van de uitdrukking beschikbaar blijven in het stapelgeheugen. Eerst evalueert u de uitdrukking met de functie *EVAL* en daarna met de functie *→NUM* . Evalueer de uitdrukking eerst met de functie EVAL. De resulterende uitdrukking is halfsymbolisch in de zin dat het resultaat drijvende punten bevat, evenals een √3. Vervolgens moet u terugkeren naar de stapelgeheugenlokaties en de uitdrukking evalueren met de functie →NUM.

▶ Wisselt stapelgeheugenniveau's 1 en 2 (het commando SWAP)
↱ →NUM Evalueert met de functie →NUM

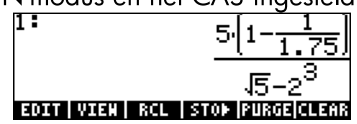
Dit laatste resultaat is zuiver numeriek, zodat de twee resultaten in het stapelgeheugen, alhoewel zij dezelfde uitdrukking voorstellen, verschillend lijken. Om te verifiëren dat dit niet zo is, trekt u de twee waarden af en evalueert dit verschil door middel van de functie EVAL:
− Trekt niveau 1 van niveau 2 af
EVAL Evalueert met de functie EVAL

Het resultaat is nul (0).

Opmerking: vermijd het door elkaar gebruiken van de reële en hele getalgegevens teneinde conflicten in de berekeningen te voorkomen. Voor vele toepassingen in de fysica en techniek, waaronder de numerieke oplossing van vergelijking, statistische toepassingen, enz. werkt de modus APPROX (zie bijlage C) beter. Voor wiskundige toepassingen, bijvoorbeeld calculus, vectoranalyse, algebra, enz. wordt de modus EXACT verkozen. Raak bekend met de bewerkingen in beide modi en leer hoe u van de ene naar de andere modus kunt omschakelen naar gelang de bewerking (zie bijlage C).

Het bewerken van aritmetische uitdrukkingen

Stel dat u de volgende uitdrukking tussen haakjes ingevoerd heeft, met de rekenmachine op de RPN-modus en het CAS ingesteld op EXACT:



in plaats van de bedoelde uitdrukking: $5 \cdot \dfrac{1+\dfrac{1}{7.5}}{\sqrt{3}-2^3}$ heeft u de onjuiste uitdrukking ingevoerd door middel van:

' 5 × ← () 1 + 1 ÷ 1 . 7 5 ▶ ÷ ← ()
√x 5 − 2 yˣ 3 ENTER

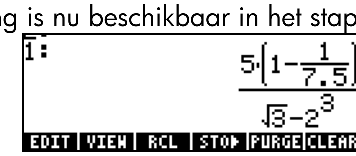
Voor het invoeren van de regeleditor gebruik ← ▼. Het beeldscherm ziet er nu als volgt uit:

De opmaakcursor wordt getoond als een knipperende pijl (naar links) boven het eerste letterteken van de op te maken regel. Aangezien het er in dit geval om gaat enkele lettertekens te verwijderen en ze door andere te vervangen, maakt u gebruik van de pijltoetsen naar links en naar rechts, ◀ ▶, om de cursor naar de gepaste opmaakplaats te bewegen en de wistoets, ◆, om lettertekens te verwijderen.

De volgende toetsencombinaties voltooien het opmaken voor dit geval:

- Druk op de pijltoets naar rechts, ▶, totdat de cursor onmiddellijk rechts van het decimale punt in de term *1.75* staat
- Druk twee keer op de wistoets, ◀, om de lettertekens *1* te wissen.
- Druk één keer op de pijltoets naar rechts, ▶, om de cursor tot rechts van de 7 te bewegen
- Voer een decimale punt in met [.]
- Druk op de pijltoets naar rechts, ▶, totdat de cursor direct rechts van de √*5* staat
- Druk één keer op de wistoets, ◀, om het letterteken *5* uit te wissen
- Type een *3* met [3]
- Druk op [ENTER] om naar het stapelgeheugen terug te keren

De bewerkte uitdrukking is nu beschikbaar in het stapelgeheugen.



Het bewerken van een invoerregel met de rekenmachine in de Alg-modus gebeurt op precies dezelfde manier als in de RPN-modus. Om deze bewering te verifiëren, kunt u dit voorbeeld in de Alg-modus herhalen.

Het aanmaken van algebraïsche uitdrukkingen

Algebraïsche uitdrukkingen bevatten niet alleen getallen maar ook namen van variabelen. Als oefening voert u de volgende algebraïsche uitdrukking in:

$$\frac{2L\sqrt{1+\frac{x}{R}}}{R+y}+2\frac{L}{b}$$

U stelt de modus van de rekenmachine in op Algebraic, het CAS op *Exact* en het beeldscherm op *Textbook*. Gebruik de volgende toetsencombinaties om deze algebraïsche uitdrukking in te voeren:

['] [2] [×] [ALPHA] [L] [×] [√x] [←] [()] [1] [+] [ALPHA] [←] [X] [÷] [ALPHA] [R] [▶] [÷]
[←] [()] [ALPHA] [R] [+] [ALPHA] [←] [Y] [▶] [+] [2] [×] [ALPHA] [L] [÷] [ALPHA] [←] [B]

Druk op ENTER om het volgende resultaat te krijgen:

Het invoeren van deze uitdrukking met de rekenmachine ingesteld op de RPN-modus gebeurt op precies dezelfde manier als die voor deze oefening in de ALG-modus.

Het bewerken van algebraïsche uitdrukkingen

Het bewerken van een algebraïsche uitdrukking met de regeleditor lijkt sterk op dat van een aritmetische uitdrukking (zie oefening boven). Stel dat u de hierboven ingevoerde uitdrukking wilt wijzigen om het volgende te lezen

$$\frac{2L\sqrt{1+\frac{x^2}{R}}}{R+x}+2\sqrt{\frac{L}{b}}$$

Voor het bewerken van deze algebraïsche uitdrukking met de regeleditor ↰ ▼. Hiermee wordt de regeleditor geactiveerd en wordt de te bewerken uitdrukking als volgt weergegeven:

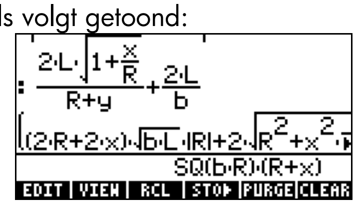
De opmaakcursor wordt getoond als een knipperende pijl (naar links) boven het eerste letterteken van de te bewerken regel. Net zoals in een eerdere oefening over het bewerken van regels, dient u de pijltoetsen naar rechts, naar links, ◀ ▶, te gebruiken, om de cursor naar de juiste opmaakpositie te bewegen en de wistoets, ◆, om lettertekens te wissen.

De volgende toetsaanslagen voltooien het bewerken voor deze oefening:

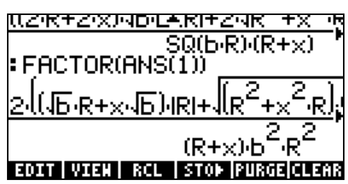
- Druk op de pijltoets naar rechts, ▶, totdat de cursor zich rechts van de *x* bevindt

- Voer [y^x][2] in om macht 2 voor de *x* toe te passen
- Druk op de pijltoets naar rechts, [▶], totdat de cursor zich rechts van de *y* bevindt
- Druk één keer op de wistoets, [◀], om het letterteken *y* te wissen.
- Type [ALPHA][↰][X] in, om een *x* in te voeren
- Druk 4 keer op de pijltoets naar rechts, [▶], om de cursor tot rechts van de * te bewegen
- Voer [√x] in om een vierkantswortelsymbool uit te voeren
- Voer [↰][()] in om een paar haakjes te plaatsen (de haakjes komen in tweetallen)
- Druk één keer op de pijltoets naar rechts, [▶], en één keer op de wistoets, [◀], om het rechterhaakje van het hierboven ingevoegde paar te wissen
- Druk 4 keer op de pijltoets naar rechts, [▶], om de cursor tot rechts van de *b* te bewegen
- Voer [↰][()] in om een tweede paar haakjes te plaatsen
- Druk één keer op de wistoets, [◀], om het linkerhaakje van het hierboven ingevoegde paar te wissen
- Druk op [ENTER] om naar het normale beeldscherm terug te keren.

Het resultaat wordt als volgt getoond:



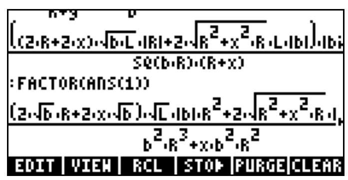
U ziet dat de uitdrukking uitgebreid is om termen in te sluiten zoals |R|, de absolute waarde, en SQ(b·R), het kwadraat van b·R. Indien u wilt zien of u dit resultaat kunt vereenvoudigen, dient u FACTOR(ANS(1)) in de ALG-modus te gebruiken:



- Druk op ⬅ ▼ om de regeleditor opnieuw te activeren. Het resultaat is nu:

- Druk opnieuw op ENTER om naar het normale beeldscherm terug te keren.

Indien u de volledige uitdrukking in het beeldscherm wilt bekijken, kunt u _*Small Stack Disp* in het invoerscherm *DISPLAY MODES* veranderen (zie Hoofdstuk 1). Nadat u deze verandering doorgevoerd heeft, ziet het beeldscherm er als volgt uit:



Opmerking: voor het gebruik van Griekse letters en andere lettertekens in algebraïsche uitdrukkingen gebruikt u het menu CHARS. Dit menu wordt geactiveerd door de toetsencombinatie ➡ CHARS . Raadpleeg bijlage D voor meer informatie.

Het gebruiken van de Vergelijkingenschrijver (EQW) voor het aanmaken van uitdrukkingen

De vergelijkingenschrijver is een buitengewoon krachtig hulpmiddel waarmee u niet alleen een vergelijking kunt invoeren of bekijken, maar waarmee u de hele of een gedeelte van de vergelijking kunt aanpassen en er functies bij kunt gebruiken. met de vergelijkingenschrijver (EQW) kunt u complexe wiskundige bewerkingen uitvoeren, rechtstreeks of in de modus Step/Step, zoals u op papier doet wanneer u bijvoorbeeld rekenkundige problemen oplost.

De Vergelijkingenschrijver wordt geactiveerd met de toetsencombinatie ↱ ↱ _EQW (de derde toets in de vierde rij boven in het toetsenbord). Hetgeen resulteert in het volgende beeldscherm:

De zes softmenutoetsen voor de Vergelijkingenschrijver activeert de volgende functies:

EDIT : hiermee kan de gebruiker een ingang in de regeleditor bewerken (zie bovenstaande voorbeelden)

CURS : Markeert de uitdrukking en voegt er een grafische cursor aan toe.

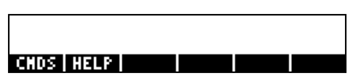
BIG : Indien geselecteerd (selectie wordt weergegeven door het letterteken op het label) is het lettertype in de schrijver het systeemlettertype 8 (het grootste beschikbare lettertype)

EVAL : Hiermee kunt u een uitdrukking, gemarkeerd in het beeldscherm van de Vergelijkingenschrijver, op symbolische of numerieke wijze evalueren (hetzelfde als ↱ EVAL)

FACTO : Hiermee kunt u een uitdrukking, gemarkeerd in het beeldscherm van de Vergelijkingenschrijver, in factoriseren (indien factorisering mogelijk is)

SIMP : Hiermee kunt u een uitdrukking, gemarkeerd in het beeldscherm van de Vergelijkingenschrijver, vereenvoudigen (in zoverre dit in overeenstemming met de algebraïsche regels van het CAS mogelijk is)

Indien u op de toets NXT drukt, verschijnen nog twee softmenuopties, zoals hieronder getoond:



De zes softmenutoetsen voor de Vergelijkingenschrijver activeren de volgende functies:

CMDS : Hiermee kan de verzameling van CAS-commando's geopend worden die in alfabetische volgorde staan. Dit is handig voor het invoegen van CAS-commando's in een beschikbare uitdrukking in de Vergelijkingenschrijver.

HELP : Hiermee wordt de helptekst geactiveerd van het CAS van de rekenmachine voor informatie en voorbeelden van de CAS-commando's. Hieronder volgen enkele voorbeelden voor het gebruik van de Vergelijkingenschrijver.

Het aanmaken van aritmetische uitdrukkingen

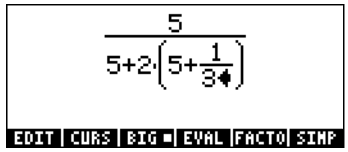
Het invoeren van aritmetische uitdrukkingen in de Vergelijkingenschrijver lijkt sterk op het invoeren in het stapelgeheugen van een tussen haakjes geplaatste aritmetische uitdrukking. Het belangrijkste verschil is dat in de Vergelijkingenschrijver de geproduceerde uitdrukkingen geschreven worden in "textbook" stijl in plaats van een invoer per regel. Indien u dus een deelteken (d.w.z. ÷) in de Vergelijkingenschrijver invoert, wordt er een breuk aangemaakt en wordt de cursor in de teller geplaatst. Om naar de noemer te gaan, moet u de pijltoets omlaag gebruiken. Probeer bijvoorbeeld de volgende toetsencombinatie in het beeldscherm van de Vergelijkingenschrijver: 5 ÷ 5 + 2

Het resultaat is de uitdrukking:

De cursor wordt getoond als een naar links gerichte pijl. De cursor duidt de huidige bewerkingspositie aan. Indien u een lettertype, functienaam of bewerking invoert, wordt het/de desbetreffende letterteken of lettertekens ingevoerd op de plaats van de cursor. Voer bijvoorbeeld met de cursor op de bovenvermelde positie het volgende in:

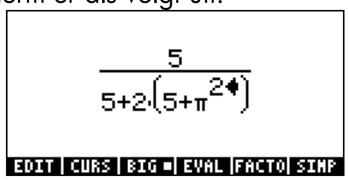
× ↰ () 5 + 1 ÷ 3

De bewerkte uitdrukking ziet er als volgt uit:



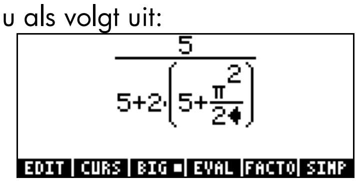
Stel dat u de hoeveelheid tussen haakjes in de noemer (d.w.z. 5+1/3) wilt vervangen door (5+π^2/2). U gebruikt eerst de wistoets (◄) om de huidige 1/3 uitdrukking te wissen en daarna vervangt u als volgt deze breuk door π^2/2: ◄ ◄ ◄ ← π y^x 2

Hierna ziet het beeldscherm er als volgt uit:



Om de noemer *2* in de uitdrukking in te voegen, moet u de volledige π^2 uitdrukking markeren. U kunt dit doen door één keer op de pijltoets naar rechts (▶) te drukken. Nu moet u de volgende toetsencombinatie invoeren: ÷ 2

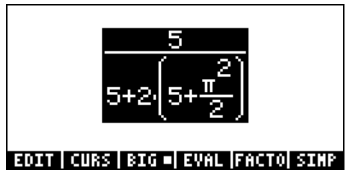
De uitdrukking ziet er nu als volgt uit:



Stel dat u nu de breuk 1/3 aan deze volledige uitdrukking wilt voegen, d.w.z. dat u de volgende uitdrukking wilt invoeren:

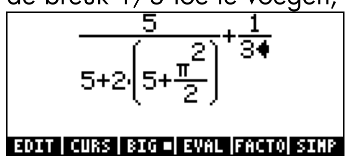
$$\frac{5}{5+2\cdot(5+\frac{\pi^2}{2})}+\frac{1}{3}$$

U moet eerst de gehele eerste term markeren door herhaaldelijk op de pijltoets naar rechts (▶) ofop de pijltoets omhoog (▲) te drukken, totdat de volledige uitdrukking gemarkeerd is, d.w.z. dat u zeven keer moet drukken. Het volgende komt in het beeldscherm te staan:



Opmerking: vanuit de oorspronkelijke positie van de cursor (rechts van de 2 in de noemer van $\pi^2/2$) kunt u de toetsencombinatie ↱ ▲ gebruiken, in de vorm van (↱ ⏶).

Voer wanneer de uitdrukking gemarkeerd wordt, zoals hierboven, + 1 ÷ 3 in om de breuk 1/3 toe te voegen, hetgeen resulteert in:



De uitdrukking in een kleinere grootte weergeven

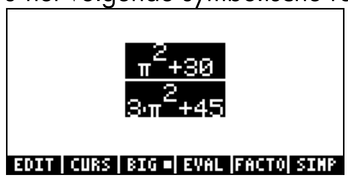
Om de uitdrukking in een kleiner lettertype te tonen (wat handig kan zijn in geval de uitdrukking lang en ingewikkeld is), drukt u gewoon op de softmenutoets BIG F3 . In dit geval, ziet het beeldscherm er als volgt uit:

Druk opnieuw op de softmenutoets BIG F3 om het grotere lettertype te herstellen.

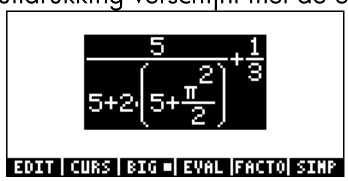
De uitdrukking evalueren

Voor het evalueren van de uitdrukking (of gedeelten van de uitdrukking) in de Vergelijkingenschrijver, moet u het te evalueren gedeelte markeren en op de softmenutoets EVAL F4 drukken.

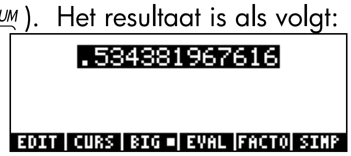
Voor het evalueren van de volledige uitdrukking in deze oefening moet u eerst de volledige uitdrukking markeren door op ↱ ⏶ te drukken. Druk daarna op de softmenutoets EVAL F4 . Indien uw rekenmachine ingesteld is op de CAS-modus Exact CAS-modus (d.w.z. de _*Approx* CAS modus is niet gemarkeerd), dan krijgt u het volgende symbolische resultaat:



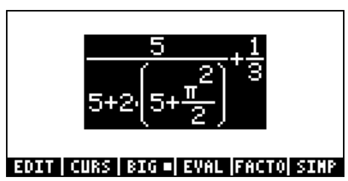
Gebruik de functie UNDO, d.w.z. ↱ UNDO (keyboarded eerste toets in de derde rij boven in het toetsenbord) asl u nu de ongeëvalueerde uitdrukking wit herstellen. De herstelde uitdrukking verschijnt met de eerdere markering:



Indien u een drijvende punt (numerieke) evaluatie wilt, gebruik de functie →*NUM* (d.w.z., ↱ →NUM). Het resultaat is als volgt:



Gebruik opnieuw de functie UNDO (↱ UNDO) om de oorspronkelijke uitdrukking te herstellen:



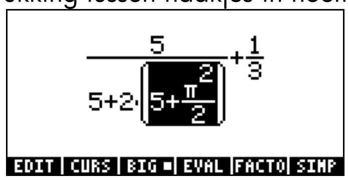
Een subuitdrukking evalueren

Stel dat u alleen de uitdrukking tussen haakjes in de noemer van de eerste breuk in de bovenvermelde uitdrukking wilt evalueren. U moet de pijltoetsen gebruiken om deze speciale subuitdrukking te selecteren. Hieronder volgt een manier om dit te doen:

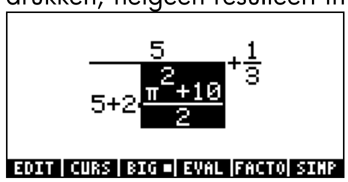
▼ Markeert alleen de eerste breuk

▼ Markeert de teller van de eerste breuk

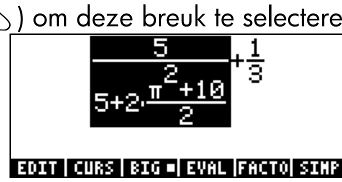
▶ Markeert de noemer van de eerste breuk
▼ Markeert de eerste term in de noemer van de eerste breuk
▶ Markeert de tweede term in de noemer van de eerste breuk
▼ Markeert de eerste factor in de tweede term in de noemer van de eerste breuk
▶ Markeert de uitdrukking tussen haakjes in noemer van de eerste breuk



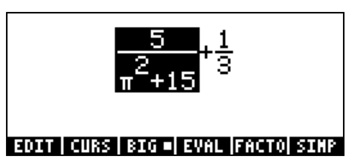
Aangezien dit de subuitdrukking is die wij willen evalueren, kunt u nu op de softmenutoets EVAL F4 drukken, hetgeen resulteert in:



Opnieuw een symbolische evaluatie. Stel dat u nu alleen de breuk wilt evalueren die zich aan de linkerzijde van de breuk bevindt. Druk drie keer op de pijltoets omhoog (▲) om deze breuk te selecteren, hetgeen resulteert in:

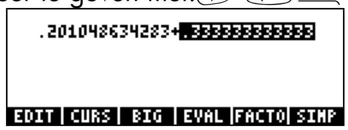


Druk daarna op de softmenutoets EVAL F4 om het volgende in het beeldscherm te krijgen:

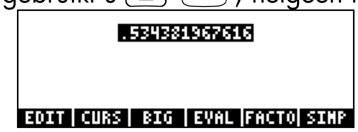


Probeer nu een numerieke evaluatie van deze term. Gebruik ↱ →NUM voor

Laten we het rechtergedeelte van de breuk markeren, een numerieke evaluatie van deze term maken en de som van deze twee decimale waarden in een klein lettertype weer te geven met: ▶ ↱ →NUM F3 Het resultaat:

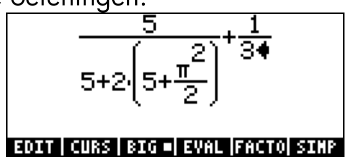


Voor het markeren en evalueren van de uitdrukking in de Vergelijkingenschrijver gebruikt u ▲ F4 , hetgeen resulteert in:

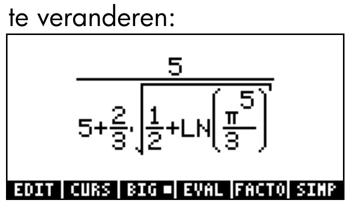


Het bewerken van aritmetische uitdrukkingen

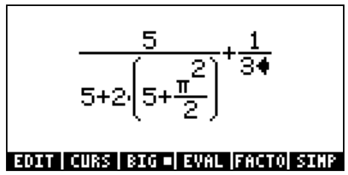
Als oefening worden enkele van de bewerkingsfuncties in de Vergelijkingenschrijver getoond. U begint met het invoeren van de volgende uitdrukking uit de vorige oefeningen:



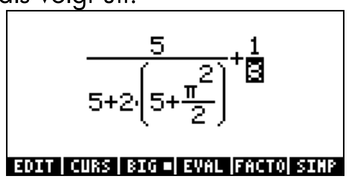
En gebruik de bewerkingsfuncties van de Vergelijkingenschrijver om deze in de volgende uitdrukking te veranderen:



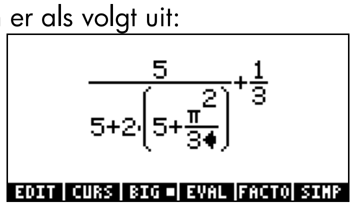
In de vorige oefeningen maakte u gebruik van de pijltoetsen om de subuitdrukkinguitdrukkingen voor de evaluatie te markeren. In dit geval, worden ze gebruikt voor het bewegen van een speciale bewerkingscursor. Nadat u de oorspronkelijke uitdrukking ingevoerd heeft, bevindt de invoercursor (een naar links gerichte pijltoets) zich rechts van de 3 in de noemer van de tweede breuk, zoals hierna getoond:



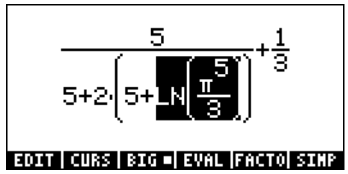
Druk op de pijltoets omlaag (▼) om de bewerkingscursor in te activeren. Nu ziet het beeldscherm er als volgt uit:



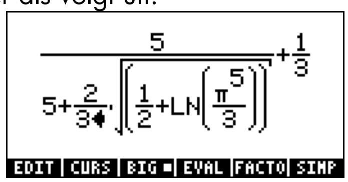
Door gebruik te maken van de pijltoets naar links (◄) kunt u de cursor in de gangbare richting naar links verplaatsen, maar u kunt bij ieder specifiek element van de uitdrukking stoppen. We gaan ervan uit dat u bijvoorbeeld, eerst de uitdrukking $\pi^2/2$ wilt veranderen in de uitdrukking *LN*($\pi^5/3$) . Druk met de cursor geactiveerd zoals hierboven getoond, twee keer op de pijltoets naar links (◄) om de 2 in de noemer van $\pi^2/2$. te markeren. Druk daarna één keer op de wistoets (⇐) om de cursor onder de cursor te wissen. Druk opnieuw op ⇐ om de 2 te wissen en daarna op 3 om een 3 in te voeren. Nu ziet het beeldscherm er als volgt uit:



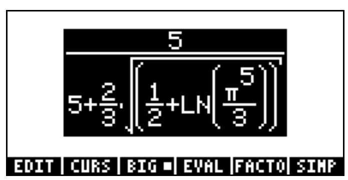
Druk vervolgens op de pijltoets omlaag (▼) om de bewerkingscursor te activeren die de 3 in de noemer van $\pi^2/3$ markeert. Druk één keer op de pijltoets naar links (◄) om de exponent 2 in de uitdrukking $\pi^2/3$. te markeren. Druk daarna één keer op de wistoets (⇐) om de cursor onder de invoegcursor te wissen. Druk opnieuw op ⇐ om de 2 uit te wissen, en daarna op de 5 om een 5 in te voeren. Druk drie keer op de pijltoets omhoog (▲) om de uitdrukking $\pi^5/3$. te markeren. Voer vervolgens ↱ LN in om de functie *LN* op deze uitdrukking toe te passen. Nu ziet het beeldscherm er als volgt uit:



Vervolgens verandert u de 5 tussen de haakjes in een ½ met de volgende toetsencombinaties: ◄ ⇐ ⇐ 1 ÷ 2
Daarna markeert u de volledige uitdrukking tussen haakjes en voegt u het vierkantswortelsymbool in met: ▲ ▲ ▲ ▲ √x
Vervolgens verandert u de 2 vóór de haakjes in de noemer in 2/3 met: ◄ ⇐ ⇐ 2 ÷ 3
Nu ziet de uitdrukking er als volgt uit:



De laatste stap is het verwijderen van 1/3 rechts van de uitdrukking. Dit wordt bereikt met: ▲ ▲ ▲ ▲ ▲ ► ⇐ ⇐ ⇐ ⇐ ⇐
De laatste versie is:



In het kort: voor het opmaken van een uitdrukking in de Vergelijkingenschrijver moet u de pijltoetsen (◄ ► ▲ ▼) gebruiken om de uitdrukking te markeren waarop de functies worden toegepast (bijvoorbeeld de *LN* en de vierkantswortels in de voorgaande uitdrukking). Gebruik herhaaldelijk de pijltoets omlaag (▼) op elke willekeurige positie om de bewerkingscursor te activeren. Maak in deze modus gebruik van de pijltoetsen naar links of naar rechts (◄ ►) om in een uitdrukking van term naar term te bewegen. Gebruik op een te bewerken positie de wistoets (⇐) om de cursor in te activeren en de uitdrukking te bewerken.

Het aanmaken van algebraïsche uitdrukkingen

Een algebraïsche uitdrukking lijkt sterk op een aritmetische uitdrukking, met uitzondering dat het Engelse en Griekse letters kan bevatten. Derhalve wordt een algebraïsche uitdrukking op dezelfde manier aangemaakt als een aritmetische uitdrukking, met uitzondering dat het alfabetische toetsenbord gebruikt kan worden.

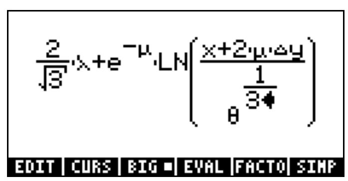
Ter verduidelijking van het gebruik van de Vergelijkingenschrijver voor het invoeren van een algebraïsche vergelijking maken we gebruik van het volgende voorbeeld. Stel dat u de volgende uitdrukking wilt invoeren:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\lambda + e^{-\mu} \cdot LN\left(\frac{x+2\mu\cdot\Delta y}{\theta^{1/3}}\right)$$

Gebruik de volgende toetsencombinaties:

[2] [÷] [√x] [3] [▶] [▶] [×] [ALPHA] [↱] [N] [+] [↰] eˣ [+/-] [ALPHA] [↱] [M]
[▶] [▶] [×] [↱] LN [ALPHA] [↰] [X] [+] [2] [×] [ALPHA] [↱] [M] [×] [ALPHA] [↱] [C]
[ALPHA] [↰] [Y] [▲] [▲] [▲] [÷] [ALPHA] [↱] [T] [yˣ] [1] [÷] [3]

Hetgeen resulteert in:



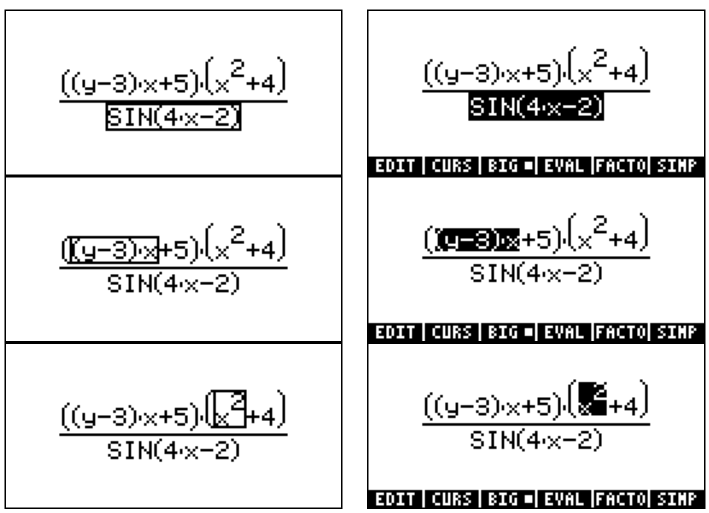
In dit voorbeeld is gebruik gemaakt van verschillende kleine Engelse letters, bijvoorbeeld x ([ALPHA] [↰] [X]), verschillende Griekse letters, bijvoorbeeld λ ([ALPHA] [↱] [N]), en zelfs een combinatie van Griekse en Engelse letters, nl., Δy ([ALPHA] [↱] [C] [ALPHA] [↰] [Y]). Voor het invoeren van een kleine Engelse letter moet u de volgende combinatie gebruiken: [ALPHA] [↰] gevolgd door de letter die u wilt invoeren. U kunt ook altijd speciale lettertekens kopiëren door het menu CHARS ([↱] CHARS) te gebruiken in geval u de daarvoor vereiste toetsencombinatie niet uit het hoofd wilt leren. Eerder werd een lijst gegeven van de meest gebruikte toetsencombinaties [ALPHA] [↱].

De uitdrukkingstructuur

De uitdrukkingstructuur is een diagram dat laat zien hoe de Vergelijkingenschrijver een uitdrukking omzet. In bijlage E wordt een gedetailleerd voorbeeld van een structuur getoond.

De functie CURS

De functie CURS (CURS) in het menu van de Vergelijkingsschrijver (de toets F2) zet het beeldscherm in een grafisch beeldscherm om en produceert een grafische cursor die u kunt bewegen met de pijltoetsen (◄►▲▼) om subuitdrukkingen te selecteren. De subuitdrukking geselecteerd met CURS wordt in een kader in het grafische beeldscherm getoond. Nadat u een subuitdrukking geselecteerd heeft, kunt op ENTER drukken zodat de geselecteerde subuitdrukking in de Vergelijkingenschrijver getoond wordt. De volgende afbeeldingen geven verschillende geselecteerde subuitdrukkingen en het bijbehorende beeldscherm van de Vergelijkingsschrijver weer na het indrukken van ENTER.

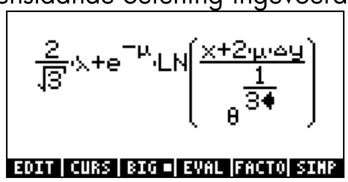


Het bewerken van algebraïsche uitdrukkingen

Het bewerken van algebraïsche vergelijkingen wordt op dezelfde manier uitgevoerd als bij het bewerken van algebraïsche vergelijkingen. Dat wil zeggen:

- Gebruik de pijltoetsen (◄ ► ▲ ▼) om uitdrukkingen te markeren
- Gebruik herhaaldelijk de pijltoets omlaag (▼) om de bewerkingscursor te activeren. Maak in deze modus gebruik van de pijltoetsen naar links of naar rechts (◄ ►) om in een uitdrukking van term naar term te bewegen.
- Wanneer u de bewerken positie komt, gebruikt u de wistoets (⇐) om de cursor te activeren en om de uitdrukking te bewerken.

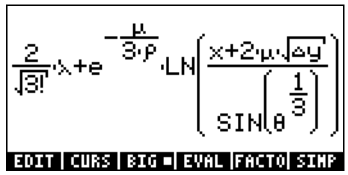
Om de bewerkingscursor in actie te zien, beginnen we met de algebraïsche uitdrukking die u in bovenstaande oefening ingevoerd heeft:



Druk op de pijltoets omlaag (▼) op de huidige positie om de bewerkingscursor te activeren. De 3 in de exponent van θ wordt gemarkeerd. Maak gebruik van de pijltoets naar links, ◄, om in de uitdrukking van element naar element te bewegen. De volgorde van selectie van de bewerkingscursor in dit voorbeeld is (druk herhaaldelijk de pijltoets ◄):

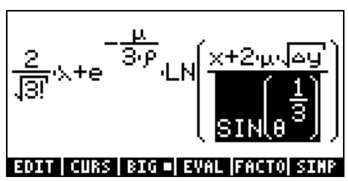
1. De 1 in de 1/3 exponent
2. θ
3. Δy
4. μ
5. 2
6. x
7. μ in de exponentiële functie
8. λ
9. 3 in de √3 term
10. de 2 in de 2/√3 breuk

Op elk willekeurig punt kunt u de bewerkingscursor veranderen in de invoegcursor door op de wistoets (⇐) te drukken. We maken nu gebruik van deze twee cursors (de bewerkingscursor en de invoegcursor) om de huidige uitdrukking te veranderen in:



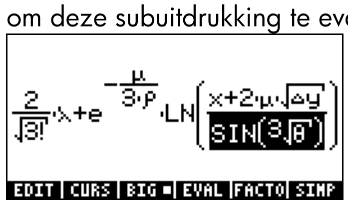
Indien u de bovenstaandeoefening gevolgd heeft, moet de bewerkingscursor op het getal 2 in de eerste factor van de uitdrukking staan. Voer deze toetsencombinaties uit om de uitdrukking te bewerken:

▶ ALPHA ↱ 2	Voegt de faculteit voor de 3 in de vierkantswortel in (bij het invoeren van de faculteit verandert de cursor in de selectiecursor)
▼▼▶▶	Selecteert de μ in de exponentiële functie
÷ 3 × ALPHA ↱ F	Wijzigt het argument van exponentiële functie
▶▶▶▶	Selecteert Δy
√x	Plaatst een vierkantswortelsymbool op Δy (deze bewerking verandert ook de cursor in de selectiecursor)
▼▼▶▲▲ SIN	Selecteert $\theta^{1/3}$ en voert de functie SIN in Hetgeen resulteert in het volgende beeldscherm:

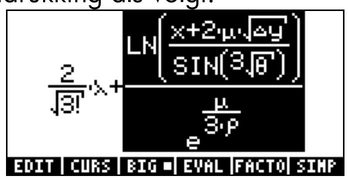


Het evalueren van een subuitdrukking

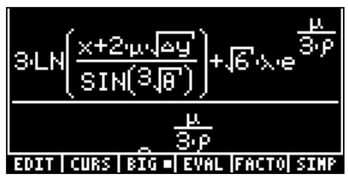
Aangezien de subuitdrukking $SIN(\theta^{1/3})$ al gemarkeerd is, drukt u nu op de softmenutoets EVAL F4 om deze subuitdrukking te evalueren. Het resultaat is:



Enkele algebraïsche uitdrukkingen kunnen niet meer vereenvoudigd worden. Gebruik de volgende toetsencombinatie: ▲ F4 . U zult zien dat alleen het hele argument van de functie *LN* gemarkeerd wordt. Dit komt omdat de uitdrukking, overeenkomstig de CAS-regels,niet meer geëvalueerd of vereenvoudigd kan worden . Gebruik de toetsencombinatie: [▲] [F4] dan ziet u dat de uitdrukking weer niet wordt veranderd. Door [▲] [F4] weer te gebruiken, wijzigt de uitdrukking als volgt:



Een volgende toepassing van de toetsencombinatie [▲] [F4] veroorzaakt meer wijzigingen:

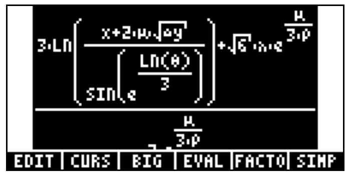


Deze uitdrukking past niet in het beeldscherm van de Vergelijkingenschrijver. U kunt de gehele uitdrukking zien door een kleiner lettertype te gebruiken. Druk op de softmenutoets BIG [F3] om het volgende resultaat te krijgen:

Zelfs met het grotere lettertype is het mogelijk door de hele uitdrukking te bewegen met de bewerkingscursor. Probeer de volgende toetsencombinatie: [F3] [▼] [▼] [▼] [▼], om de bewerkingscursor op factor 3 in de eerste term van de teller te plaatsen. Druk daarna op de pijltoets naar rechts, [▶], om door de uitdrukking te bewegen.

Het vereenvoudigen van een uitdrukking:

Druk op de softmenutoets BIG [F3], zodat het beeldscherm weer getoond wordt zoals in de vorige afbeelding (zie hierboven). Druk nu op de softmenutoets SIMP [F3] ,om te zien of het mogelijk is deze uitdrukking te vereenvoudigen zoals door de Vergelijkingenschrijver wordt weergegeven. Hetgeen resulteert in het volgende beeldscherm:



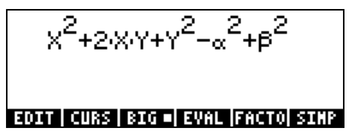
Dit beeldscherm toont het argument van de functie SIN, d.w.z. $\sqrt[3]{\theta}$, gewijzigd in $e^{\frac{LN(\theta)}{3}}$. Dit lijkt misschien niet op een vereenvoudiging, maar het is er wel degelijk een in de zin dat de kubieke wortelfunctie vervangen is door de inverse functies exp-LN.

Het factoriseren van een uitdrukking:

In deze oefening probeert u een polynoomuitdrukking te factoriseren. Druk op de toets [ENTER] om verder te gaan met de vorige oefening . Activeer de Vergelijkingenschrijver opnieuw met [↱] EQW . voer de volgende vergelijking in:

[X] [Y^x] [2] [▶] [+] [2] [×] [X] [×] [ALPHA] [Y] [+] [ALPHA] [Y] [Y^x] [2] [▶] [−]
[ALPHA] [↱] [A] [Y^x] [2] [▶] [▶] [+] [ALPHA] [↱] [B] [Y^x] [2]

hetgeen resulteert in:



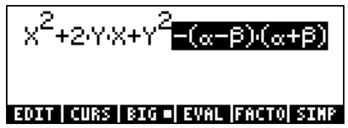
Selecteer nu de eerste 3 termen in de uitdrukking en probeer deze subuitdrukking te factoriseren: [↱] [▲] [▼] [↱] [▶] [↱] [▶] . Het resultaat:

Druk nu op de softmenutoets FACTO om het volgende te krijgen

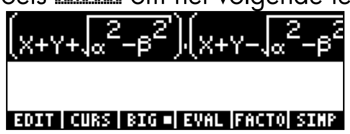
Druk op [↱] UNDO om de oorspronkelijke uitdrukking te herstellen. Voer vervolgens de volgende toetsencombinatie uit:

[▼] [▼] [▼] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [▲] [▲] [▲] [↱] [▶] om de laatste twee termen in de uitdrukking te selecteren, d.w.z.

Druk nu op de softmenutoets FACTO om het volgende te krijgen



Druk op ↱ UNDO om de oorspronkelijke uitdrukking te herstellen. Selecteer nu de gehele uitdrukking door één keer op de pijltoets omhoog (▲) te drukken. En druk op de softmenutoets FACTO om het volgende te krijgen

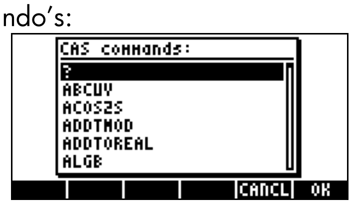


Druk op ↱ UNDO om de oorspronkelijke uitdrukking te herstellen.

Opmerking: Door op de softmenutoetsen EVAL of SIMP te drukken, terwijl de volledige oorspronkelijke uitdrukking geselecteerd is, wordt de volgende vereenvoudiging van de uitdrukking gegeven:

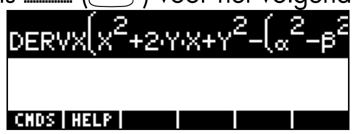
Het gebruiken van de menutoets CMDS

Druk op de toets NXT voor de softmenutoetsen CMDS en HELP , terwijl de oorspronkelijke in de vorige oefening gebruikte polynoomuitdrukking nog steeds geselecteerd is. Deze twee commando's horen bij het tweede gedeelte van het softmenu in de Vergelijkingenschrijver. Probeer dit voorbeeld als toepassing van de softmenutoets CMDS: Druk op de softmenutoets CMDS voor de lijst van CAS-commando's:

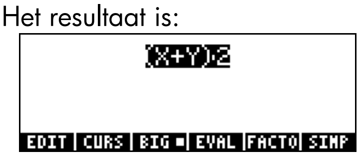


Selecteer vervolgens het commando DERVX (de afleiding met betrekking tot de variabele X, de huidige onafhankelijke CAS-variabele) met:
ALPHA D ▼ ▼ ▼ Het commando DERVX wordt nu geselecteerd:

Druk op de softmenutoets OK (F6) voor het volgende beeldscherm:

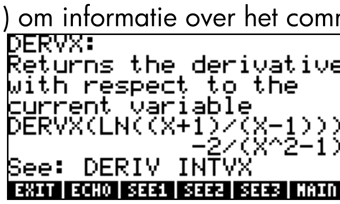


Druk vervolgens op de toets NXT voor het oorspronkelijke menu van de Vergelijkingenschrijver en druk op de softmenutoets EVAL (F4) om deze afleiding te evalueren. Het resultaat is:



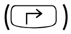
Het menu HELP gebruiken

Druk op de toets NXT voor de softmenutoetsen CMDS en HELP . Druk op de softmenutoets HELP voor de lijst van CAS-commando's. Druk vervolgens op ALPHA D ▼ ▼ ▼ om het commando DERVX te selecteren. Druk op de softmenutoets OK (F6) om informatie over het commando DERVX te krijgen:



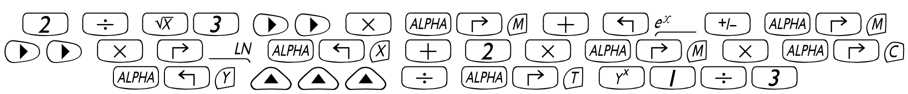
In Hoofdstuk 1 wordt het gebruik van de helptekst voor het CAS uitvoerig behandeld. Druk op de softmenutoets EXIT om naar de Vergelijkingenschrijver terug te keren. Druk op de toets ENTER om de Vergelijkingenschrijver te verlaten.

De opmaakfuncties BEGIN, END, COPY, CUT en PASTE gebruiken

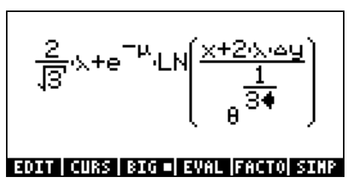
Om bewerkingen eenvoudiger te maken, hetzij met de Vergelijkingenschrijver, hetzijin het stapelgeheugen, biedt de rekenmachine vijf opmaakfuncties, nl. BEGIN, END, COPY, CUT en PASTE, die geactiveerd worden door de shifttoets naar rechts () te combineren met de toetsen (2,1), (2,2), (3,1), (3,2) en (3,3), respectievelijk. Deze toetsen bevinden zich in helemaal links in rijen 2 en 3. De werking van deze opmaakfuncties is als volgt:

BEGIN: geeft het begin aan van een reeks lettertypes aan voor het bewerken
END: geeft het einde aan van een reeks lettertypes aan voor het bewerken
COPY: kopieert de reeks lettertypes geselecteerd door BEGIN en END
CUT: knipt de reeks van lettertypes geselecteerd door BEGIN en END
PASTE: plakt een reeks van lettertypes, die voorafgaand gekopieerd of geknipt werden in de huidige cursorpositie.

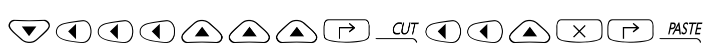
Activeer voor een voorbeeld de Vergelijkingenschrijver en voer de volgende uitdrukking (gebruikt in een vorige oefening) in:



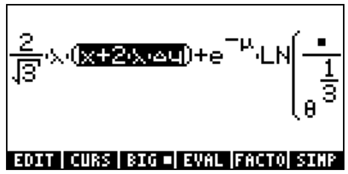
De oorspronkelijke uitdrukking is de volgende:



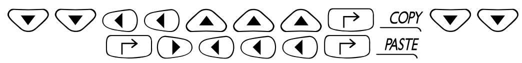
U wilt de subuitdrukking $x+2\cdot\lambda\cdot\Delta y$ van het argument van de functie *LN* verwijderen en deze verplaatsen naar de rechterzijde van de λ in de eerste term. Hier is een mogelijke methode:

: 

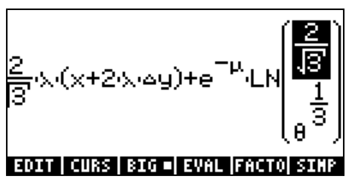
De gewijzigde uitdrukking ziet er als volgt uit:



Vervolgens kopieert u de breuk $2/\sqrt{3}$ van de factor helemaal links in de uitdrukking en plaatst deze in de teller van het argument voor de functie LN. Voer de volgende toetsencombinaties uit:

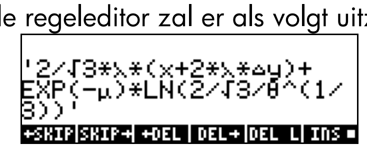


Het resulterende beeldscherm is als volgt:

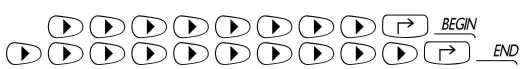


De functies BEGIN en END zijn niet nodig als u in de Vergelijkingenschrijver werkt, aangezien u reeksen van lettertypes kunt selecteren met de pijltoetsen. De functies BEGIN en END zijn handiger wanneer u een uitdrukking met de regeleditor bewerkt. Laten we bijvoorbeeld de uitdrukking $x+2\cdot\lambda\cdot\Delta y$ van deze uitdrukking selecteren met de regeleditor in de Vergelijkingenschrijver en wel als volgt:

Het beeldscherm van de regeleditor zal er als volgt uitzien:



Voer om de bedoelde subuitdrukking te selecteren de volgende toetsencombinaties uit:

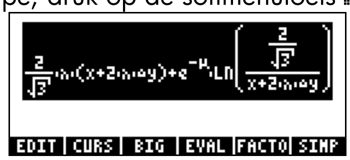


Op het beeldscherm verschijnt gemarkeerd de benodigde subuitdrukking:

Nu kan deze uitdrukking als volgt gekopieerd en in de noemer van het LN-argument geplaatst worden: ↱ COPY ▶▶ … (27 keer) … ▶
◀◀ … (9 keer) … ◀ ↱ PASTE

De regeleditor ziet er nu als volgt uit:

Door op ENTER te drukken wordt de uitdrukking in de Vergelijkingenschrijver getoond (in klein lettertype, druk op de softmenutoets BIG F3):



Druk op de ENTER toets om de Vergelijkingenschrijver te verlaten.

Het aanmaken en bewerken van optellingen, afleidingen en integralen

Optellingen, afleidingen en integralen worden normaal gebruikt voor berekeningen, kansberekening en statistische toepassingen. Deze sectie toont enkele voorbeelden van bewerkingen die zijn uitgevoerd met de Vergelijkingenschrijver. Gebruik de ALG-modu.

Optellingen

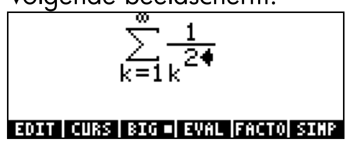
De Vergelijkingenschrijver wordt gebruikt om de volgende optelling in te voeren:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Druk op [↱] EQW om de Vergelijkingenschrijver te activeren. Druk daarna op [↱] Σ om de operator voor het optellen in te voeren. U ziet dat de operator wanneer het in de Vergelijkingenschrijver wordt ingevoerd, invoerposities verschaft voor de index van de optelling evenals voor de op te tellen hoeveelheid. Gebruik de volgende toetsencombinatie voor het invullen van deze invoerposities:

[ALPHA] [↰] [K] [▶] [1] [▶] [↰] ∞ [▶] [1] [÷] [ALPHA] [↰] [K] [y^x] [2]

Hetgeen resulteert in het volgende beeldscherm:

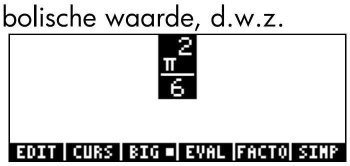


Druk op [↱] [▲] en de softmenutoets [F1] om de bijbehorende uitdrukking in de regeleditor te visualiseren :

Deze uitdrukking staat in algemene vorm van een optelling die rechtstreeks is ingevoerd in het stapelgeheugen of de regeleditor:

Σ(*index = begin_waarde, eind_waarde, opteluitdrukking*)

Druk op de toets [ENTER] om naar de Vergelijkingenschrijver terug te keren. Het resulterende beeldscherm is echter niet de optelling die u heeft ingevoerd, maar bestaat uit de symbolische waarde, d.w.z.



Druk op [↱] UNDO om de optelling te zien. Om de optelling opnieuw te evalueren, kunt u de softmenutoets [F4] gebruiken. Dit laat opnieuw zien dat

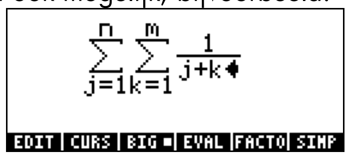
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

u de Vergelijkingsschrijver kunt gebruiken om het volgende te evalueren

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty .$$

Van deze optelling (stelt een oneindige reeks voor) wordt gezegd dat hij divergerend is.

Dubbele optellingen zijn ook mogelijk, bijvoorbeeld:



Afleidingen

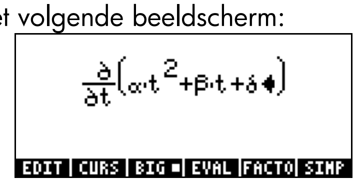
De Vergelijkingenschrijver wordt gebruikt om de volgende afleiding in te voeren:

$$\frac{d}{dt}(\alpha \cdot t^2 + \beta \cdot t + \delta)$$

Druk op [↱] EQW om de Vergelijkingenschrijver te activeren. Druk daarna op [↱] ∂ om het (gedeeltelijke) afleidingsteken in te voeren. U ziet dat het signaal wanneer het in de Vergelijkingenschrijver wordt ingevoerd, de invoerposities biedt voor het differentiëren van de uitdrukking en de variabele van differentiatie. Gebruik de volgende toetsencombinaties om deze invoerposities in te vullen:

[ALPHA][↰][T][▶][ALPHA][↱][A][×][ALPHA][↰][T][Y^x][2]
[▶][▶][+][ALPHA][↱][B][×][ALPHA][↰][T][+][ALPHA][↱][D]

Hetgeen resulteert in het volgende beeldscherm:

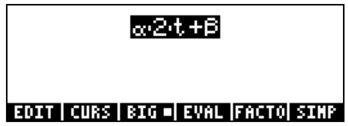


Druk op [↱][▲] en de softmenutoets [F1] om de bijbehorende uitdrukking in de regeleditor te visualiseren:

Dit duidt erop dat de algemene uitdrukking voor een afleiding in de regeleditor of in het stapelgeheugen de volgende is:

∂*variabele*(*functie van variabelen*)

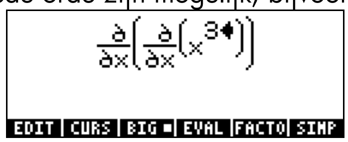
Druk op de toets [ENTER] om naar de Vergelijkingenschrijver terug te keren. Het resulterende beeldscherm is echter niet de afleiding dat u heeft ingevoerd, maar bestaat uit de symbolische waarde, d.w.z.



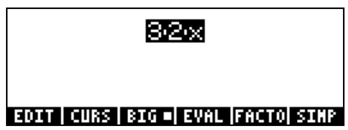
Druk op [→] UNDO om de afleiding te herstellen. Om de afleiding opnieuw te evalueren, kunt u de softmenutoets [F4] gebruiken. Dit laat opnieuw zien dat

$$\frac{d}{dt}(\alpha \cdot t^2 - \beta \cdot t + \delta) = 2\alpha \cdot t + \beta \ .$$

Afleidingen van de tweede orde zijn mogelijk, bijvoorbeeld:



hetgeen evalueert tot:

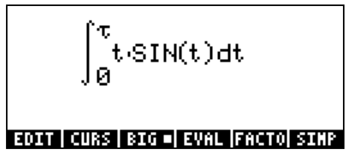


Opmerking: de notatie $\frac{\partial}{\partial x}(\ )$ is kenmerkend voor gedeeltelijke afleidingen. De juiste notatie voor hele afleidingen (d.w.z. afleidingen van een variabele) is $\frac{d}{dx}(\ )$. De rekenmachine maakt echter geen onderscheid tussen gedeeltelijke en hele afleidingen.

Bepaalde integralen

De Vergelijkingrnschrijver wordt gebruikt om de volgende gegeven integraal in te voeren: $\int_0^{\tau} t \cdot \sin(t) \cdot dt$. Druk op [→] EQW om de Vergelijkingenschrijver te activeren. Druk daarna op [→] ∫ om het integraalteken in te voeren. U ziet dat het teken wanneer het in de Vergelijkingenschrijver wordt ingevoerd, invoerposities biedt voor de grenzen van integratie, de integrand en de integratievariabele. Gebruik de volgende toetsencombinatie om deze invoerposities in te vullen: [0] [▶] [ALPHA] [→] [U] [▶] [ALPHA] [←]

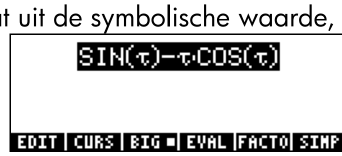
[T] [×] [SIN] [ALPHA] [←] [T] [▶] [ALPHA] [←] [T] Hetgeen resulteert in het volgende beeldscherm:



Druk op [▲][▲] en de softmenutoets [F1], om de bijbehorende uitdrukking in de regeleditor te visualiseren:

Dit duidt erop dat de algemene uitdrukking voor een afleiding in de regeleditor of in het stapelgeheugen de volgende is:
∫(*laagste_grens,hoogste_grens,integrand,variabele_van_integratie*)

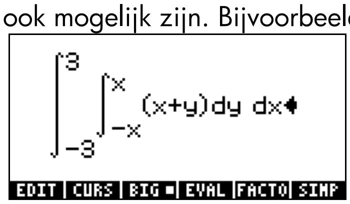
Druk op de toets [ENTER] om naar de Vergelijkingenschrijver terug te keren. Het resulterende beeldscherm is echter niet de bepaalde integraal die u heeft ingevoerd, maar bestaat uit de symbolische waarde, d.w.z.



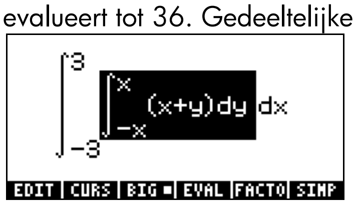
Druk op [↱] UNDO om de afleiding te achterhalen. Om de afleiding opnieuw te evalueren, kunt u de softmenutoets [F4] gebruiken. Dit laat opnieuw zien dat

$$\int_0^{\tau} t \cdot \sin(t) \cdot dt = \sin(\tau) - \tau \cdot \cos(\tau)$$

tweevoudige integralen ook mogelijk zijn. Bijvoorbeeld,



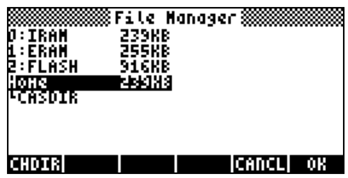
hetgeen evalueert tot 36. Gedeeltelijke evaluatie is mogelijk, bijvoorbeeld:



Deze integraal evalueert tot 36

Gegevens organiseren in de rekenmachine

U kunt gegevens in uw rekenmachine organiseren door variabelen in een directorystructuur op te slaan. Om de werking van het rekenmachinegeheugen te begrijpen, moet u eerst het directorybestand openen. Druk op de toetsencombinatie ← FILES (eerste toets in de tweede rij boven in het toetsenbord) om het beeldscherm File Manager van de rekenmachine te openen:



Dit beeldscherm geeft een momentopname van het geheugen van de rekenmachine en van de directorystructuur. Het beeldscherm laat zien dat de rekenmachine drie geheugenpoorten heeft (of geheugenpartities), *poort 0:IRAM*, *poort 1:ERAM* en *poort 2:FLASH* . Geheugenpoorten worden gebruikt voor het opslaan van derde toepassingen of bibliotheken, evenals backups. Ook wordt de grootte van de drie verschillende poorten aangegeven. De vierde en daaropvolgende regels in dit beeldscherm tonen de directorystructuur van de rekenmachine. De bovenste directory (thans gemarkeerd) is de *Home* directory en bevat een van tevoren bepaalde subdirectory, genaamd *CASDIR*. Het beeldscherm *File Manager* heeft drie functies die behoren bij de softmenutoetsen:

- CHDIR (F1): Wisselt naar geselecteerde directory
- CANCL (F5): Annuleert bewerking
- OK (F6): Keurt een selectie goed

Om bijvoorbeeld de directory in de CASDIR te wijzigen, drukt u op de pijltoets omlaag, ▼ en vervolgens op CHDIR (F1). Deze bewerking sluit het venster *File Manager* en keert terug naar het normale beeldscherm van de rekenmachine. U zult zien dat de tweede regel boven in het beeldscherm nu begint met de lettertekens { HOME CASDIR }, wat aangeeft dat de huidige directory CASDIR in de HOME directory is.

Functies voor de bewerking van variabelen

Dit beeldscherm bevat 20 commando's behorende bij de softmenutoetsen die gebruikt kunnen worden voor het aanmaken, bewerken en behandelen van variabelen. De eerste zes functies zijn de volgende:

EDIT Voor het bewerken van een gemarkeerde variabele
COPY Voor het kopiëren van een gemarkeerde variabele
MOVE Voor het verplaatsen van een gemarkeerde variabele
RCL Voor het opnieuw oproepen van de inhoud van een variabele
EVAL Voor het evalueren van een gemarkeerde variabele
TREE Om de directorystructuur te zien van de variabele

Indien u op de toets NXT drukt, worden de volgende functies beschikbaar gemaakt:

PURGE Voor het verwijderen van een variabele
RENAM Voor het opnieuw benoemen van een variabele
NEW Voor het aanmaken van een nieuwe variabele
ORDER Voor het rangschikken van variabelen in de directory
SEND Voor het zenden van een variabele naar een andere rekenmachine of computer
RECV Voor het ontvangen van een variabele van een andere rekenmachine of computer

Indien u op de toets NXT drukt, worden de volgende functies beschikbaar gemaakt:

HALT Om tijdelijk naar het stapelgeheugen terug te keren
VIEW Om de inhoud van een variabel te bekijken
EDITB Om de inhoud van een binaire variabele te bewerken (vergelijkbaar met EDIT)
HEADE Voor het weergeven van de directory met de variabele in de kop
LIST Voor het weergeven van een lijst van namen en beschrijvingen van een variabele
SORT Voor het rangschikken van variabelen volgens een volgorde,
Indien u op de toets NXT drukt, worden de laatste functies beschikbaar gemaakt:

XSEND Voor het zenden van een variabele met X-modem protocol
CHDIR Voor het wijzigen van de directory

Voor het verplaatsen naar de verschillende softmenucommando's, kunt u naast de toets NEXT (NXT), ook de toets PREV (← PREV) gebruiken.

De gebruiker kan deze functies zelf oefenen. De toepassingen zijn eenvoudig.

De HOME directory

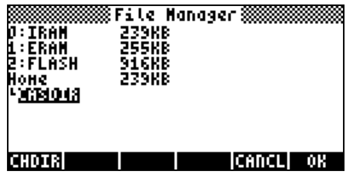
De HOME directory, zoals eerder vermeld, is de basisdirectory voor de geheugenbewerking van de rekenmachine. Om de HOME directory te openen, kunt u op de functie UPDIR (← UPDIR) drukken – zonodig meerdere malen drukken – totdat de { HOME } spec in de tweede regel in de kop in het beeldscherm staat. U kunt ook ← (vasthouden) UPDIR gebruiken en in de algebraïsche modus op ENTER drukken. In dit voorbeeld bevat de HOME directory alleen maar de CASDIR. Door op VAR te drukken, worden de variabelen in de softmenutoetsen weergegeven:

Subdirectories

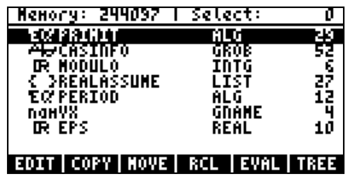
Indien u uw gegevens in een goed georganiseerde directorystructuur op wilt slaan, is het mogelijk om subdirectories in de HOME directory en ook andere subdirectories in de subdirectories aan te maken in een hiërarchie die lijkt op de bestandstructuur in moderne computers. De subdirectories krijgen namen die de inhoud weergevenvan elk subdirectory, of elke willekeurige naam die u maar kunt bedenken.

De CASDIR subdirectory

De CASDIR subdirectory bevat een aantal variabelen vereist voor de juiste bewerking van het CAS (Computer Algebraïsche Systeem, zie bijlage C). Om de inhoud van de directory zichtbaar te maken, kunt u de volgende toetsencombinatie gebruiken: ← FILES waardoor de *File Manager* opnieuw wordt geactiveerd:



Dit keer wordt de CASDIR in het beeldscherm gemarkeerd. Druk op de softmenutoets OK (F6) of ENTER voor de inhoud van de directory, zoals weergegeven in het onderstaande beeldscherm:



Het beeldscherm toont een tabel met de beschrijving van de variabelen in de CASDIR. Dit zijn variabelen die vantevoren zijn bepaald in het rekenmachinegeheugen dat bepaalde parameters vaststelt voor de CAS-bewerking (zie bijlage C). De bovenstaande tabel bevat 4 kolommen:

- De eerste kolom duidt het type van de variabele aan (bijvoorbeeld 'EQ' betekent een variabele van vergelijking, |R duidt een reële-waarde variabele aan, { } betekent een lijst, *nam* betekent 'een globale naam' en het symbool stelt een grafische variabele voor.)
- De tweede kolom stelt de naam van de variabelen voor, d.w.z. *PRIMIT, CASINFO, MODULO, REALASSUME, PERIOD, VX* en *EPS*.
- Kolom nummer 3 toont een andere specificatie voor de variabele, bijvoorbeeld ALG betekent een algebraïsche uitdrukking, GROB staat voor *grafisch object* INTG staat voor een variabele van een heel numeriek getal, List staat voor een lijst met gegevens, GNAME staat voor 'Globale naam' en *REAL* staat voor een reële (of drijvende punt) numerieke variabele.
- De vierde en laatste kolom geeft de grootte, in bytes, van de afgeknotte variabele, zonder decimalen (d.w.z. tetrade). Op die manier neemt bijvoorbeeld variabele PERIOD 12.5 bytes in, terwijl variabele REALASSUME 27.5 bytes inneemt (1 byte = 8 bits, 1 bit is de kleinste geheugeneenheid in computers en rekenmachines).

CASDIR-variabelen in het stapelgeheugen

Door op de toets ON te drukken, sluit het vorige beeldscherm en keert u terug naar het normale beeldscherm van de rekenmachine. U keert standaard terug naar het menu TOOL:

U kunt de variabelen in de huidige CASDIR directory bekijken door op de toets VAR te drukken (eerste toets in de tweede rij boven in het toetsenbord). Dit geeft het volgende beeldscherm:

Door op de toets NXT te drukken wordt nog een variabele weergegeven die is opgeslagen in deze directory:

- Gebruik ↱ EPS om de inhoud van bijvoorbeeld de variabele EPS te bekijken. Dit geeft aan dat de waarde van EPS is .0000000001
- Om de waarde van een numerieke variabele te bekijken, hoeft u slechts op de softmenutoets voor de variabele te drukken. Door bijvoorbeeld op EPS te drukken gevolgd door ENTER, wordt dezelfde waarde van de variabele in het stapelgeheugen weergegeven, mits de rekenmachine is ingesteld op *Algebraic*. Als de rekenmachine is ingesteld op de RPN-modus, hoeft u slechts op de softmenutoets ENTER te drukken.
- Om de volledige naam van een variabele te zien, drukt u eerst op de apostrof ' en vervolgens de op de softmenutoets van de desbetreffende variabele. Voor de variabele op de lijst in het stapelgeheugen, bijvoorbeeld PERIO gebruikt u: ' PERIO, wat het resultaat: 'PERIOD' geeft. Deze bewerking geldt zowel voor de *Algebraic*--modus als de *RPN*-modus van de rekenmachine

Variabelen in CASDIR

De CASDIR directory bevat de volgende standaardvariabelen:

PRIMIT	Laatst berekende primitief (antiderivatief), geen standaardvariabele, maar aangemaakt tijdens een vorige oefening
CASINFO	Een grafiek dat CAS-informatie verleent
MODULO	Modulus voor modulaire aritmetica (standaard = 13)

REALASSUME	Lijst van variabelennamen aangenomen als reële waarden
PERIOD	Periode voor trigonometrische functies (standaard = 2π)
VX	Naam van standaard onafhankelijke variabele (standaard = X)
EPS	Waarde van kleine toename (epsilon) (standaard = 10^{-10})

Deze variabelen worden gebruikt voor de bewerking van het CAS

De directory en namen van variabelen invoeren

Om subdirectories, en soms variabelen te benoemen, moet u letterketens in één keer invoeren, welke wel of niet met getallen gecombineerd kan worden. In plaats van op ALPHA, ALPHA ← of ALPHA → te drukken om elke letter apart in te voeren, kunt u de toets ALPHA ingedrukt houden en vervolgens de verschillende letters invoeren. U kunt ook tijdelijk het alfabetische toetsenbord vergrendelen en een volledige naam invoeren alvorens het toetsenbord opnieuw te ontgrendelen. De volgende toetsencombinaties vergrendelen het alfabetische toetsenbord:

ALPHA ALPHA vergrendelt het toetsenbord in hoofdletters. Wanneer het toetsenbord op deze wijze vergrendeld wordt, krijgt u een kleine letter door op ← te drukken voor een lettertoets, terwijl u een speciaal teken krijgt door op → te drukken voor een lettertoets. Voer ← ALPHA in om het toetsenbord in kleine letters te vergrendelen wanneer deze al in hoofdleters is vergrendeld.

ALPHA ALPHA ← ALPHA vergrendelt het alfabetische toetsenbord in kleine letters. Wanneer het toetsenbord op deze wijze is vergrendeld, krijgt u een hoofdletter door op ← te drukken voor een lettertoets. Druk op ← ALPHA om het toetsenbord te ontgrendelen.

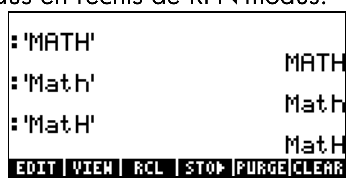
Om het toetsenbord vergrendeld in hoofdletters te ontgrendelen, drukt u op ALPHA .

Wij kunnen nu enkele oefeningen proberen door namen van directory/variabele in het stapelgeheugen in te voeren. Ervan uitgaande dat de rekenmachine in de ALG-modus staat (hoewel de bewerking ook in de

RPN-modus kan worden uitgevoerd), probeer de volgende toetsenencombinaties. Met deze commando's voert u de woorden 'MATH', 'Math' en 'MatH' in

' ALPHA ALPHA M A T H ENTER
' ALPHA ALPHA M ↰ A ↰ T ↰ H ENTER
' ALPHA ALPHA M ↰ ALPHA A T ↰ H ENTER

Het beeldscherm van de rekenmachine zal het volgende tonen (links staat de ALG-modus en rechts de RPN-modus:



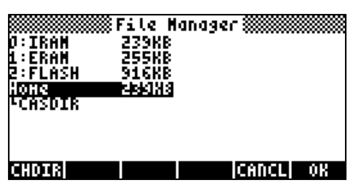
Opmerking: als systeemvlag 60 is ingesteld, kunt u het alfabetische toetsenbord vergrendelen door alleen op ALPHA te drukken. Raadpleeg Hoofdstuk 1 voor meer informatie over systeemvlaggen.

Het aanmaken van subdirectories

U kunt subdirectories aanmaken in de FILES-omgeving of met het commando CRDIR. De twee methoden voor het aanmaken van subdirectories worden hieronder behandeld.

Het gebruiken van het menu FILES

Ongeacht de modus van de rekenmachine (ALG of RPN) kunt u een directorystructuur aanmaken, gebaseerd op de HOME directory, met de functies in het menu FILES. Druk op ↰ FILES om het menu FILES te activeren. Gebruik wanneer de HOME directory nog niet in het beeldscherm gemarkeerd is, d.w.z.



de pijltoetsen omhoog en omlaag (▲ ▼) om de directory te markeren. Druk daarna op de softmenutoets OK (F6). Het beeldscherm ziet er waarschijnlijk als volgt uit:

en toont dat er momenteel in de HOME directory slechts een object staat, namelijk de CASDIR subdirectory. We gaan nu een andere subdirectory aanmaken met de naam MANS (voor MANualS), waarin de variabelen staan die zijn aangemaakt in de oefeningen in deze handleiding. Voer eerst NXT NEW (F3) in om deze subdirectory aan te maken. Dit zal het volgende invoerscherm geven:

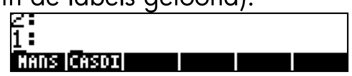
Het invoerveld *Object*, het eerste invoerveld in het beeldscherm wordt standaard gemarkeerd. Dit invoerveld kan de inhoud van een nieuwe variabele bevatten. Aangezien de nieuwe subdirectory op dit moment nog geen inhoud heeft, kunt u gewoon dit invoerveld weglaten door één keer op de pijltoets omlaag, ▼, te drukken. Nu wordt het invoerveld *Name* gemarkeerd:

In dit veld voert u de naam van de nieuwe subdirectory (of eventueel variabele) als volgt in: ALPHA ALPHA M A N S ENTER

De cursor gaat naar het markeerveld *_Directory*. Druk op de softmenutoets ✓CHK (F3) om aan te geven dat u een directory aanmaakt en druk op OK om het invoerscherm te verlaten. De variabele voor de HOME directory wordt als volgt in het beeldscherm weergegeven:

Het scherm geeft aan dat er in de HOME directory een nieuwe directory (MANS) staat.

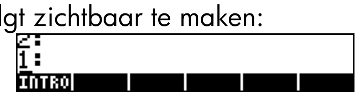
Vervolgens maakt u een subdirectory aan met de naam INTRO (voor INTROduction) in MANS, voor de variabelen die zijn aangemaakt in de oefeningen in dit hoofdstuk. Druk op de softmenutoets ON om naar het normale beeldscherm terug te keren (het menu TOOLS zal weergegeven worden). Druk dan op VAR zodat de inhoud van de HOME directory in de labels van de softmenutoetsen getoond worden. Het beeldscherm kan er als volgt uitzien (indien u andere variabelen in de HOME directory aangemaakt heeft worden deze ook in de labels getoond):



Om in de MANS directory te komen, drukt op de bijbehorende softmenutoets (F1 in dit geval), en op ENTER in de algebraïsche modus. De directorystructuur wordt in de tweede regel in het beeldscherm getoond als {HOME MANS}. Er zullen echter geen labels verbonden zijn aan de softmenutoetsen, zoals hieronder weergegeven, aangezien er in deze directory geen variabelen staan.
Maak nu de subdirectory INTRO aan met:

← FILES OK NXT NEW ▼ ALPHA ALPHA I N T R O ENTER ✓CHK OK

Druk op de toets ON, gevolgd door de toets VAR om de inhoud van de MANS directory als volgt zichtbaar te maken:



Druk op de softmenutoets INTRO om in de INTRO subdirectory te komen. Dit zal een leeg subdirectory tonen. Later zullen we enkele oefeningen maken voor het aanmaken van variabelen.

Het gebruiken van het commando CRDIR

Het commando CRDIR kan gebruikt worden om directory's aan te maken. Dit commando is beschikbaar via de commandocatalogus (de toets ⟨→⟩ CAT , tweede toets in de vierde rij boven in het toetsenbord, via de programmeermenus (de toets ⟨←⟩ PRG , dezelfde toets als de toets⟨→⟩ CAT) of door het gewoon in te voeren.

- Via de catalogustoets
  Druk op ⟨→⟩ CAT ⟨ALPHA⟩⟨C⟩ . Gebruik vn de pijltoetsen omhoog en omlaag (⟨▲⟩⟨▼⟩) om het commando CRDIR te vinden. Druk op de softmenutoets OK om het commando te activeren.
- Via de programmeermenu''s
  Druk op ⟨←⟩ PRG . Dit zal het volgende pull-downmenu voor programmering geven:

Gebruik daarna de pijltoets omlaag, ⟨▼⟩ , om de optie *2. MEMORY…* te selecteren of druk alleen op ⟨2⟩. Druk dan op OK. Dit zal het volgende pull-downmenu geven:

Gebruik daarna de pijltoets omlaag, ⟨▼⟩ , om de optie *5. DIRECTORY.* te selecteren of druk alleen op ⟨5⟩. Druk dan op OK. Dit zal het volgende pull-downmenu geven:

Gebruik daarna de pijltoets omlaag, ⟨▼⟩ , om de optie *5. CRDIR* te selecteren en druk op OK.

Commando CRDIR in de Algebraïsche modus

Als u eenmaal het commando CRDIR geselecteerd heeft via een van de aangegeven manieren, is het commando als volgt in uw stapelgeheugen beschikbaar:

Nu moet u een directorynaam invoeren, bijvoorbeeld *chap1* :

ALPHA ALPHA ← ALPHA C H A P 1 ALPHA ENTER

De naam van de nieuwe directory zal bij de softmenutoetsen getoond worden, bijvoorbeeld,

Commando CRDIR in de RPN-modus

Om de CRDIR in de RPN-modus te gebruiken, moet er al een directorynaam in het stapelgeheugen beschikbaar zijn voor het commando toegepast wordt. Bijvoorbeeld:

ALPHA ALPHA ← ALPHA C H A P 2 ALPHA ENTER

Ga dan naar het commando CRDIR via een van de eerder aangegeven methoden, bijvoorbeeld met de toets → CAT :

Druk op de softmenutoets OK om het commando te activeren om de subdirectory aan te maken:

Tussen subdirectory's wisselen

Indien u in de directorystructuur naar beneden wilt bewegen, moet u op de softmenutoets te drukken die overeenkomt met de gewenste subdirectory. De variabelenlijst in de subdirectory kan verkregen worden door op de toets VAR (VARiables) te drukken. , Gebruik de functie UPDIR, d.w.z. voer ← UPDIR in om in de directorystructuur naar boven te gaan.

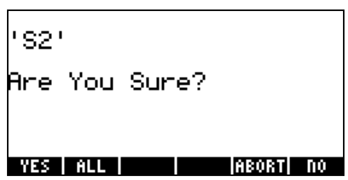
Als alternatief kunt u het menu FILES gebruiken, d.w.z. druk op ← FILES . Maak gebruik van de pijltoetsen omhoog en omlaag (▲▼) om de gewenste subdirectory te selecteren en druk daarna op CHDIR (CHange DIRectory) of F1 . Dit zal de inhoud van de huidige subdirectory weergeven in de labels van de softmenutoetsen.

Het verwijderen van directory's

Voor het verwijderen van een subdirectory, kunt u een van de volgende methoden gebruiken:

Via het menu FILES

Druk op ← FILES om het menu FILES te activeren. Selecteer de directory, die de te verwijderen subdirectory bevat en druk zonodig op CHDIR Het menu FILES wordt gesloten en de inhoud van de geselecteerde directory wordt in het beeldscherm zichtbaar gemaakt. In dit geval dient u op ENTER te drukken. Druk op de softmenutoets OK zodat er in het beeldscherm een inhoudslijst van de directory verschijnt: Selecteer de te verwijderen subdirectory (of variabele). Druk op NXT PURGE. Nu verschijnt een soortgelijk beeldscherm:



De 'S2'-reeks in dit invoerscherm is de naam van de subdirectory dat verwijderd is. De softmenutoetsen geven de volgende opties:

YES (F1) Voor het verwijderen van de subdirectory (of variabele)
ALL (F2) Voor het verwijderen van alle subdirectories (of variabelen)
ABORT (F5) Voor het niet verwijderen van de subdirectory (of variabel) van een lijst
NO (F6) Voor het niet verwijderen van de subdirectory (of variabel)

Nadat u een van deze vier commando's geselecteerd heeft, keert u terug naar het beeldscherm met de inhoudslijst van de subdirectory. Het commando ABORT geeft echter een foutmelding:

en u moet op OK drukken voordat u terugkeert naar de variabelenlijst.

Via het commando PGDIR

Het commando PGDIR kan gebruikt worden om directory's te wissen. Zoals bij het commando CRDIR, is het commando PGDIR beschikbaar via de toetsen ↱ _CAT_ of ↰ _PRG_ , of het kan gewoon ingevoerd worden.

- Via de catalogustoets
  Druk op ↱ _CAT_ ALPHA ALPHA P G . Het commando PGDIR moet gemarkeerd worden. Druk op de softmenutoets OK om het commando te activeren.
- Via de programmeermenus
  Druk op ↰ _PRG_ . Dit zal het volgende pull-downmenu voor het programmeren geven:

Gebruik daarna de pijltoets omlaag, ▽, om de optie *2. MEMORY…* te selecteren en druk op OK. Dit zal het volgende pull-downmenu geven:

Gebruik daarna de pijltoets omlaag, ▽, om de optie *5. DIRECTORY* te selecteren. Druk dan op OK . Dit zal het volgende pull-downmenu geven:

Gebruik daarna de pijltoets omlaag, ▽, om de optie *6. PGRDIR* te selecteren en druk op OK.

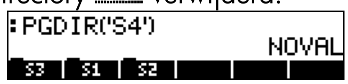
Het commando PGDIR in de Algebraïsche modus

Als u eenmaal het commando PGDIR geselecteerd heeft via een van de eerder aangegeven methoden, zal het commando als volgt in uw stapelgeheugen beschikbaar zijn:

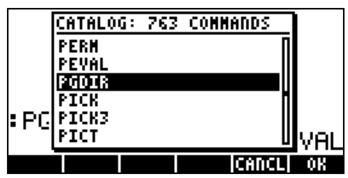
Nu moet u een directorynaam invoeren, bijvoorbeeld *S4* :

ALPHA S 4 ENTER

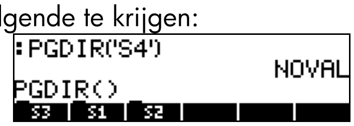
Als resultaat wordt subdirectory S4 verwijderd:



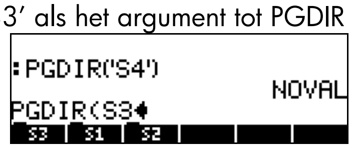
In plaats van de naam van het directory in te voeren, kunt u gewoon op de softmenutoets drukken die overeenkomt met de lijst van het commando PGDIR( ), bijvoorbeeld:



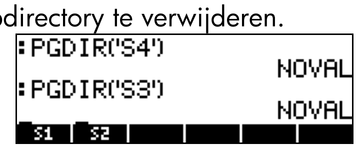
Druk op OK om het volgende te krijgen:



Druk dan op S3 om 'S3' als het argument tot PGDIR in te voeren.



Druk op ENTER om de subdirectory te verwijderen.



Het commando PGDIR in de RPN-modus

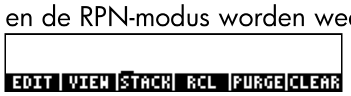
Om de PGDIR in de RPN-modus te gebruiken, moet u de naam van de directory tussen haakjes al in het stapelgeheugen staan voordat het commando wordt toegepast. Bijvoorbeeld: ' ALPHA S 2 ENTER

Ga dan naar het commando PGDIR via een van de eerder aangegeven methodes, bijvoorbeeld via de toets ↱ CAT :

Druk op de softmenutoets OK om het commando te activeren om de subdirectory te verwijderen:

Het gebruik van het commando PURGE vanuit het menu TOOL

Het menu TOOL is beschikbaar door op de toets TOOL te drukken(de ALG-modus en de RPN-modus worden weergegeven):



Het commando PURGE is beschikbaar door op de softmenutoets PURGE (F5) te drukken. In de volgende voorbeelden verwijdert u de subdirectory *S1*:

- In deALG-modus : Voer PURGE VAR S1 ENTER in
- In de RPN-modus : Voer VAR ' S1 ENTER TOOL PURGE VAR in

Variabelen

Variabelen zijn gelijk aan bestanden in de harde schijf van een computer. Een variabele kan een object opslaan (numerieke waarden, algebraïsche uitdrukkingen, vectoren, matrices, programma's, enz.). Zelfs subdirectory's kunnen doorgaan voor variabelen (in wezen is een subdirectory op de rekenmachine ook een soort berekeningsobject).

Variabelen worden aangeduid met hun namen die kunnen bestaan uit elke combinatie van alfabetische en numerieke tekens en kunnen beginnen met een letter (een Engelse of een Griekse). Enkele niet alfabetische lettertekens, zoals de pijl (→) kunnen in een variabele gebruikt worden indien gecombineerd met een alfabetisch letterteken. '→A' is dus een geldige variabelennaam, maar '→' daarentegen niet. Geldige voorbeelden van variabelennamen zijn: 'A', 'B', 'a', 'b', 'α', 'β', 'A1', 'AB12', '→A12','Vel','Z0','z1', enz.

Een variabele kan niet dezelfde naam hebben als een functie van de rekenmachine. U kunt bijvoorbeeld geen variabele met de naam SIN hebben, aangezien de rekenmachine een SIN commando heeft. De rekenmachine bevat de volgende gereserveerde variabelennamen: ALRMDAT, CST, EQ, EXPR, IERR, IOPAR, MAXR, MINR, PICT, PPAR, PRTPAR, VPAR, ZPAR, der_, e, i, n1,n2, …, s1, s2, …, ΣDAT, ΣPAR, π, ∞

Variabelen kunnen in subdirectorys georganiseerd worden.

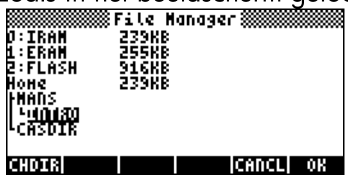
Het áanmaken van variabelen

Voor het aanmaken van een variabele kunt u het menu FILES gebruiken, net zoals in de vorige voorbeelden voor het aanmaken van een subdirectory. In de subdirectory {HOME MANS INTRO}, aangemaakt in een eerdere oefening, wilt u bijvoorbeeld de volgende variabelen met de getoonde waarden opslaan:

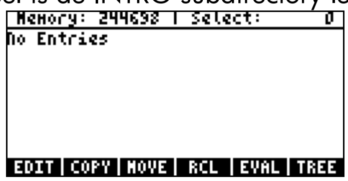
Naam	***Inhoud***	***Type***
A	12.5	Reël
α	-0.25	Reël
A12	3×10^5	Reël
Q	'r/(m+r)'	algebraïsch
R	[3,2,1]	vector
z1	3+5i	complex
p1	<< → r 'π*r^2' >>	programma

Via het menu FILES

U gebruikt het menu FILES om een variabele A in te voeren. Stel dat u zich in subdirectory {HOME MANS INTRO}. bevindt. Gebruik de volgende toetsencombinatie om naar deze subdirectory te gaan: ← FILES en selecteer de INTRO subdirectory zoals in het beeldscherm getoond wordt:



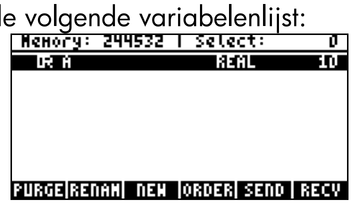
Druk op OK om de directory in te voeren: Er verschijnt een bestandenlijst zonder invoer (momenteel is de INTRO subdirectory leeg)



Druk op de toets NXT om naar de volgende softmenutoetsen te gaan en druk op de softmenutoets NEW. Nu verschijnt het invoerscherm NEW VARIABLE:

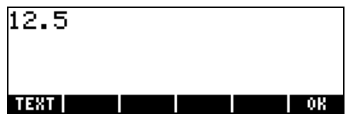
Voor het invoeren van variabele A (zie tabel hierboven) voert u eerst als volgt de inhoud in, d.w.z. het getal 12.5 en dan de naam A: 1 2 . 5 OK ALPHA A OK. Hetgeen resulteert in het volgende beeldscherm:

Druk opnieuw op OK voor het aanmaken van de variabele. De nieuwe variabele verschijnt in de volgende variabelenlijst:



De lijst geeft een reële variabele (|R) aan met de naam A en 10.5 bytes aan geheugen. Druk op NXT VIEW om de inhoud van de variabele op dit beeldscherm te zien.

- Druk op de softmenutoets GRAPH (F1) om de inhoud in een grafische opmaak te bekijken.



- Druk op de softmenutoets TEXT (F1) om de inhoud in een tekstopmaak te bekijken.
- Druk op OK om naar de variabelenlijst terug te keren.
- Druk opnieuw op ON om naar het normale beeldscherm terug te keren. De variabele A moet nu weergegeven worden in de labels van de softmenutoetsen:

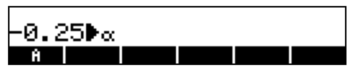
Via het commando STO▶

Een eenvoudigere manier om een variabele aan te maken is met het commando STO (d.w.z. de toets STO▶). Wij laten voorbeelden zien in de ALG-modus en in de RPN-modus, door de overige hierboven gegeven variabelen aan te maken, nl.:

Naam	***Inhoud***	***Type***
α	-0.25	Reël
A12	3×10^5	Reël
Q	‘r/(m+r)'	algebraïsch
R	[3,2,1]	vector
z1	3+5i	complex
p1	<< → r 'π*r^2' >>	programma

- ***Algebraïsche modus:***

Gebruik de volgende toetsenaanslagen om de waarde van –0.25 in de variabele α op te slaan: 0 . 2 5 +/- STO▶ ALPHA ↱ A .
Nu zal het beeldscherm er als volgt uitzien:



Deze uitdrukking betekent dat de waarde –0.25 opgeslagen is in α (het symbool ▶ stelt de bewerking voor). Druk op ENTER om de variabele aan te maken. De variabele wordt nu in de labels van de softmenutoetsen getoond:

De volgende toetsencombinaties zijn vereist voor het invoeren van de overige variabelen:

A12: 3 EEX 5 STO▶ ALPHA A 1 2 ENTER

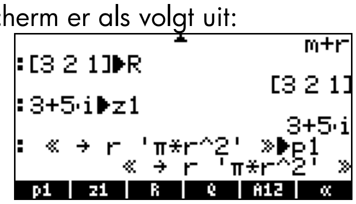
Q: ' ALPHA ↰ R ÷ ↰ ()
ALPHA ↰ M + ALPHA ↰ R ▶ ▶ STO▶ ALPHA Q ENTER

R: ↰ [] 3 ↱ , 2 ↱ , 1 ▶ STO▶ ALPHA R ENTER

z1: 3 + 5 × ↰ i STO▶ ALPHA ↰ Z 1 ENTER (indien noodzakelijk, accepteer wijziging naar Complex-modus)

p1: ↱ « » ↱ → ALPHA ↰ R ' ↰ π ×
ALPHA ↰ R yˣ 2 ▶ ▶ ▶ STO▶ ALPHA ↰ P 1 ENTER ..

Nu ziet het beeldscherm er als volgt uit:



U ziet zes van de zeven variabelen in een lijst onder in het beeldscherm: *p1, z1, R, Q, A12, α*.

- ***RPN-modus***

Gebruik de volgende toetsencombinatie om de waarde van –0.25 in de variabele α op te slaan: [0] [.] [2] [5] [+/-] [ENTER] [ALPHA] [→] [A] [ENTER]. Nu ziet het beeldscherm er als volgt uit:

Deze uitdrukking betekent dat de waarde –0.25 opgeslagen is in α. Druk op [STO▸] om de variabele aan te maken. De variabele wordt nu in de labels van de softmenutoetsen getoond:

Om de waarde 3×10^5 in A12 in te voeren, kunt u een kortere versie van de procedure gebruiken:

[3] [EEX] [5] ['] [ALPHA] [A] [1] [2] [ENTER] [STO▸]

Hieronder volgt een manier om de inhoud van Q in te voeren:

Q: ['] [ALPHA] [←] [R] [÷] [←] [()] [ALPHA] [←] [M] [+] [ALPHA] [←] [R] [▸] [▸] ['] [ALPHA] [Q] [ENTER] [STO▸]

Om de waarde van R in te voeren, kunt u zelfs een nog kortere versie gebruiken:

R: [←] [[]] [3] [SPC] [2] [SPC] [1] [▸] ['] [ALPHA] [R] [ENTER] [STO▸]

U ziet dat voor het scheiden van de elementen van een vector in de RPN-modus u de spatietoets ([SPC]) kunt gebruiken, in plaats van de komma ([→] [,]) die eerder gebruikt wordt in de Algebraïsche modus.

z1: ['] [3] [+] [5] [×] [←] [i] ['] [ALPHA] [←] [Z] [1] [STO▸] (indien noodzakelijk, accepteer wijziging naar Complex-modus)

p1: [→] [« »] [→] [→] [ALPHA] [←] [R] ['] [←] [π] [×] [ALPHA] [←] [R] [yˣ] [2] [▸] [▸] [▸] ['] [ALPHA] [←] [P] [1] [▸] [ENTER] [STO▸].

Nu ziet het beeldscherm er als volgt uit:

U ziet zes van de zeven variabelen in een lijst onder in het beeldscherm: *p1, z1, R, Q, A12, α*.

Het controleren van de inhoud van variabelen

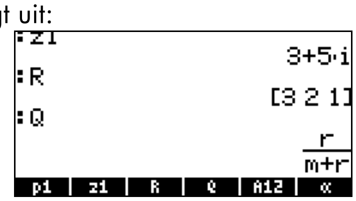
Als oefening voor het bekijken van de inhoud van de variabelen maakt u gebruik van de zeven variabelen ingevoerd in de voorgaande oefening. In een eerdere oefening voor het aanmaken van de variabele A, toonden wij u hoe het menu FILES gebruikt kan worden om de inhoud van een variabele zichtbaar te maken. In deze paragraaf wordt een eenvoudige manier getoond om de inhoud van een variabele te bekijken.

Door op het label van de softmenutoets voor de variabele te drukken

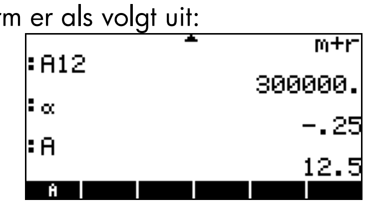
Deze werkwijze toont de inhoud van een variabele zolang de variabele een numerieke of een algebraïsche waarde heeft of een array bevat. Druk op de volgende toetsen om de inhoud van de variabelen te zien uit de bovenstaande lijst:

Algebraïsche modus

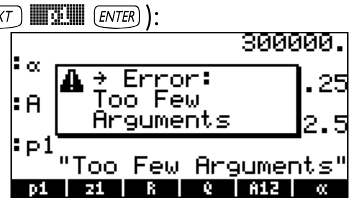
Voer deze toetsencombinatie in: VAR z1 ENTER R ENTER Q ENTER. Nu het beeldscherm er als volgt uit:



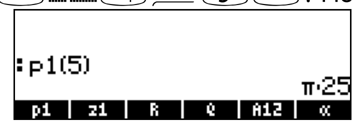
Voer vervolgens deze toetsencombinatie in: A12 ENTER α ENTER NXT A ENTER. Nu ziet het beeldscherm er als volgt uit:



Wanneer u op de softmenutoets behorende bij *p1* drukt, verschijnt er een foutmelding (probeer NXT p1 ENTER):



Opmerking: door op p1 ENTER te drukken, probeert u het *p1* programma te activeren. Dit programma verwacht echter een numerieke invoer. Probeer de volgende oefening: ON p1 ← () 5 ENTER. Het resultaat is:



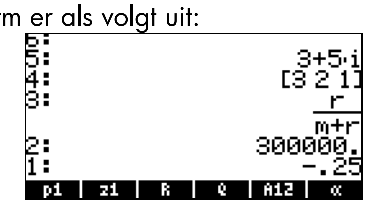
Het programma heeft de volgende structuur: << → r 'π*r^2' >>

De symbolen « » duiden op een programma in de User RPL-taal (de oorspronkelijke programmeertaal van de HP 28/48 rekenmachines, en beschikbaar in de HP 49G serie). De lettertekens → r geven aan dat er een invoer, gelezen als *r*, aan het programma gegeven moet worden. Het programma moet die waarde van *r* nemen en de algebraïsche 'π*r^2' evalueren. In het bovenstaande voorbeeld nam *r* de waarde van 5 en daarom wordt de waarde van $\pi r^2 = \pi \cdot 25$ geretourneerd. Dit programma berekent dus de oppervlakte van een cirkel met de gegeven radius *r* .

RPN-modus

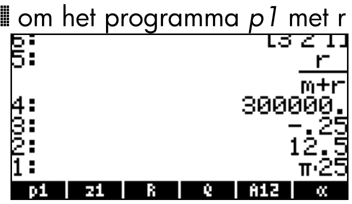
In de RPN-modus moet u alleen maar op het betreffende label van de softmenutoets label drukken om de inhoud van een numerieke of algebraïsche variabele te krijgen. Voor de betreffende oefening kunt u proberen de hierboven aangemaakte variabelen *z1*, *R*, *Q*, *A12*, α en *A* te bekijkenmet: VAR z1 R Q A12 α

Nu ziet het beeldscherm er als volgt uit:



Gebruik: NXT A om de inhoud van A te bekijken.

Gebruik: NXT 5 p1 om het programma *p1* met r = 5 te activeren.



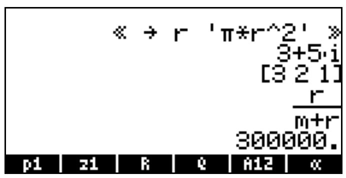
U ziet dat om het programma in de RPN-modus te activeren u alleen de invoer (5) dient in te voeren en op de desbetreffende softmenutoets moet drukken. In de algebraïsche modus moet u haakjes plaatsen om het argument in te voeren.

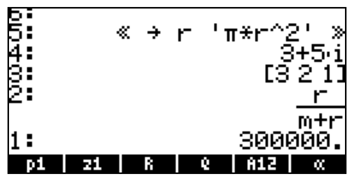
Via de rechtershifttoets ↱ gevolgd door de softmenutoetslabel

Deze methode om de inhoud van een variabele te visualiseren werkt in de ALG-modus en RPN-modus op dezelfde wijze. Probeer de volgende voorbeelden in een van de modi:

VAR ↱ p1 ↱ z1 ↱ R ↱ Q ↱ A12

Dit produceert het volgende beeldscherm (Algebraïsche modus links, RPN rechts)





U ziet dat deze keer de inhoud van programma *p1* als lijst in het beeldscherm staat. Gebruik om de overige variabelen in deze directory te bekijken:

↱ α NXT ↱ A

De inhoud van alle variabelen in het beeldscherm weergeven

Gebruik de toetsencombinatie ↱▼ om de inhoudslijst van alle variabelen in het beeldscherm te krijgen. Bijvoorbeeld:

Druk op ON om naar het normale beeldscherm terug te keren.

Het vervangen van de inhoud van variabelen

Het vervangen van de inhoud van een variabele kan beschouwd worden als het opslaan van een andere waarde in dezelfde variabelennaam. Dus kunnen de eerdere voorbeelden voor het aanmaken van variabelengebruikt worden om het vervangen van de inhoud van een variabele te verduidelijken.

Via het commando STO▶

Met als voorbeeld de zes eerder aangemaakte variabelen *p1, z1, R, Q, A12, a* en *A* vervangt u de inhoud van variabele *A12* (momenteel een numerieke variabele) door de algebraïsche uitdrukking 'β/2', met het commando STO▶. Eerst in de Algebraïsche modus:

['] [ALPHA] [→] [B] [÷] [2] [▶] [STO▶] [A12] [ENTER]

Controleer de nieuwe inhoud van de variabele *A12* met

[→] [A12] .

In de RPN-modus:

['] [ALPHA] [→] [B] [÷] [2] [ENTER] ['] [A12] [ENTER] [STO▶]

of eenvoudiger:

['] [ALPHA] [→] [B] [÷] [2] [▶] ['] [A12] [STO▶]

Het gebruik van de linkershifttoets [←] gevolgd door de softmenutoets van de variabele (RPN)

Dit is een zeer eenvoudige manier om de inhoud van een variabele te veranderen maar het werkt alleen in de RPN-modus. De methode bestaat uit het invoeren van de nieuwe inhoud van de variabele in het stapelgeheugen en dan het indrukken van de linkershifttoets gevolgd door de softmenutoets van de variabele. Gebruik bijvoorbeeld in de RPN-modus wanneer u de inhoud van variabele *z1* wilt veranderen in '*a+b·i* ':

['] [ALPHA] [←] [A] [+] [ALPHA] [←] [B] [×] [←] [i] [ENTER]

Dit plaatst de algebraïsche uitdrukking '*a+b·i* ' op niveau *1:* van het stapelgeheugen. Gebruik voor het invoeren van dit resultaat in variabele *z1*:

[VAR] [←] [z1]

Gebruik: [→] [z1] om de nieuwe inhoud van *z1* te controleren.

In de Algebraïsche modus kan het als volgt worden uitgevoerd:

[ALPHA] [←] [A] [+] [ALPHA] [←] [B] [×] [←] [i] [ENTER] [STO▶] [z1] [ENTER]

Gebruik: [→] [z1] om de nieuwe inhoud van *z1* te controleren.

Het gebruiken van de ANS(1) variabele (Algebraïsche modus)

In de Algebraïsche modus kan de variabele ANS (1) gebruikt worden om de inhoud van een variabele te vervangen. De methode voor het veranderen van de inhoud van *z1* in '*a+bi'* is de volgende: [←] [ANS] [STO▶] [z1] [ENTER].

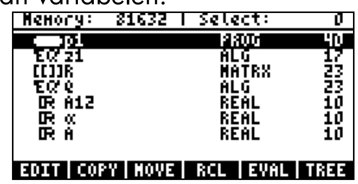
Gebruik: [→] [z1] om de nieuwe inhoud van *z1* te controleren,

Het kopiëren van variabelen

De volgende oefeningen laten de verschillende methodes zien om variabelen van de ene subdirectory naar de andere te kopiëren.

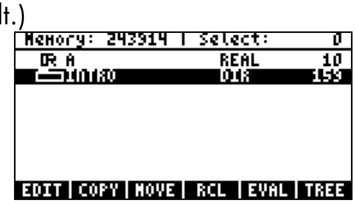
Via het menu FILES

Voor het kopiëren van een variabele van de ene directory naar de ander, kunt u het menu FILES gebruiken. Bijvoorbeeld, in de subdirectory {HOME MANS INTRO} staan de variabelen *p1, z1, R, Q, A12,* α en *A*. Stel dat u variabele A wilt kopiëren en een kopie in subdirectory {HOME MANS} wilt plaatsen. Tevens kopiërt u variabele *R* en plaatst een kopie in de HOME directory. Hieronder wordt de procedure weergegeven. Druk op ← FILES OK voor de volgende lijst van variabelen:

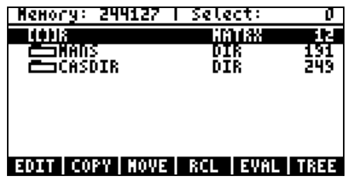


Gebruik de pijltoets omlaag ▼ om variabele *A* te selecteren (de laatste in de lijst), druk dan op COPY. De rekenmachine geeft het beeldscherm PICK DESTINATION:

Gebruik de pijltoets omhoog ▲ om de subdirectory MANS te selecteren en druk op OK. Als u nu op ← UPDIR , drukt, geeft het beeldscherm de inhoud van de subdirectory MANS (U ziet dat de variabele A, zoals verwacht, in deze lijst getoond wordt.)

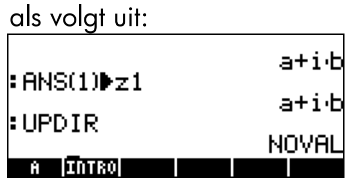


Druk op ON INTRO ENTER (Algebraïsche modus), of op ON INTRO (RPN-modus) om naar de INTRO directory terug te keren. Druk op ← FILES OK om de lijst van variabelen in {HOME MANS INTRO} te krijgen. Gebruik de pijltoets omlaag (▼) om de variabele *R*, te selecteren, druk dan op COPY. Gebruik de pijltoets omhoog (▲) om de HOME directory te selecteren en druk op OK. Als u nu twee keer op ← UPDIR drukt, geeft het beeldscherm de inhoud van de HOME directory, inclusief een kopie van de variabele *R*:



Via het geheugen in de Algebraïsche modus

Hier ziet u een manier om het geheugen (stapelgeheugen) te gebruiken voor het kopiëren van een variabele van een directory naar een ander met de rekenmachine ingesteld op de Algebraïsche modus. Stel dat u in de subdirectory {HOME MANS INTRO} staat en u de inhoud van variabele *z1* wilt kopiëren naar subdirectory {HOME MANS}. Voer de volgende toetsencombinatie uit: → Z1 STO▸ Z1 ENTER. Nu wordt de inhoud van *z1* in zichzelf opgeslagen (geen verandering uitgevoerd in *z1*). Gebruik vervolgens ← UPDIR ENTER om naar de {HOME MANS} subdirectory te gaan. Het beeldscherm ziet er dan als volgt uit:



Druk drie keer op de wistoets om de laatste drie regels in het beeldscherm te verwijderen: ◄ ◄ ◄. Nu is het stapelgeheugen klaar om het commando ANS(1)▶z1 uit te voeren. Druk op ENTER om het commando uit te voeren. Gebruik vervolgens → Z1 om de inhoud van de variabele te verifiëren.

Via het stapelgeheugen in de RPN-modus:

Voor het demonstreren van het gebruik van het stapelgeheugen in de RPN-modus om een variabele te kopiëren van een subdirectory naar een andere, gaan we ervan uit dat u in de subdirectory {HOME MANS INTRO} staat en dat u de inhoud van variabele *z1* in de HOME directory wilt kopiëren. Voer de volgende toetsencombinatie uit: ↱ z1 ENTER ' z1 ENTER

Deze methode geeft een lijst van de inhoud en de naam van de variabele in het stapelgeheugen. Het beeldscherm ziet er dan als volgt uit:

Gebruik nu ↰ UPDIR ↰ UPDIR om naar de HOME directory te gaan en druk op STO▶ om de bewerking te voltooien. Gebruik vervolgens ↱ z1 om de inhoud van de variabele te verifiëren.

Het kopiëren van twee of meer variabelen via het stapelgeheugen in de Algebraïsche modus

Hier volgt een oefening voor het kopiëren van twee of meer variabelen via het stapelgeheugen terwijl de rekenmachine op de Algebraïsche modus is ingesteld. Stel dat u wederom in de subdirectory {HOME MANS INTRO} staat en u de variabelen *R* en *Q* wilt kopiëren in de subdirectory {HOME MANS}. Gebruik de volgende toetsencombinaties om deze bewerking uit te voeren:

↱ R STO▶ R ENTER
↱ Q STO▶ Q ENTER
↰ UPDIR ENTER
◀ ◀ ◀ ENTER
◀ ◀ ◀ ◀ ENTER

Gebruik ↱ R en ↱ Q om de inhoud van de variabelen te verifiëren. Deze procedure kan uitgebreid worden voor het kopiëren van drie of meer variabelen.

Het kopiëren van twee of meer variabelen via het stapelgeheugen in de RPN-modus

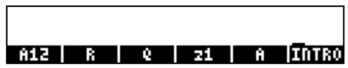
Hier volgt een oefening voor het kopiëren van twee of meer variabelen via het stapelgeheugen terwijl de rekenmachine op de RPN-modus is ingesteld. Stel dat u wederom in de subdirectory {HOME MANS INTRO} staat en u de variabelen *R* en *Q* wilt kopiëren in de subdirectory {HOME MANS}. Gebruik de volgende toetsencombinaties om deze bewerking uit te voeren:

↱ R ' R ENTER
↱ Q ' Q ENTER
↰ UPDIR STO▶ STO▶

Gebruik → en → om de inhoud van de variabelen te verifiëren. Deze procedure kan uitgebreid worden voor het kopiëren van drie of meer variabelen.

Het herschikken van variabelen in een directory

In deze paragraaf wordt het gebruik van het commando ORDER behandeld voor het herschikken van variabelen in een directory. Stel dat u in de subdirectory {HOME MANS} staat met de variabelen *A12, R, Q, z1, A* en de subdirectory *INTRO*, zoals hieronder getoond wordt. (Kopieer A12 vanuit INTRO naar MANS).

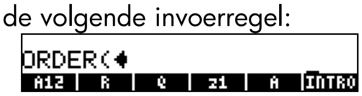


Algebraïsche modus

In dit geval heeft u de rekenmachine ingesteld op de Algebraïsche modus. Stel dat u de volgorde van de variabelen wilt veranderen in *INTRO, A, z1, Q, R, A12*. Ga als volgt te werk om de functie ORDER te activeren:

← PRG ▼ OK	Selecteert MEMORY in het programmeringsmenu
▼ ▼ ▼ ▼ OK	Selecteert DIRECTORY in het menu MEMORY
▲ ▲ OK	Selecteert ORDER in het menu DIRECTORY

Het beeldscherm toont de volgende invoerregel:



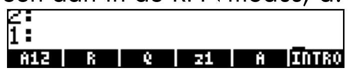
Vervolgens wordt de nieuwe volgorde weergegeven van de variabelen waarbij de namen tussen haakjes staan:

← {} ' INTRO ▶ → , ' A
▶ → , ' z1 ▶ → , ' Q ▶
→ , ' R ▶ → , ' A12 ENTER

Het beeldscherm toont nu de nieuwe volgorde van de variabelen:

RPN-modus

In de RPN-modus geeft het stapelgeheugen een lijst van herschikte variabelen voordat het commando ORDER is toegepast. Stel dat u vanuit dezelfde situatie begint als hierboven, alleen dan in de RPN-modus, d.w.z.,



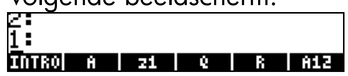
De herschikte lijst wordt aangemaakt met:

← {} INTRO A z1 Q R A12 ENTER

Voer daarna het commando ORDER in, zoals u al eerder heeftgedaan, d.w.z.

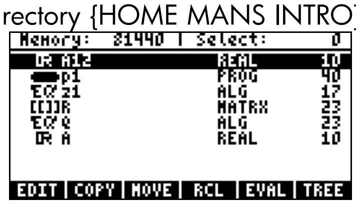
← PRG ▼ OK Selecteert MEMORY in het programmeringsmenu
▼▼▼▼ OK Selecteert DIRECTORY in het menu MEMORY
▲▲ OK Selecteert ORDER in het menu DIRECTORY

Hetgeen resulteert in het volgende beeldscherm:

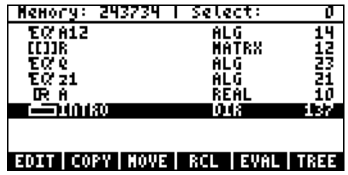


Het verplaatsen van variabelen via het menu FILES

Voor het verplaatsen van een variabele van een directory naar een andere, kunt u het menu FILES gebruiken. In de subdirectory {HOME MANS INTRO} staan bijvoorbeeld de variabelen *p1, z1, R, Q, A12,* α en *A*. Stel dat u variabele *A12* wilt verplaatsen naar subdirectory {HOME MANS}. Druk op ← FILES OK voor de variabelenlijst. Gebruik de pijltoets omlaag ▼ om de variabele *A12* te selecteren en druk dan op MOVE. De rekenmachine geeft het beeldscherm PICK DESTINATION. Gebruik de pijltoets omhoog ▲ om de subdirectory MANS te selecteren en druk op OK. Het beeldscherm toont nu de inhoud van de subdirectory {HOME MANS INTRO}:



U ziet dat variabele A12 er niet meer bij staat. Als u nu op ← UPDIR drukt, geeft het beeldscherm de inhoud van de subdirectory MANS weer, inclusief variabele *A12*:



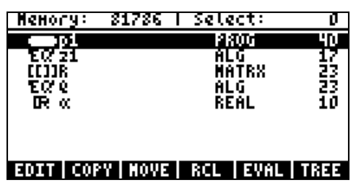
Opmerking: u kunt het stapelgeheugen gebruiken om een variabele te verplaatsen door het kopiëren en verwijderen van een variabele. De procedure voor het verwijderen van variabelen wordt in de volgende paragraaf behandeld.

Het verwijderen van variabelen

Variabelen kunnen verwijderd worden met de functie PURGE . Deze functie is rechtstreeks toegankelijk het menu TOOLS (TOOL) of via het menu FILES ← FILES OK.

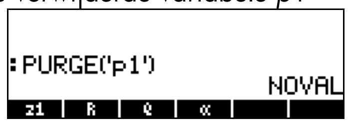
Via het commando FILES

Het commando FILES kan gebruikt worden om één variabele per keer te verwijderen. Voor het verwijderen van een variabele van een bepaalde directory, kunt u het menu FILES gebruiken. In de subdirectory {HOME MANS INTRO} staan bijvoorbeeld de variabelen *p1, z1, R, Q,* α en *A* aan de linkerzijde. Stel dat u variabele *A* wilt verwijderen. Druk op ← FILES OK voor de variabelenlijst. Gebruik de pijltoets omlaag ▼ om variabele *A* te selecteren (de laatste in de lijst), druk vervolgens op NXT PURGE YES. Het beeldscherm geeft nu de inhoud van de subdirectory INTRO zonder de variabele A.

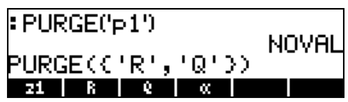


Via de functie PURGE in de Algebraïsche modus

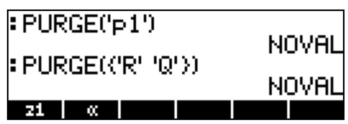
U staat weer in de subdirectory {HOME MANS INTRO} dat nu alleen de variabelen *p1, z1, Q, R* en α bevat. U gebruikt commando PURGE om de variabele *p1* te verwijderen. Druk op [TOOL] [PURGE] [VAR] [p1] [ENTER]. Het beeldscherm toont nu de verwijderde variabele *p1*



U kunt het commando PURGE gebruiken om meer dan een variabele te verwijderen door hun namen in een lijst in het argument van PURGE te plaatsen. Indien u nu bijvoorbeeld te variabelen *R* en *Q*, tegelijkertijd wilt verwijderen, kunt u de volgende oefening proberen. Druk op:
[TOOL] [PURGE] [←] {} ['] [VAR] [R] [▶] [→] , ['] [VAR] [Q]
Het beeldscherm geeft nu het volgende commando weer dat kan worden geactiveerd:



Voor het beeindigen van het uitwissen van variabelen Druk op [ENTER] om het verwijderen van variabelen te voltooien. Het beeldscherm toont nu de overige variabelen:



Via de functie PURGE in het stapelgeheugen in de RPN-modus

U staat weer in de subdirectory {HOME MANS INTRO} dat de variabelen *p1, z1, Q, R,* en α bevat. U gebruikt het commando PURGE om de variabele *p1* te verwijderen. Druk op ['] [p1] [ENTER] [TOOL] [PURGE]. Het beeldscherm geeft nu de verwijderde variabele *p1:*

U moet een lijst aanmaken (in de RPN-modus om gelijktijdig twee variabelen te verwijderen, bijvoorbeeld *R* en *Q*. De elementen van de lijst hoeven niet gescheiden te worden met komma's zoals bij de Algebraïsche modus): [VAR] [←] {} ['] [R] [▶] ['] [Q] [ENTER]. Druk vervolgens op [TOOL] [PURGE] om de variabelen te verwijderen.

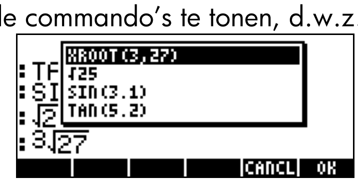
De functies UNDO en CMD

De functies UNDO en CMD zijn handig om recente commando's te achterhalen of een bewerking ongedaan te maken als er een fout is gemaakt. Deze functies zijn verbonden met de toets HIST. UNDO wordt uitgevoerd met de toetsencombinatie [→] UNDO, terwijl CMD wordt uitgevoerd met [←] CMD.

Om het gebruik van UNDO te verduidelijken, kunt u de volgende oefening in de algebraïsche (ALG) modus proberen: [5] [×] [4] [÷] [3] [ENTER]. Het commando UNDO ([→] UNDO) verwijdert gewoon het resultaat. Dezelfde oefening in de RPN-modus wordt uitgevoerd met de volgende toetsencombinatie: [5] [ENTER] [4] [ENTER] [×] [3] [ENTER] [÷]. Met [→] UNDO wordt de meest recente bewerking (20/3) ongedaan gemaakt en zet de oorspronkelijke termen terug in het stapelgeheugen:

Om het gebruik van CMD te verduidelijken, kunt u het volgende in de ALG-modus invoeren. Druk na elke invoer op [ENTER].

Gebruik vervolgens de functie CMD ([←] CMD) om de vier meest recente, door de gebruiker ingevoerde commando's te tonen, d.w.z.



U kunt de pijltoetsen omhoog en omlaag ([▲] [▼]) gebruiken om door deze commando's te schuiven en om elk commando te markeren dat u opnieuw wilt uitvoeren. Druk op OK zodra u het in te voeren commando geselecteerd heeft. De functie CMD werkt op dezelfde manier in de RPN-modus, behalve dat de lijst van commando's alle algebraïsche getallen weergeeft. De ingevoerde functies worden niet weergegeven. Probeer bijvoorbeeld de volgende oefening in de RPN-modus:

[5] [ENTER] [2] [ENTER] [3] [÷] [×] [SIN]
['] [SIN] [5] [×] [2] [ENTER].

Door op [←] CMD te drukken verschijnt het volgende keuzevenster:

Zoals u kunt zien, staan de getallen 3, 2 en 5, gebruikt in de eerste bovenstaande berekening in het keuzevenster, evenals de algebraïsche 'SIN (5X2)', maar staat de functie SIN er niet in die eerder ingevoerd werd in de ALG-modus.

Vlaggen

Een vlag is een Boolean waarde, die ingesteld of gewist kan worden (waar of vals) en die een gegeven instelling van de rekenmachine of een optie in een programma weergeeft. In de rekenmachine worden vlaggen geïdentificeerd door getallen. Er zijn 256 vlaggen, genummerd van -128 tot 128. Positieve vlaggen worden gebruikersvlaggen genoemd en kunnen door de gebruiker gebruikt worden bij het programmeren. Negatieve vlaggen worden systeemvlaggen genoemd en hebben betrekking op de werkwijze van de rekenmachine.

Druk op de toets MODE en vervolgens op de softmenutoets FLAGS (d.w.z. F1) voor de huidige instelling van het systeemvlaggen. Het beeldscherm *SYSTEM FLAGS* verschijnt met een lijst met vlaggetallen en de bijbehorende instelling.

(**Opmerking**: aangezien in dit beeldscherm alleen systeemvlaggen staan, wordt alleen de absolute waarde van het flaggetal getoond. Van een vlag wordt gezegd dat hij *ingesteld* is als er een vinkje (✓) voor het vlagnummer staat. Anders is de vlag niet *ingesteld* of *verwijderd.* Druk op ✓CHK! om de status van een systeemvlag te veranderen of druk op de +/- toets. U kunt de pijltoetsen omhoog en omlaag (▲▼) gebruiken om door de lijst van systeemvlaggen te bewegen.

Alhoewel er 128 systeemvlaggen zijn, worden ze niet allemaal gebruikt en worden er enkele gebruikt voor de interne systeemcontrole. Systeemvlaggen die niet toegankelijk zijn voor de gebruiker staan niet in dit beeldscherm. In Hoofdstuk 24 staat de volledige vlaggenlijst.

Voorbeeld van vlaginstelling : algemene oplossingen versus hoofdwaarde

De standaardwaarde voor bijvoorbeeld systeemvlag 01 is *Algemene oplossingen*. Dit betekent dat wanneer een vergelijking meerdere oplossingen heeft, alle oplossingen teruggestuurd worden door de rekenmachine, hoogstwaarschijnlijk in een lijst. Door op de softmenutoets ✓CHK te drukken, kunt u de systeemvlag 01 veranderen naar *Hoofdwaarde*. Deze instelling forceert de rekenmachine om een enkele waarde te geven en die bekend staat als de hoofdwaarde van de oplossing.

Stel, om dit in de praktijk te zien, eerst systeemvlag in op 01 (d.w.z. selecteer *Hoofdwaarde*). Druk twee keer op OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren. Wij proberen nu een vierkantsvergelijking op te lossen, bijv. $t^2+5t+6 = 0$, met het commando QUAD.

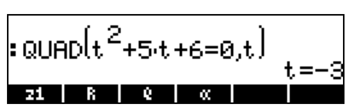
Algebraïsche modus

Gebruik de volgende toetsencombinatie: → CAT ALPHA Q (gebruik de pijltoetsen omhoog en omlaag, ▲▼, om het commando QUAD te selecteren) en druk op OK .

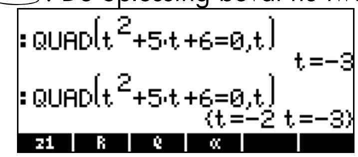
Gebruik de volgende toetsencombinatie om de vergelijking als het eerste argument van de functie QUAD in te voeren:

→ EQW ALPHA ← T yˣ 2 ▶ + 5 × ALPHA ← T + 6 ▲ ▲
→ = 0 ENTER
→ , ALPHA ← T ENTER

Het resultaat is:



Verander nu de instelling van vlag 1 naar *General solutions* (Algemene oplossingen): MODE FLAGS ✓CHK OK OK. En probeer de oplossing opnieuw: ▲ ▲ ENTER ENTER. De oplossing bevat nu twee waarden:



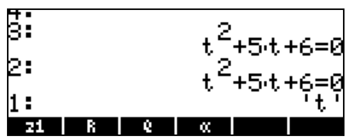
RPN-modus

Stel eerst de systeemvlag in op 01 (d.w.z. *Hoofdwaarde*). Druk twee keer op OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren. Voer daarna de vierkantsvergelijking als volgt in:

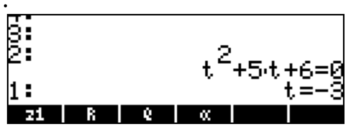
→ EQW ALPHA ← T yˣ 2 ▶ + 5 × ALPHA ← T + 6 ▲ ▲
→ = 0 ENTER

ENTER (waarbij een tweede kopie in het RPN-stapelgeheugen blijft staan)

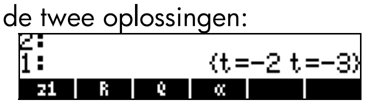
' ALPHA ← T ENTER



Gebruik de volgende toetsencombinatie om het commando QUAD in te voeren: → CAT ALPHA Q (gebruik de pijltoetsen omhoog en omlaag, ▲ ▼, om het commando QUAD te selecteren) en druk op OK. Het beeldscherm geeft de hoofdoplossing:



Verander nu de instelling van vlag 01 naar *General solutions*:
MODE FLAGS ✓CHK OK OK. En probeer de oplossing opnieuw: ◀ ' ALPHA ← T ENTER → CAT ALPHA Q (gebruik de pijltoetsen omhoog en omlaag, ▲ ▼, om het commando QUAD te selecteren) en druk op OK.
Het beeldscherm geeft de twee oplossingen:



Andere belangrijke vlaggen

Activeer opnieuw de huidige vlaginstelling door op de toets MODE en daarna op de softmenutoets FLAGS te drukken. Verwijder de instelling van de systeemvlag zoals in de voorgaande oefening. Gebruik de pijltoetsen omhoog en omlaag (▲ ▼) om door de lijst van de systeemvlag te schuiven. Andere belangrijke vlaggen en hun voorkeurswaarde voor de oefeningen in deze handleiding zijn:

02 Constant → symb: Constante waarden (bijvoorbeeld π) worden als symbolen bewaard.

03 Function → symb: De functies worden niet automatisch geevalueerd, in plaats daarvan worden zij geladed als symbolische uitdrukkingen.

*27 'X+Y*i' → (X,Y):* Complexe getallen worden voorgesteld als gerangschikte tweetallen

60 [α][α] locks: De toetsencombinatie ALPHA ALPHA vergrendelt het alfabetische toetsenbord

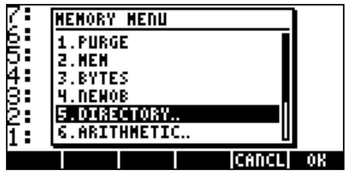
Druk twee keer op OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

CHOOSE boxes versus Soft MENU

In enkele van de oefeningen in dit hoofdstuk werden menulijsten weergegeven die in het beeldscherm verschenen. Deze menulijsten worden aangeduid met CHOOSE boxes (keuzevensters). Om bijvoorbeeld het commando ORDER te gebruiken voor het herschikken van variabelen in een directory, gebruikt u:

← PRG ▼ Voor het weergeven van de menulijst in PROG en het selecteren van MEMORY

OK ▼ ▼ ▼ ▼ Voor het weergeven van de menulijst in MEMORY en het selecteren van DIRECTORY



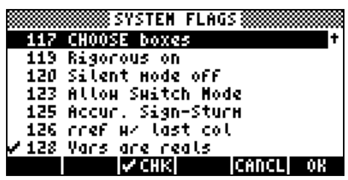
OK ▲▲ Voor het weergeven van de menulijst in DIRECTORY menulijst en het selecteren van ORDER

OK Voor het activeren van het commando ORDER

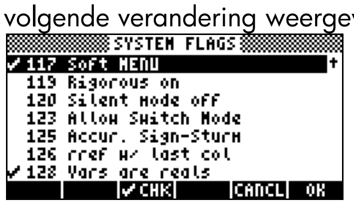
Er bestaat een andere manier omdeze menu's te openen als *soft MENU* toetsen door de instelling van vlag 117 te veranderen. Gebruik de volgende toetsencombinatie om deze vlag in te stellen:

MODE FLAGS ▲▲▲▲▲▲▲

Het beeldscherm geeft weer dat vlag 117 niet is ingesteld (CHOOSE boxes), zoals hier getoond:



Druk op de softmenutoets ✓CHK om de vlag 117 op *soft MENU* te stellen. Het beeldscherm zal de volgende verandering weergeven:



Druk twee keer om naar het normale beeldscherm terug te keren.

Probeer nu het commando ORDER te vinden met de toetsencombinatie zoals die hierboven werd gebruikt, d.w.z. u begint met ← PRG .

U ziet dat in plaats van een menulijst er softmenulabels met de verschillende opties worden weergegeven in het menu PROG, d.w.z.

Druk op F2 om het softmenu MEMORY (MEM) te selecteren. Het beeldscherm ziet er nu als volgt uit:

Druk op F5 om het softmenu DIRECTORY (DIR) te selecteren.

Het commando ORDER wordt niet op het beeldscherm weergegeven. Gebruik de toets NXT om het te vinden:

Druk op de softmenutoets F3 (ORDER) om het commando ORDER te activeren. Hoewel niet toegepast op een specifiek voorbeeld, geeft deze oefening de twee opties weer voor menu's in de rekenmachine (keuzevensters en softmenu's).

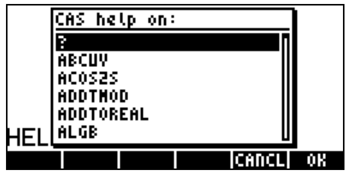
Geselecteerde CHOOSE boxes

Enkele menu's bevatten alleen keuzevensters, bijvoorbeeld:

- Het menu APPS (APPlicationS), geactiveerd met de toets APPS, de eerste toets in de tweede rij boven in het toetsenbord:

- Het menu CAT (CATalog), geactiveerd met de toets ↱ CAT, tweede toets in de vierde rij boven in het toetsenbord:

- Het menu HELP, geactiveerd met TOOL NXT HELP



- Het menu CMDS (CoMmanDS), geactiveerd in de Vergelijkingenschrijver, d.w.z. → EQW NXT CMDS

Hoofdstuk 3
Berekeningen met reële getallen

In dit hoofdstuk laten we het gebruik van de rekenmachine voor bewerkingen en functies met reële getallen zien. Dit soort bewerkingen zijn handig voor de meest frequente berekeningen in de fysica en de bouwtechniek. We gaan er vanuit dat de gebruiker bekend is met het toetsenbord zodat hij bepaalde functies op het toetsenbord herkent (b.v. SIN, COS, TAN, enz.). We gaan er ook vanuit dat de lezer weet hoe hij de bewerkingen van de rekenmachine kan instellen, d.w.z. de bedieningsmodus selecteren (zie Hoofdstuk 1), de menu's kan gebruiken en de hokjes kan uitkiezen (zie Hoofdstuk 1) en met variabelen kan werken (zie Hoofdstuk 2).

De instellingen van de rekenmachine nagaan

Om de huidige rekenmachine- en CAS-instellingen na te gaan, hoeft u alleen naar de bovenste regel in het beeldscherm van de rekenmachine (in de normale bedieningsmodus) te kijken. U ziet dan bijvoorbeeld de volgende instelling: RAD XYZ DEC **R** = 'X'

RADialen staat voor hoekmetingen, XYZ verwijst naar rechthoekige (Cartesiaanse) coördinaten, DECimaal naar basisgetal, **R**eële getallen worden verkozen = d.w.z. "exacte" resultaten en 'X' is de waarde van de onafhankelijke standaardwaarde.

Een andere mogelijke optie zou kunnen zijn DEG R∠Z HEX C ~ 't'

DEG staat hier voor 'Graden' voor hoekmetingen, R∠Z wijst op poolcoördinaten, HEX voor HEXagesimale getalbasis, C voor Complexe getallen worden toegestaan, ~ duidt op resultaten "bij benadering" en 't' is de onafhankelijke standaardvariabele.

Over het algemeen bestaat dit deel van het beeldscherm zeven elementen. Elk element wordt hieronder weergegeven van 1 tot 7. De mogelijke waarde van elk van de elementen wordt tussen haakjes weergegeven, achter de beschrijving van het element. Ook de uitleg van elk van die waarden wordt weergegeven.

1. Specificatie van de hoekmeting (DEG, RAD, GRD)
   DEG : graden, 360 graden in een volledige cirkel
   RAD : radialen, 2π radialen in een volledige cirkel
   GRD : rangordeninggraden, 400 rangordeninggraden in een volledige cirkel
2. Specificatie van het coördinatensysteem (XYZ, R∠Z, R∠∠). Symbool ∠ duidt een hoekcoördinaat aan.
   XYZ : Cartesiaans of rechthoekig (x,y,z)
   R∠Z : cilindrische poolcoördinaten (r,θ,z)
   R∠∠ : sferische coördinaten (ρ,θ,ϕ)
3. Specificatie van de getalbasis (HEX, DEC, OCT, BIN)
   HEX : hexadecimale getallen (basis 16)
   DEC : decimale getallen (basis 10)
   OCT : achttallige getallen (basis 8)
   BIN : binaire getallen (basis 2)
4. Specificatie van reële of complexe modus (**R**, **C**)
   R : reële getallen
   C : complexe getallen
5. Specificatie van exacte of benaderingsmodus (=, ~)
   = exacte (symbolische) modus
   ~ (numerieke) benaderingsmodus
6. Onafhankelijke standaard CAS-variabele (bijv. 'X', 't', enz.)

De rekenmodus nagaan

Indien de RPN-modus is geactiveerd, worden de verschillende niveaus van het stapelgeheugen weergegeven aan de linkerzijde in het beeldscherm. Indien voor de ALGEBRAIC-modus wordt gekozen, is er geen sprake van genummerde niveaus in het stapelgeheugen en verschijnt het woord ALG in de bovenste regel aan de rechterzijde in het beeldscherm. Het verschil tussen beide modi werd uitgelegd in Hoofdstuk1.

Berekeningen met reële getallen

Bij berekeningen met reële getallen kan het CAS het beste worden ingesteld op de modus *Real* (en niet *Complex*). In sommige gevallen kan er een complex resultaat verschijnen en de rekenmachine zal u dan vragen over te schakelen op de modus *Complex*. De modus *Exact* is de standaardmodus voor de meeste bewerkingen. Daarom is het aan te raden uw berekeningen in deze modus te beginnen. Indien een wijziging nodig is naar de modus *Approx* om een complexe bewerking te kunnen maken, zal de rekenmachine u hierom vragen. Voor de hoekmetingen of de specificaties voor de getalbasis zijn er geen voorkeurselecties. Berekeningen met reële getallen worden weergegeven in zowel de Algebraïsche (ALG) als in de RPN-modus.

Het teken van een getal, variabele of uitdrukking wijzigen

Maak gebruik van de +/- -toets. In de ALG-modus, kunt u op de +/- -toets drukken vóór u het getal invoert, bijv. +/- 2 • 5 ENTER. Resultaat = -2.5. In de RPN-modus moet u tenminste een deel van het getal ingevoerd te hebben, vóór u de +/- -toets kunt gebruiken, bijv. 2 • 5 +/-. Resultaat = -2.5. Indien u gebruik maakt van de functie +/- terwijl er geen commandoregel is, past de rekenmachine de functie NEG toe (inversie van het teken) op het gegeven op het eerste niveau van het stapelgeheugen.

De inversiefunctie

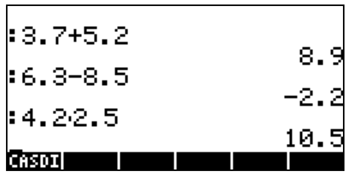
Gebruik de toets 1/x. . In de ALG-modus moet u eerst op de 1/x te drukken, gevolgd door een getal of een algebraïsche uitdrukking, bijv. 1/x 2. Resultaat =½ or 0.5. In de RPN-modus moet u eerst het getal in te geven en daarna op de inversieknop te drukken, bijv. 4 ENTER 1/x. Resultaat= ¼ or 0.25.

Optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen

Maak gebruik van de juiste operatortoetsen, namelijk + − × ÷. In de ALG-modus drukt u op een operand daarna op een operator gevolgd door ENTER om het resultaat te verkrijgen. Voorbeelden:

3 • 7 + 5 • 2 ENTER
6 • 3 − 8 • 5 ENTER
4 • 2 × 2 • 5 ENTER
2 • 3 ÷ 4 • 5 ENTER

De eerste drie van de bovenstaande bewerkingen worden weergegeven in het volgende beeldscherm:



In de RPN-modus moet u de operanden achtereenvolgens in te voeren, gescheiden door de ENTER-toets en pas aan het einde moet u op een operator drukken. Voorbeelden:

3 . 7 ENTER 5 . 2 +
6 . 3 ENTER 8 . 5 −
4 . 2 ENTER 2 . 5 ×
2 . 3 ENTER 4 . 5 ÷

In de RPN-modus daarentegen, kunt u de operanden van elkaar scheiden met een spatie (SPC), alvorens op de operator te drukken. Voorbeelden:

3 . 7 SPC 5 . 2 +
6 . 3 SPC 8 . 5 −
4 . 2 SPC 2 . 5 ×
2 . 3 SPC 4 . 5 ÷

Het gebruik van de haakjes

Haakjes kunnen gebruikt worden om groepsbewerkingen uit te voeren en om argumenten van functies samen te voegen. U krijgt de haakjes met de volgende toetsencombinatie ← () . Haakjes moeten altijd als paar worden ingevoerd. Bijvoorbeeld, om (5+3.2)/(7-2.2) te berekenen:

In de ALG-modus:
← () 5 + 3 . 2 ▶ ÷ ← () 7 − 2 . 2 ENTER

In de RPN-modus zijn de haakjes niet nodig. De bewerkingen worden rechtstreeks in het stapelgeheugen uitgevoerd:
5 ENTER 3 . 2 ENTER + 7 ENTER 2 . 2 ENTER − ÷

In de RPN-modus kunt u de uitdrukking tussen aanhalingstekens invoeren zoals in de algebraïsche modus:

['] [←] () [5] [+] [3] [.] [2] [▶] [÷]
[←] () [7] [−] [2] [.] [2] [ENTER] [EVAL]

In zowel de ALG- als de RPN-modus kunt u de Vergelijkingenschrijver gebruiken:

[→] EQW [5] [+] [3] [.] [2] [▶] [÷] [7] [−] [2] [.] [2]

De uitdrukking kan geëvalueerd worden binnen de Vergelijkingenschrijver, door middel van de volgende formule:

[▲] [▲] [▲] [▲] EVAL of [→] [▲] EVAL

Absolute waardefunctie

De absolute waardefunctie, ABS, wordt verkregen met de volgende toetsencombinatie: [←] ABS . Indien u in het stapelgeheugen werkt in de ALG-modus, moet u de functie vóór het argument in te voeren, bijv. [←] ABS [+/-] [2] [.] [3] [2] [ENTER]

In de RPN-modus, moet u eerst het getal in te voeren en vervolgens de functie, bijvv.:

[2] [.] [3] [2] [+/-] [←] ABS

Kwadraten en vierkantswortels

De kwadraatfunctie, SQ, kan met de volgende toetsencombinatie geactiveerd worden: [←] x^2 . Indien u in het stapelgeheugen werkt in de ALG-modus, moet u de functie vóór het argument invoeren, bijv. [←] x^2 [+/-] [2] [.] [3] [ENTER] .

In de RPN-modus, moet u eerst het getal invoeren en vervolgens de functie, bijv.:

[2] [.] [3] [+/-] [←] x^2

De vierkantswortelfunctie, √, kan met de R toets geactiveerd worden. Indien u in het stapelgeheugen werkt in de ALG-modus, moet u de functie vóór het argument invoeren.

[√x] [1] [2] [3] [.] [4] [ENTER]

In de RPN-modus moet u eerst het getal invoeren en vervolgens de functie, bijv.:

[1] [2] [3] [.] [4] [√x]

Machten en wortels

De machtsfunctie, ^, kan met de [Y^x]-toets geactiveerd worden. Indien u in het stapelgeheugen werkt in de ALG-modus, moet u eerst de basis invoeren (y), gevolgd door de [Y^x]-toets en vervolgens de exponent (x), bijv.: [5][•][2][Y^x][1][•][2][5].

In de RPN-modus, moet u eerst het getal invoeren en vervolgens de functie, bijv.: [5][•][2][ENTER][1][•][2][5][ENTER][Y^x]

De wortelfunctie, XROOT(y,x) kan met de volgende toetsencombinatie geactiveerd worden: [→][ˣ√y]. Indien u in het stapelgeheugen werkt in de ALG-modus, moet u de functie XROOT invoeren gevolgd door de argumenten (y,x), welke onderling gescheiden worden door komma's, bijv.:

[→][ˣ√y][3][→][,][2][7][ENTER]

In de RPN-modus, moet u eerst het argument y invoegen en daarna x en tenslotte de functie-oproep, bijv.: [2][7][ENTER][3][ENTER][→][ˣ√y]

Basis-10 logarithmen en machten van 10

Logaritmen van basis 10 worden berekend met de toetsencombinatie [→][LOG] (functie LOG), terwijl de inverse functie (ALOG of antilogaritme) wordt berekend met [←][10^x]. In de ALG-modus wordt de functie ingevoerd vóór het argument:

[→][LOG][2][•][4][5][ENTER]
[←][10^x][+/-][2][•][3][ENTER]

In de RPN-modus wordt het argument vóór de functie ingevoerd.

[2][•][4][5][ENTER] [→][LOG]
[2][•][3][+/-][ENTER] [←][10^x]

Het gebruik van machten van 10 bij het invoeren van gegevens

Machten van 10, d.w.z. getallen in de vorm -4.5×10^{-2}, enz., worden ingevoerd met de [EEX]-toets. Bijvoorbeeld, in de ALG-modus:

[+/-][4][•][5][EEX][+/-][2][ENTER]

Of in de RPN-modus:

[4][•][5][+/-][EEX][2][+/-][ENTER]

Natuurlijke logaritmen en de exponentiële functie

Natuurlijke logaritmen (d.w.z. logaritmen van basis *e = 2.7182818282)* worden berekend met de toetsencombinatie [→][LN] (functie LN), terwijl de inverse functie, de exponentiële functie (functie EXP), wordt berekend met ← eˣ . In de ALG-modus wordt de functie ingevoerd vóór het argument:

→ LN 2 • 4 5 ENTER
← eˣ +/- 2 • 3 ENTER

In de RPN-modus wordt het argument vóór de functie ingevoerd.

2 • 4 5 ENTER → LN
2 • 3 +/- ENTER ← eˣ

Trigonometrische functies

Drie trigonometrische functies zijn rechtstreeks beschikbaar via het toetsenbord: sinus (SIN), cosinus , (COS) en tangent (TAN). De argumenten van deze functie zijn hoeken, daarom kunnen ze worden ingevoerd in elk systeem van hoekmetingen (graden, radialen, rangordeninggraden). Bijvoorbeeld, indien we de optie DEG selecteren, kunnen we de volgende trigonometrische functies berekenen:

In de ALG-modus:

SIN 3 0 ENTER
COS 4 5 ENTER
TAN 1 3 5 ENTER

In de RPN-modus:

3 0 ENTER SIN
4 5 ENTER COS
1 3 5 ENTER TAN

Inverse trigonometrische functies

De inverse trigonometrische functies die rechtstreeks beschikbaar zijn op het toetsenbord zijn de boogsinus (ASIN), boogcosinus (ACOS) en boogtangent (ATAN) en kunnen geactiveerd worden met respectievelijk de volgende toetsencombinaties ← ASIN , ← ACOS en ← ATAN . Aangezien de inverse trigonometrische functies hoeken vertegenwoordigen, vindt u het antwoord voor deze functies in de geselecteerde hoekmeting (DEG, RAD, GRD). Hieronder worden enkele voorbeelden weergegeven:

In de ALG-modus:

← ASIN 0 • 2 5 ENTER
← ACOS 0 • 8 5 ENTER
← ATAN 1 • 3 5 ENTER

In de RPN-modus:

0 . 2 5 ENTER ← ASIN
0 . 8 5 ENTER ← ACOS
1 . 3 5 ENTER ← ATAN

Alle functies die hierboven worden beschreven, namelijk , ABS, SQ, √, ^, XROOT, LOG, ALOG, LN, EXP, SIN, COS, TAN, ASIN, ACOS, ATAN, kunnen worden gecombineerd met de basisbewerkingen (+ − × ÷) om complexere uitdrukkingen te vormen. De vergelijkingenschrijver, waarvan de werking wordt beschreven in Hoofdstuk 2, is ideaal om zulke uitdrukkingen op te bouwen, ongeacht de modus van de rekenmachine.

Verschillen tussen functies en operatoren

Functies als , ABS, SQ, √, LOG, ALOG, LN, EXP, SIN, COS, TAN, ASIN, ACOS, ATAN vereisen één argument, Daarom is hun toepassing in de ALG-modus eenduidig, bijv. ABS (x). Sommige functies, zoals XROOT vereisen twee argumenten, bijv. XROOT (x,y). Deze functie heeft de toetsencombinatie → $\sqrt[x]{y}$.

Operatoren worden daarentegen na één argument of tussen twee argumenten geplaatst. De operator factor (!) wordt bijvoorbeeld na een getal geplaatst, bijv. 5 ALPHA → 2 ENTER. Aangezien deze operator één argument vereist, wordt het een monadische operator genoemd. Operatoren die twee argumenten vereisen, zoals + − × ÷ Y^x, zijn binaire operatoren, bijv. 3 × 5 of 4 Y^x 2.

Functies voor reële getallen in het menu MTH

Het menu MTH (MaTHematics) bevat een aantal wiskundige functies die meestal van toepassing zijn op reële getallen. met de toetsencombinatie ← MTH kunt u het menu MTH openen. Met systeemvlag 117 ingesteld op de standaardinstelling *CHOOSE boxes* (zie Hoofdstuk 2), wordt het menu MTH weergegeven als de volgende menulijst:

Aangezien de rekenmachine een groot aantal wiskundige functies aanbiedt, wordt het menu gerangschikt volgens het type object waarop de functie kan worden toegepast. Bijvoorbeeld, de opties 1. *VECTOR..*, *2. MATRIX..* en *3. LIST..* zijn van toepassing op de overeenkomstige gegevenstypes (vectoren, matrices en lijsten) en worden uitvoerig beschreven in de volgende hoofdstukken. Opties *4. HYPERBOLIC..* en *5. REAL* ..zijn van toepassing op reële getallen en worden verderop uitgebreid beschreven. Optie *6. BASE..* wordt gebruikt om getallen in verschillende basissen te converteren en wordt eveneens in een apart hoofdstuk uitgebreid beschreven. Optie *7. PROBABILITY..* wordt gebruikt voor waarschijnlijkheidstoepassingen en wordt eveneens verderop beschreven. Optie *8. FFT..* .(Fast Fourier Transform) is een toepassing i.v.m. signaalverwerking waar in een volgend hoofdstuk nog op wordt teruggekomen. Optie *9. COMPLEX..* bevat functies die geschikt zijn voor complexe getallen, ze worden eveneens in een volgend hoofdstuk beschreven. Optie *10. CONSTANTS..* geeft u toegang tot de constanten van de rekenmachine. Deze optie komt later in deze sectie nog aan bod. Tenslotte is er nog Optie *11. SPECIAL FUNCTIONS..* deze optie bevat functies voor gevorderde wiskundetoepassingen die ook in dit hoofdstuk ter sprake zullen komen.

Meestal moet u het aantal argumenten en hun volgorde kennen om één van deze functies toe te passen. Onthoud dat u in de ALG-modus eerst de functie moet selecteren en daarna het argument moet invoeren, terwijl u in de RPN-modus eerst het argument in het stapelgeheugen moet invoeren en vervolgens de functie moet selecteren.

Het gebruik van rekenmenu's:

1. Aangezien de werking van functies in het menu MTH (en van vele andere rekenmenu's) erg op elkaar lijken, zullen we een gedetailleerde beschrijving geven van het gebruik van het menu *4. HYPERBOLIC..* in dit gedeelte, met de bedoeling om een algemene beschrijving te geven van de werking van de menu's van een rekenmachine. Let vooral goed op hoe u verschillende opties selecteert.

2. Om snel één van de genummerde opties te selecteren in een menulijst (of CHOOSE boxes) moet u eenvoudigweg het nummer van de optie indrukken op het toetsenbord. Bijvoorbeeld, om optie *4. HYPERBOLIC..* te selecteren in het menu MTH, drukt u gewoon op 4.

Hyperbolische functies en hun inversies

Als u Optie *4. HYPERBOLIC ..* selecteert in het menu MTH en op OK drukt, verschijnt het hyperbolisch functiemenu:

De hyperbolische functies zijn de volgende:

Hyperbolische sine, SINH, en zijn inversie, ASINH of $\sinh^{-1}$
Hyperbolische cosine, COSH, en zijn inversie, ACOSH of $\cosh^{-1}$
Hyperbolische tangent, TANH, en zijn inversie, ATANH of $\tanh^{-1}$

Dit menu bevat ook de volgende functies:

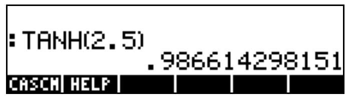
$$\text{EXPM}(x) = \exp(x) - 1,$$
$$\text{LNP1}(x) = \ln(x+1).$$

Met oOptie *9. MATH* keert de gebruiker terug naar het menu MTH.

In de ALG-modus kan met de volgende toetsencombinatie bijvoorbeeld *tanh(2.5)* berekend worden:

← MTH	Selecteert het menu *MTH*
4 OK	Selecteert het menu *4. HYPERBOLIC..*
5 OK	Selecteert de functie *5. TANH*
2 . 5 ENTER	Evalueert *tanh(2.5)*

Het beeldscherm geeft ons de volgende informatie:

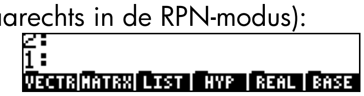


In de RPN-modus kan deze berekening met de volgende toetsencombinaties worden uitgevoerd:

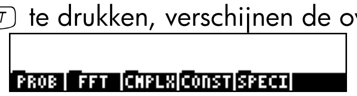
2 . 5 ENTER	Voert het argument in in het stapelgeheugen
← MTH	Selecteert het menu *MTH*
4 OK	Selecteert het menu *4. HYPERBOLIC..*
5 OK	Selecteert de functie *5. TANH*

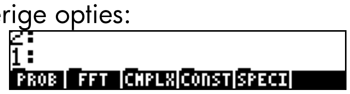
Het resultaat is:

De bewerkingen die hierboven worden weergegeven, gaan er vanuit dat systeemvlag 117 is ingesteld op de standaardinstellingen *(CHOOSE boxes)*. Indien u de instelling van deze vlag heeft gewijzigd (zie Hoofdstuk 2) naar *SOFT menu*, zal het menu MTH worden weergegeven als de labels van de softmenutoetsen , (links in de ALG-modus, aarechts in de RPN-modus):



Door op NXT te drukken, verschijnen de overige opties:





Opmerking: Door op ← PREV te drukken, keert u terug naar de eerste reeks MTH-opties. Met de toetsencombinatie → ▼ verschijnen alle menufuncties in het beeldscherm, bijv.:

Druk op HYP om bijvoorbeeld het hyperbolische functiemenu in de volgende opmaak te selecteren:

Druk op TANH . om bijvoorbeeld de hyperbolische tangentfunctie (tanh) te selecteren.

Opmerking: druk op NXT of ← PREV om de overige opties van deze softmenu's te bekijken.

Volg de volgende procedure uit om in de ALG-modus *tanh(2.5)* te berekenen, terwijl *SOFT menus* is geselecteerd in plaats van *CHOOSE boxes:*

← MTH	Selecteert het menu *MTH*
HYP	Selecteert het menu *HYPERBOLIC..*
TANH	Selecteert de functie *TANH*
2 . 5 ENTER	Evalueert *tanh(2.5)*

In de RPN-modus wordt dezelfde waarde op de volgende manier berekend:

2 . 5 ENTER	Voert het argument in in het stapelgeheugen
← MTH	Selecteert het menu *MTH*
HYP	Selecteert het menu *HYPERBOLIC..*
TANH	Selecteert de functie *TANH*

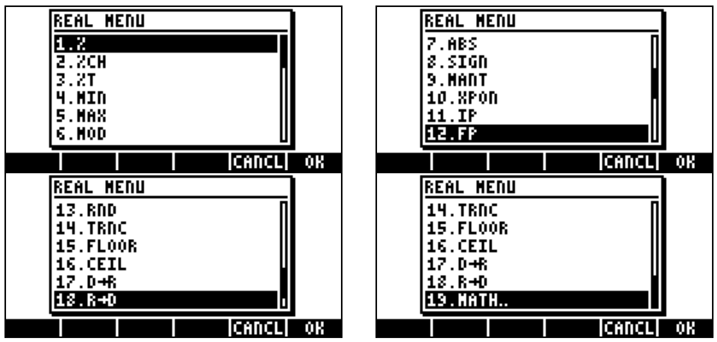
Om te oefenen met het toepassen van de hyperbolische functies, kunt u de volgende waarden nagaan:

SINH (2.5) = 6.05020..	*SINH*^{1}*(2.0) = 1.4436…*
COSH (2.5) = 6.13228..	*ACOSH*^{1}*(2.0) = 1.3169…*
TANH (2.5) = 0.98661..	*TANH*^{1}*(0.2) = 0.2027…*
EXPM(2.0) = 6.38905….	*LNP1(1) = 0.69314….*

Nogmaals, de algemene procedure die in dit gedeelte is gebruikt, kan worden toegepast voor het selecteren van opties uit elk menu van deze rekenmachine.

Reële getalfuncties

Door optie *5. REAL..* in het menu MTH te selecteren, met systeemvlag 117 ingesteld op *CHOOSE boxes*, wordt de volgende menulijst aangemaakt:



Met optie *19. MATH..* keert de gebruiker terug naar het menu MTH. De overige functies worden gerangschikt in de onderstaande 6 groepen:

Indien systeemvlag 117 ingesteld is op *SOFT menus*, zal het functiemenu *REAL* er als volgt uitzien (in de ALG-modus weergegeven, dezelfde softmenutoetsen zijn beschikbaar in de RPN-modus):

Met de allerlaatste optie, MTH, keert de gebruiker weer terug naar het menu MTH.

Percentagefuncties

Deze functies worden gebruikt om percentages en verwante waarden als volgt te berekenen:

% (y,x) : berekent het x-percentage van y

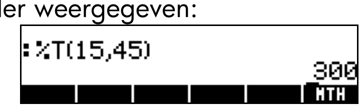
%CH(y,x) : berekent 100(y-x)/x, d.w.z. de percentageverandering, het verschil tussen twee getallen.

%T(y,x) : berekent 100 x/y d.w.z. het totaalpercentage, het gedeelte dat een getal (x) is van een ander (y).

Deze functies vereisen 2 argumenten. Hierna volgt de berekening van *%T(15,45)*, d.w.z. de berekening van 15% van 45. We gaan ervan uit dat de rekenmachine ingesteld is op de ALG-modus en dat systeemvlag 117 ingesteld is op *CHOOSE boxes*. De stappen zijn als volgt:

← MTH	Selecteert het menu *MTH*
5 OK	Selecteert het menu *5. REAL..*
3 OK	Selecteert de functie *5. %T*
1 5	Voert het eerste argument in
→ ,	Voert een komma in tussen de verschillende argumenten
4 5	Voert het tweede argument in
ENTER	Berekent de functie

Het resultaat wordt hieronder weergegeven:



Onthoud dat in de RPN-modus argument y zich op het tweede niveau in het stapelgeheugen bevindt, terwijl argument x terug te vinden is op het eerste niveau in het stapelgeheugen. Dit betekent dat u eerst x zou moeten invoeren en vervolgens y, net als in de ALG-modus. Met andere woorden, de berekening van *%T(15,45)*, in de RPN-modus en met systeemvlag 117 ingesteld op *CHOOSE boxes*, ziet er als volgt uit:

1 5 ENTER	Voert het eerste argument in
4 5 ENTER	Voert het tweede argument in
← MTH	Selecteert het menu *MTH*
5 OK	Selecteert het menu *5. REAL..*
3 OK	Selecteert de functie *5. %T*

Opmerking: de oefeningen in dit gedeelte illustreren het algemene gebruik van de functies van de rekenmachines met 2 argumenten. De werking van functies met 3 of meer argumenten kan worden afgeleid uit deze voorbeelden.

Als oefening voor functies met percentages kunt u de volgende waarden berekenen: *%(5,20) = 1, %CH(22,25) = 13.6363.., %T(500,20) = 4*

Minimum en maximum
Gebruik deze functies om de minimum en de maximumwaarde te bepalen van twee argumenten.

MIN(x,y) : minimumwaarde van x en y
MAX(x,y) : maximum waarde van x en y

Ga als oefeninghet volgende na: *MIN(-2,2) = -2, MAX(-2,2) = 2*

Modulo
MOD: y mod x = residu van y/x, d.w.z. als x en y hele getallen zijn, y/x = d + r/x, als d = quotiënt, r = residu. In dit geval, r = y mod x.

MOD is geen functie, maar eerder een operator, d.w.z. dat in de ALG-modus, MOD zou moeten worden gebruikt als `y MOD x`, en niet als `MOD(y,x)`. Op deze wijze is de MOD-bewerking gelijk aan [+], [−], [×], [÷].

Ga sls oefening het volgende na: *15 MOD 4 = 15 mod 4 = residu van 15/4 = 3*

Absolute waarde, teken, mantisse, exponent, heel getal en breukgedeeltes

ABS(x) : berekent de absolute waarde, |x|
SIGN(x) : bepaalt het teken van x, d.w.z. -1, 0, of 1.
MANT(x) : bepaalt de mantisse van een getal gebaseerd op $\log_{10}$.
XPON(x) : bepaalt de macht van 10 in het getal
IP(x) : bepaalt het hele getal van een reëel getal
FP(x) : bepaalt het breukgedeelte van een reëel getal

Ga als oefening het volgende na: *ABS(-3) = |-3| = 3, SIGN(-5) = -1, MANT(2540) = 2.540, XPON(2540) = 3, IP(2.35) = 2, FP(2.35) = 0.35.*

Afronding, afsnijding, minimum en maximum functies

RND(x,y) : rond y af tot x aantal decimalen
TRNC(x,y) : snijd y af tot x aantal decimalen

FLOOR(x) : dichtste hele getal dat kleiner of gelijk is aan x
CEIL(x) : dichtste hele getal dat groter of gelijk is aan x

Ga als oefening het volgende na: *RND(1.4567,2) = 1.46, TRNC(1.4567,2) = 1.45, FLOOR(2.3) = 2, CEIL(2,3) = 3*

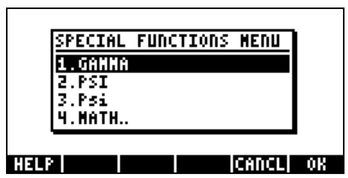
Radialen-naar-graden en graden-naar-radialenfunctie

D→R (x) : zet graden om in radialen
R→D (x) : zet radialen om in graden.

Ga als oefening het volgende na: *D→R(45) = 0.78539* (d.w.z. 45° = 0.78539^{rad}), *R→D(1.5) = 85.943669..* (d.w.z. 1.5^{rad} = 85.943669..°).

Speciale functies

Optie *11. Special functions* in het menu MTH bevat de volgende functies:



GAMMA: de Gamma-functie $\Gamma(\alpha)$
PSI : N-de afgeleide van de digamma functie
Psi : Digamma functie, afgeleide van de ln(Gamma)

<u>De *Gamma-functie*</u> wordt als volgt bepaald: $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$. Deze functie vindt zijn toepassing in toegepaste wiskunde voor fysica en bouwtechnieken, alsook waarschijnlijkheid en statistiek.

<u>Het factorieel van een getal</u>
Het factorieel van een positief heel getal *n* wordt gedefinieerd als *n!=n·(n-1)·(n-2) …3·2·1* met *0! = 1*. De factoriële functie wordt geactiveerd met de toetsencombinatie ALPHA ↱ 2. Zowel in de ALG- als in de RPN-modus moet eerst het getal ingevoerd worden, gevolgd door ALPHA ↱ 2. Bijvoorbeeld: 5 ALPHA ↱ 2 ENTER .De Gamma-functie, die hierboven beschreven staat, heeft de volgende eigenschap:

$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\ \Gamma(\alpha-1)$, voor $\alpha > 1$.

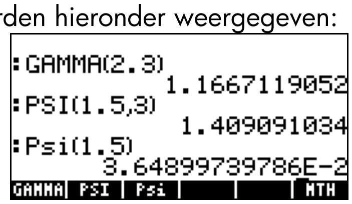
Daarom kan deze functie in relatie gebracht worden met het factorieel van een getal, m.a.w. $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$, als α een positief heel getal is. We kunnen de factoriële functie ook gebruiken om de Gamma-functie te berekenen, en viceversa. Bijvoorbeeld, $\Gamma(5) = 4!$ of 4 ALPHA ↱ 2 ENTER. De factorieelfunctie kan geactiveerd worden met optie *7. PROBABILITY..* in het menu MTH.

De PSI-functie: $\Psi(x,y)$ stelt de y-ste afgeleide voor van de digamma-functie, d.w.z. $\Psi(n,x) = \frac{d^n}{dx^n}\psi(x)$, waar $\psi(x)$ bekend is als de digamma-functie, of de Psi-functie. Bij deze functie moet *y* een positief heel getal zijn.

De Psi-functie, $\psi(x)$ of de digamma-functie, wordt als volgt weergegeven $\psi(x) = \ln[\Gamma(x)]$.

Voorbeelden van deze speciale functies worden hier weergegeven, zowel in de ALG-modus als in de RPN-modus. Ga als oefening het volgende na: *GAMMA(2.3) = 1.166711…, PSI(1.5,3) = 1.40909..,* en *Psi(1.5) = 3.64899739..E-2.*

Deze berekeningen worden hieronder weergegeven:



Constanten van de rekenmachine

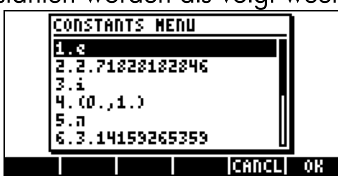
Van de volgende mathematische constanten maakt uw rekenmachine gebruik:

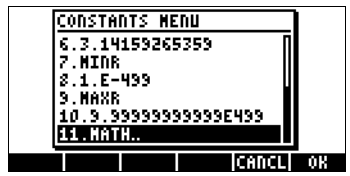
- *e*: de basis van de natuurlijke logaritmen.
- *I*: de denkbeeldige eenheid, $i^2 = -1$.
- π: de verhouding van de lengte van de cirkel en zijn diameter.
- MINR: het kleinste reële getal beschikbaar op de rekenmachine.

- MAXR: het grootste reële getal beschikbaar op de rekenmachine.

Selecteer optie *11. CONSTANTS..* in het menu MTH om deze constanten te activeren.

De constanten worden als volgt weergegeven:





Indien u één van deze opties selecteert, wordt de geselecteerde waarde in het stapelgeheugen opgeslagen, ongeacht het nu gaat om een symbool (bijv. *e*, *i*, π, *MINR* of *MAXR*) of een waarde (*2.71.., (0,1), 3.14.., 1E-499, 9.99..E499*).

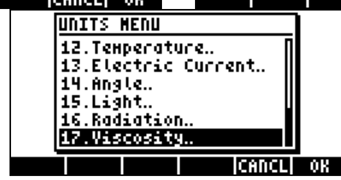
e is rechtstreeks te activeren via het toetsenbord als *exp(1)*, d.w.z. ← e^x 1 ENTER in de ALG-modus of 1 ENTER ← e^x in de RPN-modus. π is eveneens rechtstreeks te activeren met ← π . *i* kan ook geactiveerd worden met ← *i* .

Bewerkingen met eenheden

Getallen in de rekenmachine kunnen aan eenheden gekoppeld zijn. Het is dus mogelijk een resultaat te berekenen aan de hand van een consistent systeem van eenheden en tot een resultaat te komen met de juiste combinatie van eenheden.

Het menu UNITS

Het eenhedenmenu wordt geactiveerd door middel van → UNITS (behorende bij toets 6). Met systeemvlag 117 ingesteld op *CHOOSE boxes* is het resultaat het volgende menu:

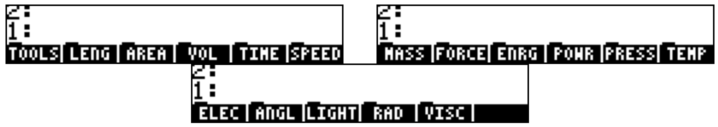


Optie *1. Tools* bevat functies die gebruikt worden om met eenheden te werken (dit wordt later besproken). Opties *3. Length..* tot en met *17.Viscosity* .. bevatten menu's met een aantal eenheden voor ieder van de beschreven hoeveelheden. Bijvoorbeeld, door optie *8. Force..* te selecteren, wordt het volgende eenhedenmenu weergegeven:

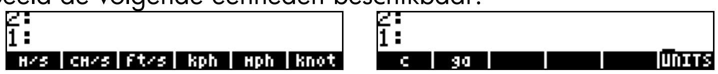
De gebruiker herkent de meeste van deze eenheden (sommige zoals dyne worden tegenwoordig niet vaak meer gebruikt) van zijn of haar natuurkundelessen: *N* =Newton, *dyn* = dynes, *gf* = gramkracht (als onderscheid van grammassa, of gewoon gram, een massa-eenheid), *kip* = kilopond (1000 pond), *lbf* = pond-kracht (als onderscheid van pondmassa), *pdl* = poundal.

Om een eenheidsobject te koppelen aan een getal, moet het getal gevolgd worden door een onderliggend streepje. Een kracht van 5N wordt dus ingevoerd als 5_N.

Voor uitgebreide bewerkingen met eenheden bieden SOFT menu's een makkelijkere manier om eenheden te koppelen. Wijzig systeemvlag 117 naar SOFT menu's (zie Hoofdstuk 1) en gebruik de toetsencombinatie ↱ UNITS voor de volgende menu's . Druk op NXT om verder te gaan naar de volgende menupagina.

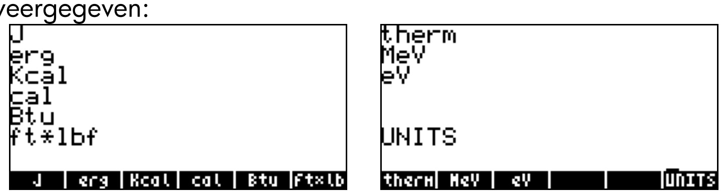


Door op de juiste softmenutoets te drukken, wordt het submenu geopend met eenheden voor die specifieke selectie. Voor het SPEED-submenu zijn bijvoorbeeld de volgende eenheden beschikbaar:



Door op UNITS te drukken, keert u terug naar het menu UNITS.

We hebben al gezien dat u alle menulabels in het scherm kunt weergeven door middel van ↱ ▼. Voor de ENRG-eenheden worden de volgende labels weergegeven:



Opmerking: gebruik de toets NXT of de toetsencombinatie ↰ PREV om door de menu's te bladeren.

Beschikbare eenheden

Hierna volgt een lijst van beschikbare eenheden in het menu UNITS. Eerst wordt het symbool voor de eenheid aangeduid gevolgd door de naam van de eenheid tussen haakjes:

LENGTE

m (meter), cm (centimeter), mm (millimeter), yd (yard), ft (voet), in (inch), Mpc (Mega parsec), pc (parsec), lyr (lichtjaar), au (astronomische eenheid), km (kilometer), mi (internationale mijl), nmi (zeemijl), miUS (wettelijke Amerikaanse mijl), chain (keten), rd (rod), fath (vadem), ftUS (Amerikaanse voet), Mil (Mil), μ (micron), Å (Angstrom), fermi (Fermi)

OPPEVLAKTE
m^2 (vierkante meter), cm^2 (vierkante centimeter), b (barn), yd^2 (vierkante yard), ft^2 (vierkante feet), in^2 (vierkante inch), km^2 (vierkante kilometer), ha (hectare), a (are), mi^2 (vierkante mijl), miUS^2 (vierkante Amerikaanse mijl), acre (acre)

VOLUME
m^3 (kubieke meter), st (stère), cm^3 (kubieke centimeter), yd^3 (kubieke yard), ft^3 (kubieke feet), in^3 (kubieke inch), l (liter), galUK (Engelse gallon), galC (Canadese gallon), gal (Amerikaanse gallon), qt (quart), pt (pint), ml (milliliter), cu (Amerikaanse kop), ozfl (Amerikaanse ounce), ozUK (Engelse ounce), tbsp (eetlepel), tsp (koffielepel), bbl (ton), bu (bushel), pk (peck), fbm (Amerikaanse houtmaat)

TIJD
yr (jaar), d (dag), h (uur), min (minuut), s (seconde), Hz (hertz)

SNELHEID
m/s (meter per seconde), cm/s (centimeter per seconde), ft/s (voet per seconde), kph (kilometer per uur), mph (mijl per uur), knot (zeemijl per uur), c (snelheid van het licht), ga (zwaartekrachtversnelling)

MASSA
kg (kilogram), g (gram), Lb (avoirdupois pond), oz (ounce), slug (slok), lbt (Troy pond), ton (Amerikaanse ton), tonUK (Engelse ton), t (metrische ton), ozt (Troy ounce), ct (karaat), grain (korrel), u (universeel atoomgewicht), mol (mole)

KRACHT
N (newton), dyn (dyne), gf (gramkracht), kip (kilopondkracht), lbf (pondkracht), pdl (poundal)

ENERGIE
J (joule), erg (erg), Kcal (kilocalorie), Cal (calorie), Btu (Intenationale btu tabel), ft×lbf (voetpond), therm (EEC warmte-eenheid), MeV (mega electronvolt), eV (electronvolt)

VERMOGEN
W (watt), hp (paardenkracht),

DRUK
Pa (pascal), atm (atmosfeer), bar (bar), psi (pond per vierkante inch), torr (torr), mmHg (millimeters kwikkolom), inHg (inches kwikkolom), inH20 (inches waterkolom),

TEMPERATUUR
° C (graden Celsius), ° F (graden Fahrenheit), K (Kelvin), ° R (graden Rankine),

ELECTRISCHE STROOM (Electrische meeteenheden)
V (volt), A (ampère), C (coulomb), Ω (ohm), F (farad), W (watt), Fdy (faraday), H (henry), mho (mho), S (siemens), T (tesla), Wb (weber)

HOEK (planaire en ruimtehoekmetingen)
° (sexagesimale graad), r (radiaal), grad (ordeningsgraad), arcmin (boogminuut), arcs (boogseconde), sr (steradiaal)

LICHT (Verlichtingseenheden)
fc (voetkaars), flam (voetlambert), lx (lux), ph (phot), sb (stilb), lm (lumem), cd (candela), lam (lambert)

STRALING
Gy (gray), rad (rad), rem (rem), Sv (sievert), Bq (becquerel), Ci (curie), R (röntgen)

VISCOSITEIT
P (poise), St (stokes)

Eenheden die niet zijn opgenomen

Eenheden die niet zijn opgenomen in het eenhedenmenu, maar wel beschikbaar zijn op de rekenmachine, zijn de volgende: gmol (grammole), lbmol (pondmole), rpm (omwentelingen per minuut), dB (decibels). Deze eenheden zijn beschikbaar via het menu 117.02, dat geactiveerd wordt via MENU(117.02) in de ALG-modus of 117.02 ENTER MENU in de RPN-modus. Het menu verschijnt dan als volgt (druk op ↱ ▼ om de labels weer te geven in het beeldscherm):

Deze eenheden zijn eveneens beschikbaar via de catalogus, bijvoorbeeld:

gmol:	↱ _CAT ALPHA ↰ G
lbmol:	↱ _CAT ALPHA ↰ L
rpm:	↱ _CAT ALPHA ↰ R
dB:	↱ _CAT ALPHA ↰ D

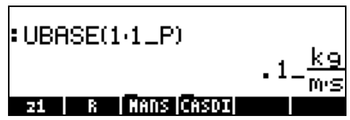
Omzetting naar basiseenheden

Om één van deze eenheden om te zetten naar de standaardeenheden in het SI-systeem, dient u gebruik te maken van de functie UBASE. Om bijvoorbeeld na te gaan wat de waarde is van *1 poise* (eenheid van viscositeit) in het SI-systeem, moet u de volgende procedure uitvoeren:

In de ALG-modus met systeemvlag 117 ingesteld op *CHOOSE boxes:*

↱ _UNITS	Selecteert het menu UNITS
OK	Selecteert het menu TOOLS
▼ OK	Selecteert de functie UBASE
1 ↱ _	Voert 1 in met een onderliggend streepje
↱ _UNITS	Selecteert het menu UNITS
▲ OK	Selecteert de optie VISCOSITEIT
OK	Selecteert het menu UNITS
ENTER	Zet de eenheden om

Deze bewerking resulteert in het volgende beeldscherm (d.w.z. *1 poise = 0.1 kg/(m·s)*):



In de RPN-modus met systeemvlag 117 ingesteld op *CHOOSE boxes:*

[1]	Voert 1 in (zonder onderliggend streepje)
[→] UNITS	Selecteert het menu UNITS
[▲] [OK]	Selecteert de optie VISCOSITEIT
[OK]	Selecteert de eenheid P (poise)
[→] UNITS	Selecteert het menu UNITS
[OK]	Selecteert het menu TOOLS
[▼] [OK]	Selecteert de functie UBASE

In de ALG-modus met systeemvlag 117 ingesteld op *SOFT menus:*

[→] UNITS	Selecteert het menu UNITS
[TOOLS]	Selecteert het menu TOOLS
[UBASE]	Selecteert de functie UBASE
[1] [→] _	Voert 1 in met onderliggend streepje
[→] UNITS	Selecteert het menu UNITS
[←] PREV [VISC]	Selecteert de optie VISCOSITEIT
[P]	Selecteert de eenheid P (poise)
[ENTER]	Zet de eenheden om

In de RPN-modus met systeemvlag 117 ingesteld op *SOFT menus:*

[1]	Voert 1 in (zonder onderliggend streepje)
[→] UNITS	Selecteert het menu UNITS
[←] PREV [VISC]	Selecteert de optie VISCOSITEIT
[P]	Selecteert de eenheid P (poise)
[→] UNITS	Selecteert het menu UNITS
[TOOLS]	Selecteert het menu TOOLS
[UBASE]	Selecteert de functie UBASE

Eenheden aan getallen koppelen

Om een eenheidsobject aan een getal te koppelen, moet het getal worden gevolgd door een onderliggend streepje (↱ _ , toets (8,5)). Een kracht van 5N wordt dus ingevoerd als 5_N.

Hier volgt de procedure om deze waarde in te voeren in de ALG-modus met systeemvlag 117 ingesteld op *CHOOSE boxes*:

5 ↱ _	Voert het getal en het onderliggende streepje in
↱ UNITS	Opent het menu UNITS
8 OK	Selecteert de eenheden voor kracht (*8. Force..*)
OK	Selecteert Newton (*N*)
ENTER	Voert de hoeveelheid in met eenheden in het stapelgeheugen

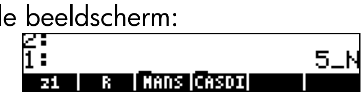
Het beeldscherm zal er als volgt uitzien:

> **Opmerking :** als u het onderliggende streepje vergeet, is het resultaat 5*N, waar N dan staat voor een mogelijke variabelenaam en niet Newton.

Om dezelfde waarde in te voeren in de RPN-modus moet u de volgende stappen volgen:

5	Voert het getal in (zonder onderliggend streepje)
↱ UNITS	Opent het menu UNITS
8 OK	Selecteert de eenheden voor kracht (*8. Force..*)
OK	Selecteert Newton (*N*)

Het ondeliggende streepje wordt automatisch ingevoegd in de RPN-modus. Het resultaat is het volgende beeldscherm:



Zoals eerder werd aangestipt, wordt het menu UNITS weergegeven als labels voor de softmenutoetsen, indien systeemvlag 117 is ingesteld op *SOFT menus*. Dit is met name handig voor uitgebreide bewerkingen met eenheden.

Hieronder worden de toetsencombinaties weergegeven om eenheden in te voeren met de *SOFT menu* optie. Dit geldt zowel in de ALG-modus, als in de RPN-modus. voer bijvoorbeeld de volgende stappen uit om in de ALG-modus de waarde 5_N in te voeren :

5 ↱ _	Voert het getal en het onderliggende streepje in
↱ UNITS	Opent het menu UNITS
NXT FORCE	Voert het getal en het onderliggende streepje in
N	Selecteert Newton (*N*)
ENTER	Voert de hoeveelheid in met eenheden in het stapelgeheugen

Gebruik de volgende toetsencombinatie om dezelfde waarde in te voeren in de RPN-modus:

5	Voert het getal in (geen onderliggend streepje)
↱ UNITS	Opent het menu UNITS
NXT FORCE	Voert het getal en het onderliggende streepje in
N	Selecteert Newton (*N*)

Opmerking: u kunt een waarde invoeren met eenheden door het onderliggende streepje en de eenheden in te voeren met de ALPHA-toetsenbord, bijv. 5 ↱ _ ALPHA N geeft: 5_N

Prefixen voor eenheden

U kunt prefixen voor eenheden invoeren volgens de hieronder beschreven tabel voor prefixen van het SI-systeem.
Eerst wordt de afkorting voor de prefix gegeven, gevolgd door de benaming en de exponent x in de factor 10^x overeenkomstig elke prefix:

Prefix	Naam	x	Prefix	Naam	x
Y	yotta	+24	d	deci	-1
Z	zetta	+21	c	centi	-2
E	exa	+18	m	milli	-3
P	peta	+15	μ	micro	-6
T	tera	+12	n	nano	-9

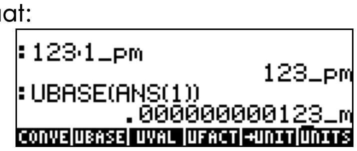
G	giga	+9	p	pico	-12
M	mega	+6	f	femto	-15
k,K	kilo	+3	a	atto	-18
h,H	hecto	+2	z	zepto	-21
D(*)	deka	+1	y	yocto	-24

(*) In het SI-systeem is deze prefix *da* en niet *D*. Gebruik D echter voor deka in deze rekenmachine.

Om deze prefixen in te voeren, voert u de prefix in met behulp van het -toets. Gebruik bijvoorbeeld de ALPHA volgende toetsencombinatie om 123 pm (1 picometer) in te voeren:

1 2 3 ↱ _ ALPHA ↰ P ALPHA ↰ M

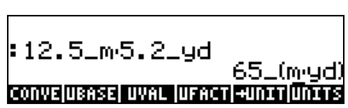
Als u UBASE gebruikt om te converteren naar de standaardeenheid (1 m), krijgt u het volgende resultaat:



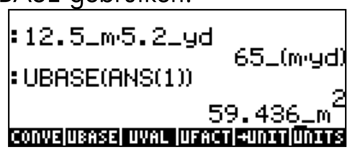
Bewerkingen met eenheden

Zodra u een waarde met een eenheid invoert in het stapelgeheugen, kan die gebruikt worden bij dezelfde bewerkingen als met eenvoudige getallen, maar niet als argumenten van functies (bijvoorbeeld SQ of SIN). Er verschijnt dus een foutmelding wanneer u LN(10_m) probeert te berekenen: *Fout: Slecht Argument Type.*

Hieronder volgen enkele voorbeelden van berekeningen in de ALG-modus. Let er wel op dat u bij het vermenigvuldigen of delen elke waarde met de eenheden tussen haakjes moet zetten. Gebruik de volgende toetsencombinatie om bijvoorbeeld het product 12.5m × 5.2_yd in te voeren: (12.5_m)*(5.2_yd) ENTER :

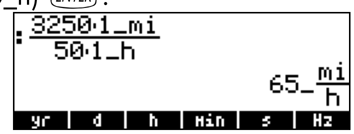


wat resulteert in 65_(m·yd). Om dit om te zetten naar de eenheden van het SI-systeem moet u de functie UBASE gebruiken:

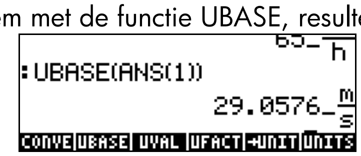


Opmerking: Onthoud dat de ANS (1)-variabele geactiveerd kan worden met de toetsencombinatie ← ANS (behorende bij de toets ENTER).

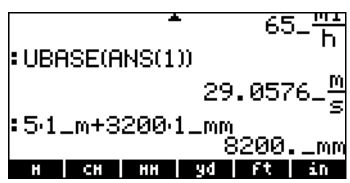
Voer het volgende in om bijvoorbeeld de deling 3250 mi / 50 h te berekenen : (3250_mi)/(50_h) ENTER :



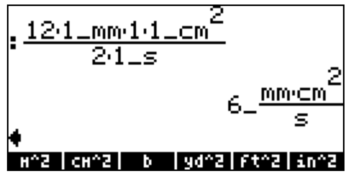
omgezet naar het SI-systeem met de functie UBASE, resulteert dit in:



Optellen en aftrekken kan in de ALG-modus worden uitgevoerd, zonder haakjes. 5 m + 3200 mm kan bijvoorbeeld worden ingevoerd als 5_m + 3200_mm ENTER :



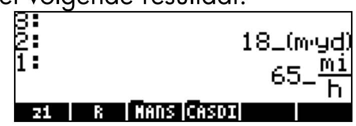
Bij ingewikkeldere uitdrukkingen moet u wel haakjes gebruiken, bijv.: (12_mm)*(1_cm^2)/(2_s) ENTER :



Bij berekeningen in het stapelgeheugen in de RPN-modus is het ook niet nodig haakjes te gebruiken, bijv.:

12_m ENTER 1.5_yd ENTER ×
3250_mi ENTER 50_h ENTER ÷

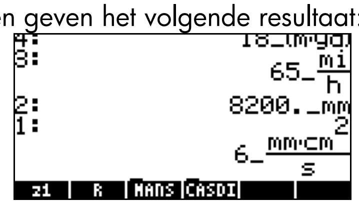
Deze bewerkingen geven het volgende resultaat:



Probeer ook de volgende bewerkingen:

5_m ENTER 3200_mm ENTER +
12_mm ENTER 1_cm^2 ENTER × 2_s ENTER ÷

De laatste twee bewerkingen geven het volgende resultaat:



Opmerking: eenheden kunnen niet worden gebruikt in uitdrukkingen die worden ingevoerd in de vergelijkingenschrijver.

Instrumenten voor het bewerken van eenheden

Het menu UNITS bevat een submenu TOOLS met de volgende functies:

CONVERT(x,y)	: zet het eenheidobject x om in de eenheden van object y
UBASE(x)	: zet het eenheidobject x om in SI-eenheden
UVAL(x)	: trekt de waarde van eenheidobject x af
UFACT(x,y)	: factoriseert eenheid y van eenheidobject x

→UNIT(x,y) : combineert de waarde van x met de eenheden van y

De functie UBASE werd eerder in dit hoofdstuk uitvoerig beschreven. Om één van die functies te gebruiken, moet u de voorbeelden opvolgen behorende bij UBASE. Onthoud dat de functie UVAL slechts één argument vereist en de functies CONVERT, UFACT, en →UNIT twee argumenten vereisen.

Probeer de volgende oefeningen te maken in de instelling van uw keuze. Het resultaat dat hieronder beschreven wordt, werd verkregen in de ALG-modus met systeemvlag 117 ingesteld op *SOFT menu*:

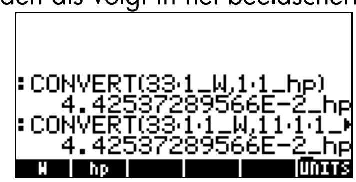
Voorbeelden van omzetting (CONVERT)

Deze voorbeelden geven hetzelfde resultaat om 33 watt om te zetten in btu's.

CONVERT(33_W,1_hp) ENTER

CONVERT(33_W,11_hp) ENTER

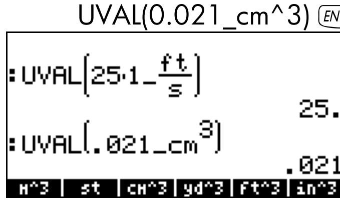
Deze bewerkingen worden als volgt in het beeldscherm weergegeven:



Voorbeelden van UVAL:

UVAL(25_ft/s) ENTER

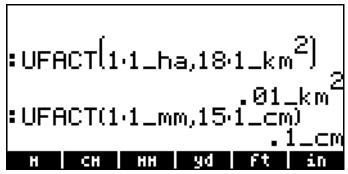
UVAL(0.021_cm^3) ENTER



Voorbeelden van UFACT

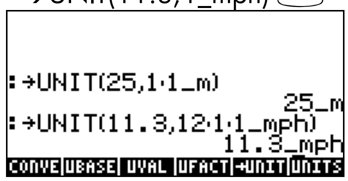
UFACT(1_ha,18_km^2) ENTER

UFACT(1_mm,15.1_cm) ENTER



Voorbeelden van →UNIT

→UNIT(25,1_m) [ENTER]
→UNIT(11.3,1_mph) [ENTER]



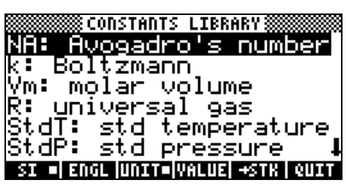
Fysische constanten in de rekenmachine

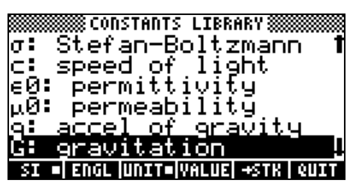
Als vervolg op de bewerking van eenheden,wordt het gebruik van fysieke constanten besproken die beschikbaar zijn in het geheugen van de rekenmachine. Deze fysische constanten staan in een *constants library* die wordt geactiveerd met het commando CONLIB. U kunt dit commando activeren door het in het stapelgeheugen in te voeren:

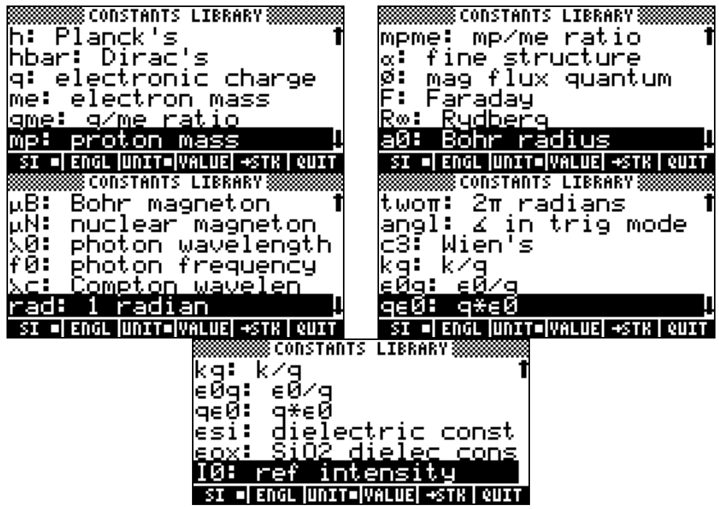
[ALPHA][ALPHA][C][O][N][L][I][B][ALPHA][ENTER]

ofu kunt het commando CONLIB als volgt selecteren uit de commandocatalogus: eerst roept u de catalogus op door met [→] _CAT [ALPHA][C] . Gebruik vervolgens de pijltoetsen (omhoog, omlaag) [▲][▼] om CONLIB te selecteren. Druk vervolgens op de softmenutoets [F6] (OK). En druk tenslotte op [ENTER], indien nodig.

Het beeldscherm met de constantenbibliotheek ziet er als volgt uit (gebruik de pijltoetsen omhoog en omlaag om door de bibliotheek te bewegen):



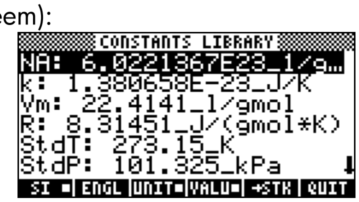




De softmenutoetsen voor het CONSTANTS LIBRARY-beeldscherm bevatten de volgende functies:

SI	als deze functie is geselecteerd, worden de waarden van de constanten in SI-eenheden weergegeven
ENGL	als deze functie is geselecteerd, worden de waarden van de constanten in Engelse meeteenheden weergegeven (*)
UNIT	als deze functie is geselecteerd, worden de waarden weergegeven met de eenheden eraan vastgehecht (*)
VALUE	als deze functie is geselecteerd, worden de waarden zonder eenheden weergegeven
→STK	als deze functie is geselecteerd, worden de waarden gekopieerd (met of zonder eenheid) in het stapelgeheugen
QUIT	sluit de constantenbibliotheek af

Zo ziet het bovenste gedeelte van het beeldscherm van de CONSTANTS LIBRARY eruit wanneer de optie VALUE is geselecteerd (eenheden weergegeven in het SI-systeem):

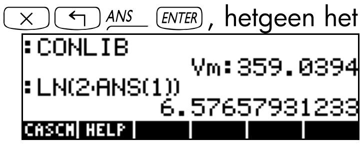


Druk op de optie ENGL om de waarden van de constanten in het Engelse (of Imperial) systeem te zien:

Als we de optie UNITS deselecteren (druk op UNITS), worden alleen de waarden weergegeven (in dit geval zijn de Engelse eenheden geselecteerd):

Om de waarde van Vm te kopiëren naar het stapelgeheugen, selecteert u de benaming van de variabele en drukt u op →STK, vervolgens drukt u op QUIT. Als de rekenmachine is ingesteld op de ALG-modus, zal het beeldscherm er als volgt uitzien:

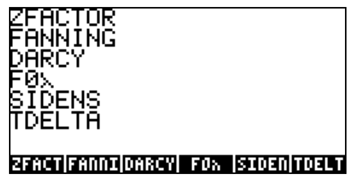
Het beeldscherm geeft een zogenaamde *tagged value* weer, Vm:359.0394. In dit geval is Vm de *tag* van dit resultaat. Elke rekenkundige bewerking met dit getal zal de *tag* negeren. Probeer bijvoorbeeld: ↱ LN 2 × ↰ ANS ENTER, hetgeen het volgende geeft:



Dezelfde bewerking in de RPN-modus, vereist de volgende toetsencombinatie (nadat de waarde van Vm uit de constantenbibliotheek was gehaald):
2 ENTER × ↱ LN

Speciale fysische functies

Het menu 117, dat opgeroepen wordt met behulp van MENU(117) in de ALG-modus of 117 ENTER MENU in de RPN-modus, geeft het volgende menu weer (de labels kunnen in het beeldscherm worden weergegeven met ↱ ▼):



De functies bestaan uit:

ZFACTOR	:	Samendrukbaarheid van gas Z factor-functie
FANNING	:	Factor voor ventilatiefrictie bij het stromen van vloeistoffen
DARCY	:	Factor voor Darcy-Weisbach frictie bij vloeistofstroom
F0λ	:	Functie voor emissiekracht van zwarte lichamen
SIDENS	:	Intrinsieke densiteit van silicone
TDELTA	:	Delta-functie voor temperatuur

Op de tweede pagina van dit menu (druk NXT), vinden we de volgende elementen:

Op deze menupagina staat een functie (TINC) en een aantal eenheden die eerder beschreven werden in het gedeelte over eenheden (zie voorgaande). De functie die we nu gaan bespreken is:

TINC: commando voor temperatuurstijgingen

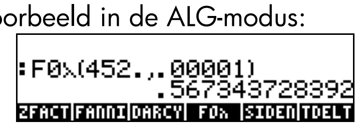
Van alle beschikbare menu's in dit MENU (menu UTILITY), namelijk ZFACTOR, FANNING, DARCY, F0λ, SIDENS, TDELTA en TINC , worden de functies FANNING en DARCY beschreven in Hoofdstuk 6, wanneer het gaat over het oplossen van vergelijkingen voor de stroming in pijpleidingen. De overige functies worden hieronder beschreven.

De functie ZFACTOR

De functie ZFACTOR berekent de correctiefactor voor de samendrukbaarheid van gas voor niet-ideaal gedrag van koolwaterstof. Deze functie wordt opgeroepen door gebruik te maken van ZFACTOR(x_T, y_P), waar x_T staat voor de gereduceerde temperatuur, d.w.z. de verhouding tussen de werkelijke temperatuur en de pseudo-kritische temperatuur, en waar y_P staat voor de gereduceerde druk, d.w.z. de verhouding tussen de werkelijke druk en de pseudo-kritische druk. De waarde van x_T moet tussen 1.05 en 3.0 liggen, terwijl de waarde van y_P tussen 0 en 30 moet liggen. Bijvoorbeeld in de ALG-modus:

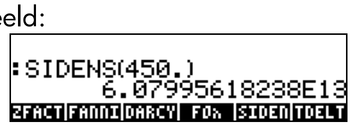
De functie F0λ

De functie F0λ (T, λ) berekent de fractie (zonder dimensies) van de totale emissiekracht van zwarte lichamen bij temperatuur T, tussen de golflengtes 0 en λ. Indien er geen eenheden zijn gekoppeld aan T en λ, impliceert dit dat T in K zit en λ in m. Bijvoorbeeld in de ALG-modus:



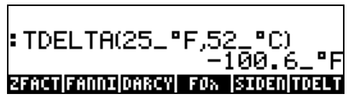
De functie SIDENS

De functie SIDENS (T) berekent de intrinsieke densiteit van silicone (in eenheden van 1/ cm^3) als een functie van temperatuur T (T in K), voor T tussen 0 en 1685 K. Bijvoorbeeld:



De functie TDELTA

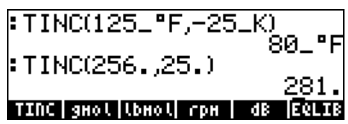
De functie TDELTA(T_0,T_f) geeft ons de temperatuursverhoging $T_f – T_0$. Het resultaat wordt weergegeven met dezelfde eenheden, indien die er zijn, als T_0. Anders wordt eenvoudigweg het verschil in getallen weergegeven. Bijvoorbeeld:



De bedoeling van deze functie is om de berekening te vergemakkelijken van temperatuursverschillen, wanneer we te maken hebben met temperaturen in verschillende eenheden. Anders berekent de functie eenvoudigweg een aftrekking, bijv.:

De functie TINC

De functie TINC(T_0,ΔT) berekent T_0+DT. De bewerking van deze functie is vergelijkbaar met die van functie TDELTA in die zin dat het een resultaat geeft in de eenheden van T_0. Anders wordt een som van waarden weergegeven, bijv.:



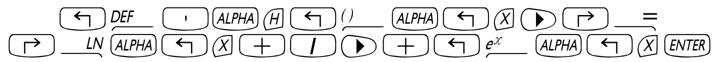
Functies definiëren en gebruiken

Gebruikers kunnen hun eigen functies definiëren door het commando DEFte gebruiken dat met de volgende toetsencombinatie geactiveerd kan worden: ← DEF (behorende bij de toets 2). De functie moet op de volgende manier worden ingevoerd:

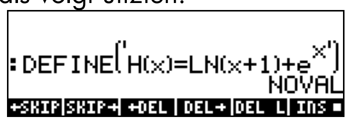
Function_naam(argumenten) = uitdrukking_met_argumenten

We kunnen bijvoorbeeld een eenvoudige functie definiëren: *H(x) = ln(x+1) + exp(-x)*.

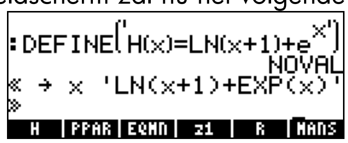
Stel dat u deze functie moet evalueren voor een aantal discrete waarden en u wilt daarom het resultaat met een enkele toets kunnen oproepen, zonder dat u de uitdrukking aan de rechterzijde voor elke afzonderlijke waarde hoeft in te voeren. In het volgende voorbeeld gaan we ervan uit dat uw rekenmachine is ingesteld in de ALG-modus. Voer de volgende toetsencombinatie in:



Het beeldscherm zal er als volgt uitzien:



Door op de toets VAR te drukken, ziet u dat er een nieuwe variabele in uw softmenutoets (H) staat. Om de inhoud van deze variabele te bekijken, drukt u op ↱ H. In het beeldscherm zal nu het volgende verschijnen:



De variabele H bevat een programma dat als volgt gedefinieerd is:

<< → x 'LN(x+1) + EXP(x)' >>

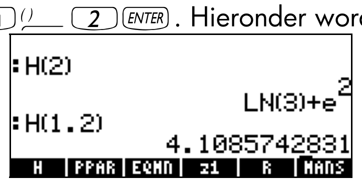
Dit is een eenvoudig programma in de standaardprogrammeertaal van de HP 48 G serie, en is ook ingebouwd in de HP 49 G serie. Deze programmeertaal heet UserPRL. Dit programma is relatief eenvoudig en bestaat uit twee delen die tussen deze programmacontainers staan « ».

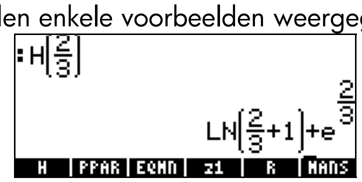
- Invoer: → x → x
- Procedure: 'LN(x+1) + EXP(x) '

Deze uitdrukking moet als volgt gelezen worden: voer een waarde in die tijdelijk wordt toegeschreven aan benaming x (een lokale variabele), evalueer de uitdrukking tussen aanhalingstekens met deze lokale variabele en geef de geëvalueerde uitdrukking weer.

Om de functie in de ALG-modus te activeren, voert u de benaming in van de functie, gevolgd door het argument tussen haakjes, bijv.

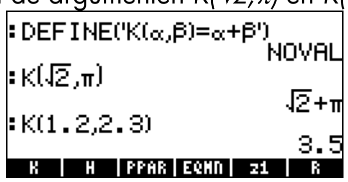
H ↰ () 2 ENTER. Hieronder worden enkele voorbeelden weergegeven:





Om de functie te activeren in de RPN-modus moet eerst het argument ingevoerd worden en daarna op de softmenutoets gedrukt worden van de benaming van de variabele K. Probeer bijvoorbeeld: 2 ENTER K . De andere bovenstaande voorbeelden kunnen als volgt worden ingevoerd: 1 . 2 ENTER K en 2 ÷ 3 ENTER K .

Functies kunnen meer dan twee argumenten hebben. In het onderstaande beeldscherm vindt u bijvoorbeeld de definitie terug van de functie *K(α,β) = α+β* en de evaluatie met de argumenten *K(√2,π)* en *K(1.2,2.3):*



De inhoud van de variabele K is: << → α β 'α+β' >>.

Functies die worden gedefinieerd met behulp van meer dan één uitdrukking

In dit gedeelte wordt de werking beschreven van functies die gedefinieerd worden met behulp van twee of
meer uitdrukkingen. Een voorbeeld van een dergelijke functie zou zijn:

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 2 \cdot x - 1, & x < 0 \\ x^2 - 1, & x > 0 \end{Bmatrix}$$

De HP 49 G biedt de functie IFTE (If-Then-Else) om zulke functies te beschrijven.

De functie IFTE

De functie IFTE wordt geschreven als IFTE (*condition*, *operation_if_true*, *operation_if_false*).
Indien *condition waar is, dan wordt de operation_if_true uitgevoerd, zoniet, wordt operation_if_false uitgevoerd.* We kunnen bijvoorbeeld 'f(x) = IFTE(x>0, x^2-1, 2*x-1)' schrijven om de bovenstaande functie te beschrijven. U kunt de functie IFTE activeren vanuit de functiecatalogus (→ CAT). Het symbool '>' (groter dan) is beschikbaar als (behorende bij de toets 1/x). Gebruik het

commando DEF(f(x) = IFTE(x>0, x^2-1, 2*x-1)) om deze functie in de ALG-modus weer te geven.
Druk vervolgens op ENTER. Voer in de RPN-modus de functiedefinitie in tussen aanhalingstekens: 'f(x) = IFTE(x>0, x^2-1, 2*x-1)'
druk vervolgens op ← DEF .

Druk op VAR om terug te keren naar het variabelenmenu. De functie f zou dan beschikbaar moeten zijn in het softtoetsenmenu. Druk op → f om het resulterende programma te bekijken:

<< → x 'IFTE(x>0, x^2-1, 2*x-1)' >>

Om de functie te evalueren in de ALG-modus moet u de benaming van de functie, f, in te voeren, gevolgd door het getal waarmee u de functie wilt evalueren, bijv. f(2), vervolgens drukt u op ENTER. In de RPN-modus voert u een getal in en drukt u vervolgens op f. Ga bijvoorbeeld het volgende na *f(2) = 3*, terwijl *f(-2) = -5*.

Gecombineerde IFTE functies

Om een complexere functie te programmeren, zoals

$$g(x) = \begin{cases} -x, & x < -2 \\ x+1, & -2 \le x < 0 \\ x-1, & 0 \le x < 2 \\ x^2, & x \ge 2 \end{cases}$$

kunt u verschillende niveaus van de functie IFTE combineren, bijv.

'g(x) = IFTE(x<-2, -x, IFTE(x<0, x+1, IFTE(x<2, x-1, x^2)))',

Definieer deze functie met behulp van de bovenvermelde gegevens en controleer of g(-3) = 3, g(-1) = 0, g(1) = 0, g(3) = 9.

Hoofdstuk 4
Berekeningen met complexe getallen

In dit hoofdstuk laten wij voorbeelden zien van berekeningen en toepassingen van functies voor complexe getallen.

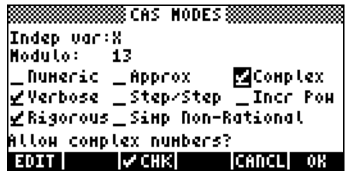
Definities

Een *complex getal* z wordt geschreven als $z = x + iy$, waarbij x en y reële getallen zijn en i de *denkbeeldige eenheid* is die wordt gedefinieerd door $i^2 = -1$. Het complexe getal $x+iy$ heeft een *reël deel*, $x = Re(z)$ en een *denkbeeldig*, $y = Im(z)$. Wij kunnen een complex getal beschouwen als een punt $P(x,y)$ in het x-y vlak, waarbij de x-as wordt gezien als de *reële as* en de y-axis wordt gezien als de *denkbeeldige as*. Daarom wordt van een complex getal in de vorm $x+iy$ gezegd dat het een *Cartesische weergave* is. Een alternatieve Cartesische weergave is het geordende paar $z = (x,y)$. Een complex getal kan ook weergegeven worden in polaire coördinaten *(polaire weergave*) als $z = re^{i\theta} = r\cdot\cos\theta + i\ r\cdot\sin\theta$, waar $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ de *orde* van het complexe getal z is en $\theta = Arg(z) = \arctan(y/x)$ het *argument* van het complexe getal z. De verhouding tussen de Cartesische en polaire weergave van complexe getallen wordt gegeven door de *Euler formule*: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. De *complex geconjugeerde* van een complex getal $z = x + iy = re^{i\theta}$ is $\bar{z} = x - iy = re^{-i\theta}$. De complex geconjugeerde van i kan beschouwd worden als de reflectie van z over de reële (x) as. Op vergelijkbare wijze kan de *negatief* van z, $-z = -x-iy = -re^{i\theta}$ beschouwd worden als de reflectie van z over het beginpunt.

De rekenmachine in de modus COMPLEX instellen

Wanneer met complexe getallen wordt gewerkt, is het verstandig de rekenmachine op de modus Complex in te stellen met de volgende toetsaanslagen: MODE CAS 2 ▼ ▼ ▶ ✓CHK

De modus COMPLEX wordt geselecteerd als in het scherm CAS MODES de optie _Complex gemarkeerd is, dus



Druk twee keer op OK om terug te keren naar het stapelgeheugen.

Complexe getallen invoeren

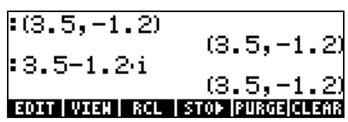
Complexe getallen kunnen in de rekenmachine op een van de twee Cartesische weergaven worden ingevoerd, namelijk *x+iy* of *(x,y)*. De resultaten in de rekenmachine worden weergegeven in de vorm van gerangschikte paren, dus *(x,y)*. Als de rekenmachine bijvoorbeeld in de ALG-modus staat, wordt het complex getal *(3.5,-1.2)*,ingevoerd als:

← () 3 • 5 → , +/- 1 • 2 ENTER

Een complex getal kan ook ingevoerd worden in de vorm *x+iy*. In de ALG-modus wordt *3.5-1.2i* ingevoerd als:

3 • 5 − 1 • 2 × ← i ENTER

Na het invoeren van deze complexe getallen verschijnt het volgende beeldscherm:



In de RPN-modus worden deze getallen ingevoerd met de volgende toetsaanslagen:

← () 3 • 5 → , 1 • 2 +/- ENTER

(U ziet dat het wijzigingsteken wordt ingevoerd nadat het getal 1.2 ingevoerd is. Dit is dus de tegenovergestelde volgorde als in de oefening in de ALG-modus) en

' 3 • 5 − 1 • 2 × → i ENTER

(U ziet dat u een apostrof in moet voeren voordat u het getal 3.5-1.2i in de RPN-modus invoert). Het resulterende RPN-beeldscherm is nu als volgt:

U ziet dat de laatste invoer een complex getal in de vorm *x+iy* weergeeft. Dit komt omdat het getal tussen apostroffen ingevoerd is, welke een algebraïsche uitdrukking voorstellen. Gebruik de toets EVAL (EVAL) om dit getal te evalueren.

Zodra de algebraïsche formule is geëvalueerd, achterhaalt u het complex getal (3.5,1.2).

Polaire weergave van een complex getal

Het hierboven getoonde resultaat geeft een Cartesische (rechthoekige) weergave weer van het complex getal 3.5-1.2i. Een polaire weergave is mogelijk als we het coördinatenstelsel wijzigen naar cilindrisch of polair met de functie CYLIN. U vindt deze functie in de catalogus (↱ CAT). De wijziging naar polair geeft het volgende resultaat:

Voor dit resultaat is de hoekmeting ingesteld op radialen (u kunt altijd radialen instellen met de functie RAD). Het hierboven getoonde resultaat stelt een grootte, 3.7, en een hoek 0.33029….voor. Het hoeksymbool (∠) wordt voor de hoekmeting weergegeven.

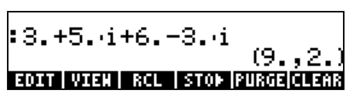
U keert terug naar de Cartesische of rechthoekige coördinaten met de functie RECT (deze staat in de catalogus, ↱ CAT). Een complex getal in de polaire weergave wordt geschreven als $z = r \cdot e^{i\theta}$. U kunt dit complex getal in de rekenmachine invoeren door middel van een gerangschikt paar in de vorm (r, ∠θ). Het hoeksymbool (∠) kan ingevoerd worden als ALPHA ↱ 6 . Het complex getal $z = 5.2e^{1.5i}$ kan bijvoorbeeld als volgt ingevoerd worden (de afbeeldingen geven het stapelgeheugen weer voor en na het invoeren van het getal):

Aangezien het coördinatenstelsel ingesteld is op rechthoekig (of Cartesisch), zet de rekenmachine het ingevoerde getal automatisch om naar Cartesische coördinaten, d.w.z. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ verandert in dit geval naar (0.3678…, 5.18…).

Als echter het coördinatenstelsel ingesteld is op cilindrische coördinaten (gebruik CYLIN), zal het invoeren van een complex getal (x,y), waar x en y reële getallen zijn, een polaire weergave opleveren. Voer bijvoorbeeld in de cilindrische coördinaten het getal (3.,2.) in. De onderstaande afbeelding geeft het RPN-stapelgeheugen weer voor en na het invoeren van dit getal:

Eenvoudige bewerkingen met complexe getallen

Complexe getallen kunnen gecombineerd worden met de vier basisbewerkingen (+ − × ÷). De resultaten volgen de algebraregels onder voorbehoud dat $i^2 = -1$. Bewerkingen met complexe getallen lijken op bewerkingen met reële getallen. Met de rekenmachine in de ALG-modus en het CAS ingesteld op *Complex*, krijgen we bijvoorbeeld de volgende som: (3+5i) + (6-3i):



U ziet dat de reële delen (3+6) en de denkbeeldige delen (5-3) samengevoegd worden en het resultaat gegeven wordt als een gerangschikt paar met een reel deel 9 en een denkbeeldig deel 2. Probeer nu zelf de volgende bewerkingen:

(5-2i) - (3+4i) = (2,-6)
(3-i)·(2-4i) = (2,-14)
(5-2i)/(3+4i) = (0.28,-1.04)
1/(3+4i) = (0.12, -0.16)

Opmerkingen:
Het product van twee getallen wordt weergegeven door: $(x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1)$.
De deling van twee complexe getallen wordt bereikt door het vermenigvuldigen van de teller en de noemer door de complex geconjugeerde van de noemer, dus

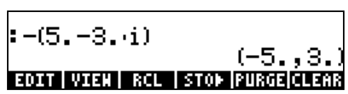
$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\cdot\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\cdot\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

De inverse functie INV (geactiveerd met de toets 1/x) wordt gedefinieerd als

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\cdot\frac{y}{x^2+y^2}$$

Wijzigingsteken van een complex getal

Het teken van een complex getal kan gewijzigd worden met de toets +/-, d.w.z. -(5-3i) = -5 + 3i



Het invoeren van de denkbeeldige getaleenheid

Voer het volgende in voor de denkbeeldige getaleenheid : ← *i*

U ziet dat het getal *i* als het gerangschikte paar *(0,1)* wordt ingevoerd als het CAS is ingesteld op de modus APPROX. In de modus EXACT wordt de denkbeeldige getaleenheid ingevoerd als *i*.

Andere bewerkingen

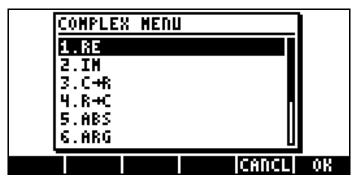
Bewerkingen zoals grootte, argument, reële en denkbeeldige delen en complex geconjugeerde zijn beschikbaar via de menu's CMPLX die later uitvoerig beschreven worden.

De CMPLX-menu's

De rekenmachine beschikt over twee CMPLX-menu's (CoMPLeX getallen). Een is toegankelijk via het menu MTH (zie in Hoofdstuk 3) en en de ander is direct toegankelijk via het toetsenbord (→ CMPLX). Hierna worden de twee CMPLX-menu's toegelicht.

CMPLX-menu via het menu MTH

We gaan ervan uit dat systeemvlag 117 is ingesteld op **CHOOSE boxes** (zie Hoofdstuk 2). Het submenu CMPLX in het menu MTH wordt geopend met ← MTH 9 OK. De volgende beeldschermen verduidelijken deze stappen:



Het eerste menu (opties 1 tot en met 6) heeft de volgende functies:

RE(z) : Reële deel van een complex getal

IM(z) : Denkbeeldige deel van een complex getal

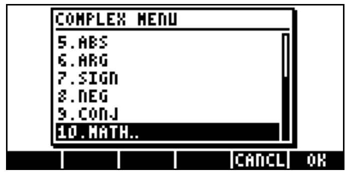
C→R(z) : Scheid een complex getal (x,y) in het reële en het denkbeeldige deel

R→C(x,y) : Vormt het complexe getal *(x,y)* uit de reële getallen x en y

ABS(z) : Berekent de grootte van een complex getal of de absolute waarde van een reël getal.

ARG(z) : Berekent het argument van een complex getal

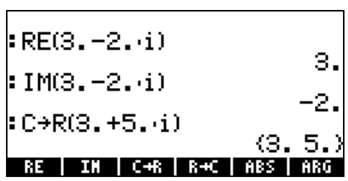
De overige opties (opties 7 tot en met 10) zijn de volgende:



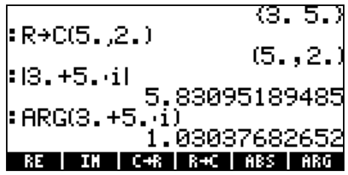
SIGN(z) : Berekent een complex getal van eenheidgrootte als z/|z|.
NEG : Wijzigt het teken van z
CONJ(z) : Produceert de complex geconjugeerde van z

Hierna worden voorbeelden van toepassingen van deze functies weergegeven. Vergeet niet dat in de ALG-modus de functie voor het argument moet staan, terwijl in de RPN-modus het argument eerst moet worden ingevoerd en vervolgens de functie moet worden geselecteerd. U kunt deze functies als softmenus krijgen door het de instelling van systeemvlag 117 te wijzigen (Zie Hoofdstuk 3).

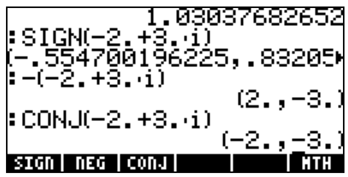
Het eerste beeldscherm geeft de functies RE, IM en C→R weer. U ziet dat de laatste functie een lijst {3. 5.} geeft die de reële en denkbeeldige delen van het complex getal weergeven:



Het volgende beeldscherm geeft de functies R→C, ABS en ARG weer. U ziet dat de functie ABS vertaald wordt naar |3.+5.·i|, de notatie van de absolute waarde. Het resultaat van de functie ARG, die een hoek voorstelt, wordt gegeven in de momenteel geselecteerde eenheden van hoekmeting. In dit voorbeeld is ARG(3.+5.·i) = 1.0303… weergegeven in radialen.

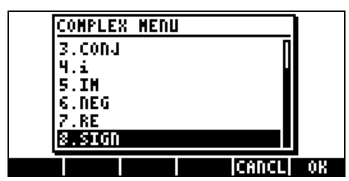


In het volgende beeldscherm worden de functies SIGN, NEG (weergegeven als het negatieve teken -) en CONJ weergegeveb.



Menu CMPLX in het toetsenbord

Er kan een tweede CMPLX-menu worden geopend met de optie rechtershift optie samen met de toets /, d.w.z. → CMPLX. Met systeemvlag 117 ingesteld op CHOOSE boxes, verschijnt het toetsenbordmenu CMPLX als volgt in het scherm:

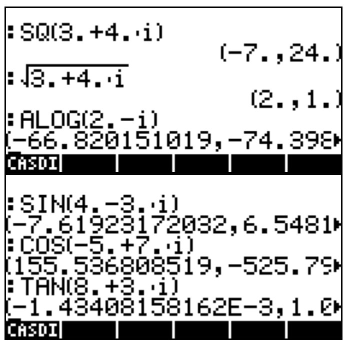


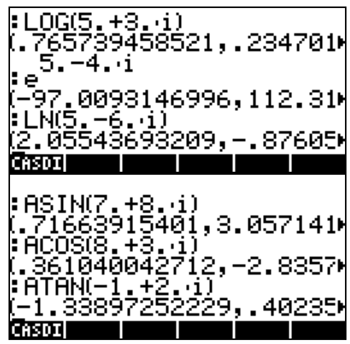
Het menu bevat enkele functies die al eerder zijn behandeld, namelijk ARG, ABS, CONJ, IM, NEG, RE en SIGN. Het bevat ook de functie *i* met dezelfde functie als de toetsencombinatie ← *i*, d.w.z. het invoeren van de denkbeeldige getaleenheid *i* in een uitdrukking.

Het op het toetsenbord gebaseerde CMPLX-menu is een alternatief voor het op het MTH gebaseerde CMPLX-menu met de basisfuncties voor complexe getallen. Als oefening kunt u de eerder weergegeven voorbeelden proberen met het op het toetsenbord gebaseerde CMPLX-menu.

Functies toegepast op complex getallen

Een groot deel van de op het toetsenbord gebaseerde functies voor reële getallen,die beschreven in Hoofdstuk 3 , namelijk SQ, ,LN, e^x, LOG, 10^X, SIN, COS, TAN, ASIN, ACOS, ATAN, kunnen worden toegepast op complexe getallen. Het resultaat is een ander complex getal, zoals verduidelijkt wordt in de volgende voorbeelden. Deze functies worden op dezelfde manier toegepast als bij reële getallen (zie Hoofdstuk 3).

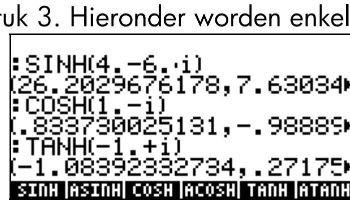


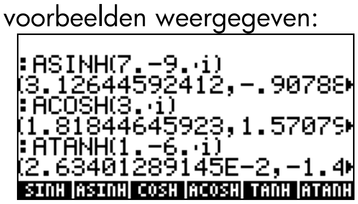


Opmerking: als u trigometrische functies en hun inversies met complex getallen gebruikt, zijn de argumenten geen hoeken meer. De hoekmeting die voor de rekenmachine is geselecteerd, heeft dus geen invloed meer op de berekening van deze functies met complexe argumenten. Raadpleeg een boek over complexe variabelen voor de wijze waarop trigometrische functies en andere functies voor complexe getallen gedefinieerd worden.

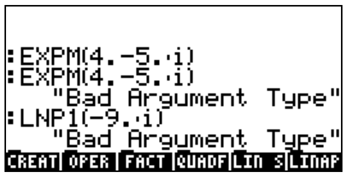
Functies vanaf het menu MTH

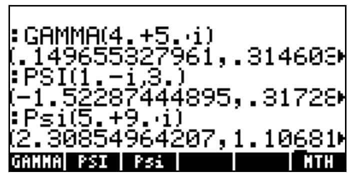
De hyperbolische functies en de inversies, alsmede de functies Gamma, PSI en Psi (speciale functies) werden beschreven en toegepast op reële getallen in Hoofdstuk 3. Hieronder worden enkele voorbeelden weergegeven:





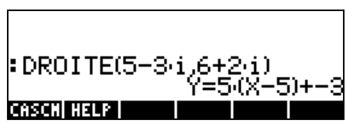
Het volgende beeldscherm geeft weer dat de functies EXPM en LNP1 niet toegepast kunnen worden op complexe getallen. De functies GAMMA, PSI en Psi accepteren echter wel complexe getallen:





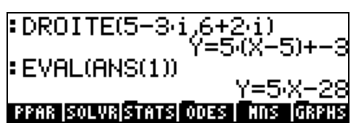
De functie DROITE: vergelijking van een rechte lijn

De functie DROITE heeft twee complexe getallen als argument, bijvoorbeeld x_1+iy_1 and x_2+iy_2 en geeft de vergelijking van een rechte lijn, bijvoorbeeld $y = a+bx$, die de punten (x_1,y_1) en (x_2,y_2) bevat. De lijn tussen de punten A(5,-3) en B(6,2) kan bijvoorbeeld als volgt gevonden worden (voorbeeld weergegeven in de Algebraïsche modus):



De functie DROITE staat in de commandocatalogus (CAT).

Met EVAL(ANS(1)) wordt het resultaat vereenvoudigd tot:



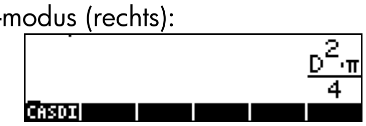
Hoofdstuk 5
Algebraïsche en rekenkundige bewerkingen

Een algebraïsch object , of eenvoudig algebraïsch, is elk getal, variabelenaam of algebraïsche uitdrukking die uitgevoerd, bewerkt en gecombineerd kan worden in overeenstemming met de regels van de algebra. Hier volgen voorbeelden van algebraïsche objecten:

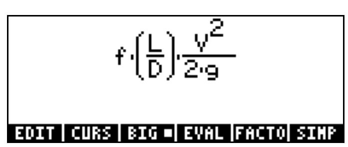
- Een getal: 12.3, 15.2_m, ‘π’, ‘e’, ‘i’
- Een variabelenaam: ‘a’, ‘ux’, ‘breedte’, enz.
- Een formule: ‘p*D^2/4’,’f*(L/D)*(V^2/(2*g))’
- Een vergelijking: ‘Q=(Cu/n)*A(y)*R(y)^(2/3)*So^0.5’

Het invoeren van algebraïsche objecten

Algebraïsche objecten kunnen gemaakt worden door het object tussen enkele aanhalingstekens direct in het stapelniveau 1 in te voeren of door middel van de vergelijkingenschrijver [→] EQW . Met de volgende toetsencombinatie wordt het algebraïsche object ‘π*D^2/4’ direct in stapelniveau 1 ingevoerd: ['] [←] π [×] [ALPHA] [D] [y^x] [2] [÷] [4] [ENTER]. Hierna wordt het resulterende beeldscherm weergegeven in zowel de ALG-modus (links) als in de RPN-modus (rechts):




Een algebraïsch object kan ook in de vergelijkingenschrijver samengesteld worden en daarna naar het stapelgeheugen worden gestuurd. De werking van de vergelijkingenschrijver is in hoofdstuk 2 beschreven. Bouw bij wijze van oefening het volgende algebraïsche object op in de vergelijkingenschrijver:



Druk, nadat het object is samengesteld, op ENTER zodat het in het stapelgeheugen wordt weergegeven (zowel in de ALG- als in de RPN-modus weergegeven):

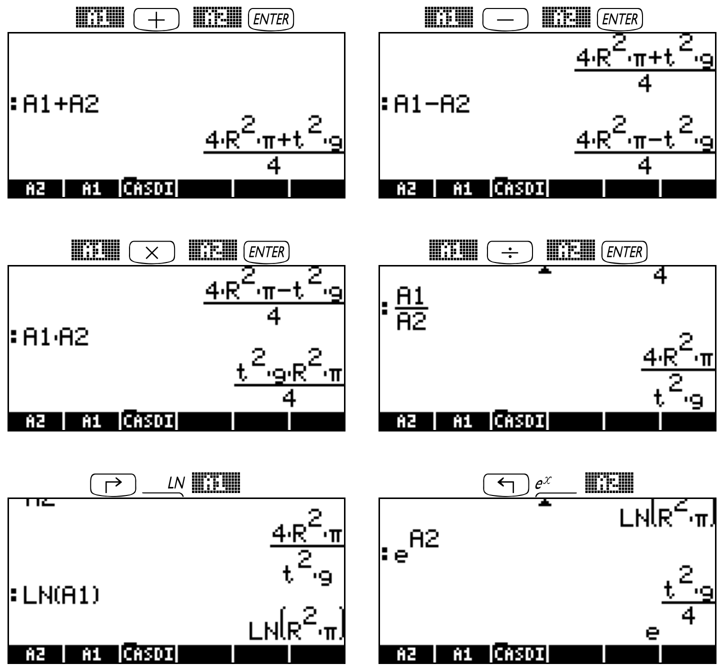
Eenvoudige bewerking met algebraïsche objecten

Algebraïsche objecten kunnen worden opgeteld, afgetrokken, vermenigvuldigd, gedeeld (behalve door nul), tot een macht worden verheven, als argumenten voor verscheidene standaardfuncties worden gebruikt (exponentieel, logaritmisch, trigonometrisch, hyperbolisch, enz.), zoals u met elk willekeurig reëel of complex getal zou doen. Om de basisbewerkingen met algebraïsche objecten te laten zien, maken we een aantal objecten, bijvoorbeeld 'π*R^2' en 'g*t^2/4', en slaan ze op in de variabelen A1 en A2 (zie hoofdstuk 2 over het aanmaken van variabelen te en het opslaan van waarden in variabelen). Hier volgt de toetsencombinatie voor het opslaan van variabelen A1 in de ALG-modus: ' ← π × ALPHA R Y^x 2 ▶ STO▶ ALPHA A 1 ENTER, die resulteren in:

De toetsencombinatie voor de RPN-modus zijn: ' ← π × ALPHA R Y^x 2 ENTER ALPHA A 1 STO▶

Nadat de variabele A2 is opgeslagen en op de toets gedrukt wordt, zal het beeldscherm de variabelen als volgt weergeven:

In de ALG-modus laat de volgende toetsencombinatie een aantal bewerkingen zien met de algebraïsche objecten behorende bij de variabelen A1 en A2 (druk op VAR voor het variabelenmenu):



In de RPN-modus worden dezelfde resultaten verkregen als de volgende toetsencombinatie wordt gebruikt:

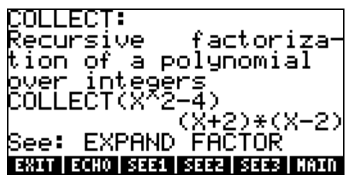
A1 ENTER A2 +   A1 ENTER A2 −
A1 ENTER A2 ×   A1 ENTER A2 ÷
A1 ENTER → LN   A2 ENTER ← eˣ

Functies in het menu ALG

Het ALG (Algebraïsch)-menu wordt geactiveerd met de toetsencombinatie → ALG (behorende bij de toets →). Met systeemvlag 117 ingesteld op *CHOOSE boxes* geeft het ALG-menu de volgende functies weer:

Wij zullen in deze handleiding niet alle beschrijvingen van de functies geven. De gebruiker kan deze vinden in de helptekst van de rekenmachine. TOOL NXT HELP ENTER . Voer de eerste letter van de functie in om een specifieke functie te vinden. Voor de functie COLLECT voeren we bijvoorbeeld ALPHA C in. Daarna gebruiken we de pijltoetsen omhoog en omlaag, ▲▼, om COLLECT in het hulpvenster te zoeken.

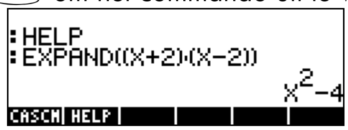
Druk op OK om de bewerking te voltooien. Hier volgt het hulpscherm voor de functie COLLECT:



U ziet onder in het beeldscherm de regel See: EXPAND FACTORS staan, hier worden de koppelingen naar andere helpteksten en de functies EXPAND en FACTOR. Om direct naar deze items te gaan, drukt u op de softmenutoets SEE1 voor EXPAND en SEE2 voor FACTOR. Door bijvoorbeeld op SEE1 te drukken, wordt de volgende informatie voor EXPAND getoond:

Het hulpscherm verschaft niet alleen informatie over elk commando, maar geeft ook een voorbeeld van de toepassing. Dit voorbeeld kan gekopieerd worden in uw stapelgeheugen door op de softmenutoets ECHO te drukken.

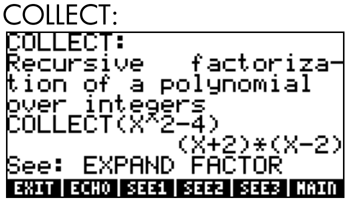
Druk bijvoorbeeld voor de hierboven weergegeven EXPAND-invoer op de softmenutoets ECHO zodat het volgende voorbeeld gekopieerd wordt naar het stapelgeheugen (druk op ENTER om het commando uit te voeren.):



Verder laten we de gebruiker zelf de toepassingen van de functies in het ALG- (of ALGB-) menu verkennen. Dit is een lijst van de commando's:

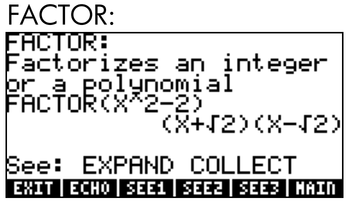
De helptekst geeft de volgende informatie over de commando's:

COLLECT:



EXPAND:

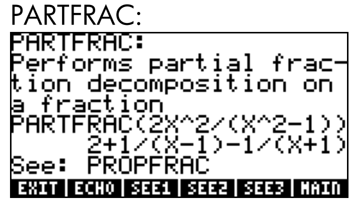
FACTOR:



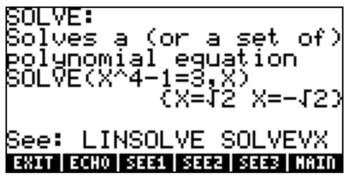
LNCOLLECT:

LIN:

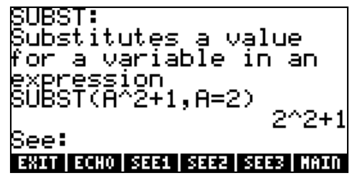
PARTFRAC:



SOLVE:



SUBST:



TEXPAND:

Opmerking : als u deze of elke andere functie in de RPN-modus wilt gebruiken, moet u eerst het argument invoeren en dan de functie. Het voorbeeld for TEXPAND wordt in de RPN-modus als volgt ingevoerd:

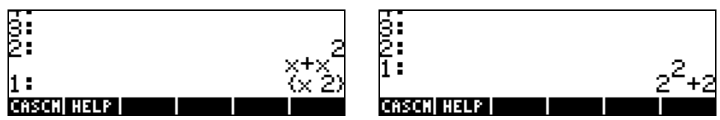
['] [←] e^x [+] [ALPHA] [X] [+] [ALPHA] [Y] [ENTER]

Selecteer nu de functie TEXPAND in het ALG-menu (of direct uit de catalogus [→] _CAT), om de bewerking te voltooien.

Andere vormen van substitutie in algebraïsche formules

De hierboven weergegeven functie SUBST wordt gebruikt om een variabel in een uitdrukking te substitueren. Een tweede vorm van substitutie kan verkregen worden met de toetsencombinatie [→] _| (behorende bij de toets I). In de ALG-modus zal bijvoorbeeld de volgende invoer de waarde $x = 2$ substitueren in de uitdrukking $x+x^2$. De afbeelding links geeft de wijze weer waarop de formule moet worden ingevoerd (de gesubstitueerde waarde, x=2, moet tussen haakjes gezet worden) alvorens op [ENTER] te drukken. Nadat op de toets [ENTER] is gedrukt, wordt het resultaat in de rechterafbeelding weergegeven.

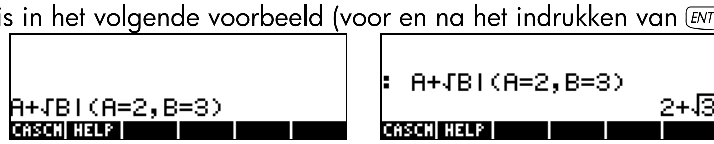
In de RPN-modus kan dit verkregen worden door eerst de uitdrukking in te voeren waar de substitutie wordt uitgevoerd ($x+x^2$), gevolgd door een lijst (zie hoofdstuk 8) met de substitutievariabele, een spatie en de te substitueren waarde d.w.z. {x 2}. De laatste stap is het drukken op de toetsencombinatie [→] [|] .



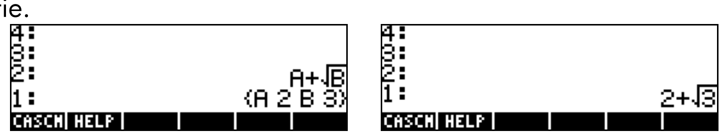
De volgende toetsencombinatie is vereist:

['] [ALPHA] [←] [X] [+] [ALPHA] [←] [X] [Y^x] [2] [ENTER]
[←] [{ }] [ALPHA] [←] [X] [SPC] [2] [ENTER] [→] [|] [ENTER]

In de ALG-modus is de substitutie van meer dan één variabele mogelijk zoals te zien is in het volgende voorbeeld (voor en na het indrukken van [ENTER])

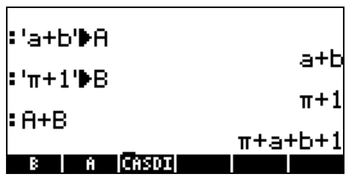


In de RPN-modus is het ook mogelijk meer dan één variabele per keer te substitueren, zoals in het volgende voorbeeld te zien is. Denk eraan dat de RPN-modus een lijst gebruikt met namen en waarden van variabelen voor substitutie.



Een andere benadering voor substitutie bestaat in het definiëren van de substitutie van uitdrukkingen in rekenvariabelen en het plaatsen van de naam van de variabelen in de oorspronkelijke uitdrukking. Sla bijvoorbeeld in de ALG-modus de volgende variabelen op:

Voer dan de uitdrukking A+B in:



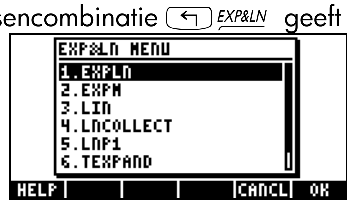
De laatst ingevoerde uitdrukking wordt automatische geëvalueerd na het indrukken van de toets ENTER en geeft het bovenstaande resultaat.

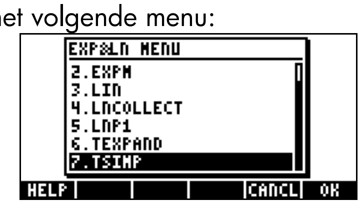
Bewerkingen met transcendente functies

De rekenmachine biedt een aantal functies die gebruikt kunnen worden om uitdrukkingen met logaritmische, exponentiële, trigonometrische en hyperbolische functies te vervangen met betrekking tot trigonometrische identiteiten of exponentiële functies. De menus die functies bevatten om trigonometrische functies te vervangen, kunnen direct geactiveerd worden via het toetsenbord door op de rechtershifttoets de drukken gevolgd door toets 8, d.w.z. ↱ TRIG . De combinatie van deze toets met de linkershifttoets, d.w.z. ↱ EXP&LN , opent een menu waarin u uitdrukkingen kunt vervangen met betrekking tot exponentiële of natuurlijke logaritmefuncties. In de volgende paragrafen worden deze menus nader behandeld.

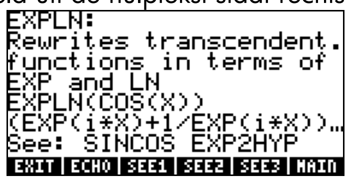
Uitbreiding en factorisering met log-exp-functies

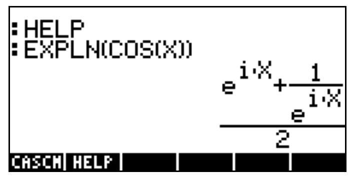
De toetsencombinatie ↰ EXP&LN geeft het volgende menu:





Informatie over en voorbeelden van deze commando's staan in de hulptekst van de rekenmachine. Enkele commando's die in het menu EXP&LNstaan, d.w.z. LIN, LNCOLLECT en TEXPAND staan ook in het eerder beschreven ALG-menu. De functies LNP1 en EXPM werden in het menu HYPERBOLIC van het menu MTH geïntroduceerd (zie hoofdstuk 2). Nu blijft alleen nog de functie EXPLN over. De beschrijving staat in het linkervoorbeeld en het voorbeeld uit de hulptekst staat rechts





Uitbreiding en factorisering met trigonometrische functies

Het functie TRIG menu, geactiveerd met (↱) TRIG, bevat de volgende functies:

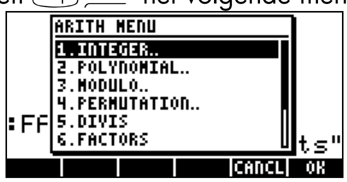
Deze functies staan het vereenvoudigen van uitdrukkingen toe door sommige categorieën van trigonometrische functies door een andere te vervangen. De functie ACOS2S bijvoorbeeld kan de functie *boogcosinus* (acos(x)) vervangen door de uitdrukking van *boogsinus* (asin(x)).

Informatie over en voorbeelden van deze commando's staan in de hulptekst van de rekenmachine (TOOL NXT HELP). De gebruiker kan deze helpteksten gebruiken voor informtie over de commando's in het menu TRIG.

U ziet dat het eerste commando in het menu TRIG het menu HYPERBOLIC is. De functies van dit menu werden in hoofdstuk 2 behandeld.

Functies in het menu ARITHMETIC

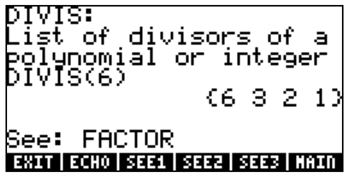
Het menu ARITHMETIC bevat een aantal submenus voor specifieke toepassingen in getallentheorie (hele getallen, polynomen, enz.), alsmede een aantal functies die van toepassing zijn op algemene aritmetische bewerkingen. Het menu ARITHMETIC wordt geactiveerd met de toetsencombinatie ← ARITH (behorende bij de toets 1). Met systeemvlag 117 ingesteld op *CHOOSE boxes*, geeft ← ARITH het volgende menu:



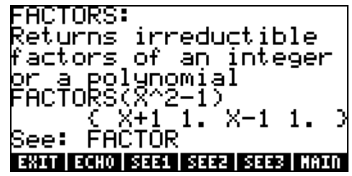
In deze menulijst komen opties 5 tot en met 9 (*DIVIS, FACTORS, LGCD, PROPFRAC, SIMP2*) overeen met veelgebruikte functies die van toepassing zijn op hele getallen of op polynomen. De overige opties (*1. INTEGER*, *2. POLYNOMIAL*, *3. MODULO* en *4. PERMUTATION*) zijn eigenlijk submenus van functies die van toepassing zijn op specifieke wiskundige objecten. Dit onderscheid tussen submenus (opties 1 tot en met 4) en eenvoudige functies (opties 5 tot en met 9) wordt duidelijk wanneer systeemvlag 117 op *SOFT menus* wordt ingesteld. Het onder deze omstandigheden activeren van het menu ARITHMETIC (← ARITH) geeft het volgende:

Hierna worden de ingangen van de helptekst weergegeven voor de functies van opties 5 tot en met 9 in het menu ARITHMETIC:

DIVIS:

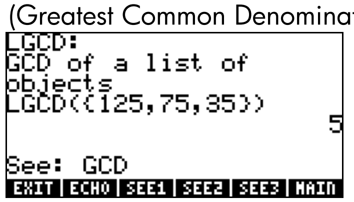


FACTORS:



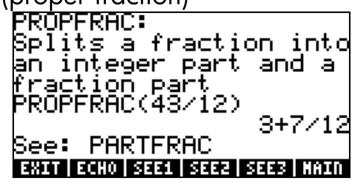
LGCD

(Greatest Common Denominator)

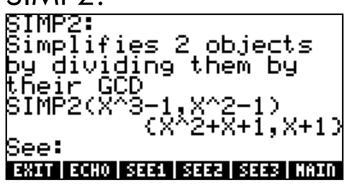


PROPFRAC

(proper fraction)



SIMP2:



De functies behorende bij de ARITHMETIC-submenus: INTEGER, POLYNOMIAL, MODULO en PERMUTATION, zijn de volgende:

Het menu INTEGER

EULER	Aantal hele getallen < n, co -priem met n
IABCUV	Lost au + bv = c op met a,b,c = integers (hele getallen)
IBERNOULLI	n-de Bernoulli-getal
ICHINREM	Chinese rest voor hele getallen
IDIV2	Euclidische deling van twee hele getallen
IEGCD	Retourneert u,v, zodat au + bv = gcd(a,b)
IQUOT	Euclidische coëfficiënt van twee hele getallen
IREMAINDER	Euclidische rest van twee hele getallen
ISPRIME?	Test of een heel getal priem is
NEXTPRIME	Volgende priem voor een gegeven heel getal

PA2B2	Priem getal als kwadraat norm van een complex getal
PREVPRIME	Vorige priem voor een gegeven heel getal

Het menu POLYNOMIAL

ABCUV	Bézout polynomische vergelijking (au+bv=c)
CHINREM	Chinese rest voor polynomen
CYCLOTOMIC	n-de cyclotomische polynoom
DIV2	Euclidische deling van twee polynomen
EGDC	Retourneert u,v, van au+bv=gcd(a,b)
FACTOR	Factoriseert een heel getal of een polynoom
FCOEF	Produceert breuk van gegeven wortels en multipliciteit
FROOTS	Retourneert wortels en multipliciteit gegeven een breuk
GCD	Grootste gemene deler van 2 getallen of polynomen
HERMITE	n-de graad Hermite-polynoom
HORNER	Horner-schatting van een polynoom
LAGRANGE	Lagrange-polynoominterpolatie
LCM	Kleinste gemene multideling van 2 getallen of polynomen
LEGENDRE	n-de graad Legendre-polynoom
PARTFRAC	Deelbreukontleding van een gegeven breuk
PCOEF	(ingang hulptekst mist)
PTAYL	Retourneert Q(x-a) in Q(x-a) = P(x), Taylor-polynoom
QUOT	Euclidische coëfficiënt van twee polynomen
RESULTANT	Determinant van de Sylvester-matrix van 2 polynomen
REMAINDER	Euclidische rest van twee polynomen
STURM	Brandlijnsequenties voor een polynoom
STURMAB	Signaal op laag scheidingsteken en aantal nullen tussen scheidingstekens

Het menu MODULO

ADDTMOD	Telt twee formules modulo current modulus
DIVMOD	Deelt 2 polynomen modulo current modulus
DIV2MOD	Euclidische deling van 2 polynomen met modulaire coëfficiënten
EXPANDMOD	Breidt uit/vereenvoudigt polynoom modulo current modulus
FACTORMOD	Factoriseert een polynoom modulo current modulus

GCDMOD	GCD van 2 polynomen modulo current modulus
INVMOD	Invers van heel getal modulo current modulus
MOD	geen ingang beschikbaar in de hulptekst
MODSTO	Verandert de moduloinstelling naar gespecificeerde waarde
MULTMOD	Vermenigvuldiging van 2 polynomen modulo current modulus
POWMOD	Verheft polynoom tot een macht modulo current modulus
SUBTMOD	Aftrekking van 2 polynomen modulo current modulus

Toepassingen van het menu ARITHMETIC

Deze paragraaf is bedoeld om de nodige informatie te geven voor het toepassen van de functies van het menu ARITHMETIC. Er worden definities gegeven met betrekking tot de onderwerpen, polynomen, polynoombreuken en modulaire aritmetica. De gegeven voorbeelden worden onafhankelijk van de instellingen van de rekenmachine (ALG of RPN) weergegeven.

Modulaire rekenkunde

Denk hierbij aan een telsysteem van volledige getallen dat regelmatig uit zichzelf terugdraait en opnieuw begint, zoals de uren van een klok. Zo'n telsysteem wordt een *ring* genoemd. Aangezien het aantal van hele getallen in een ring eindig is, heeft de rekenkunde in deze ring de naam *eindige rekenkunde*. Ons systeem van eidige hele getallen bestaat uit de getallen *0,1, 2, 3, …, n-1, n*. We kunnen ook naar de rekenkunde van dit telsysteem verwijzen met *modulaire rekenkunde of modulus n*. Bij de uren van een klok is de modulus 12. (Bij modulaire rekenkunde met de uren van een klok, moeten we echter de hele getallen 0,1,2,3,..., 10,11 gebruiken in plaats van 1,2,3,...,11,12).

Bewerkingen in de modulaire rekenkunde

Optelling in modulaire rekenkunde van modulus *n,* dat een positief heel getal is, volgt de regels dat, indien *j* en *k* een van beide geen negatieve hele getallen zijn en beide kleiner zijn dan *n*, als $j+k\geq n$, dan wordt $j+k$ gedefinieerd als $j+k-n$. In het geval van de klok is dit bijvoorbeeld n = 12, 6+9 "=" 3. Ter onderscheiding van deze 'vergelijking' en van de oneindige rekenkundige vergelijkingen, wordt het symbool ≡ gebruikt in plaats van het vergelijkingsteken, en er wordt eerder naar de relatie tussen de getallen verwezen met *congruentie* dan met een vergelijking. Voor het vorige voorbeeld zouden we dus $6+9 \equiv 3 \pmod{12}$ schrijven en deze uitdrukking lezen als "*zes plus negen is congruent aan drie, modulus twaalf*". Als de getallen bijvoorbeeld de uren weergeven vanaf middernacht, kan de congruentie $6+9 \equiv 3 \pmod{12}$, uitgelegd worden als "zes uur na het negende uur na middernacht is drie uur na twaalf uur 's ochtends ".beide geen Andere sommen die in de rekenkundige modulus 12 gedefinieerd kunnen worden, zijn: $2+5 \equiv 7 \pmod{12}$; $2+10 \equiv 0 \pmod{12}$; $7+5 \equiv 0 \pmod{12}$, enz.

De regel voor *aftrekking* is zodanig dat als $j - k < 0$, dan word j-k gedefinieerd als j-$k+n$. Derhalve wordt $8\text{-}10 \equiv 2 \pmod{12}$, gelezen als "*acht min tien is congruent aan twee, modulus twaalf*". Andere voorbeelden van aftrekken in de rekenkundige modulus 12 zouden $10\text{-}5 \equiv 5 \pmod{12}$; $6\text{-}9 \equiv 9 \pmod{12}$; $5 - 8 \equiv 9 \pmod{12}$; $5 - 10 \equiv 7 \pmod{12}$, enz. zijn.

Vermenigvuldiging volgt de regel dat als $j \cdot k > n$, zodat $j \cdot k = m \cdot n + r$, waar m and r geen negatieve hele getallen zijn en beide minder zijn dan n, dan $j \cdot k \equiv r \pmod{n}$. Het resultaat van de vermenigvuldiging j maal k in de rekenkundige modulus n is in wezen de restwaarde van het hele getal van $j \cdot k/n$ in de oneindige rekenkunde, als $j \cdot k>n$. Bij de rekenkundige modulus 12 hebben we bijvoorbeeld $7 \cdot 3 = 21 = 12 + 9$, (of $7 \cdot 3/12 = 21/12 = 1 + 9/12$, d.w.z. de restwaarde van het hele getal van 21/12 is 9). Wij kunnen nu $7 \cdot 3 \equiv 9 \pmod{12}$ schrijven en het laatste resultaat lezen als "*zeven maal drie is congruent aan negen, modulus twaalf*."

De bewerking *delen* kan bet betrekking tot vermenigvuldigen als volgt gedefinieerd worden, $r/k \equiv j \pmod{n}$, als, $j \cdot k \equiv r \pmod{n}$. Dit betekent dat r de restwaarde moet zijn van $j \cdot k/n$. Bijvoorbeeld: $9/7 \equiv 3 \pmod{12}$, omdat $7 \cdot 3 \equiv 9 \pmod{12}$. Enkele delingen zijn in de modulaire rekenkunde niet toegestaan. Bij de rekenkundige modulus 12 kunt u $5/6 \pmod{12}$ niet definiëren aangezien de vermenigvuldigingstafel van 6 niet het resultaat 5 in de rekenkundige modulus 12 toont. Deze vermenigvuldigingstafel wordt hieronder getoond:

6*0 (mod 12)	0		6*6 (mod 12)	0
6*1 (mod 12)	6		6*7 (mod 12)	6
6*2 (mod 12)	0		6*8 (mod 12)	0
6*3 (mod 12)	6		6*9 (mod 12)	6
6*4 (mod 12)	0		6*10 (mod 12)	0
6*5 (mod 12)	6		6*11 (mod 12)	6

Formele definitie van een eindige rekenkundige ring

De uitdrukking $a \equiv b \ (mod\ n)$ wordt gelezen als "<u>a is congruent aan b, modulus n</u>" en betekent dat $(b\text{-}a)$ een meervoud is van n. Met deze definitie vereenvoudigen de regels van de rekenkunde als volgt:

Als $a \equiv b \ (mod\ n)$ en $c \equiv d \ (mod\ n)$,
dan

$$a+c \equiv b+d \ (mod\ n),$$
$$a\text{-}c \equiv b - d \ (mod\ n),$$
$$a\times c \equiv b\times d \ (mod\ n).$$

Volg voor het delen de eerder weergegeven regels. Bijvoorbeeld, 17 ≡ 5 (mod 6) en 21 ≡ 3 (mod 6). Met deze regels kan het volgende geschreven worden:

17 + 21 ≡ 5 + 3 (mod 6) => 38 ≡ 8 (mod 6) => 38 ≡ 2 (mod 6)
17 – 21 ≡ 5 -3 (mod 6) => -4 ≡ 2 (mod 6)
17 × 21 ≡ 5 × 3 (mod 6) => 357 ≡ 15 (mod 6) => 357 ≡ 3 (mod 6)

U ziet dat wanneer een resultaat aan de rechterzijde van het "congruentie"symbool een resultaat geeft dat groter is dan de modulus (in dit geval n = 6), kunt u altijd een meervoud van de modulus van dat resultaat aftrekken en het tot een getal vereenvoudigen dat kleiner is dan de modulus. Zo vereenvoudigt het resultaat in het eerste geval *8 (mod 6)* tot *2 (mod 6*) en vereenvoudigt het resultaat van het derde geval *15 (mod 6)* tot *3 (mod 6)*. Verwarrend? Niet als u de rekenmachine deze bewerkingen laat uitvoeren. Lees daarom de volgende paragraaf om te begrijpen hoe eindige rekenkundige ringen in uw rekenmachine functioneren.

Eindige rekenkundige ringen in de rekenmachine

Vanaf het begin hebben wij onze eindige rekenkundige bewerking gedefinieerd zodat de resultaten altijd positief zijn. Het modulaire rekenkundige systeem in de rekenmachine is zodanig ingesteld dat de modulusring n de getallen *-n/2+1, …,-1, 0, 1,…,n/2-1, n/2* betreft als n even is, en de getallen *–(n-1)/2, -(n-3)/2,…,-1,0,1,…,(n-3)/2, (n-1)/2* als n oneven is. Bij bijvoorbeeld n = 8 (even) bestaat de eindige rekenkundige ring in de rekenmachine uit de volgende getallen: (-3,-2,-1,0,1,3,4), terwijl voor n = 7 (oneven), de overeenkomstige eindige rekenkundige ring van de rekenmachine bestaat uit (-3,-2,-1,0,1,2,3).

Modulaire rekenkunde in de rekenmachine

Selecteer het submenu MODULO in het menu ARITHMETIC (← ARITH) om het modulaire rekenkundige menu in de rekenmachine op te roepen. Het beschikbare menu bevat de functies: ADDTMOD, DIVMOD, DIV2MOD, EXPANDMOD, FACTORMOD, GCDMOD, INVMOD, MOD, MODSTO, MULTMOD, POWMOD en SUBTMOD. In de vorige paragrafen werden al korte beschrijvingen gegeven van deze functies. Hierna laten we enkele toepassingen van deze functie zien.

Het instellen van de modulus (van MODULO)

De rekenmachine bevat een variabele met de naam MODULO die in de {HOME CASDIR} directory staat en die de grootte van de te gebruiken modulus in modulaire rekenkunde opslaan.

De standaardwaarde van MODULO is 13. Om de waarde van de MODULO te wijzigen, kunt de nieuwe waarde direct opslaan in de variabele MODULO in het subdirectory {HOME CASDIR}. U kunt ook de nieuwe MODULO-waarde opslaan met de functie MODSTO.

Modulaire rekenkundige bewerkingen met getallen

Voor het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en tot een macht verheffen door middel van modulaire rekenkunde gebruikt u de functies ADDTMOD, SUBTMOD, MULTMOD, DIV2MOD en DIVMOD (voor deling) en POWMOD. In de RPN-modus moet u de twee betreffende getallen waarmee invoeren, gescheiden met een [ENTER] of een [SPC] en druk dan op de desbetreffende modulaire rekenkundige functie. Probeer bijvoorbeeld de volgende bewerkingen door gebruik te maken van een modulus van 12:

ADDTMOD: voorbeelden

6+5 ≡ -1 (mod 12)	6+6 ≡ 0 (mod 12)	6+7 ≡ 1 (mod 12)
11+5 ≡ 4 (mod 12)	8+10 ≡ -6 (mod 12)	

SUBTMOD: voorbeelden

5 – 7 ≡ -2 (mod 12)	8 – 4 ≡ 4 (mod 12)	5 –10 ≡ -5 (mod 12)
11 – 8 ≡ 3 (mod 12)	8 — 12 ≡ -4 (mod 12)	

MULTMOD: voorbeelden

6·8 ≡ 0 (mod 12)	9·8 ≡ 0 (mod 12)	3·2 ≡ 6 (mod 12)
5·6 ≡ 6 (mod 12)	11·3 ≡ -3 (mod 12)	

DIVMOD: voorbeelden

12/3 ≡ 4 (mod 12)	12/8 (mod 12) bestaat niet
25/5 ≡ 5 (mod 12)	64/13 ≡ 4 (mod 12)
66/6 ≡ -1 (mod 12)	

DIV2MOD: voorbeelden

2/3 (mod 12) bestaat niet
26/12 (mod 12) bestaat niet
125/17 (mod 12) ≡ 1 met rest = 0
68/7 ≡ -4 (mod 12) met rest = 0
7/5 ≡ -1 (mod 12) met rest = 0

Opmerking: DIVMOD geeft de coëfficiënt van de modulaire deling j/k (mod n), terwijl DIMV2MOD niet alleen de coëfficiënt maar ook de rest van de modulaire deling j/k (mod n) geeft.

POWMODMOD voorbeelden

2^3≡ -4 (mod 12)	3^5≡ 3 (mod 12)	5^{10}≡ 1 (mod 12)
11^8 ≡ 1 (mod 12)	6^2 ≡ 0 (mod 12)	9^9 ≡ -3 (mod 12)

In de voorbeelden van modulaire aritmetische bewerkingen die hierboven zijn weergegeven, hebben we getallen gebruikt die niet noodzakelijk tot de ring behoren, d.w.z. getallen zoals 66, 125, 17, enz. De rekenmachine zet deze getallen om naar ringgetallen alvorens ze te gebruiken. Met de functie EXPANDMOD kunt u ook elk willekeurig getal in een ringgetal omzetten. Bijvoorbeeld,

EXPANDMOD(125) ≡ 5 (mod 12)
EXPANDMOD(17) ≡ 5 (mod 12)
EXPANDMOD(6) ≡ 6 (mod 12)

De modulaire inverse van een getal

Een getal *k* behoort bijvoorbeeld tot een eindige rekenkundige ring van modulus *n*, dan is de modulaire inverse van *k*, d.w.z. *1/k (*mod *n),* een getal *j*, zodat *j·k ≡ 1 (*mod *n*). De modulaire inverse van een getal kan verkregen worden met de functie INVMOD in het submenu MODULO van het menu ARITHMETIC. Bijvoorbeeld in rekenkundige modulus 12:

1/6 (mod 12) bestaat niet	1/5 ≡ 5 (mod 12)
1/7 ≡ -5 (mod 12)	1/3 (mod 12) bestaat niet
1/11 ≡ -1 (mod 12)	

De MOD-operator

The MOD-operator wordt gebruikt om het ringgetal te krijgen van een gegeven modulus overeenkomstig een gegeven heel getal. Op papier wordt deze bewerking geschreven als *m* mod *n = p* en gelezen als as "*m* modulus *n* is gelijk aan *p*". Voer om bijvoorbeeld 15 mod 8 te berekenen het volgende in:

- ALG-modus: 1 5 MOD 8 ENTER
- RPN-modus: 1 5 ENTER 8 ENTER MOD

Het resultaat is 7, d.w.z. 15 mod 8 = 7. Probeer de volgende oefeningen:

18 mod 11 = 7	23 mod 2 = 1	40 mod 13 = 1
23 mod 17 = 6	34 mod 6 = 4	

Een praktische toepassing van de functie MOD voor programmeringsdoeleinden is het bepalen wanneer een heel getal even of oneven is, aangezien *n* mod 2 = 0 als *n* even is en *n* mod 2 = 1 als *n* oneven is. Het kan ook gebruikt worden om te bepalen wanneer een heel getal *m* een meervoud is van een ander heel getal *n,* in dat geval *m* mod *n* = 0.

Opmerking: raadpleeg de helptekst in de rekenmachine voor een beschrijving en voorbeelden voor andere modulaire rekenkunde. Vele van deze functies zijn toepasbaar op polynomen. Raadpleeg een studieboek over getallentheorie voor informatie over modulaire rekenkunde met polynomen.

Polynomen

Polynomen zijn algebraïsche uitdrukingen bestaande uit één of meer termen met afnemende machten van een gegeven variabele. 'X^3+2*X^2-3*X+2' is bijvoorbeeld een polynoom van de derde orde in X, terwijl 'SIN(X)^2-2' een polynoom van de tweede orde in SIN(X) is. Een lijst van functies die betrekking hebben op polynomen in het menu ARITHMETIC werd al eerder gegeven. Hierna worden enkele algemene definities van polynomen gegeven. In deze definities zijn *A(X), B(X), C(X), P(X), Q(X), U(X), V(X),* enz. polynomen.

- Polynomische breuk: een breuk met polynomen als teller en noemer, nl. C(X) = A(X)/B(X)
- Wortels, of nullen, van een polynoom: waarden van X waarbij P(X) = 0
- Polen van een breuk: wortels van de noemer
- Meervoud van wortels of polen: het aantal keren dat een wortel verschijnt, bijvoorbeeld, $P(X) = (X+1)^2(X-3)$ heeft wortels {-1, 3} met multiplicitieten {2,1}
- Cyclotomische polynoom ($P_n(X)$): een polynoom van de EULER(*n*) orde, waarbij de wortels de primitieve *n*-de wortels van eenheid zijn, bijvoorbeeld, $P_2(X) = X+1$, $P_4(X) = X^2+1$
- Polynoomvergelijking van Bézout: A(X) U(X) + B(X)V(X) = C(X)

Specifieke voorbeelden van polynoomtoepassingen worden hierna gegeven.

Modulaire rekenkunde met polynomen

Op dezelfde manier waarop we in een vorige paragraaf een eindige rekenkundige ring voor getallen definieerden, kunnen we een eindige rekenkundige ring voor polynomen met een gegeven polynoom als modulus definiëren. We kunnen bijvoorbeeld een bepaalde polynoom *P(X)* als $P(X) = X \pmod{X^2}$ schrijven of een andere polynoom $Q(X) = X + 1 \pmod{X-2}$.

Een polynoom *P(X)* behoort tot een eindige rekenkundige ring van polynoommodulus *M(X)* als er een derde polynoom *Q(X)* bestaat, zodat *(P(X) – Q(X))* een meervoud is van *M(X)*. Dan zouden wij schrijven: $P(X) \equiv Q(X) \pmod{M(X)}$. De laatste uitdrukking kan gelezen worden als "*P(X) is congruent aan Q(X), modulo M(X)*".

De functie CHINREM

CHINREM betekent CHINese REMainder. De bewerking die bij dit commando hoort, lost een systeem opvan twee congruenten met de Chinese Remainder Theorie. Dit commando kan worden toegepast op polynomen en ook op hele getallen (functie ICHINREM). De invoer bestaat uit twee vectoren *[uitdrukking_1, modulus_1] en [uitdrukking_2, modulus_2]*. De uitvoer is een vector *met [uitdrukking_3, modulus_3]*, waar *modulus_3* verbonden is met het product van *(modulus_1)·(modulus_2)*. Voorbeeld: CHINREM(['X+1', 'X^2-1'],['X+1','X^2']) = ['X+1',-(X^4-X^2)]

Uitleg van de Chinese Remainder Theorie voor hele getallen

Als $m_1, m_2,…,m_r$ natuurlijke getallen zijn waarvan elk paar relatief priem is en $a_1, a_2, …, a_r$ allemaal hele getallen zijn, dan is er een heel getal *x* dat gelijktijdig voldoet aan de congruenten: $x \equiv a_1 \pmod{m_1}$, $x \equiv a_2 \pmod{m_2}$, …, $x \equiv a_r \pmod{m_r}$. Als bovendien $x = a$ elke willekeurige oplossing is, dan zijn alle oplossingen congruent aan een modulus die gelijk is aan het product $m_1 \cdot m_2 \cdot … m_r$.

De functie EGCD

EGCD staat voor Extended Greatest Common Divisor. Bij twee gegeven polynomen, A(X) en B(X), produceert de functie EGCD de polynomen C(X), U(X) en V(X), zodat C(X) = U(X)*A(X) + V(X)*B(X). Bijvoorbeeld: bij A(X) = X^2+1, B(X) = X^2-1, EGCD(A(X),B(X)) = {2, 1, -1}. d.w.z. 2 = 1*(X^2+1')-1*(X^2-1). Ook: EGCD('X^3-2*X+5','X') = { 5, '-(X^2-2)', 1}, d.w.z. 5 = –(X^2-2)*X + 1*(X^3-2*X+5).

De functie CGD

De functie GCD (Greatest Common Denominator) kan worden gebruikt voor het verkrijgen van de grootste gemene noemer van twee polynomen of van twee lijsten van polynomen van dezelfde lengte. De twee polynomen of polynomenlijsten worden in stapelgeheugenniveaus 2 en 1 geplaatst alvorens de functie GCD te gebruiken. Het resultaat is een polynoom of een lijst met de grootste gemene noemer van de twee polynomen of van elke polynomenlijst. Hierna volgen voorbeelden in de RPN-modus (rekenmachine ingesteld op de modus Exact):

'X^3-1' ENTER 'X^2-1' ENTER GCD resulteert in: 'X-1'

{'X^2+2*X+1','X^3+X^2'} ENTER {'X^3+1','X^2+1'} ENTER GCD resulteert in {'X+1' 1}

De functie HERMITE

De functie HERMITE [HERMI] gebruikt een heel getal, k, als argument, en retourneert de Hermite-polynoom van de k-de orde. Een Hermite-polynoom, $He_k(x)$ wordt gedefinieerd als

$$He_0 = 1, \quad He_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2}), \quad n = 1,2,...$$

Een andere definitie van de Hermite polynoom is

$$H_0{}^* = 1, \quad H_n{}^*(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}), \quad n = 1,2,...$$

waar d^n/dx^n = n-de afageleide met betrekking tot x. Dit is de definitie die wordt gebruikt in de rekenmachine.

Voorbeelden: de Hermite-polynomen van orde 3 en 5 worden gegeven door:

HERMITE(3) = '8*X^3-12*X'

en HERMITE(5) = '32*x^5-160*X^3+120*X'.

De functie HORNER

De functie HORNER geeft de Horner-deling, of synthetische deling, van een polynoom P(X) door de factor (X-*a*). De invoer voor de functie zijn de polynoom P(X) en het getal *a*. De functie retourneert de polynoomcoëfficiënt Q(X), het resultaat van de deling P(X) door (X-*a*), de waarde van a en de waarde van P(a) in deze volgorde. Met andere woorden, P(X) = Q(X)(X-a)+P(a). Voorbeeld: HORNER('X^3+2*X^2-3*X+1',2) = {'X^2+4*X+5', 2, 11}. Wij zouden daarom het volgende kunnen schrijven: $X^3+2X^2-3X+1 = (X^2+4X+5)(X-2)+11$. Tweede voorbeeld: HORNER('X^6-1',-5)= {'X^5-5*X^4+25*X^3-125*X^2+625*X-3125',-5, 15624} d.w.z. $X^6-1 = (X^5-5*X^4+25X^3-125X^2+625X-3125)(X+5)+15624$.

De variabele VX

Een variabele met de naam VX staat in de {HOME CASDIR} directory van de rekenmachine en neemt standaard de waarde 'X' aan. Dit is de naam van de gewenste onafhankelijke variabele voor algebraïsche en calculustoepassingen. Vermijd het gebruik van de variabele VX in uw programma's of vergelijkingen, om niet in de war te raken met de CAS' VX. U kunt vx of Vx gebruiken als u bijvoorbeeld een verwijzing moet geven naar het x-snelheidscomponent. Raadpleeg bijlage C voor meer informatie over de CAS-variabele.

De functie LAGRANGE

De functie LAGRANGE vereist als invoer een matrix met twee rijen en *n* kolommen. De matrix slaat gegevenspunten op in de vorm [[x_1,x_2, …, x_n] [y_1, y_2, …, y_n]]. Het toepassen van de functie LAGRANGE geeft de polynoomuitbreiding van

$$p_{n-1}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\prod_{k=1,k\neq j}^{n}(x-x_k)}{\prod_{k=1,k\neq j}^{n}(x_j-x_k)} \cdot y_j.$$

Bij n = 2 schrijven we bijvoorbeeld:

$$p_1(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2}\cdot y_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdot y_2 = \frac{(y_1-y_2)\cdot x + (y_2\cdot x_1 - y_1\cdot x_2)}{x_1-x_2}$$

Controleer dit resultaat met uw rekenmachine:
LAGRANGE([[x1,x2],[y1,y2]]) = '((y1-y2)*X+(y2*x1-y1*x2))/(x1-x2)'.

Andere voorbeelden: LAGRANGE([[1, 2, 3][2, 8, 15]]) = '(X^2+9*X-6)/2'
LAGRANGE([[0.5,1.5,2.5,3.5,4.5][12.2,13.5,19.2,27.3,32.5]]) =

'-(.1375*X^4+ -.7666666666667*X^3+ - .74375*X^2 =
1.991666666667*X-12.92265625)'.

Opmerking: In Hoofdstuk 10 worden matrices behandeld.

De functie LCM

De functie LCM (Least Common Multiple) verkrijgt de kleinste gemene meervoud van twee polynomen of polynomenlijsten van dezelfde lengte. Voorbeelden:

LCM('2*X^2+4*X+2' ,'X^2-1') = '(2*X^2+4*X+2)*(X-1)'.
LCM('X^3-1','X^2+2*X') = '(X^3-1)*(X^2+2*X)'

De functie LEGENDRE

Een Legendre-polynoom van orde n is een polynoomfunctie die de volgende differentiële vergelijking oplost $(1-x^2)\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-2\cdot x\cdot\frac{dy}{dx}+n\cdot(n+1)\cdot y=0$

Gebruik LEGENDRE(*n*), bijvoorbeeld voor het verkrijgen Legendre-polynoom van de *n*-de orde

LEGENDRE(3) = '(5*X^3-3*X)/2'
LEGENDRE(5) = '(63*X ^5-70*X^3+15*X)/8'

De functie PCOEF

Bij een array met de wortels van een polynoom, zal de functie PCOEF een array genereren met de coëfficiënten van de bijbehorende polynoom. De coëfficiënten komen overeen met de afnemende orde van de onafhankelijke variabele. Voorbeeld: PCOEF([-2,–1,0,1,1,2]) = [1. –1. –5. 5. 4. –4. 0.], die de polynoom X^6-X^5-5X^4+5X^3+4X^2-4X voorstelt.

De functie PROOT

Bij een array met coëfficiënten van een polynoom in afnemende orde geeft de functie PROOT de wortels van de polynoom. Voorbeeld: X^2+5X-6 =0, PROOT([1 –5 6]) = [2. 3.].

De functie PTAYL

Bij een polynoom P(X) en een getal *a*, wordt de functie PTAYL gebruikt voor het verkrijgen van de uitdrukking Q(X-*a*) = P(X), d.w.z. om een polynoom in machten van (X- *a*) te genereren. Deze staat ook bekend als een Taylor-polynoom, waarvan de naam van de functie van Polynomial & TAYLor, is afgeleid.

Voorbeeld: PTAYL('X^3-2*X+2',2) = 'X^3+6*X^2+10*X+6'.

In werkelijkheid lezen we dit resultaat als

'(X-2) ^3+6*(X-2) ^2+10*(X-2) +6'.

Controleer dit door middel van de aftrekking: 'X = x – 2'. Wij achterhalen de oorspronkelijke polynoom, maar nu alskleine letter x in plaats van hoofdletter x.

De functies QUOT en REMAINDER

De functies QUOT en REMAINDER geven, respectievelijk, de coëfficiënt Q(X) en de restwaarde R(X) als resultaat van de deling van twee polynomen, $P_1(X)$ en $P_2(X)$. Met andere woorden, zij geven de waarden van Q(X) en R(X) vanaf $P_1(X)/P_2(X) = Q(X) + R(X)/P_2(X)$. Bijvoorbeeld,

QUOT(X^3-2*X+2, X-1) = X^2+X-1
REMAINDER(X^3-2*X+2, X-1) = 1.

Dus kunnen wij schrijven als: $(X^3-2X+2)/(X-1) = X^2+X-1 + 1/(X-1)$.

Opmerking: door PROPFRAC te gebruiken, kunt u het laatste resultaat krijgen:

PROPFRAC('(X^3-2*X+2)/(X-1)') = 'X^2+X-1 + 1/(X-1)'.

De functie EPSX0 en de CAS-variabele EPS

De variabele ε (epsilon) wordt meestal gebruikt in wiskundeboekenom hele kleine getallen weer te geven. Het CAS van de rekenmachine maakt een variabel EPS aan met de standaardwaarde 0.0000000001 = 10^{-10}, wanneer u de functie EPSX0 gebruikt. U kunt deze waarde, na het aanmaken, veranderen wanneer u een andere waarde wilt instellen voor EPS. De functie EPSX0, wanneer toegepast op een polynoom, vervangt alle coëfficiënten met een absolute waarde minder dan EPS door een nul. De functie EPSX0 is niet beschikbaar in het menu ARITHMETIC en moet geactiveerd worden vanuit de functiecatalogus (N). Voorbeeld:

EPSX0('X^3-1.2E-12*X^2+1.2E-6*X+6.2E-11)=
'X^3-0*X^2+.0000012*X+0'.

Met EVAL: 'X^3+.0000012*X'.

De functie PEVAL

De functie PEVAL (Polynomial EVALuation) kan gebruikt worden om een polynoom te evalueren $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$, met een array van coëfficiënten [a_n, a_{n-1}, … a_2, a_1, a_0] en een waarde van x_0. Het resultaat is de evaluatie $p(x_0)$. De functie PEVAL is niet beschikbaar in het menu ARITHMETIC en moet geactiveerd worden vanuit de functiecatalogus (N). Voorbeeld:

PEVAL([1,5,6,1],5) = 281.

De functie TCHEBYCHEFF

De functie TCHEBYCHEFF(*n*) geeft de Tchebycheff (of Chebyshev) polynoom van het eerste soort, orde n, gedefinieerd als $T_n(X) = \cos(n \cdot \arccos(X))$. Als het hele getal n negatief is (n < 0), geeft de functie TCHEBYCHEFF(*n*) de Tchebycheff-polynoom van het tweede soort, orde n, gedefinieerd als $T_n(X) = \sin(n \cdot \arccos(X))/\sin(\arccos(X))$. Voorbeelden:

TCHEBYCHEFF(3) = 4*X^3-3*X
TCHEBYCHEFF(-3) = 4*X^2-1

Breuken

Breuken kunnen worden uitgebreid en gefactoriseerd met de functies EXPAND en FACTOR in het menu ALG (,×). Voorbeeld:

EXPAND('(1+X)^3/((X-1)(X+3))') = '(X^3+3*X^2+3*X+1)/(X^2+2*X-3)'
EXPAND('(X^2*(X+Y)/(2*X-X^2)^2') = '(X+Y)/(X^2-4*X+4)'
EXPAND('X*(X+Y)/(X^2-1)') = '(X^2+Y*X)/(X^2-1)'
EXPAND('4+2*(X-1)+3/((X-2)*(X+3))-5/X^2') =
'(2*X^5+4*X^4-10*X^3-14*X^2-5*X)/(X^4+X^3-6*X^2)'

FACTOR('(3*X^3-2*X^2)/(X^2-5*X+6)') = 'X^2*(3*X-2)/((X-2)*(X-3))'
FACTOR('(X^3-9*X)/(X^2-5*X+6)') = 'X*(X+3)/(X-2)'
FACTOR('(X^2-1)/(X^3*Y-Y)') = '(X+1)/((X^2+X+1)*Y)'

De functie SIMP2

De functies SIMP2 en PROPFRAC worden gebruikt om respectievelijk een breuk te vereenvoudigen en om een eigen breuk te produceren,. De functie SIMP2 neemt twee getallen of polynomen als argumenten, die de teller en denoemer van een rationale breuk voorstellen en retourneert de vereenvoudigde teller en noemer. Voorbeeld: SIMP2('X^3-1','X^2-4*X+3') = { 'X^2+X+1','X-3'}.

De functie PROPFRAC

De functie PROPFRAC zet een rationele breuk om in een "echte" breuk, d.w.z. een heel deel toegevoegd aan een breukdeel als deze ontleding mogelijk is. Voorbeeld:

PROPFRAC('5/4') = '1+1/4'
PROPFRAC('(x^2+1)/x^2') = '1+1/x^2'

De functie PARTFRAC

De functie PARTFRAC ontleedt een rationale breuk in de gedeeltelijke breuken die de originele breuk vormen. SVoorbeeld:

PARTFRAC('(2*X^6-14*X^5+29*X^4-37*X^3+41*X^2-16*X+5)/(X^5-7*X^4+11*X^3-7*X^2+10*X)') =
'2*X+(1/2/(X-2)+5/(X-5)+1/2/X+X/(X^2+1))'

Deze techniek is handig voor het berekenen van integralen (zie het hoofdstuk over calculus) van rationele breuken.

Met de Complex-modus geactiveerd, is het resultaat:

‘2*X+(1/2/(X+i)+1/2/(X-2)+5/(X-5)+1/2/X+1/2/(X-i))’

De functie FCOEF

De functie FCOEF wordt gebruikt om een rationele breuk te krijgen, waarbij de wortels en de polen van de breuk zijn gegeven.

Opmerking: als een rationele breuk wordt gegeven als F(X) = N(X)/D(X), zijn de wortels van de breuk het resultaat de vergelijking N(X) = 0, terwijl de polen het resultaat zijn van de vergelijking D(X) = 0.

De invoer voor de functie is een vector met de wortels gevolgd door hun veelvoud (d.w.z. hoe vaak een wortel wordt herhaald), en de polen gevolgd door hun veelvoud die als een negatief getal wordt weergegeven. Als we bijvoorbeeld een breuk willen aanmaken met de wortels 2 met veelvoud 1, 0 met veelvoud 3 en -5 met veelvoud 2 en met depolen 1 met veelvoud 2 en -3 met veelvoud 5, gebruiken we:

FCOEF([2 1 0 3 –5 2 1 -2 -3 -5]) = ‘(X--5)^2*X^3*(X-2)/(X--3)^5*(X-1)^2’

U krijgt het volgende als u op EVAL drukt:

‘(X^6+8*X^5+5*X^4-50*X^3)/(X^7+13*X^6+61*X^5+105*X^4-45*X^3-297*X^2-81*X+243)’

De functie FROOTS

De functie FROOTS bevat de wortels en polen van een breuk. Als we bijvoorbeeld de functie FROOTS zouden toepassen op het bovenstaande resultaat,zouden we het volgende krijgen: [1 –2. –3 –5. 0 3. 2 1. –5 2.]. Het resultaat toont de polen gevolgd door hun veelvoud als een negatief getal en de wortels gevolgd door hun veelvoud als een postief getal. In dit geval zijn de polen respectievelijk (1, -3) met de veelvouden (2,5) en zijn de wortels respectievelijk (0,2,-5) met de veelvouden (3,1,2).

Nog een voorbeeld is: FROOTS('(X^2-5*X+6)/(X^5-X^2)') = [0 –2. 1 –1. 3 1. 2 1.]. d.w.z. polen = 0 (2), 1(1), en wortels = 3(1), 2(1). Met de Complex-modus ingesteld, is het resultaat: [0 –2. 1 –1. '-((1+i*√3)/2' –1. ' -((1-i*√3)/2' –1.].

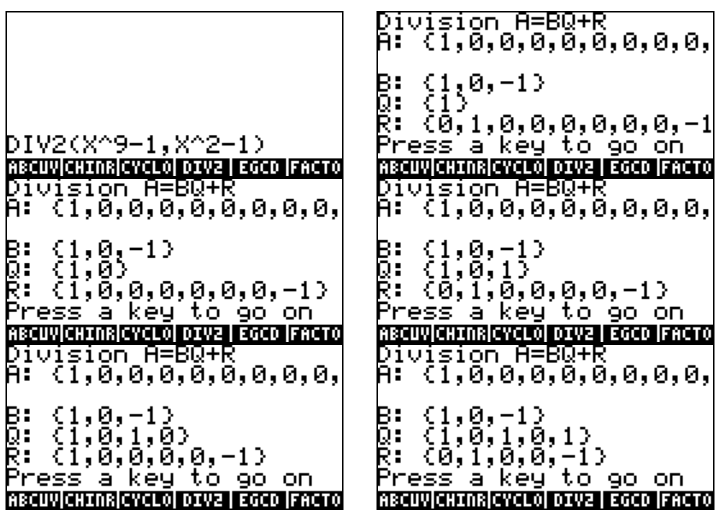
Stapsgewijze bewerking van polynomen en breuken

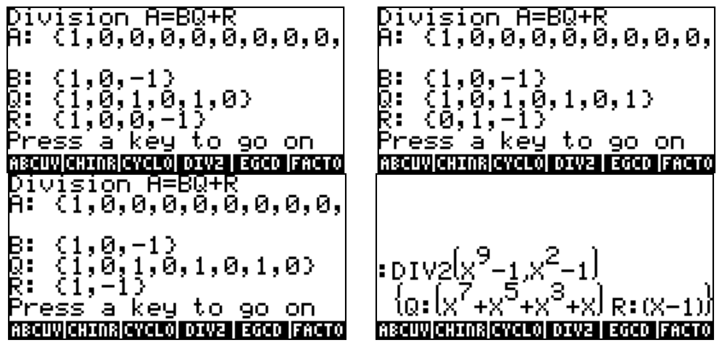
Als de CAS-modus wordt ingesteld op Step/step geeft de rekenmachine vereenvoudigde breuken of bewerkingen met polynomen stapsgewijs weer. Dit is zeer handig om de stappen te zien van een synthetische deling. Het voorbeeld van de deling

$$\frac{X^3 - 5X^2 + 3X - 2}{X - 2}$$

wordt in bijlage C uitvoerig weergegeven. Het volgende voorbeeld toont een langere synthetische deling:

$$\frac{X^9 - 1}{X^2 - 1}$$





Het menu CONVERT en algebraïsche bewerkingen

Het menu CONVERT wordt geactiveerd met de toets ← CONVERT (de toets 6). Dit menu bevat alle omzettingsmenus in de rekenmachine. Hierna wordt de menulijst getoond:

Hierna worden de beschikbare functies in elk van de submenu's getoond.

UNITS in het menu convert (Optie 1)

Dit menu is hetzelfde als het menu UNITS beschikbaar via → UNITS . De toepassingen van dit menu worden in hoofdstuk 3 nader behandeld.

BASE in het menu convert (Option 2)

Dit menu is hetzelfde als het menu UNITS beschikbaar via → BASE . De toepassingen van dit menu worden in hoofdstuk 19 nader behandeld.

TRIGONOMETRIC in het menu convert (Optie 3)

Dit menu is hetzelfde als het menu TRIG beschikbaar via → TRIG . De toepassingen van dit menu worden in dit hoofdstuk nader behandeld.

MATRICES in het menu convert (Optie 5)

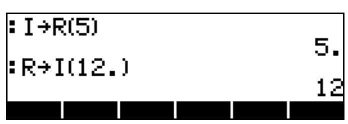
Dit menu bevat de volgende functies:

Deze functie worden in hoofdstuk 10 nader behandeld.

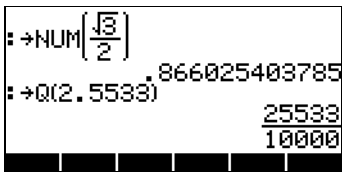
REWRITE in het menu convert (Optie 4)

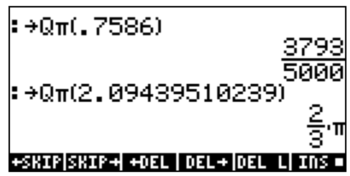
Dit menu bevat de volgende functies:

De functies I→R en R→I worden gebruikt om een getal van een heel getal (I) om te zetten in een reël getal (R) of vice versa. Hele getallen worden weergegeven zonder zwevende decimale punten, aangezien reëele getallen die hele getallen weergeven een zwevende decimale punt hebben, bijvoorbeeld,



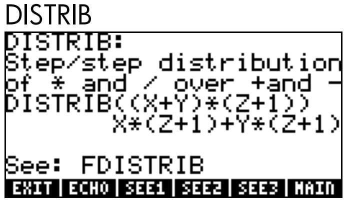
De functie →NUM geeft dezelfde bewerking als de toetsencombinatie ↱ →NUM (behorende bij de toets ENTER). De functie →NUM zet een symbolisch resultaat om in zijn zwevende kommawaarde. De functie →Q zet een zwevende kommawaarde om in een breuk. De functie →Qπ zet een zwevende kommawaarde om in een breuk van π, als een breuk van π voor het getal wordt gevonden, anders wordt het getal omgezet in een breuk. Hierna worden voorbeelden van deze drie functies getoond.



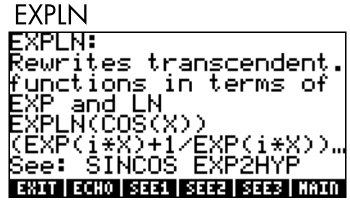


Naast de functies in het menu REWRITE, zij de functies DISTRIB, EXPLN, EXP2POW, FDISTRIB, LIN, LNCOLLECT, POWEREXPAND en SIMPLIFY ook van toepassing op algebraïsche uitdrukkingen. Verscheidene van deze functies zijn in dit hoofdstuk behandeld. Ter volledigheid worden hier toch de hulpteksten van deze functies weergegeven.

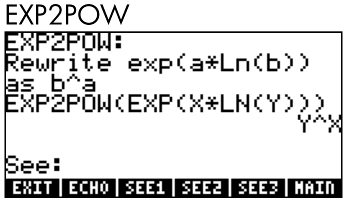
DISTRIB



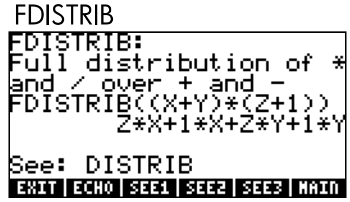
EXPLN



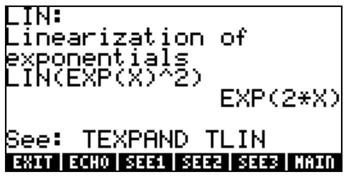
EXP2POW



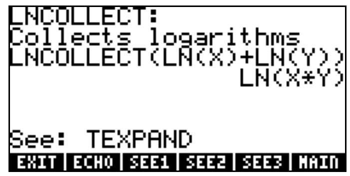
FDISTRIB



LIN



LNCOLLECT



POWEREXPAND

SIMPLIFY

Hoofdstuk 6
Oplossingen voor enkelvoudige vergelijkingen

Dit hoofdstuk beschrijft de functies van de rekenmachine voor het oplossen van enkelvoudige vergelijkingen in de vorm f(X) = 0. Er zijn twee menu's voor het oplossen van vergelijkingen, behorende bij de toets 7, Symbolic SOLVer (← S.SLV) en NUMerical SoLVer (→ NUM.SLV). Hierna worden enkele toepassingen van deze functies behandeld. Voor deze oefeningen moet u de CAS-modus op Complex in te stellen. (zie hoofdstuk 2).

Symbolische oplossing van algebraïsche vergelijkingen

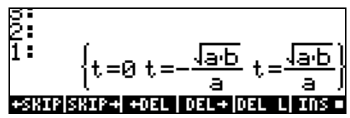
Hierna worden enkele functies van het menu Symbolic Solver beschreven. Activeer het menu met de bijbehorende toetsencombinatie. Met systeemvlag 117 ingesteld op *CHOOSE boxes,* zijn de volgende menulijsten beschikbaar:

De functies DESOLVE en LDEC worden gebruikt voor het oplossen van differentiële vergelijkingen. Dit vormt het onderwerp van een ander hoofdstuk en wordt hier daarom niet behandeld. De functie LINSOLVE wordt gebruikt voor het oplossen van meervoudige lineaire vergelijkingen en wordt in een ander hoofdstuk behandeld. De functies ISOL en SOLVE kunnen gebruikt worden voor elk onbekend element in een polynoomvergelijking. De functie SOLVEVX lost een polynoomvergelijking op, waar het onbekende element de standaard CAS-variable VX (gewoonlijk 'X'). Tenslotte geeft de functie ZEROS de nullen, of wortels, van een polynoom. De invoer van alle functies in het menu S.SLV, met uitzondering van ISOL, staat in de CAS-helptekst (TOOL NXT HELP).

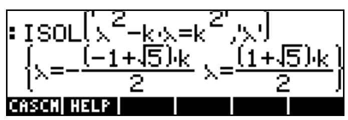
De functie ISOL:

De functie ISOL (Vergelijking, variabele) geeft de oplossing(en) voor *Vergelijking* door het isoleren van de *variabele.* Voor het oplossen van *t* in de vergelijking at^3-bt = 0 met de rekenmachine ingesteld in de ALG-modus, kan bijvoorbeeld het volgende gebruikt worden:

In de RPN-modus wordt de oplossing verkregen door de vergelijking in het stapelgeheugen in te voeren, gevolgd door de variabele vóór het invoeren van de functie ISOL. Net vóór het uitvoeren van ISOL moet het RPN-stapelgeheugen er uit moeten zien zoals in de linkerafbeelding. Na het toepassen van ISOL, is het resultaat zoals in de rechterafbeelding:

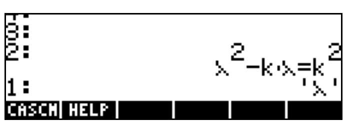


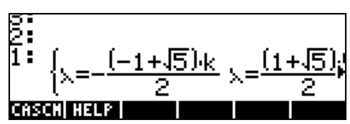
Het eerste argument in ISOL kan een uitdrukking zijn, zoals hierboven weergegeven, of een vergelijking. Probeer bijvoorbeeld in de ALG-modus:



Opmerking: gebruik ↱ = (behorende bij de toets +/-)voor het invoeren van het isgelijkteken (=) in een vergelijking .

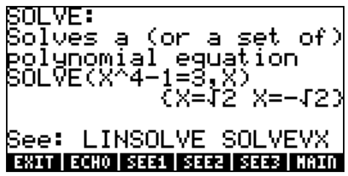
Zoals hieronder weergegeven, kan hetzelfde probleem opgelost worden in de RPN-modus (de afbeeldingen tonen het RPN stapelgeheugen vóór en na de toepassing van de functie ISOL):



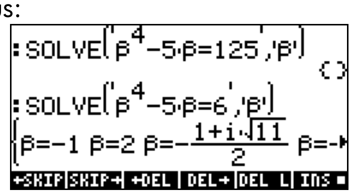


De functie SOLVE:

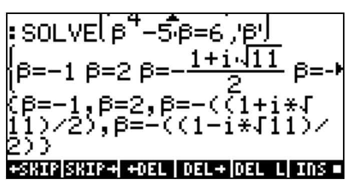
De functie SOLVE heeft dezelfde syntaxis als de functie ISOL behalve dat SOLVE ook gebruikt kan worden om een set polynoomvergelijkingen op te lossen. Hieronder wordt de helptekst voor de functie SOLVE weergegeven met de oplossing voor de vergelijking X^4 – 1 = 3 :



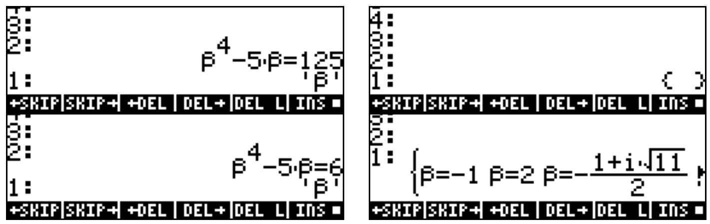
De volgende voorbeelden tonen het gebruik van de functie SOLVE in de ALG-modus en de RPN-modus:



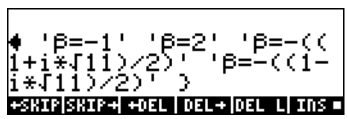
Het bovenstaande beeldscherm laat twee oplossingen zien. In de eerste, β^4-5β =125, produceert SOLVE geen oplossingen { }. In de tweede, β^4 - 5β = 6, produceert SOLVE vier oplossingen in de laatste uitvoerregel. De allerlaatste oplossing is niet zichtbaar omdat het resultaat meer tekens bevat dan de breedte van het beeldscherm van de rekenmachine. U kunt echter alle oplossingen bekijken metde pijltoets omlaag, (▽), die de regeleditor activeert (deze bewerking kan gebruikt worden voor toegang tot elke uitvoerregel die langer is dan de breedte van het beeldscherm van de rekenmachine):



Hieronder worden de RPN-beeldschermen voor deze twee voorbeelden vóór en na de toepassing van de functie SOLVE getoond:

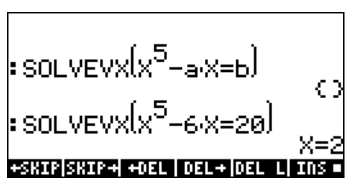


Het gebruik van de pijltoets omlaag, (▼), in deze modus activeert de regeleditor:



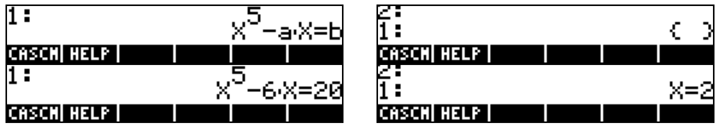
De functie SOLVEVX:

De functie SOLVEVX lost een vergelijking op voor de standaard CAS-variabelemet de variabelennaam VX. Deze variabele is standaard ingesteld op ‘X’.
Hieronder worden voorbeelden in de ALG-modus met VX = ‘X’, getoond:

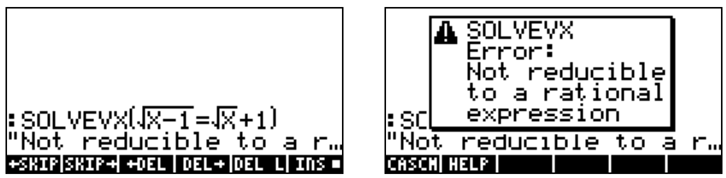


In het eerste geval vond SOLVEVX geen oplossing. In het tweede geval vond SOLVEVX een enkele oplossing, X = 2.

De volgende beeldschermen tonen het RPN-stapelgeheugen voor het oplossen van de twee bovenstaande voorbeelden (vóór en na het toepassen van SOLVEVX):

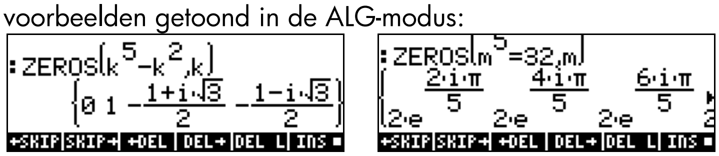


De vergelijking gebruikt als argument voor de functie SOLVEVX moet herleiden kunnen worden tot een rationele uitdrukking. De volgende vergelijking zal bijvoorbeeld niet door SOLVEVX bewerkt worden:

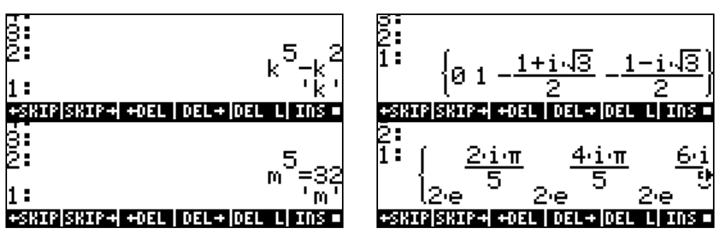


De functie ZEROS:

De functie ZEROS geeft de oplossingen van een polynoomvergelijking zonder hun veelvoud te tonen. Voor het oplossen vereist de functie als invoer de uitdrukking van de vergelijking en de op te lossen variabelennaam. Hieronder worden voorbeelden getoond in de ALG-modus:



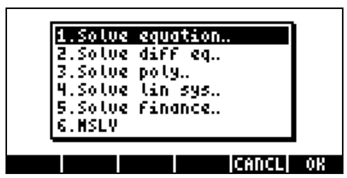
Voor gebruik van de functie ZEROS in de RPN-modus, moet u eerst de polynomische uitdrukking invoeren, gevolgd door de variabele die opgelost moet worden en uiteindelijk de functie ZEROS. De volgende beeldschermen tonen het RPN-stapelgeheugen vóór en na het toepassen van ZEROS op de twee bovenstaande voorbeelden:



De hierboven toegelichte functies van het menu Symbolic Solver geven oplossingen voor rationele vergelijkingen (met name polynoomvergelijkingen). Indien de op te lossen vergelijking alleen numerieke coëfficiënten bevat, is een numerieke oplossing mogelijk met de functies van het menu Numerical Solver van de rekenmachine.

Het menu numerieke probleemoplosser

De rekenmachine voorziet in een zeer krachtige omgeving voor het oplossen van enkelvoudige of transcendentale vergelijkingen. Voor toegang tot deze omgeving moet u de numerieke probleemoplosser activeren (NUM.SLV) met ↱ NUM.SLV . Nu verschijnt het drop-downmenu met de volgende opties:



Item *2. Solve diff eq..* wordt behandeld in een later hoofdstuk over differentiële vergelijkingen. Item *4. Solve lin sys..* wordt behandeld in een later hoofdstuk over matrices. Item *6. MSLV* (Multipele vergelijking SoLVer) wordt in het volgende hoofdstuk behandeld. Hieronder worden de toepassingen van items *3. Solve poly..*, *5. Solve finance* en *1. Solve equation..*, in deze volgorde behandeld. Bijlage 1-A aan het einde van Hoofdstuk 1, bevat instructies over het gebruik van invoerschermen met voorbeelden voor toepassingen van de numerieke probleemoplosser.

Opmerkingen:
1. Iedere keer dat u een waarde in de NUM.SLV-toepassingen oplost, wordt de opgeloste waarde in het stapelgeheugen geplaatst. Dit is handig als deze waarde beschikbaar moet blijven voor andere bewerkingen.
2. Iedere keer dat u een van de toepassingen in het NUM.SLV menu activeert, worden er een of meer variabelen aangemaakt.

Polynoomvergelijkingen:

Door de *Solve poly…* optie te gebruiken in de *SOLVE*-omgeving van de rekenmachine kunt u:

(1) de oplossingen vinden voor een polynoomvergelijking:
(2) de coëfficiënten krijgen van de polynoom die een aantal gegeven wortels heeft;
(3) een algebraïsche uitdrukking krijgen voor de polynoom als een functie van X.

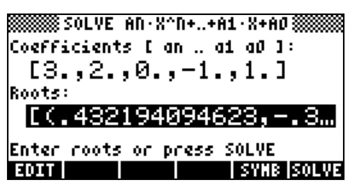
Het vinden van de oplossingen voor een polynoomvergelijking

Een polynoomvergelijking is een vergelijking in de vorm: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$. De basisgrondstelling van de algebra geeft aan dat er *n* oplossingen zijn voor elke polynoomvergelijking van rangorde *n*. Enkele oplossingen zouden echter complexe getallen kunnen zijn. Los, als oefening, de volgende vergelijking op: $3s^4 + 2s^3 - s + 1 = 0$.

U wilt de coëfficiënten van de vergelijking in een vector $[a_n,a_{n-1},a_1\ \ a_0]$ plaatsen. Voor dit voorbeeld kan de vector [3,2,0,-1,1] gebruikt worden. Probeer het volgende om met de rekenmachine deze polynoomvergelijking op te lossen:

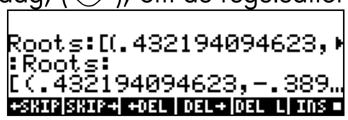
↱ NUM.SLV ▼ ▼ OK	Selecteert Solve poly…
↰ [] 3 ↱ , 2 ↱ , 0 ↱ , 1 +/- ↱ , 1 OK	Voert de coëfficiënten vector in
SOLVE	Lost de vergelijking op:

Het beeldscherm toont de oplossing als volgt:



Druk op `ENTER` om naar het stapelgeheugen terug te keren. Het stapelgeheugen toont de volgende resultaten in de ALG-modus (de RPN-modus zou hetzelfde resultaat tonen):

Druk op de pijltoets omlaag, (▼), om de regeleditor te activeren.



Alle oplossingen zijn complexe getallen: (0.432,-0.389), (0.432,0.389), (-0.766, 0.632), (-0.766, -0.632).

Opmerking: vergeet niet dat complexe getallen in de rekenmachine als gerangschikte tweetallen weergegeven worden, waarvan het eerste getal van het tweetal het reële gedeelte is en het tweede getal het imaginaire gedeelte. Het getal (0.432,-0.389) , een complex getal, zal bijvoorbeeld gewoonlijk geschreven worden als 0.432 - 0.389*i*, waar *i* de imaginaire eenheid is, d.w.z. $i^2 = -1$.

Opmerking: de *basisgrondstelling van algebra* geeft aan dat er *n* oplossingen zijn voor elke polynoomvergelijking van rangorde *n*. Er bestaat een andere grondstelling van algebra die aangeeft dat als een van de oplossingen voor een polynoomvergelijking met reële coëfficiënten een complex getal is, dan is het conjugaat van dit getal ook een oplossing. Met andere woorden, complexe oplossingen voor een polynoomvergelijking met reële coëfficiënten komen in tweetallen. Dit betekent dat polynoomvergelijkingen met reële coëficiënten van oneven rangorde op zijn minst een reële oplossing zullen hebben.

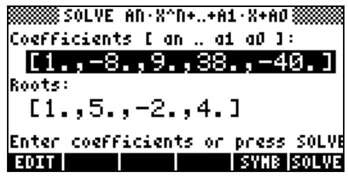
Het aanmaken van polynoomcoëfficiënten met gegeven polynoomwortels

We gaan ervan uit dat u de polynoom wilt aanmaken waarvan de wortels de getallen [1, 5, -2, 4] zijn. Volg deze stappen om de rekenmachine hiervoor te gebruiken:

`→` NUM.SLV `▼` `▼` OK	Selecteert Solve poly…
`▼` `←` [] `1` `→` , `5`	

↱ ␣, 2 +/- ↱ ␣, 4 OK	Voert de vector van wortels in
SOLVE	Lost de coëfficiënten op

Druk op ENTER om naar het stapelgeheugen terug te keren. Het stapelgeheugen zal de coëfficiënten tonen.



Druk op ▼ om de regeleditor te activeren, zodat u alle coëfficiënten kunt bekijken.

> **Opmerking**: Indien u een polynoom met reële coëfficiënten wilt, maar deze complexe wortels heeft, moet u de complexe wortels in tweetallen van geconjugeerde getallen invoeren. Maak een polynoom aan met de wortels [1 (1,2) (1,-2)]. Controleer of de resulterende polynoom alleen reële coëfficiënten heeft. Probeer ook een polynoom te genereren met de wortels [1 (1,2) (-1,2)], en controleer of de resulterende polynoom complexe coëfficiënten heeft.

Het aanmaken van een algebraïsche uitdrukking voor de polynoom

U kunt de rekenmachine gebruiken om een algebraïsche uitdrukking te genereren voor een polynoom met de gegeven coëfficiënten van de wortels van de polynoom. De resulterende uitdrukking zal gegeven worden aan de hand van de standaard CAS-variabele X. (De volgende voorbeelden tonen hoe u X kunt vervangen door elke andere variabele door middel van de functie |.)

Probeer het volgende voorbeeld om de algebraïsche uitdrukking aan te maken met de coëfficiënten. We gaan ervan uit dat de coëfficiënten van de polynoom [1,5,-2,4] zijn. Gebruik de volgende toetsencombinaties:

↱ NUM.SLV ▼ ▼ OK	Selecteert Solve poly…
↰ [] 1 ↱ ␣, 5	Voert de vector van coëfficiënten in
↱ ␣, 2 +/- ↱ ␣, 4 OK	

SYMB Genereert de symbolische uitdrukking
ENTER Keert terug naar het stapelgeheugen.

De uitdrukking die op deze wijze aangemaakt is, wordt in het stapelgeheugen getoond als:

'X^3+5*X^2+-2*X+4'.

Probeer het volgende voorbeeld om de algebraïsche uitdrukking aan te maken met de wortels. We gaan ervan uit dat de wortels van de polynoom [1,3,-2,1] zijn. Gebruik de volgende toetsencombinaties:

NUM.SLV OK Selecteert Solve poly…
[] 1 , 3 Voert de vector van wortels in
, 2 +/- , 1 OK
SYMB Genereert de symbolische formule
ENTER Keert terug naar het stapelgeheugen.

De uitdrukking die op deze wijze aangemaakt is, wordt in het stapelgeheugen getoond als:'(X-1)*(X-3)*(X+2)*(X-1)'.
Om de producten uit te breiden, kunt u het commando EXPAND gebruiken. Het resultaat is: 'X^4+-3*X^3+ -3*X^2+11*X-6'.

Een andere benadering om een uitdrukking voor de polynoom te krijgen, is eerst de coëfficiënt en dan de algebraïsche uitdrukking met de gemarkeerde coëfficiënten te genereren. Probeer hiervoor:

NUM.SLV OK Selecteert Solve poly…
[] 1 , 3 Voert vector van wortels in
, 2 +/- , 1 OK
SOLVE Lost de coëfficiënten op
SYMB Genereert de symbolische uitdrukking
ENTER Keert terug naar het stapelgeheugen.

De uitdrukking die op deze wijze aangemaakt is, wordt in het stapelgeheugen getoond als: 'X^4+-3*X^3+ -3*X^2+11*X+-6*X^0'. Een lijst in het stapelgeheugen op niveau 2 geeft de coëfficiënten weer.

Financiële berekeningen

De berekeningen in item *5. Solve finance..* in het menu Numerical Solver (*NUM.SLV*) worden gebruikt voor berekeningen van geldtijdwaarde van belang in de economische wetenschappen en andere financiële toepassingen. U kunt deze toepassing ook activeren met de toetsencombinatie ⬅ $ FINANCE (behorende bij de toets 9). Voordat de werking van deze oplossingsomgeving uitvoerig wordt behandeld, worden er enkele definities gegeven die nodig zijn om de financiële bewerkingen van de rekenmachine te begrijpen.

Definities

Voor de ontwikkeling van projecten moet er vaak geld geleend worden van een financiële instelling of van de overheid. Het bedrag aan geleend geld wordt *Aanwezige waarde* (PV) genoemd. Dit geld moet terugbetaald worden in *n* perioden (meestal meervouden of submeervouden van een maand) en is onderhevig aan een *jaarlijks rentepercentage* van I%YR. Het *aantal periodes per jaar* (P/YR) bestaat uit een heel getal van periodes waarin het jaar verdeeld wordt voor de terugbetaling van het geleende geld. Typische P/YR waarden zijn 12 (maandelijkse betalingen), 24 (tweemaandelijkse betalingen) of 52 (wekelijkse betalingen). De *betaling* (PMT) is het bedrag dat de lener moet betalen aan de leninggever aan het begin of einde van elk van de *n* periodes van de lening. De *toekomstige waarde* van het geld (FV) is de waarde die het geleende bedrag zal hebben aan het einde van de *n* periodes. In de regel vindt de betaling plaats aan het eind van elke periode, zodat de lener aan het einde van de eerste periode betaalt en hetzelfde vastgestelde bedrag betaalt aan het einde van de tweede, de derde, enz., tot aan het einde van de *n*-de periode.

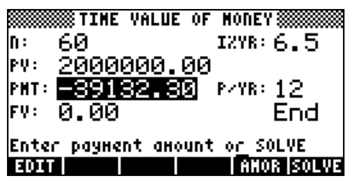
Voorbeeld 1 – Het berekenen van betaling op een lening

Hoeveel zal het maandelijkse bedrag zijn als 2 miljoen dolar geleend wordt tegen een jaarlijks rentepercentage van 6,5%, terug te betalen in 60 maandelijkse betalingen? Voor de schuld die terugbetaald moeten worden in 60 maanden, zou de toekomstige waarde van de lening nul moeten zijn. Met het doel de financiële berekeningsfunctie van de rekenmachine te gebruiken, nemen wij de volgende waarden: n = 60, I%YR = 6.5, PV = 2000000, FV =

0, P/YR = 12. Gebruik de volgende toetsencombinaties voor de invoer van de gegevens en de oplossing voor de betaling, PMT,:

FINANCE	Activeert het invoerscherm van de financiële berekening
60 OK	Voert n = 60 in
6.5 OK	Voert 1%YR = 6.5 % in
2000000 OK	Voert PV = 2,000,000 US$ in
▼	Slaat PMT over, aangezien we dit gaan oplossen
0 OK	Voert FV = 0 in, Einde van de optie wordt gemarkeerd
▲ ◄ SOLVE	Markeert PMT en lost het op

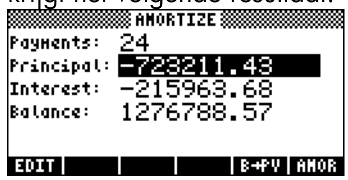
Het beeldscherm met de oplossing ziet er als volgt uit:



Het beeldscherm toont nu de PMT-waarde als -39.132.30, d.w.z. de lener moet de leninggever US $ 39.132.30 betalen aan het eind van elke maand gedurende de volgende 60 maanden om het volledige bedrag terug te betalen. De PMT-waarde is negatief, omdat de rekenmachine de bedragen vanuit het standpunt van de lener ziet. De lener heeft + US $ 2,000,000.00 op het moment van periode t = 0, dan begint hij te betalen, d.w.z. -US $ 39132.30 optellen bij de periodes t = 1, 2, …, 60. Op t = 60, bedraagt de nettowaarde van de lener nul. Als u nu de waarde US $ 39,132.30 neemt en deze waarde vermenigvuldigt met 60 betalingen, bedraagt de totale som die is terugbetaald door de lener US $ 2,347,937.79. Op deze wijze heeft de leninggever een nettowinst van $ 347,937.79 gedurende de vijf jaren dat zijn geld gebruikt is om het project van de lener te financieren.

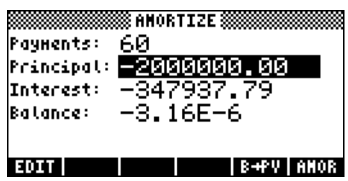
Voorbeeld 2 – Het berekenen van de aflossing van een lening

Dezelfde oplossing voor het probleem in Voorbeeld 1 kan gevonden worden door op AMOR te drukken, wat staat voor AMORTIZATION. Deze optie wordt gebruikt om te berekenen hoeveel er van de lening afgelost is na een bepaald aantal betalingen. We gaan ervan uit dat er 24 perioden in de eerste regel van het aflossingsbeeldscherm gebruikt worden, d.w.z. 2 4 OK. Druk vervolgens op AMOR. U krijgt het volgende resultaat:



In dit scherm wordt aangegeven dat na 24 maanden terugbetaling van de schuld, de lener US $ 723.211.43 betaald heeft van het geleende hoofdbedrag en US $ 215.963.68 aan rente. Gedurende de volgende 36 maanden moet de lener moet nog een restbedrag betalen van US $1,276,788.57.

Kijk wat er gebeurt indien u 60 vervangt in *Betalingen (Payments)*: voer het getal in het aflossingsbeeldscherm in en druk dan op OK AMOR. Nu ziet het beeldscherm er als volgt uit:



Dit betekent dat aan het einde van 60 maanden het hoofdbedrag van US $ 2,000,000.00 betaald is samen met de rente van US $ 347,937.79 en dat de lener nog US $ 0.000316, verschuldigd is aan de uitlener. Het restbedrag zou vanzelfsprekend nul moeten zijn. De waarde die op het beeldscherm getoond wordt, is een fout in de afronding door de numerieke oplossing.

Druk twee keer op ON of ENTER, om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

Voorbeeld 3 – Het berekenen van de aflossing bij betalingen aan het begin van een periode.

Wij gaan hetzelfde probleem oplossen als in de Voorbeelden 1 en 2, maar maken hierbij gebruik van de optie dat de betaling uitgevoerd wordt aan het begin van betalingsperiode. Gebruik:

← FINANCE	Activeert het invoerscherm van de financiële berekening
60 OK	Voert n = 60 in
6.5 OK	Voert 1%YR = 6.5 % in
2000000 OK	Voert PV = 2,000,000 US$ in
▼	Slaat PMT over, aangezien we dit gaan oplossen
0 OK	Voert FV = 0 in, Einde van de optie wordt gemarkeerd
CHOOS ▲ OK	Wijzigt betalingsoptie in *Begin*
▲ ◄ SOLVE	Markeert PMT en lost het op

Het beeldscherm toont nu de PMT-waarde als -38.921.47, d.w.z. de lener moet de leninggever US $ 38.921.48 betalen aan het *begin* van elke maand gedurende 60 maanden om het volledige bedrag terug te betalen. U ziet dat als de lener aan het begin van elke betalingsperiode betaalt, het bedrag dat de lener maandelijks betaalt iets lager is dan het bedrag bij betaling aan het einde van betalingsperiode. De reden van dit verschil is dat de leninggever rentewinsten ontvangt voor de betalingen aan het begin van de periode, en op deze wijze de last op de uitlener verlicht.

Opmerking:

1. In de financiële omgeving van de rekenmachine kunt u alle betrokken termen, d.w.z. n, I%YR, PV, FV, P/Y oplossen, terwijl de overige termen in de leningsberekening gegeven worden. Markeer alleen de waarde die u wilt oplossen en druk op SOLVE. Het resultaat wordt in het gemarkeerde veld weergegeven.

2. De waarden die worden berekend in de financiële omgeving van de rekenmachine worden gekopiëerd naar het stapelgeheugen met hun bijbehorende tag (identiteitslabel)

Het verwijderen van variabelen

Wanneer u de financiële omgeving van de rekenmachine voor de eerste keer in de HOME directory gebruikt, of elke willekeurige subdirectory, zal het de variabelen n I%YR PV PMT PYR FV aanmaken om de bijbehorende termen in de berekeningen op te slaan. U kunt de inhoud van deze variabelen bekijken met de volgende toetsencombinatie:

→ n → I%YR → PV → PMT → PYR → FV.

U kunt deze variabelen bewaren voor toekomstig gebruik of de functie PURGE gebruiken om ze uit uw directory te verwijderen.Gebruik in de ALG-modus de volgende toetsencombinaties om <u>alle variabelen in één keer te verwijderen</u>:

TOOL PURGE VAR ← {}	Voert PURGE in, bereid variabelenlijst voor
' → n	Voert variabelennaam N in
▶ → ,	Voert een komma in
' → I%YR	Voert variabelennaam 1%YR in
▶ → ,	Voert een komma in
' → PV	Voert variabelennaam PV in
▶ → ,	Voert een komma in
' → PMT	Voert variabelennaam PMT in
▶ → ,	Voert een komma in
' → PYR	Voert variabelennaam PYR in
▶ → ,	Voert een komma in
' → FV.	Voert variabelennaam FV in
ENTER	Voert PURGE commando uit

De volgende twee beeldschermen tonen het commando PURGE voor het verwijderen van alle variabelen in de directory en de resultaten na het uitvoeren van het commando.

In de RPN-modus wordt het commando uitgevoerd met de volgende toetsencombinaties:

VAR ← {}	Bereid een lijst van de te verwijderen variabelen voor
N	Voert variabelennaam N in
I%YR	Voert variabelennaam 1%YR in
PV	Voert variabelennaam PV in
PMT	Voert variabelennaam PMT in
PYR	Voert variabelennaam PYR in
FV	Voert variabelennaam FV in
ENTER	Voert een variabelenlijst in het stapelgeheugen in
TOOL PURGE	Verwijdert de variabelen van de lijst

Voordat het commando PURGE wordt ingevoerd, ziet het RPN-stapelgeheugen er als volgt uit:

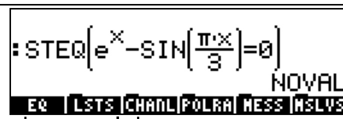
Het oplossen van vergelijkingen met een onbekend element via NUM.SLV

Het menu NUM.SLV van de rekenmachine bevat item *1. Solve equation..* dat verschillende soorten vergelijkingen in een enkelvoudige variabele oplost, inclusief niet-lineaire algebraïsche en transcendentale vergelijkingen. Laten we bijvoorbeeld de volgende vergelijking oplossen: e^x-$sin(\pi x/3) = 0$.

Voer gewoon de uitdrukking als een algebraïsch object in en sla het in de variabele EQ op. De vereiste toetsencombinaties in de ALG-modus zijn de volgende:

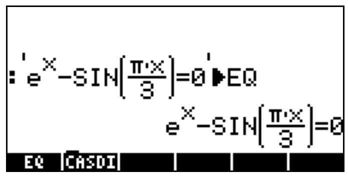
' ← e^x ALPHA ← X ▶ − SIN ← π
× ALPHA ← X ÷ 3 ▶ → = 0 ▶
STO▶ ALPHA E ALPHA Q ENTER

De functie STEQ
De functie STEQ, beschikbaar via het commandocatalogus, → CAT , zal het argument in de variabele EQ opslaan, bijvoorbeeld in de ALG_modus:

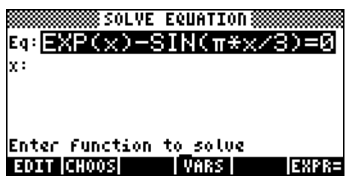


In de RPN-modus voert u de vergelijking tussen apostroffen in en activeert u het commando STEQ. De functie STEQ kan dus gebruikt worden als snelkoppeling om een uitdrukking in variabele EQ op te slaan.

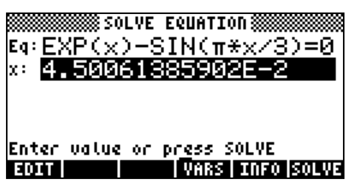
Druk op VAR om de nieuwe variabele EQ te bekijken:



Voer dan de SOLVE-omgeving in en selecteer *Solve equation…* met ↱ NUM.SLV OK. Het volgende beeldscherm ziet er als volgt uit:



De vergelijking die in variabele EQ opgeslagen werd, is al in het *Eq*-veld geladen van het invoerscherm SOLVE EQUATATION. Er wordt ook een gelabeld veld *x* gegeven. Om de vergelijking op te lossen, dient u alleen het veld voor de X: te markeren met ▼ en op SOLVE te drukken. Het resultaat is X: 4.5006E-2:



Dit is echter niet de enige mogelijke oplossing voor deze vergelijking. Voer bijvoorbeeld een negatief getal in het X:-veld in voordat de vergelijking opgelost wordt om een negatieve oplossing te krijgen. Probeer de toetsencombinatie 3 +/- OK ▼ SOLVE. Nu is het resultaat X: -3.045.

Procedure voor oplossing voor *Equation Solve...*

De numerieke solver voor enkelvoudige onbekende elementen van vergelijking werkt op de volgende wijze:

- Het staat de gebruiker toe een op te lossen vergelijking in te typen of te selecteren (CHOOS).
- Het opent een invoerscherm met invoervelden die overeenkomen met alle variabelen die betrokken zijn bij de vergelijking en opgeslagen zijn in variabele EQ.
- De gebruiker moet de waarden invoeren voor alle betrokken variabelen, behalve een.
- De gebruiker markeert dan het veld van het onbekende element om de vergelijking op te lossen en drukt op SOLVE
- De gebruiker kan een oplossing forceren door een aanvankelijk vermoeden in te voeren in het desbetreffende invoerveld voordat de vergelijking wordt opgelost.

De rekenmachine voert een algoritmisch zoekopdracht uit om een stap aan te geven waarin de functie het teken verandert, wat het bestaan van een wortel of oplossing aanduidt. De rekenmachine gebruikt dan een numerieke methode om de oplossing te convergeren.

De rekenmachine zoekt een oplossing die bepaald wordt door de initiële waarde aanwezig in het invoerveld van het onbekende element. Als er geen waarde aanwezig is, gebruikt de rekenmachine een standaardwaarde van nul. U kunt dus naar meer dan een oplossing zoeken voor een vergelijking door de initiële waarde in het invoerveld van het onbekende element te veranderen. Voorbeelden van de vergelijkingsoplossingen worden hieronder weergegeven:

Voorbeeld 1 – De wet van Hooke over uitrekking en kracht

De vergelijking die u gaat gebruiken is de wet van Hooke voor de normale kracht in de x-richting voor een vast deeltje onderhevig aan een toestand van uitrekking die gegeven wordt door

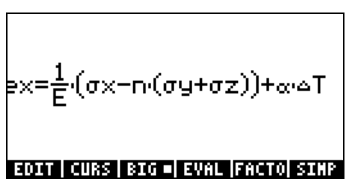
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

de vergelijking is $e_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - n \cdot (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \alpha \cdot \Delta T,$ hier is e_{xx} de krachteenheid in de x-richting, σ_{xx}, σ_{yy} en σ_{zz}, zijn de normale uitrekkingen op het deeltje in richting van de x-, y-, en z-assen, *E* is de Young's modulus of elasticiteitsmodulus van het materiaal, *n* is de Poisson verhouding van het materiaal α is de thermische uitzettingscoëfficiënt van het materiaal, en ΔT is een temperatuursverhoging.

We gaan ervan uit dat u de volgende gegevens geeft: σ_{xx}= 2500 psi, σ_{yy} =1200 psi, en σ_{zz} = 500 psi, E = 1200000 psi, *n* = 0.15, α = 0.00001/°F, ΔT = 60 °F. Voor de berekening van de kracht e_{xx} gebruikt u het volgende:

↱ NUM.SLV OK	Activeert de numerieke probleemoplosser om vergelijkingen op te lossen
↱ EQW	Activeert de vergelijkingenschrijver om de vergelijking in te voeren

Vanaf nu moet u de instructies gegeven in Hoofdstuk 2 opvolgen, die uitleggen hoe de Vergelijkingenschrijver gebruikt moet worden om een vergelijking op te bouwen. De vergelijking die in het *Eq*-veld ingevoerd dient te worden, moet er als volgt uitzien zoals ondergaand (u ziet dat slechts een subindex gebruikt wordt voor de referentie van de variabelen, d.w.z. e_{xx} is vertaald als *ex*, enz. – Dit wordt gedaan om tijd voor het invoeren te sparen):

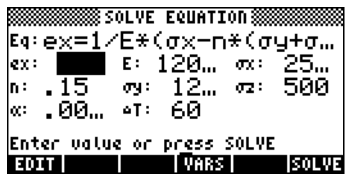


Gebruik de volgende snelkoppelingen voor speciale tekens:

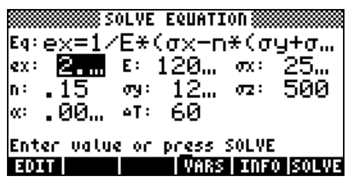
σ: ALPHA ↱ S α: ALPHA ↱ A Δ: ALPHA ↱ C

en vergeet niet dat de kleine letters worden ingevoerd met ALPHA ↰ voor de lettertoets, dus x wordt ingevoerd als ALPHA ↰ X .

Druk op ENTER om naar het beeldscherm van de probleemoplosser terug te keren. Voer de hierboven voorgestelde waarden in de desbetreffende velden in, zodat het volgende beeldscherm verschijnt:



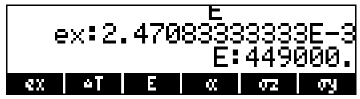
Druk op SOLVE om *ex* op te lossen, waarbij het *ex:*-veld is gemarkeerd:



U kunt de oplossing bekijken in het invoerscherm SOLVE EQUATION door op EDIT te drukken, terwijl het *ex:*-veld gemarkeerd is. Het resultaat is 2.470833333333E-3. Druk op OK om de functie EDIT te verlaten.

We gaan ervan uit dat u nu de Young's modulus wilt bepalen die een kracht van e_{xx} = 0.005 zal produceren onder dezelfde toestand van uitrekking, ongeacht de thermische uitzetting. In dit geval dient u een waarde van 0.005 in het *ex*:-veld in te voeren en een nul in het *ΔT:*-veld (met ΔT = 0 zijn er geen thermische effecten opgenomen). Om E op te lossen, Markeer het *E:*-veld en druk op SOLVE om E op te lossen. Het volgende resultaat kunt u met de functie EDIT bekijken: E =449000 psi. Druk op SOLVE ENTER om naar het normale beeldscherm terug te keren.

U ziet dat de resultaten van de berekeningen uitgevoerd in de numerieke problemenoplosser-omgeving gekopiëerd zijn naar het stapelgeheugen:

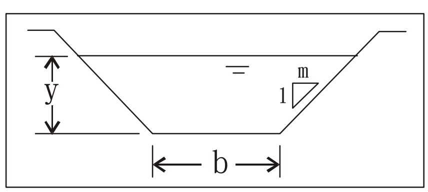


U kunt ook op uw softmenutoetsen de variabelenlabels zien die overeenkomen met de variabelen in de vergelijking die is opgeslagen in EQ (druk op NXT om alle variabelen in uw directory te zien), d.w.z. variabelen *ex*, *ΔT*, α, σz, σy, *n*, σx, en *E*.

Voorbeeld 2 – Specifieke energie bij stroming in vrij wateroppervlak
Specifieke energie in een vrij wateroppervlak wordt gedefinieerd als de energie per gemeten eenheidsgewicht met betrekking tot de bodem. Als E = specifieke energie, y = diepte wateroppervlak, V = stromingssnelheid, g = acceleratie van de zwaartekracht, dan schrijven we

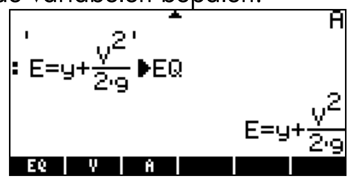
$$E = y + \frac{V^2}{2g}.$$

De stromingssnelheid op haar beurt wordt geschreven als V = Q/A, waar Q = waterafvoer, A = doorsnee-oppervlak. Het oppervlak hangt van de gebruikte doorsnee af, bijvoorbeeld voor een trapeziumvormige doorsnee, zoals de afbeelding hieronder A = (b+m·y) ·y toont, terwijl b = bodembreedte en m = zijhelling van de doorsnee.

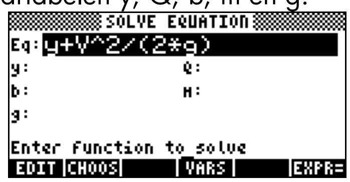


We kunnen de vergelijking voor E invoeren zoals hierboven getoond en extra variabelen voor A en V gebruiken, zodat het invoerscherm de velden laat zien voor de basisvariabelen y, Q, g, m en b, zoals:

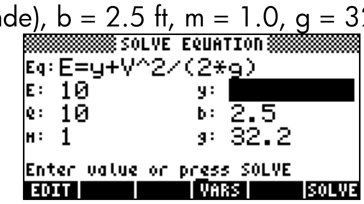
- U moet eerst een subdirectory, genaamd SPEN (Specific Energy), aanmaken en in deze subdirectory werken.
- Vervolgens moet u de volgende variabelen bepalen:



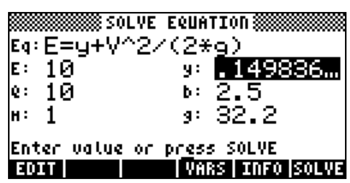
- Activeer de numerieke probleemoplosser voor het oplossen van vergelijkingen: NUM.SLV OK. U ziet dat het invoerscherm ingangen bevat voor de variabelen y, Q, b, m en g:



- Probeer de volgende invoergegevens: E = 10 ft, Q = 10 cfs (kubieke voet per seconde), b = 2.5 ft, m = 1.0, g = 32.2 ft/s^2:

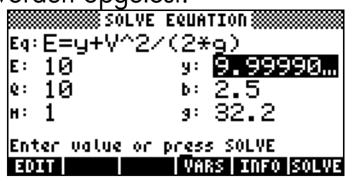


- Los y op.



Het resultaat is 0.149836.., d.w.z. y = 0.149836.

- Het is echter bekend dat er twee oplossingen beschikbaar zijn voor y in de specifieke energie vergelijking. De zojuist gevonden oplossing komt overeen met een numerieke oplossing met een initiële waarde van 0 (de standaardwaarde voor *y*, d.w.z. iedere keer dat het oplossingsveld leeg is, is de initiële waarde nul). Om de andere oplossing te vinden, moet er een grotere waarde voor y ingevoerd worden, bijv. 15, moet het invoerveld y gemarkeerd worden en moet y opnieuw worden opgelost:



Het resultaat is nu 9.99990, d.w.z. y = 9.99990 ft.

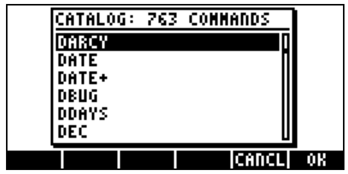
Dit voorbeeld verduidelijkt het gebruik van extra variabelen voor het schrijven van complexe vergelijkingen. Wanneer NUM.SLV is geactiveerd, worden de substituties aangegeven door de extra variabelen uitgevoerd en geeft het invoerscherm voor de vergelijking het invoerveld weer voor de primitieve variabelen of basisvariabelen die het resultaat zijn van de substituties. Het voorbeeld verduidelijkt ook een vergelijking die meer dan een oplossing heeft en hoe het aanvankelijke vermoeden gekozen kan worden opdat de oplossing deze andere oplossingen kan geven.

In het volgende voorbeeld wordt de functie DARCY gebruikt om wrijvingsfactoren in pijpleidingen te vinden. De functie wordt in het volgende kader bepaald.

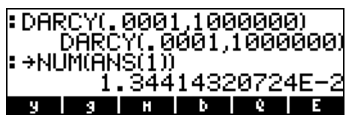
Speciale functie voor pijpstroming: DARCY (ε/D,Re)

De Darcy-Weisbach-vergelijking wordt gebruikt voor het berekenen van het energieverlies (per gewichtseenheid), h_f, in een pijpstroming door een pijp met diameter D, absolute ruwheid ε en lengte L, terwijl de stromingssnelheid in de pijp V is. De vergelijking wordt geschreven als $h_f = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$. De hoeveelheid *f* staat bekend als de wrijvingsfactor van de stroming en het is vastgesteld dat het een functie is van de relatieve ruwheid van de pijp, ε/D en een (dimensieloos) Reynolds-getal , Re. De definitie van het Reynolds getal is Re = ρVD/μ = VD/ν, terwijl ρ en μ respectievelijk de densiteit en de dynamische viscositeit van de vloeistof is en ν = μ/ρ de kinematische viscositeit van de vloeistof is.

De rekenmachine bevat een functie genaamd DARCY die als invoer de relatieve ruwheid ε/D en het Reynolds getal gebruikt, in deze volgorde, om de wrijvingsfactor f te berekenen. U kunt de functie DARCY via de commandocatalogus vinden:



U kunt bijvoorbeeld voor ε/D = 0.0001, Re = 1000000 de wrijvingsfactor vinden door middel van: DARCY(0.0001,1000000). In het volgende beeldscherm werd de functie →NUM ()gebruikt om een numerieke waarde van de functie te krijgen:



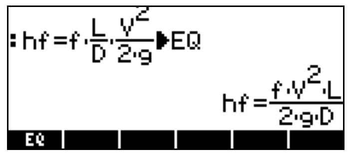
Het resultaat is f = DARCY(0.0001,1000000) = 0.01341…

De functie FANNING(ε/D,Re)

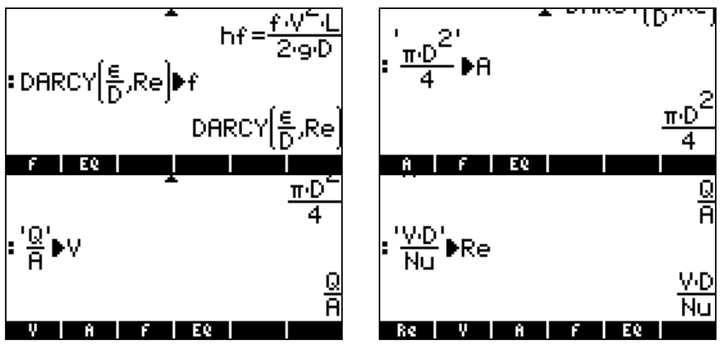
In aërodynamische toepassingen wordt een andere wrijvingsfactor, de Fanning-wrijvingsfactor gebruikt. De Fanning-wrijvingsfactor, f_F, wordt gedefinieerd als 4 keer de Darcy-Weisbach-wrijvingsfactor, *f*. De rekenmachine heeft ook een functie genaamd FANNING die dezelfde invoer als die voor DARCY gebruikt, d.w.z. ε/D en Re, en deze functie geeft de FANNING-wrijvingsfactor. Controleer of FANNING(0.0001,1000000) = 0.0033603589181s.

Voorbeeld 3 – Stroming in een pijp

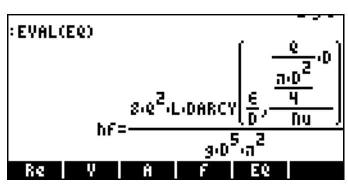
Waarschijnlijk wilt u een aparte subdirectory (PIPES) aanmaken om dit voorbeeld te proberen. De hoofdvergelijking die de stroming in een pijp uitrekent is, natuurlijk de Darcy-Weisbach-vergelijking. Voer dus de volgende vergelijking in EQ in:



Voer ook de volgende variabelen (f, A, V, Re) in:



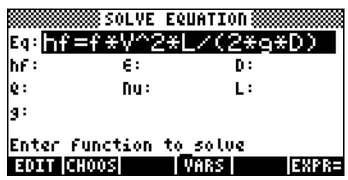
Voor dit geval heeft u de hoofdvergelijking (Darcy-Weisbach-vergelijking) opgeslagen in EQ en vervang vervolgens enkele van haar variabelen door andere uitdrukkingen met de definitie van variabelen f, A, V en Re. Maak gebruik van EVAL (EQ) om de gecombineerde vergelijking te zien. In dit voorbeeld werd de beeldscherminstelling veranderd zodat de volledige vergelijking in het beeldscherm te zien is:



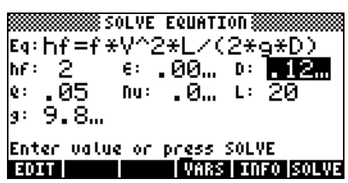
Op deze wijze ziet de op te lossen vergelijking het combineren van de verschillende variabelen in de directory als volgt:

$$h_f = \frac{8Q^2L}{\pi^2 gD^5} \cdot DARCY\left(\frac{\varepsilon}{D}, \frac{\frac{QD}{\pi D^2/4}}{Nu}\right)$$

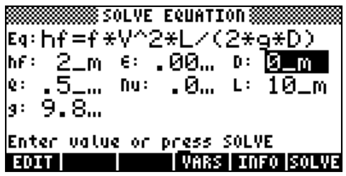
De gecombineerde vergelijking bevat de primitieve variabelen: *h_f, Q, L, g, D,* ε en *Nu*.
Activeer de numerieke probleemoplosser (NUM.SLV) om de primitieve variabelen op de lijst in het invoerscherm SOLVE EQUATION inputvorm zichtbaar te maken:

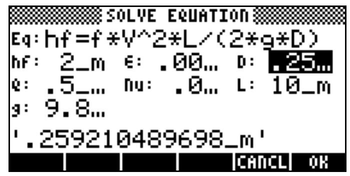


We gaan ervan uit dat u werkt met de waarden hf = 2 m, ε = 0.00001 m, Q = 0.05 m^3/s, Nu = 0.000001 m^2/s, L = 20 m en g = 9.806 m/s^2. Zoek de diameter D. Voer de invoerwaarden in en voer de oplossing voor D uit. De oplossing is: 0.12, d.w.z. D = 0.12 m.



Indien de vergelijking dimensioneel constant is, kunt u eenheden aan de invoerwaarden toevoegen, zoals in de afbeelding hieronder. U moet echter deze eenheden toevoegen aan het aanvankelijke vermoeden in de oplossing. Dus, in het volgende voorbeeld werd 0_m in het D:-veld geplaatst voordat het probleem werd opgelost. De oplossing wordt in het rechterbeeldscherm getoond:



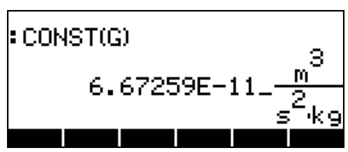


Druk op ENTER om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren. De oplossing voor D zal in het stapelgeheugen verschijnen.

Voorbeeld 4 - Zwaartekracht

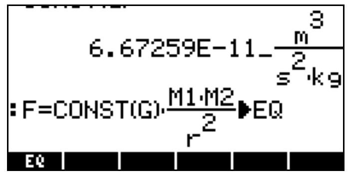
De wet van de zwaartekracht van Newton geeft aan dat de orde van de aantrekkingskracht tussen twee lichamen m_1 en m_2 gescheiden door een afstand *r* is gegeven door de vergelijking $F = G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2}$.

Hier is G de zwaartekrachtsconstante, wiens waarde verkregen kan worden door het gebruik van de functie CONST in de rekenmachine door middel van:

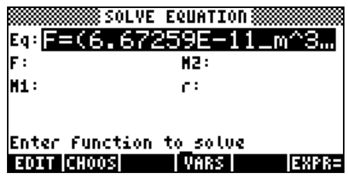


Elke willekeurige term in de vergelijking (behalve G) kan opgelost worden door de vergelijking als volgt in te voeren:

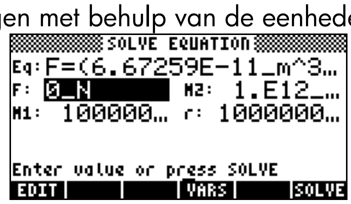
Deze vergelijking wordt dan opgeslagen in EQ:



Het activeren van de numerieke probleemoplosser voor deze vergelijking resulteert in een invoerscherm met de invoervelden voor F, G, m1, m2 en r.



Laten we dit probleem oplossen door eenheden te gebruiken met de volgende waarden voor de bekende variabelen m1 = 1.0×10^{6} kg, m2 = 1.0×10^{12} kg, r = 1.0×10^{11} m. Voer ook een waarde van 0_N in veld F in, zodat de juiste oplossing wordt verkregen met behulp van de eenheden in de rekenmachine:

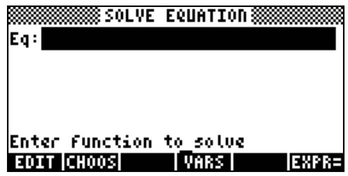


Voer de oplossing voor F uit en druk de toets in om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren. De oplossing is F: 6.67259E-15_N of F = 6.67259×10^{-15} N.

Opmerking: controleer, wanneer u eenheden in de numerieke probleemoplosser gebruikt, of alle variabelen de juiste eenheden hebben, of de eenheden compatibel zijn en of de vergelijking dimensioneel homogeen is.

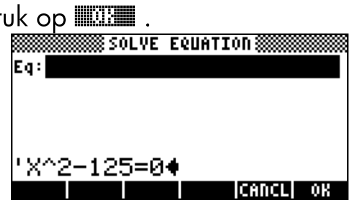
Verschillende manieren om vergelijkingen in EQ in te voeren

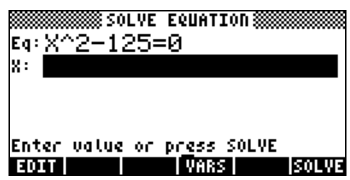
In alle bovenstaande voorbeelden heeft u de op te lossen vergelijking rechtstreeks in de variabele EQ ingevoerd alvorens de numerieke probleemoplosser te activeren. In feite kunt u de op te lossen vergelijking rechtstreeks in de probleemoplosser invoeren na deze te activeren door de inhoud van het EQ-veld te bewerken in het invoerscherm van de numerieke probleemoplosser. Indien variabele EQ niet van tevoren bepaald is, wordt het EQ-veld gemarkeerd bij het activeren van de numerieke probleemoplosser (NUM.SLV OK),:



Nu kunt u een nieuwe vergelijking invoeren door op EDIT te drukken. U krijgt een set apostroffen, zodat u de uitdrukking ertussen kunt invoeren:

Voer een vergelijking, bijv. X^2 - 125 = 0, rechtstreeks in het stapelgeheugen in en druk op OK .



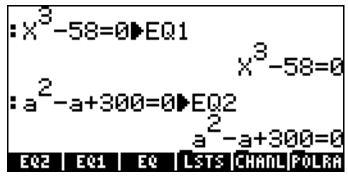


Nu is de vergelijking klaar om opgelost te worden.

Als alternatief kunt u de vergelijkingsschrijver activeren nadat u op EDIT heeft gedrukt om de vergelijking in te voeren. Druk op ENTER om naar het beeldscherm van de numerieke oplosser terug te keren.

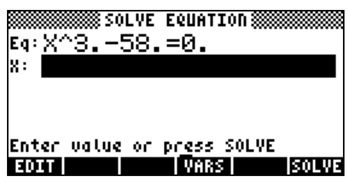
Een andere manier om een vergelijking in de EQ variabele in te voeren, is door een variabele te selecteren die al in uw directory staat en deze in EQ in te voeren. Dit betekent dat uw vergelijking opgeslagen zou moeten zijn in een variabelennaam voordat de numerieke probleemoplosser geactiveerd wordt.

Stel bijvoorbeeld dat we de volgende vergelijkingen in variabelen EQ1 en EQ2 ingevoerd hebben:



Activeer nu de numerieke probleemoplosser (⮣ NUM.SLV OK) en markeer het EQ-veld. Druk nu op de softmenutoets CHOOS. Gebruik de pijltoetsen omhoog en omlaag, (▲▼) ,om labijv. variabele EQ1 te selecteren:

Druk op OK na het selecteren van EQ1 om de variabele EQ in de probleemoplosser te laden. De nieuwe vergelijking is klaar om te worden opgelost.



Het softmenu SOLVE

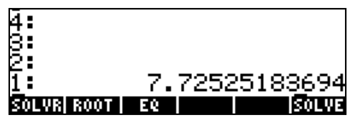
Het softmenu SOLVE staat toegang toe tot enkele functies van de numerieke probleemoplosser via de softmenutoetsen. Gebruik om dit menu te activeren in de RPN-modus: 74 MENU of in de ALG-modus: MENU(74). Daarnaast kunt u ⮣(vasthouden) 7 gebruiken om het softmenu SOLVE te activeren. De submenu's die in het softmenu SOLVE staan, zijn de volgende:

Het submenu ROOT

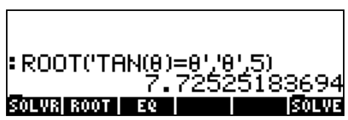
Het submenu ROOT bevat de volgende functies en submenu's:

De functie ROOT

De functie ROOT wordt gebruikt om een vergelijking voor een gegeven variabele met een vermoedelijke initiële waarde op te lossen. In de RPN-modus zal de vergelijking zich op niveau 3 in het stapelgeheugen bevinden, terwijl de variabelennaam zich op niveau 2 bevindt en het initiële vermoeden op niveau 1. De volgende afbeelding toont de RPN voor en na het activeren van de functie ROOT:



In de ALG-modus, zou u ROOT('TAN(θ)=θ','θ',5) gebruiken om de functie ROOT te activeren:



Variabele EQ

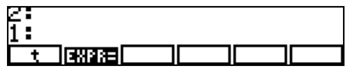
De softmenutoets EQ in dit submenu wordt gebruikt als referentie voor de variabele EQ. Deze softmenutoets ien de functie RCEQ (ReCall EQ) zijn gelijk.

Het submenu SOLVR

Het submenu SOLVR activeert de softmenu probleemoplosser voor de vergelijking die momenteel is opgeslagen in EQ. Hierna worden enkele voorbeelden getoond:

<u>Voorbeeld 1</u> – Het oplossen van de vergelijking t^2-5t = -4

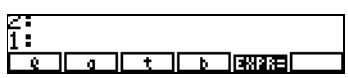
Indien u bijvoorbeeld de vergelijking ‘t^2-5*t=-4’ opslaat in EQ en op SOLVR, drukt, zal het het volgende menu verschijnen:



Dit resultaat geeft aan dat u een waarde van t kunt oplossen voor de vergelijking boven in het beeldscherm. Als u bijvoorbeeld ← [t] probeert, krijgt u het resultaat t: 1., nadat het bericht “Solving for t” kort wordt weergegeven. Er bestaat een tweede wortel voor deze vergelijking, die u kunt vinden door de waarde van t te veranderen, alvorens het opnieuw op te lossen. Doe het volgende: 10 [t] en druk vervolgens op ← [t]. Het resultaat is nu, t: 4.0000000003. Wilt u dit resultaat verifiëren, druk dan op de softmenutoets EXPR=, die de uitdrukking in EQ voor de huidige waarde van t evalueert. In dit geval zijn de resultaten:

Druk op VAR om de SOLVR-omgeving te verlaten. Nu wordt SOLVE afgesloten. Wilt u doorgaan met de onderstaande oefeningen dan moet u het opnieuw activeren zoals eerder is aangegeven.

<u>Voorbeeld 2</u> – Het oplossen van de vergelijking Q = at^2+bt
Het is mogelijk in EQ een vergelijking op te slaan met meer dan een variabele, bijvoorbeeld, ‘Q = at^2 + bt’. Nadat u het softmenu SOLVE geactiveerd heeft en op ROOT SOLVR heeft gedrukt, krijgt u het volgende beeldscherm:

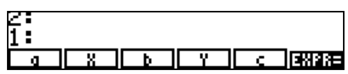


In deze SOLVR-omgeving kunt u waarden opgeven voor elke variabele die op de variabelenlijst staat door de waarde in het stapelgeheugen in te voeren en op de desbetreffende softmenutoetsen te drukken. U voert bijvoorbeeld de

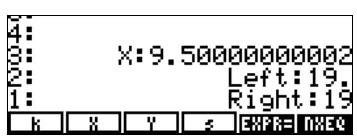
waarden Q = 14, a = 2 en b = 3 in. U zou dan gebruik maken van: 14
[Q], 2 [a], 3 [b].

Aangezien de variabelen Q, a en b, numerieke waarden toegekend krijgen, staan deze toekenningen in de linkerbovenhoek in het beeldscherm. Nu kunnen we t oplossen met ⬅ [t]. Het resultaat is t: 2. Door op EXPR= te drukken, worden de resultaten getoond:

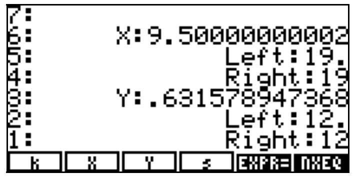
Voorbeeld 3 - Het oplossen van twee simultane vergelijkingen, één voor één
U kunt ook meer dan een vergelijking oplossen door het oplossen van één vergelijking per keer en het proces te herhalen totdat er een oplossing gevonden is. Indien u, bijvoorbeeld, de volgende lijst van vergelijkingen in variabele EQ invoert: { 'a*X+b*Y = c', 'k*X*Y=s'}, zal de toetsencombinatie ROOT SOLVR in het softmenu SOLVE het volgende beeldscherm geven:



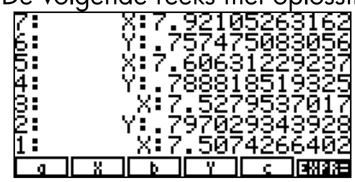
De eerste vergelijking, d.w.z. a*X + b*Y = c, zal boven in het beeldscherm verschijnen. U kunt waarden invoeren voor de variabelen a, b, en c, bijv.: 2 [a] 5 [b] 19 [c]. Aangezien slechts één vergelijking per keer opgelost kan worden, voeren we ook een vermoedelijke waarde voor Y in, bijv. 0 [Y] en lossen we X op met ⬅ [X]. Dit geeft de waarde X: 9.4999…. Wilt u nu de waarde van de vergelijking verifiëren, druk dan op EXPR=. De resultaten zijn: Links: 19, Rechts: 19. Druk op NXT NXEQ om de volgende vergelijking op te lossen. Het beeldscherm toont de softmenutoetsen als volgt:

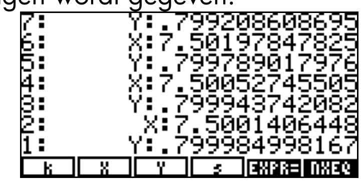


Stel dat we de waarden k = 2, s = 12 invoeren. Los daarna Y op en druk op EXPR=. Nu zijn de resultaten, Y:



Vervolgens beweegt u van de eerste naar de tweede vergelijking , terwijl u de eerste vergelijking voor X oplost en de tweede voor Y, totdat de waarden van X en Y convergeren in een oplossing. Gebruik NXEQ om tussen vergelijkingen te bewegen. Gebruik respectievelijk ⌐[X] en ⌐[Y] om X en Y op te lossen. De volgende reeks met oplossingen wordt gegeven:





Nadat de twee vergelijkingen één voor één opgelost zijn, ziet u dat tot de derde decimaal, X resulteert in een waarde van 7.500, terwijl Y resulteert in een waarde van 0.799.

Eenheden gebruiken met het submenu SOLVR

Hier volgen enkele regels voor het gebruik van eenheden met het submenu SOLVR :

- Wanneer u een schatting invoert met eenheden voor een bepaalde variabele, dan zal het gebruik van deze eenheden in de oplossing worden ingevoegd.
- Als een nieuwe schatting wordt ingevoerd zonder eenheden, dan zullen de eerder opgeslagen eenheden gebruikt worden voor die specifieke variabele.
- Om eenheden te verwijderen, voert u, als nieuwe schatting, een getal in zonder eenheden in een lijst, d.w.z. dat u hiervoor het formaat { getal } moet gebruiken.

- U kunt een lijst getallen geven als schatting voor een variabele. In dat geval zal de eenheid worden genomen die wordt gebruikt voor het laatste getal in de lijst. Als u bijvoorbeeld { 1.41_ft 1_cm 1_m } invoert, betekent dit dat meters (m) zullen worden gebruikt voor die variabele.
- De uitdrukking die wordt gebruikt in de oplossing, moet consistente eenheden bevatten, aangezien u anders een fout zult bekomen wanneer u een waarde probeert op te lossen.

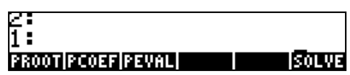
Het submenu DIFFE

Het submenu DIFFE bevat een aantal functies voor de numerieke oplossing van differentiële vergelijkingen. De volgende functies staan in het submenu DIFFE:

Deze functies worden in Hoofdstuk 16 uitvoerig behandeld.

Het submenu POLY

Het submenu POLY voert bewerkingen uit op polynomen. Dit submenu bevat de volgende functies:



De functie PROOT

Deze functie wordt gebruikt om de wortels te vinden van een polynoom met een gegeven vector die de polynomische coëfficiënten bevat in afnemende volgorde van de machten van de onafhankelijke variabele. Met andere woorden, als de polynoom $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, is, dan moet de coëfficiëntenvector ingevoerd worden als $[a_n, a_{n-1}, \ldots , a_2, a_1 , a_0]$. De wortels van de polynoom met de coëfficiënten [1, -5, 6] zijn [2, 3] .

De functie PCOEF:

Deze functie geeft de coëfficiënten $[a_n, a_{n-1}, \ldots , a_2, a_1 , a_0]$ van een polynoom $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ met een gegeven vector van de wortels $[r_1, r_2, \ldots, r_n]$. Een vector waarvan bijvoorbeeld de wortels gegeven zijn door [-1, 2, 2, 1, 0], zal de volgende coëfficiënten geven: [1, -4, 3, 4, -4, 0]. De polynoom is $x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 4x$.

De functie PEVAL

Deze functie evalueert een polynoom met een gegeven vector van de coëfficiënten, $[a_n, a_{n-1}, \dots , a_2, a_1 , a_0]$, en een waarde x_0, d.w.z. PEVAL berekent $a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0$. Voor bijvoorbeeld de coëfficiënten [2, 3, -1, 2] en een waarde van 2, retourneert PEVAL de waarde 28.

Het submenu SYS

Het submenu SYS bevat een lijst van functies die gebruikt worden om lineaire systemen op te lossen. De functies in dit submenu zijn:

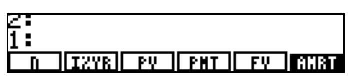
Deze functies worden in hoofdstuk 11 uitvoerig behandeld.

Het submenu TVM

Het submenu TVM bevat functies voor het berekenen van Time Value of Money. Dit is een ander manier om financiële problemen op te lossen (zie hoofdstuk 6). Hierna worden de beschikbare functies getoond:

Het submenu SOLVR

De submenu SOLVR in het submenu TVM activeert de probleemoplosser voor het oplossen van TVM-problemen. Door bijvoorbeeld op SOLVR te drukken, krijgt u het volgende beeldscherm:

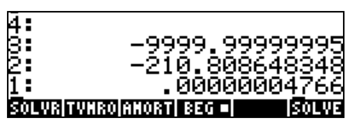


Probeer als oefening de waarden n = 10, I%YR = 5.6, PV = 10000 en FV = 0 en voer ← [PMT] in voor het resultaat PMT = -1021.08…. Door op NXT te drukken, krijgt u het volgende beeldscherm:

Druk op VAR om de SOLVR-omgeving te verlaten. Keer terug naar het submenu TVM in het submenu SOLV en probeer de overige functies.

De functie TVMROOT:
Als argument vereist deze functie de naam van een van de variabelen in het TVM probleem. De functie retourneert de oplossing voor die variabele, mits de andere variabelen bestaan en dat hun waarden eerder zijn opgeslagen. Na het oplossen van een voorgaand TVM probleem, kunt u nu, bijv. 'N' als volgt oplossen: ['] ALPHA N ENTER TVMRO. Het resultaat is 10:

De functie AMORT:
Deze functie neemt een waarde die een betalingsperiode voorstelt (tussen 0 en n) en retourneert de hoofdsom, rente en balans voor de momenteel opgeslagen waarden in de TVM-variabelen. Indien u bijvoorbeeld met de eerder gebruikte gegevens de functie AMORT activeert voor een waarde van 10, krijgt u:



De functie BEG:
Wanneer deze functie is geselecteerd, gebruiken de TMV-berekeningen de betalingen aan het begin van elke periode. Wanneer de functie niet is geselecteerd, gebruiken de TMV-berekeningen de betalingen aan het einde van elke periode.

Hoofdstuk 7
Oplossingen van meervoudige vergelijkingen

Vele problemen uit de wetenschap en de techniek vereisen gelijktijdige oplossingen van meer dan een vergelijking. Deze rekenmachine bevat verschillende procedures om meervoudige vergelijkingen op te lossen, zoals hieronder wordt getoond. U ziet dat dit hoofdstuk geen paragraaf bevat over de oplossing van stelsels van lineaire vergelijkingen. Lineaire stelseloplossingen worden uitvoerig behandeld in de volgende hoofdstukken over matrices en lineaire algebra.

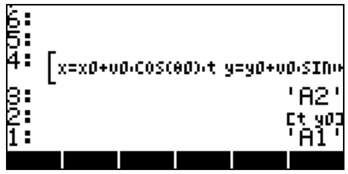
Stelsels van rationele vergelijkingen

Vergelijkingen die kunnen worden herschreven als polynomen of rationele algebraïsche uitdrukkingen kunnen direct opgelost worden door de rekenmachine met de functie SOLVE. U moet de lijst met vergelijkingen als elementen van een vector invoeren. De lijst met variabelen die opgelost moet worden, moet ook als een vector worden ingevoerd. Controleer of het CAS is ingesteld op de modus Exact voordat een oplossing wordt uitgeprobeerd met deze procedure. Hoe ingewikkelder de uitdrukkingen, des te langer heeft het CAS nodig om een bepaald stelsel van vergelijkingen op te lossen. Voorbeelden van deze toepassing volgen hieronder:

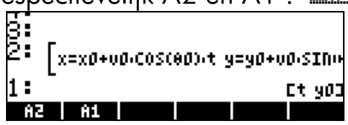
Voorbeeld 1 – Projectielbeweging

Gebruik de functie SOLVE met de volgende vectorargumenten, de eerste is een lijst van vergelijkingen: ['x = x0 + v0*COS(θ0)*t' 'y =y0+v0*SIN(θ0)*t – g*t^2/2'] ENTER en de tweede zijn de variabelen die opgelost moeten worden, bijv. t en y0, dus, ['t' 'y0'].

In dit geval wordt de oplossing gegeven in de RPN-modus. De enige reden daartoe is dat u de oplossing stap voor stap op kunt bouwen. De oplossing in de ALG-modus is bijna gelijk. Eerst slaan we de eerste vector (vergelijkingen) op in variabele A2 en de vector van variabelen in variabele A1. Het volgende scherm toont het RPN-stapelgeheugen voor de variabelen.



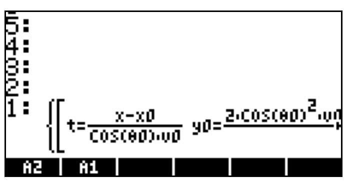
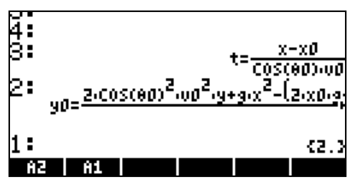
Nu hoeven we slechts twee keer op STO▶ te drukken om deze variabelen op te slaan.
Wijzig voor het oplossen eerst de CAS-modus naar Exact, daarna geeft u de lijst van de inhoud van respectievelijk A2 en A1 : A2 A1 .



Gebruik commando SOLVE nu (uit het menu S.SLV: ← S.SLV) Na ongeveer 40 seconden, misschien langer, verschijnt er een lijst :

{ 't = (x-x0)/(COS(θ0)*v0)'
'y0 = (2*COS(θ0)^2*v0^2*y+(g*x^2(2*x0*g+2*SIN(θ0))*COS(θ0)*v0^2)*x+
(x0^2*g+2*SIN(θ0)*COS(θ0)*v0^2*x0)))/(2*COS(θ0)^2*v0^2)']}

Druk op EVAL om de vector te verwijderen uit de lijst, gebruik daarna het commando OBJ→, om de vergelijkingen te krijgen die apart in het stapelgeheugen staan.

Opmerking: deze methode werkte uitstekend in dit voorbeeld omdat de onbekenden t en y0 algebraïsche termen waren in de vergelijkingen. Deze methode zou niet werken om oplossingen te vinden voor θ0, aangezien θ0 tot een transcendentale term behoort.

Voorbeeld 2 – Spanningen in een dikke cilinderwand

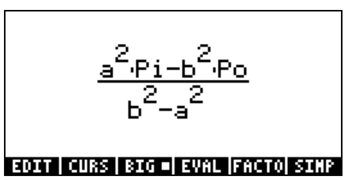
Neem een dikwandige cilinder voor respectievelijk de binnen- en buitenradius *a* en *b* , die onderhevig is aan een binnendruk P_i en een buitendruk P_o. Op iedere radiale afstand *r* van de as van de cilinder liggen de normale uitrekkingen in radiale- en dwarsrichtingen, σ_{rr} en $\sigma_{\theta\theta}$, respektievelijk, verkregen door

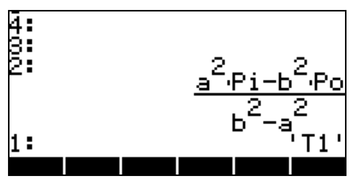
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{a^2 \cdot P_i - b^2 \cdot P_o}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot (P_i - P_o)}{r^2 \cdot (b^2 - a^2)},$$

$$\sigma_{rr} = \frac{a^2 \cdot P_i - b^2 \cdot P_o}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot (P_i - P_o)}{r^2 \cdot (b^2 - a^2)}.$$

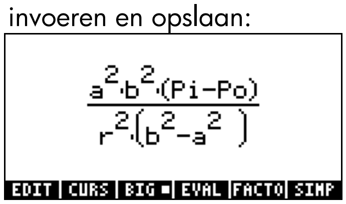
U ziet dat de rechterzijden van beide vergelijkingen alleen verschillen in het teken tussen de twee termen. Daarom wordt aangeraden om bij het in deze rekenmachine schrijven van vergelijkingen de eerste term in te voeren en op te slaan in een variabele T1, daarna de tweede term in te voeren en op te slaan in T2. Om de vergelijkingen later opnieuw te schrijven zal het alleen nodig zijn om in het stapelgeheugen de inhoud van T1 en T2 op te roepen en ze op te tellen en af te trekken. Hierna volgt de procedure met de vergelijkingenschrijver:

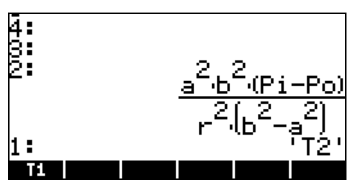
Term T1 invoeren en opslaan:





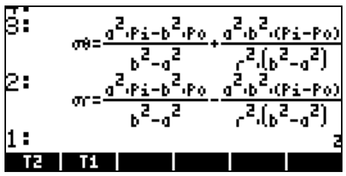
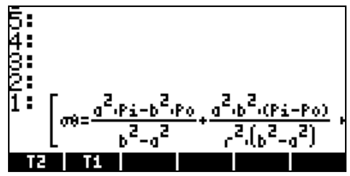
Term T2 invoeren en opslaan:



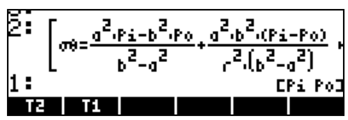


U ziet dat we in dit voorbeeld de RPN-modus gebruiken. De procedure zou in de ALG-modus hetzelfde moeten zijn. Maak de vergelijking voor $\sigma_{\theta\theta}$:
[VAR] [T1] [T2] [+] [ALPHA][→][S] [ALPHA][→][T] [ENTER] [▶] [→][=]
Maak de vergelijking voor σ_{rr}: [VAR] [T1] [T2] [−] [ALPHA][→][S] [ALPHA][←][R] [ENTER] [▶] [→][=]

Maak een vector met de twee vergelijkingen, gebruik functie →ARRY (zoek deze functie in de commandocatalogus [→][CAT]) na het invoeren van een [2]:

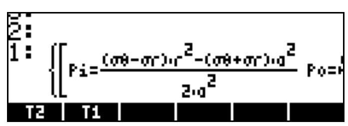
 

Stel nu dat we een oplossing willen voor P_i en P_o, waarbij a, b, r, σ_{rr} en $\sigma_{\theta\theta}$ zijn gegeven. We voeren een vector in met de onbekende elementen:

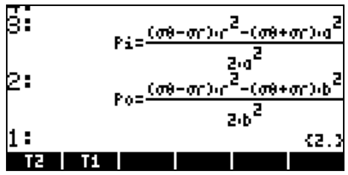


Om een oplossing te vinden voor P_i en P_o, gebruiken we het commando SOLVE uit het menu S.SLV ([←][S.SLV]). De rekenmachine heeft misschien een minuut nodig om het resultaat te produceren:

{['Pi=-(((σθ-σr)*r^2-(σθ+σr)*a^2)/(2*a^2))'
'Po=-(((σθ-σr)*r^2-(σθ+σr)*b^2)/(2*b^2))'] }, dus



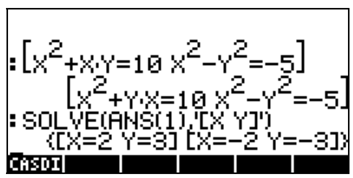
U ziet dat het resultaat een vector bevat [ ] in een lijst { }. Gebruik [EVAL] om het lijstsymbool te verwijderen. Gebruik uiteindelijk de functie OBJ→ om de vector te ontleden. Het resultaat is:



Deze twee voorbeelden vormen stelsels van lineaire vergelijkingen die beide even goed met de functie LINSOLVE (zie Hoofdstuk 11) kunnen worden opgelost. Het volgende voorbeeld toont de functie SOLVE die is toegepast op een stelsel van polynoomvergelijkingen.

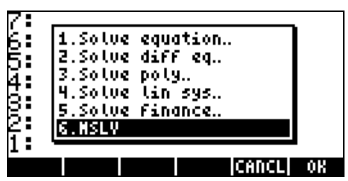
Voorbeeld 3 - Stelsel van polynoomvergelijkingen

Het volgende scherm toont de oplossing van het stelsel $X^2+XY=10$, $X^2-Y^2=-5$ met de functie SOLVE:

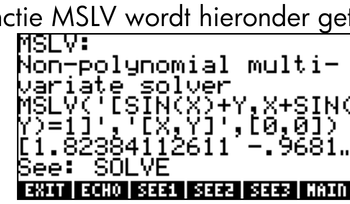


Oplossingen van simultane vergelijkingen met MSLV

De functie MSLV is als laatste optie beschikbaar in het ⬏ NUM.SLV menu:



De helptekst van de functie MSLV wordt hieronder getoond:

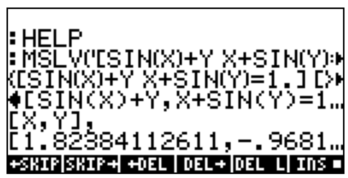


Voorbeeld 1 – Voorbeeld uit de helptekst

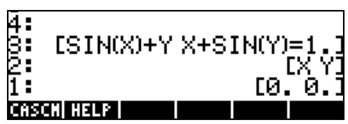
Zoals bij alle functie-invoeren in de helptekst, is er een voorbeeld toegevoegd aan de bovenstaande MSLV-invoer. U ziet dat de functie MSLV drie argumenten vereist:

1. Een vector met de vergelijkingen, d.w.z. '[SIN(X)+Y,X+SIN(Y)=1]'
2. Een vector met de variabelen waarvoor een oplossing moet worden gezocht, d.w.z. '[X,Y]'
3. Een vector met initiële waarden voor de oplossing, d.w.z. de initiële waarden voor X en Y zijn nul voor dit voorbeeld.

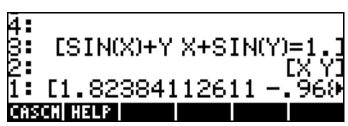
In de ALG-modus ECHO indrukken om het voorbeeld naar het stapelgeheugen te kopiëren, druk op ENTER om het voorbeeld uit te voeren. Om alle elementen uit de oplossing te bekijken, moet u de regeleditor activeren door op de pijltoets omlaag (▼) te drukken:



In de RPN-modus wordt de oplossing van dit voorbeeld verkregen door:



Door het activeren van de functie MSLV verschijnt het volgende scherm.



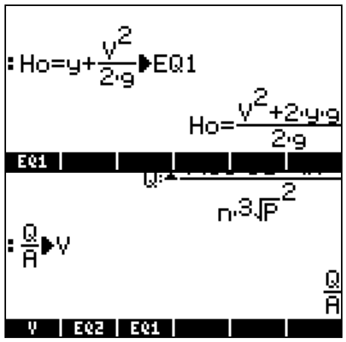
Misschien heeft u gemerkt dat, tijdens het produceren van de oplossing, het scherm tussentijds informatie toont in de linkerbovenhoek. Gezien de oplossing van MSLV numeriek is, toont de informatie in de linkerbovenhoek de resultaten van het iteratieve proces dat is gebruikt om een oplossing te verkrijgen. De uiteindelijke oplossing is *X = 1.8238, Y = -0.9681.*

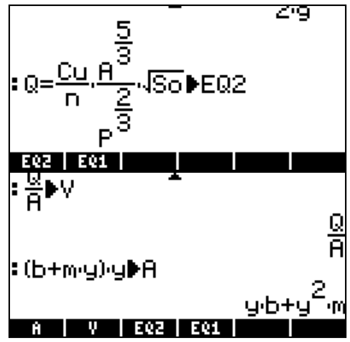
Voorbeeld 2 - Binnenstroming van een meer in een open kanaal

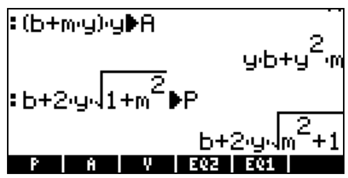
Dit speciale probleem in een open kanaalstroming vereist de simultane oplossing van twee vergelijkingen, de vergelijking van energie: $H_o = y + \frac{V^2}{2g}$ en de vergelijking van Manning: $Q = \frac{Cu}{n} \cdot \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} \cdot \sqrt{S_o}$. In deze vergelijkingen vertegenwoordigt H_o de energiehoogte (m, of ft) beschikbaar voor een stroming bij de ingang van het kanaal, y is de diepte van de stroming (m of ft), V = Q/A is de snelheid van de stroming (m/s of ft/s), Q is het volume van waterafvoer (m^3/s of ft^3/s), A is het oppervlak van de dwarsdoorsnede (m^2 of ft^2), C_u is een coëfficiënt die afhangt van het systeem van eenheden (C_u = 1.0 voor het SI-stelsel, C_u = 1.486 voor het Engels systeem van eenheden), n is de coëfficiënt van Manning, een meting van de ruwheid van het kanaaloppervlak (bijv. voor beton, n = 0.012), P is de natte omtrek van de dwarsdoorsnede (m of ft), S_o is de helling van de kanaalbedding uitgedrukt als een decimale breuk. Voor een trapezoïdaal kanaal, zoals hieronder getoond, wordt het gebied verkregen door $A = (b + my)y$, de natte omtrek door $P = b + 2y\sqrt{1+m^2}$, waarbij b de bodembreedte (m of ft) is en m het zijhelling (1V:mH) van de dwarsdoorsnede.

Gewoonlijk moeten de vergelijkingen van energie en Manning gelijktijdig opgelost worden voor y en Q. Eens deze vergelijkingen zijn geschreven in termen van de primitieve variabelen b, m, y, g, S_o, n, Cu, Q en H_o blijft er een systeem van vergelijkingen over in de vorm van $f_1(y,Q) = 0$, $f_2(y,Q) = 0$. We kunnen deze twee vergelijkingen als volgt opbouwen.

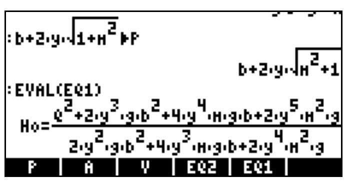
We veronderstellen dat we de modi ALG en Exact gebruiken bij de rekenmachine, hoewel het definiëren en oplossen van de vergelijkingen met MSLV lijkt op die in de RPN-modus. U moet een subdirectory aanmaken, bijvoorbeeld CHANL (voor open CHANneL) en in deze subdirectory de volgende variabelen definiëren:

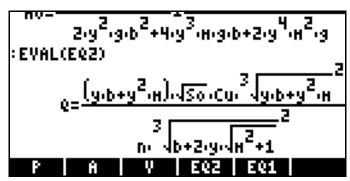






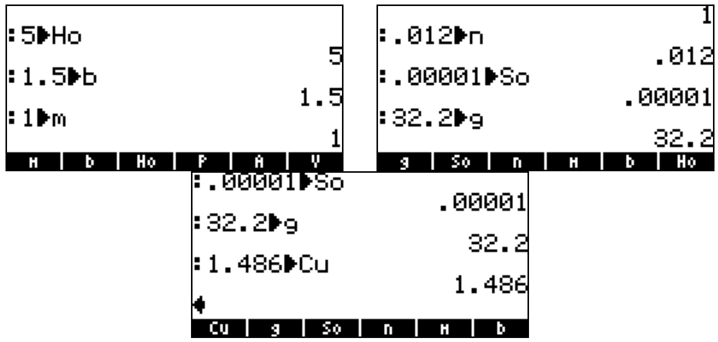
Om de originele vergelijkingen, EQ1 en EQ2, te bekijken uitgaande van de bovenstaande primitieve variabelen, kunnen we de functie EVAL gebruiken, die werd toegepast op alle vergelijkingen, d.w.z. EVAL EQ1 EVAL EQ2. De vergelijkingen zijn als volgt opgeslagen in het stapelgeheugen (de optie kleine lettertype is geselecteerd):



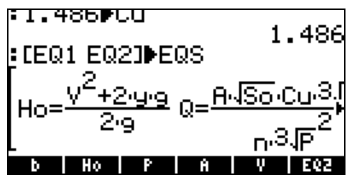


We kunnen hier zien dat deze vergelijkingen inderdaad zijn gegeven uitgaande van de primitieve variabelen b, m, y, g, S_o, n, Cu, Q en H_o.

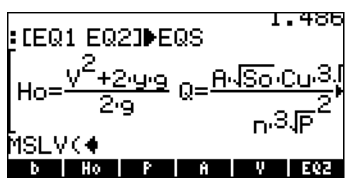
Om y en Q op te lossen, moeten de andere variabelen voorzien worden van waarden. Stel dat we H_0 = 5 ft, b = 1.5 ft, m = 1, n = 0.012, S_0 = 0.00001, g = 32.2 en Cu = 1.486. gebruiken.Voor het toepassen van MSLV, moeten we deze waarden in de bijbehorende variabelennamen invoeren. Dit kan als volgt uitgevoerd worden:



Nu zijn we klaar om de vergelijking op te lossen. Eerst moeten de twee vergelijkingen samen in een vector geplaatst worden. Dit kan door de vector feitelijk op te slaan in een variabele die we EQS (EQuationS) zullen noemen:



Als beginwaarden voor de variabelen y en Q gebruiken we y = 5 (gelijk aan de waarde van H_o, wat de maximale waarde is die y kan aannemen) en Q = 10 (dit is een schatting). Om de oplossing te verkrijgen, selecteren we de functie MSLV uit het menu NUM.SLV met [→] NUM.SLV [6] OK om het commando op het scherm te krijgen:

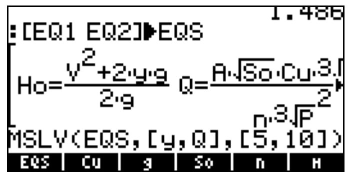


Daarna voeren we de variabele EQS in: [NXT] [NXT] EQS, gevolgd door vector [y,Q]:

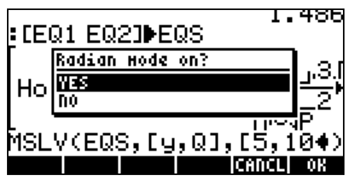
[→] [,] [←] [[]] [ALPHA] [←] [Y] [→] [,] [ALPHA] [Q] [▶]

en door de beginschattingen [→] [,] [←] [[]] [5] [→] [,] [1] [0].

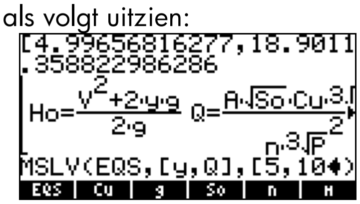
Voor het indrukken van `ENTER` ziet het scherm er als volgt uit:



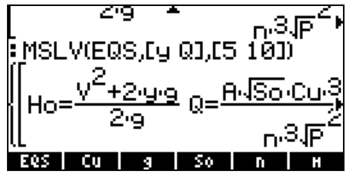
Druk op `ENTER` om het systeem van vergelijkingen op te lossen. Het is mogelijk dat, indien uw hoekmeting niet in de radiale modus staat, u de volgende vraag ontvangt:



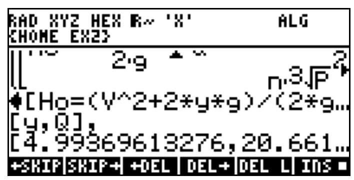
Druk op `OK` en laat de rekenmachine verder gaan met de oplossing. Een tussenoplossing kan er als volgt uitzien:



De vector bovenaan stelt de huidige waarde voor van [y,Q] naargelang de oplossing voortzet en de waarde .358822986286 vertegenwoordigt de criteria voor de convergentie van de numerieke methode die werd gebruikt bij de oplossing. Als het systeem goed is opgesteld, zal deze waarde verminderen tot een waarde in de buurt van nul. Op dat punt zou een numerieke oplossing zijn gevonden. Nadat MSLV een oplossing vindt, ziet het scherm er als volgt uit:



Het resultaat is een lijst met drie vectoren. De eerste vector in de lijst toont de opgeloste vergelijkingen. De tweede vector is de lijst met onbekenden. De derde vector vertegenwoordigt de oplossing. Om deze vectoren te kunnen bekijken, drukt u op de pijltoets omlaag ▼ om zo de regeleditor te activeren. De oplossing ziet er als volgt uit:



De gegeven oplossing is [4.9936.., 20.661…]. Dit betekent, y = 4.99 ft en Q = 20.661… ft^3/s. De pijltoetsen (◄►▲▼) kunnen gebruikt om de oplossing in detail te bekijken.

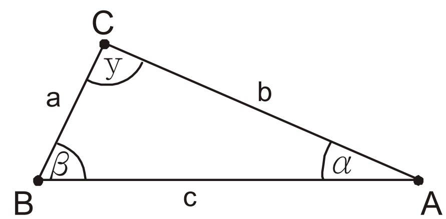
Gebruik van de Meervoudige Vergelijkingenoplosser (MES)

De meervoudige vergelijkingenoplosser is een omgeving waar u een systeem van meervoudige vergelijkingen kan oplossen van een onbekend element uit een vergelijking tegelijkertijd. Het gaat niet echt om een oplosser voor simultane vergelijkingen, een aantal verwante vergelijkingen worden eerder een voor een opgelost. Om het gebruik te verduidelijken van de MES voor het oplossen van meervoudige vergelijkingen, behandelen we in de volgende paragraaf een toepassing met betrekking tot trigonometrie. De hier getoonde voorbeelden worden toegepast in de RPN-modus.

Toepassing 1 - Oplossing van driehoeken

In deze paragraaf gebruiken we een belangrijke toepassing van trigonometrische functies: het berekenen van de afmetingen van een driehoek.

De oplossing wordt toegepast in de rekenmachine met behulp van de Meervoudige Vergelijkingsoplosser, of MES.
Bekijk de driehoek ABC in de onderstaande afbeelding.



De som van de binnenhoeken van elke driehoek is altijd 180°, d.w.z., $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. De sinuswet geeft aan dat:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

De cosinuswet geeft aan dat:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\,\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos\,\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\,\gamma.$$

Om een driehoek op te lossen, moeten er minstens drie van de volgende zes variabelen bekend zijn: *a, b, c,* α, β, γ. Daarna kunt u de drie andere variabelen berekenen met gebruik van de vergelijkingen uit de sinuswet, cosinuswet en de som van de binnenhoeken van een driehoek.

Als de drie zijden bekend zijn, kan de oppervlakte van de driehoek worden berekent met de formule van Heron $A = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$,waarin *s* bekend staat als de halve omtrek van de driehoek, d.w.z. $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Oplossing van driehoek met de Meervoudige Vergelijkingsoplosser (MES)
De Meervoudige Vergelijkingsoplosser (MES) is een functie die u kunt gebruiken om twee of meer gekoppelde vergelijkingen op te lossen. Er moet echter wel op gewezen worden dat de MES de vergelijkingen niet simultaan oplost. De MES neemt de bekende variabelen en zoekt in een lijst met vergelijkingen tot hij er één vindt die een oplossing kan zijn voor één van de onbekende variabelen. Daarna zoekt hij naar een andere vergelijking die een oplossing kan vormen voor de volgende onbekenden en zo verder tot alle onbekenden opgelost zijn.

Aanmaken van een werkdirectory
We zullen de MES gebruiken om driehoeken op te lossen door een lijst met vergelijkingen aan te maken, die overeenkomen met de sinus- en cosinuswetten, de wet van de som van de binnenhoeken en de formule van Heron voor de oppervlakte. Eerst maken we een subdirectory aan binnen HOME met de naam TRIANG, daarna gaan we in die directory staan. Zie hoofdstuk 2 voor instructies over het aanmaken van een nieuwe subdirectory.

Openen van de lijst met vergelijkingen
Open de volgende lijst met vergelijkingen binnen TRIANG, door ze direct in het stapelgeheugen te schrijven of met de vergelijkingschrijver. (ALPHA ↱ A geeft het teken α en ALPHA ↱ B geeft het teken β. Het teken γ wordt geschreven via ECHO met ↱ CHARS):

'SIN(α)/a = SIN(β)/b'
'SIN(α)/a = SIN(γ)/c'
'SIN(β)/b = SIN(γ)/c'
'c^2 = a^2+b^2-2*a*b*COS(γ)'
'b^2 = a^2+c^2-2*a*b*COS(β)'
'a^2 = b^2+c^2-2*b*c*COS(α)'
'α+β+γ = 180'
's = (a+b+c)/2'
'A = √ (s*(s-a)*(s-b)*(s-c))'

Voer daarna het nummer 9 in en maak een lijst met vergelijkingen met de functie →LIST (gebruik de commandocatalogus ↱ _CAT). Sla deze lijst op in de variabele EQ.

De variabele EQ bevat de lijst met vergelijkingen die zullen gescand door de MES wanneer die probeert om de onbekende elementen op te lossen.

Een venstertitel invoeren

Daarna maken we als volgt een ketenvariabele aan met de naam TITLEvoor de reeks (Driehoek oplossing):

↱ _""	Plaatst dubbele aanhalingstekens in het stapelgeheugen
ALPHA ALPHA ↰ ALPHA	Vergrendelt het toetsenbord in kleine letters alfa.
↰ T R I A N G L E SPC	Voert tekst in: Triangle_
↰ S O L U T I O N	Voert tekst in: Oplossing
ENTER	Voert reeks "Triangle Solution" in in stapelgeheugen
'	Plaatst Enkele aanhalingstekens in stapelgeheugen
ALPHA ALPHA T I T L E ENTER	Voert variabelennaam 'TITLE' in
STO▸	Slaat reeks op in 'TITLE'

Een lijst met variabelen aanmaken

Maak een lijst aan met variabelennamen in het stapelgeheugen die er als volgt uitziet:

{ a b c α β γ A s }

en sla de lijst op in variabele LVARI (lijst met VARIabelen). De lijst met variabelen vertegenwoordigt de rangorde waarin de variabelen worden gerangschikt als de MES begint te werken. De lijst moet alle variabelen bevatten uit de vergelijkingen, anders zal de functie MITM niet werken (zie hieronder). Hierna volgen de toetsencombinaties die u moet gebruiken om deze lijst voor te bereiden en op te slaan:

Druk op VAR, indien nodig om het variabelenmenu te openen. Het menu moet de volgende variabelen tonen LVARI TITLE EQ .

Voorbereiding om te werken met MES

De volgende stap is het activeren van de MES en het uitproberen van een voorbeeldoplossing. Van te voren moet echter de hoekeenheden op DEGrees (graden) ingesteld worden, als dat nog niet gebeurt is, met
ALPHA ALPHA D E G ENTER .

Daarna moet de inhoud van TITLE en LVARI, in het stapelgeheugen opgeslagen worden met:

TITLE LVARI

We gebruiken de volgende MES-functies:

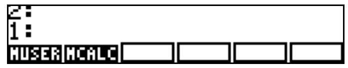
- MINIT: MES INITialization: begint met de variabelen in de vergelijkingen opgeslagen in EQ.
- MITM: MES' Menu Item: neemt een titel uit het stapelgeheugen niveau 2 en uit de lijst met variabelen uit het stapelgeheugenniveau 1, plaatst de titel boven het venster MES en de lijst met variabelen als programmeerbare menutoetsen in de rangorde zoals aangegeven in de lijst. In de huidige oefening, hebben we al een titel ("Triangle Solution") en een lijst met variabelen ({ a b c α β γ A s }) in de niveaus " en 1 in het stapelgeheugen, respectievelijk, klaar om MITM te activeren.
- MSOLV: MES SOLVEr; activeert de Meervoudige Vergelijkingsoplosser (MES) en wacht op invoer van de gebruiker.

Interactief werken met MES

Om de MES te starten, met de variabelen LVARI en TITLE in het stapelgeheugen, activeert u commando MINIT, daarna MITM en vervolgens MSOLV (zoek deze functies in de catalogus ↱ _CAT).

De MES wordt geactiveerd met de volgende lijst van beschikbare variabelen (Druk op NXT om de volgende lijst met variabelen te bekijken):

Druk op NXT om de derde lijst met variabelen te bekijken. Het volgende scherm moet verschijnen:



Druk nogmaals op NXT om het eerste variabelenmenu te herstellen.

We proberen een eenvoudige oplossing voor Geval I, waarbij a = 5, b = 3, c = 5. Gebruik de volgende gegevens:

5 [a]	a:5 staat in de linkerbovenhoek in het scherm.
3 [b]	b:3 staat in de linkerbovenhoek in het scherm.
5 [c]	c:5 staat in de linkerbovenhoek in het scherm.

Om de hoeken op te lossen:

← [α]	De rekenmachine rapporteert Solving for α, en toont het resultaat α: 72.5423968763.

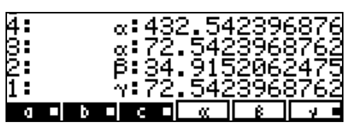
Opmerking: probeer het volgende als u een waarde groter dan 180 krijgt:

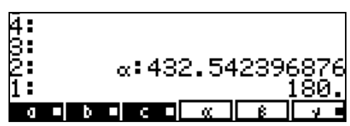
1 0 [α]	Begint opnieuw met a met een kleinere waarde.
← [α]	De rekenmachine rapporteert Solving for α

Daarna berekenen we de andere twee waarden:

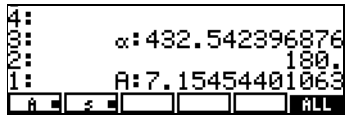
← [β]	Het resultaat is β: 34.9152062474.
← [γ]	Het resultaat is γ: 72.5423968763.

U moet de waarden van de drie hoeken in het stapelgeheugen zetten op niveaus 3 tot en met 1. Druk twee keer op + om er zeker van te zijn dat ze een som opleveren van 180°.



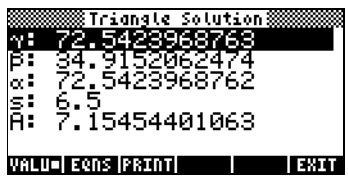


Druk op NXT om naar het volgende variabelenmenu te gaan. Gebruik: ← [A] om het oppervlak te berekenen. De rekenmachine lost eerst alle andere variabelen en zoekt dan het oppervlak als A: 7.15454401063.



Opmerking: als een oplossing wordt gevonden, rapporteert de rekenmachine de condities voor de oplossing als Zero of Sign Reversal. Andere berichten kunnen voorkomen als de rekenmachine moeilijkheden ondervindt bij het vinden van een oplossing.

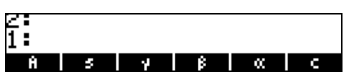
Door op ← ALL te drukken worden alle variabelen opgelost en worden tijdelijk de tussenresultaten weergegeven. Druk op → ALL om de oplossingen te bekijken:



Druk, wanneer u klaar bent, op ON om terug te keren naar de MES-omgeving. Druk op VAR om de MES-omgeving te verlaten en terug te keren naar het gewone beeldscherm van de rekenmachine.

Organisatie van de variabelen in de subdirectory

Het variabelenmenu bevat nu de variabelen (druk op NXT om de tweede set variabelen te zien):



De variabelen corresponderen met alle variabelen in de vergelijkingen die in EQ werden aangemaakt. Er is ook een nieuwe variabele *Mpar* (MES-parameters) die informatie bevat over de instelling van de MES en in het bijzonder voor deze set van vergelijkingen. Bij gebruik van → Mpar om de inhoud van de variabele *Mpar* te bekijken, krijgt u het raadselachtige bericht: Library Data. Dit betekent dat de MES-parameters zijn gecodeerd in een binair bestand dat niet kan worden geopend vanuit de editor.

Daarna willen we de variabelen in de menulabels plaatsen in een andere rangorde dan die van de bovengaande lijst. Voer de volgende stappen uit.

1. Maak een lijst aan met { EQ Mpar LVARI TITLE }, met
   ← {} EQ Mpar LVARI TITLE ENTER
2. Plaats de inhoud van LVARI in het stapelgeheugen met LVARI.
3. Voeg de twee lijsten samen door op + te drukken.

Gebruik de functie ORDER (gebruik de commandocataloog → CAT) om de variabelen te ordenen zoals getoond in de lijst in het stapelgeheugen op niveau 1.

4. Druk op VAR om uw variabelenlijst te herstellen. De lijst moet er nu als volgt uitzien:

5. Druk op NXT om het eerste variabelenmenu te herstellen.

Programmeren van de MES-driehoekoplossing met de Gebruiker-RPL

Om de activering van de MES te vergemakkelijken voor toekomstige oplossingen, creëren we een programma dat de MES oplaadt met één enkele toetsaanslag. Het programma moet er als volgt uitzien: << DEG MINIT TITLE LVARI MITM MSOLVR >> en kan ingevoerd worden met:

→ « »	Opent het programmasymbool
ALPHA ALPHA	Sluit het alfanumeriek toetsenbord
D E G SPC	Schrijft DEG (hoekeenheden ingesteld op DEGrees) (graden)
M I N I T SPC	Schrijft MINIT_
ALPHA	Vergrendelt het alfanumerisch toetsenbord
TITLE	Toont de naam TITLE in het programma
LVARI	Toont d naam LVARI in het programma
ALPHA ALPHA	Vergrendelt het alfanumeriek toetsenbord
M I T M SPC	Schrijft MITM_
M S O L V R	Schrijft MSOLVR
ENTER	Voert het programma in het stapelgeheugen in

Sla het programma op in een variabele TRISOL (TRIangle SOLution - oplossing van driehoek) met:

' ALPHA ALPHA T R I S O L ENTER STO▸

Druk, indien nodig, op [VAR], om de variabelenlijst te herstellen. Een softtoetslabel [TRISO] moet in uw menu beschikbaar zijn.

Het programma uitvoeren – voorbeelden van oplossing

Druk op de programmeerbare menutoets [TRISO] om het programma uit te voeren. Het menu MES verschijnt dat overeenkomt met de oplossing van de driehoek. Hierna volgen voorbeelden van de drie gevallen die al eerder zijn gebruikt voor het oplossen van de driehoek.

<u>Voorbeeld 1– Rechthoekige driehoek</u>

Gebruik a = 3, b = 4, c = 5. Hier volgt de oplossingssequentie:

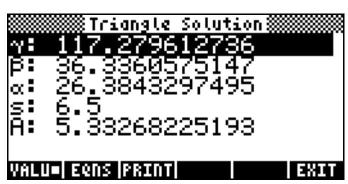
[3][a][4] [b][5][c]	Om data in te voeren
[↰] [α]	Het resultaat is α: 36.8698976458
[↰] [β]	Het resultaat is β: 53.1301023541.
[↰] [γ]	Het resultaat is γ: 90.
[NXT]	Gaat naar het volgende variabelenmenu.
[↰][A]	Het resultaat is A: 6.
[NXT] [NXT]	Gaat naar het volgende variabelenmenu.

Voorbeeld 2 - Willekeurig type driehoek

Gebruik a = 3, b = 4, c = 6. De oplossingsprocedure hierbij bestaat uit het onmiddellijk oplossen van alle variabelen en daarna het oproepen van de oplossingen in het stapelgeheugen:

[VAR] [TRISO]	Wist gegevens en activeert MES opnieuw
[3][a][4] [b][6][c]	Voert gegevens in
[NXT]	Gaat naar het volgende variabelenmenu.
[↰] [ALL]	Lost alle onbekende elementen op.
[↱] [ALL]	Toont de oplossing

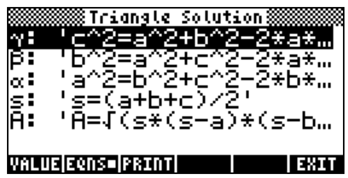
De oplossing is:



Onder in het scherm vindt u de programmeerbare menutoetsen:

VALU■ EQNS PRINT EXIT

Het vierkante punt in VALU■ geeft aan dat de waarden van de variabelen en niet de vergelijkingen waarin ze werden opgelost, hier in dit scherm worden getoond. Om de vergelijkingen die werden gebruikt voor de oplossing van iedere variabele, te bekijken, drukt u op de programmeerbare menutoets EQNS . Het scherm ziet er nu als volgt uit:



De programmeerbare menutoets PRINT drukt het scherm af op een printer, indien beschikbaar. En EXIT brengt u terug in de MES-omgeving voor een nieuwe oplossing, indien nodig. Druk op VAR om terug te keren naar het gewone beeldscherm van de rekenmachine.

De volgende tabel met oplossingen voor de driehoek toont de gegevensinvoer vetgedrukt en de oplossing cursief. Probeer het programma uit te voeren met deze invoer om de oplossingen te verifiëren. Vergeet niet op VAR TRISO te drukken aan het einde van iedere oplossing om de variabelen te wissen en de MES-oplosser opnieuw te starten. Anders kan het gebeuren dat u informatie van een vorige oplossing overdraagt die uw huidige berekeningen volledig in de war sturen.

a	***b***	***c***	$\alpha(^o)$	$\beta(^o)$	$\gamma(^o)$	***A***
2.5	*6.9837*	**7.2**	*20.299*	**75**	*84.771*	*8.6933*
7.2	**8.5**	*14.26*	*22.616*	**27**	*130.38*	*23.309*
21.92	**17.5**	**13.2**	**90**	*52.97*	**37.03**	*115.5*
41.92	**23**	*29.6*	**75**	**32**	*73*	*328.81*
10.27	*3.26*	**10.5**	*77*	**18**	**85**	*16.66*
17	**25**	**32**	*31.79*	*50.78*	*97.44*	*210.71*

Een INFO-knop toevoegen aan uw directory

Een informatieknop kan handig zijn voor uw directory als geheugensteuntje voor de werking van de functies in de directory. In deze directory moeten we alleen onthouden om op TRISO te drukken om een driehoek op te lossen. U kunt het volgende programma invoeren: <<"Press [TRISO] to start." MSGBOX >> en sla het op in een variabele met de naam INFO. Als resultaat verschijnt de knop INFO als eerste variabele in uw directory.

Toepassing 2 - Snelheid en versnelling in polaire coördinaten

Twee dimensionale deeltjesverplaatsing in polaire coördinaten betekent vaak het bepalen van de radiale en dwarse componenten van de snelheid en versnelling van het gegeven deeltje r, r' = dr/dt, r" = d^2r/dt^2, θ, θ' = d θ /dt en θ" = $d^2\theta/dt^2$. De volgende vergelijkingen worden gebruikt:

$$v_r = \dot{r} \qquad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

Maak een subdirectory aan onder de naam POLC (POLar Coordinates - polaire coördinaten) die we gebruiken om snelheden en versnellingen te berekenen in polaire coördinaten. Binnen deze subdirectory voert u de volgende variabelen in:

Programma of waarde	Opslaan in variabele:
<< PEQ STEQ MINIT NAME LIST MITM MSOLVR >>	**SOLVEP**
"vel. & acc. polaire coord."	**NAME**
{ r rD rDD θD θDD vr vθ v ar aθ a }	**LIST**
{ 'vr = rD' 'vθ = r*θD' 'v = √(vr^2 + vθ^2)' 'ar = rDD – r*θD^2' 'aθ = r*θDD + 2*rD*θD' 'a = √(ar^2 + aθ^2)' }	**PEQ**

Hier volgt een definitie van de variabelen:

SOLVEP = een programma dat de meervoudige vergelijkingsoplosser activeert voor precies die set van vergelijkingen opgeslagen in variabele **PEQ;**

NAME = een variabele die de naam opslaat van de meervoudige vergelijkingsoplosser, nl. *"vel. & acc. polar coord."*;

LIST = een lijst van de variabele gebruikt in de berekeningen, geplaatst in de rangorde waarin we ze willen weergeven in de omgeving van de meervoudig vergelijkingsoplossing;

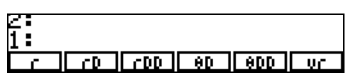
PEQ = lijst met vergelijkingen die moeten worden opgelost, overeenkomstig met de radiale en dwarse componenten van snelheid (**vr**, **v**θ) **en** versnelling (**ar**, **a**θ) in polaire coördinaten, evenals vergelijkingen om de grootte van de snelheid (**v**) en versnelling (**a**) te berekenen als de polaire componenten bekend zijn.

r, **rD**, **rDD** = r (radiale coördinaat), r-dot (r-punt; eerste afgeleide van r), r-double dot (r-dubbele punt; tweede afgeleide van r).

θ**D**, θ**DD** = θ-dot (eerste afgeleide van θ), θ-double dot (tweede afgeleide van θ).

Stel dat u over de volgende informatie beschikt: r = 2.5, rD = 0.5, rDD = -1.5, θD = 2.3, θDD = -6.5 en er wordt gezocht naar vr, vθ, ar, aθ, v en a.

Start de meervoudige vergelijkingsoplosser door op VAR SOLVE te drukken. De rekenmachine opent het scherm *"vel. & acc. polar coord."*, dat er als volgt uitziet:

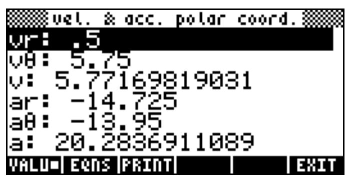


Om de waarden van de bekende variabelen in te voeren, schrijft u gewoon de waarde en drukt op de knop die bij de variabele hoort die u moet invoeren. Gebruik de volgende toetsencombinaties: 2.5 [r] 0.5 [rD] 1.5 +/- [rDD] 2.3 [θD] 6.5 +/- [θDD].

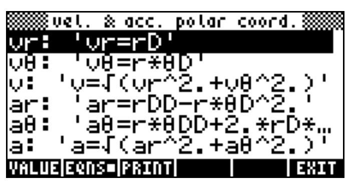
U ziet dat na het invoeren van een bepaalde waarde, de rekenmachine de variabele en de waarde in de linkerbovenhoek in het scherm toont. De bekende variabelen zijn nu ingevoerd. Om de onbekende elementen te berekenen zijn er twee mogelijkheden:

a). Individuele variabelen oplossen, bijvoorbeeld ← [vr] geeft vr: 0.500. Druk op NXT ← [vθ] en u krijgt vθ : 5.750 , enz. De overige resultaten zijn v: 5.77169819031; *a*r: -14.725; *a*θ: -13.95; en *a*: 20.2836911089.; of,

b). Los alle variabelen in één keer op door op ← ALL te drukken. De rekenmachine zal de oplossingen verlichten zodra deze ze vindt. Als de rekenmachine stopt, kunt u op → ALL drukken om alle resultaten weer te geven in een lijst. In dit geval krijgen we:

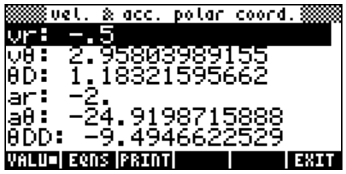


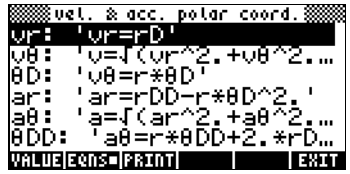
Met een druk op de programmeerbare menutoets EQNS krijgt u de vergelijkingen die gebruikt zijn voor de oplossing van iedere waarde in het scherm:



Druk op EXIT ALL NXT NXT of VAR SOLVE om een nieuwe set waarden te gebruiken.

Laten we een ander voorbeeld uitproberen met r = 2.5, vr = rD = -0.5, rDD = 1.5, v = 3.0, a = 25.0. Zoek, θD, θDD, vθ, ar en aθ. U krijgt de volgende resultaten:


vel. & acc. polar coord.
vr: -.5
vθ: 2.95803989155
θD: 1.18321595662
ar: -2.
aθ: -24.9198715888
θDD: -9.4946622529
VALU■ EQNS PRINT EXIT


vel. & acc. polar coord.
vr: 'vr=rD'
vθ: 'v=√(vr^2.+vθ^2.…
θD: 'vθ=r*θD'
ar: 'ar=rDD-r*θD^2.'
aθ: 'a=√(ar^2.+aθ^2.…
θDD: 'aθ=r*θDD+2.*rD…
VALUE EQNS■ PRINT EXIT

Hoofdstuk 8
Bewerkingen met lijsten

Lijsten zijn een soort objecten van de rekenmachine die handig zijn voor gegevensverwerking en voor programmering. Dit hoofdstuk geeft voorbeelden van bewerkingen met lijsten.

Definities

Een lijst, in de context van de rekenmachine, is een reeks objecten tussen haakjes en gescheiden door spaties (SPC) in de RPN-modus, of komma's (→ ,), in beide modi. Objecten die in een lijst kunnen staan, zijn getallen, letters, letterreeksen, namen van variabelen, en/of operators. Lijsten zijn handig voor het bewerken van gegevens en voor sommige programmeringstoepassingen. Enkele voorbeelden van lijsten zijn:

```
{ t 1 }, {"BETA" h2 4},{1 1.5 2.0},
{a a a a},{ {1 2 3} {3 2 1} {1 2 3}}
```

In de volgende voorbeelden beperken wij ons tot numerieke lijsten.

Het aanmaken en opslaan van lijsten

Voor het aanmaken van een lijst in de ALG-modus, voert u eerst de haakjestoets ← {} in (behorende bij de toets +) en dan voert u de elementen van de lijst in, gescheiden door komma's (→ ,). De volgende toetsencombinaties zullen de lijst {1 2 3 4} invoeren en deze opslaan in de variabele L1.

← {} 1 → , 2 → , 3 → , 4
▶ STO▶ ALPHA L 1 ENTER

Het beeldscherm toont het volgende:

De linkerafbeelding toont het beeldscherm vóór het indrukken van ENTER te, terwijl de rechterafbeelding het beeldscherm toont na het opslaan van de lijst in L1. U ziet dat vóór het indrukken van ENTER lijst de komma's toont die de elementen scheiden. Na het indrukken van ENTER worden de komma's echter vervangen door spaties.

Het invoeren van dezelfde lijst in de RPN-modus vereist de volgende toetsencombinaties:

← {} 1 SPC 2 SPC 3 SPC 4 ENTER
ALPHA L 1 ENTER ▶ STO▶

De afbeelding hieronder toont het RPN-stapelgeheugen voordat op de STO▶ toets gedrukt werd:

Het samenstellen en ontleden van lijsten

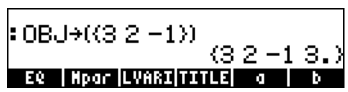
Het samenstellen en ontleden van lijsten heeft alleen maar zin in de RPN-modus. In deze modus wordt het ontleden van een lijst tot stand gebracht met de functieOBJ→. Met deze functie, wordt een lijst in het RPN-stapelgeheugen ontleed tot de elementen waarbij stapelgeheugenniveau 1: het aantal elementen van de lijst weergeeft. De volgende twee beeldschermen tonen het stapelgeheugen met een kleine lijst vóór en na het toepassen van de functie OBJ→:

U ziet dat na toepassing van OBJ→, de elementen van de lijst op niveaus 4: tot 2: staan, terwijl niveau 1: het aantal elementen op de lijst toont.

Voor het samenstellen van een lijst in de RPN-modus, plaatst u de elementen van de lijst in het stapelgeheugen, voert u de opmaak van de lijst in en past u de functie →LIST (u selecteert deze als volgt uit de functiecatalogus:

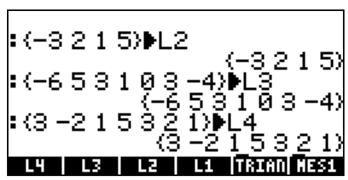
⇨ CAT ⇨ ⟶ , vervolgens gebruikt u de pijltoetsen omhoog en omlaag (▲▼) om de functie →LIST te zoeken). De volgende beeldschermen tonen de elementen van een lijst van formaat 4 vóór en na het toepassen van de functie →LIST:

Opmerking: de functie OBJ→ toegepast op een lijst in de ALG-modus, reproduceert eenvoudigweg de lijst en voegt deze toe aan de lijstopmaak:



Bewerkingen met lijsten van getallen

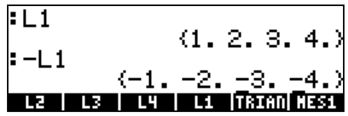
Om bewerkingen met getallenlijsten toe te lichten, maken we enkele andere lijsten aan, buiten de lijst L1 die hierboven aangemaakt werd: L2={-3,2,1,5}, L3={-6,5,3,1,0,3,-4}, L4={3,-2,1,5,3,2,1}. In de ALG-modus ziet het beeldscherm er als volgt uit nadat de lijsten L2, L3, L4 ingevoerd zijn:



In de RPN-modus toont het volgende beeldscherm de drie lijsten en hun namen klaar om opgeslagen te worden. Voor het opslaan van de lijsten, moet u in dit geval drie keer op STO▶ drukken.

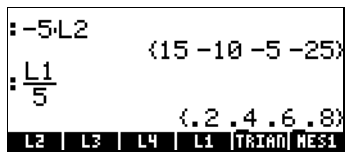
Het wijzigen van tekens

De wijzigingstoets (+/-) , wanneer gebruikt in een getallenlijst, verandert het teken van alle elementen die op de lijst staan. Voorbeeld:

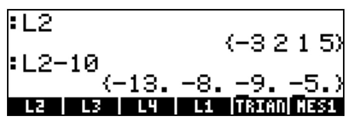


Optelling, aftrekking, vermenigvuldiging, deling

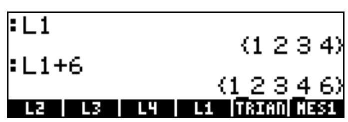
De vermenigvuldiging en deling van een lijst door een enkelvoudig getal is over de hele lijst verdeeld, bijvoorbeeld;



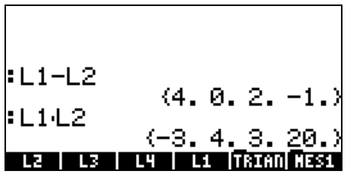
De aftrekking van een enkelvoudig getal van een lijst, zal hetzelfde getal van elk element op de lijst worden afgetrokken, bijvoorbeeld:

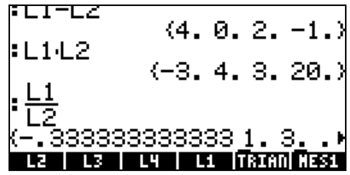


De optelling van een enkelvoudig getal bij een lijst geeft een lijst die vermeerderd is met het getal, en geen optelling van het enkelvoudige getal bij elk element dat op de lijst staat. Voorbeeld:

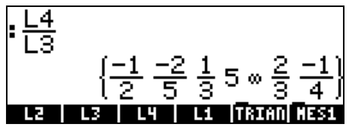


De aftrekking, de vermenigvuldiging en de deling van getallenlijsten van dezelfde lengte produceren een lijst van dezelfde lengte door term-voor-term bewerkingen. Voorbeelden:



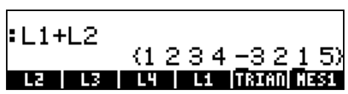


De deling L4/L3 zal een oneindige invoer produceren omdat een van de elementen in L3 nul is:

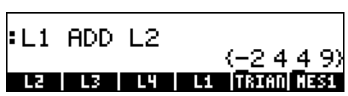


Indien de lijsten die betrokken zijn bij de bewerking verschillende lengtes hebben, verschijnt er een foutmelding (Error: Invalid Dimension).

Het plusteken (+), wanneer toegepast op lijsten, werkt als een *aaneenschakelingsoperator,* die de twee lijsten samenvoegt in plaats van ze term-voor-term op te tellen. Voorbeeld:



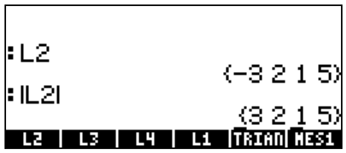
Om term-voor-term optelling van twee lijsten van dezelfde lengte te produceren, is het gebruik van de operator ADD vereist. Deze operator kunt u laden met de functiecatalogus (→ CAT). Het onderstaande beeldscherm toont een toepassing van ADD voor het term-voor-term optellen van de lijsten L1 en L2:



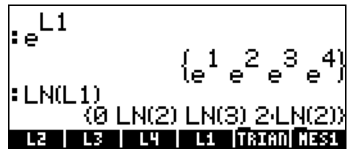
Reële getallen functies vanaf het toetsenbord

De reële getallenfuncties vanaf het toetsenbord (ABS, e^x, LN, 10^x, LOG, SIN, x^2, √, COS, TAN, ASIN, ACOS, ATAN, y^x) kunt u bij lijsten gebruiken. Hieronder enkele voorbeelden:

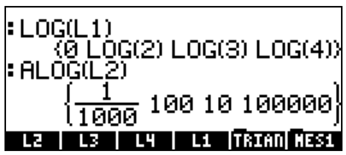
ABS



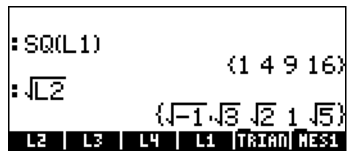
EXP en LN



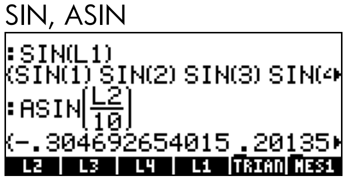
LOG en ANTILOG



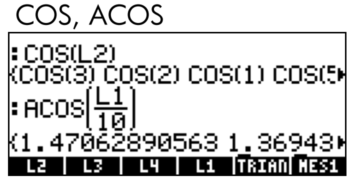
SQ en vierkantswortel



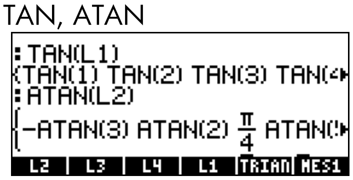
SIN, ASIN



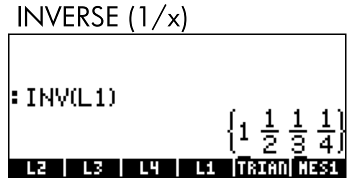
COS, ACOS



TAN, ATAN



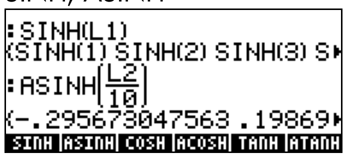
INVERSE (1/x)



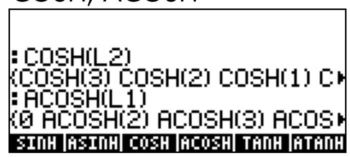
Reële getallen functie vanaf het menu MTH

De belangrijke functies vanuit het menu MTH bevatten in het menu HYPERBOLIC: SINH, ASINH, COSH, ACOSH, TANH, ATANH en in het menu REAL: %, %CH, %T, MIN, MAX, MOD, SIGN, MANT, XPON, IP, FP, RND, TRNC, FLOOR, CEIL, D→R, R→D. Enkele van de functies die een enkel argument nemen,toegepast op een lijst van reële getallen, worden hieronder verduidelijkt:

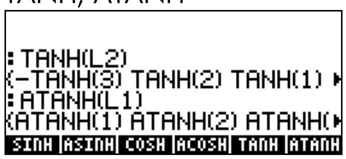
SINH, ASINH



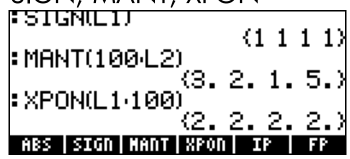
COSH, ACOSH



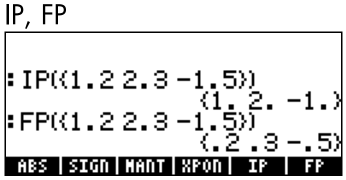
TANH, ATANH



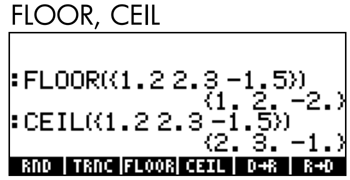
SIGN, MANT, XPON



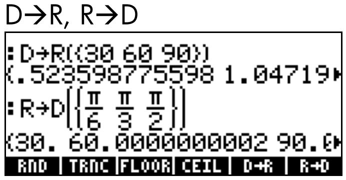
IP, FP



FLOOR, CEIL

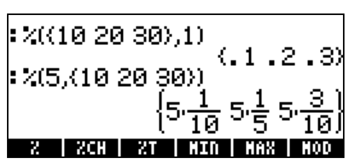


D→R, R→D



Voorbeelden van de functies die twee argumenten gebruiken

De volgende beeldschermen tonen toepassingen van de functie % om argumenten op te nemen. De functie % vereist twee argumenten. De eerste twee voorbeelden laten gevallen zien waarin slechts een van de twee argumenten een lijst is.



De resultaten zijn lijsten waarbij de functie % verdeeld is volgens het argument van de lijst. Voorbeeld,

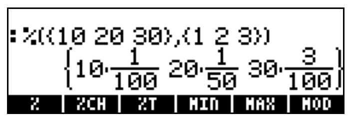
%({10, 20, 30},1) = {%(10,1),%(20,1),%(30,1)},

terwijl

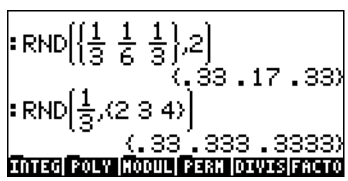
%(5,{10,20,30}) = {%(5,10),%(5,20),%(5,30)}

In het volgende voorbeeld zijn beide argumenten van de functie % lijsten van dezelfde lengte. In dit geval wordt een term- voor-term verdeling van de argumenten uitgevoerd, d.w.z.

%({10,20,30},{1,2,3}) = {%(10,1),%(20,2),%(30,3)}

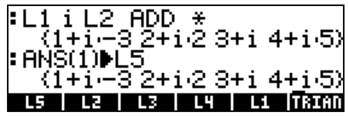


Deze beschrijving van de functie % om argumenten in een lijst weer te geven toont het algemene patroon van de evaluatie van elke functie met twee argumenten wanneer één of beide argumenten lijsten zijn. Hierna worden voorbeelden van de toepassingen van de functie RND getoond:

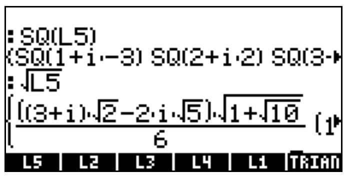


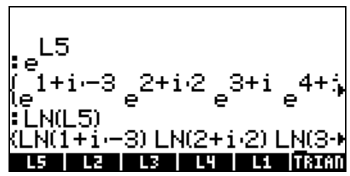
Complexe getallenlijsten

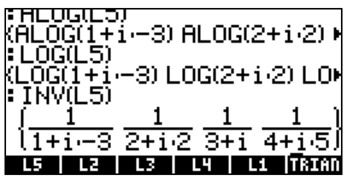
De volgende oefening toont hoe u een lijst van complexe getallen kunt aanmaken met twee lijsten van dezelfde lengte, waarvan de ene de reële gedeelten en de andere de imaginaire gedeelten van de complexe getallen vertegenwoordigen. GEbruik L1 ADD i*L2. Het beeldscherm toont ook dat de resulterende complexe getallenlijst opgeslagen is in de variabele L5:

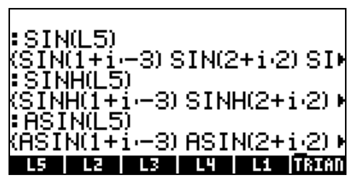


Functies zoals LN, EXP, SQ, enz. kunnen ook toegepast worden op een lijst van complexe getallen, bijvoorbeeld,

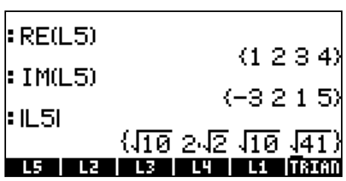


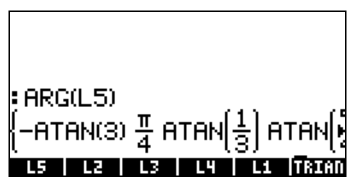






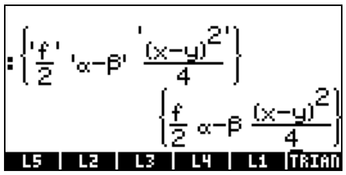
Het volgende voorbeeld toont de toepassingen van de functies RE (Reële gedeelte), IM (imaginaire gedeelte), ABS (orde) en ARG (argument) van complexe getallen. De resultaten zijn lijsten van reële getallen:

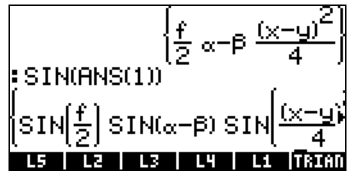




Lijsten van algebraïsche objecten

Hier volgen voorbeelden van lijsten van algebraïsche objecten waarop de functie SIN is toegepast:





Het menu MTH/LIST

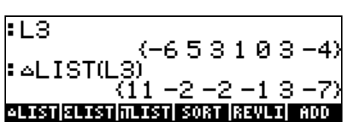
Het menu MTH voorziet in een aantal functies die uitsluitend lijsten betreffen. Met vlag 117 ingesteld op CHOOSE boxes:

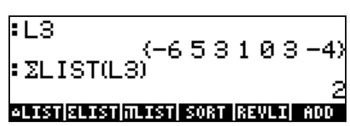
Vervolgens met systeemvlag 117 ingesteld op SOFT menu's:

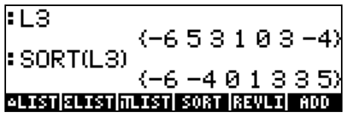
Dit menu bevat de volgende functies:

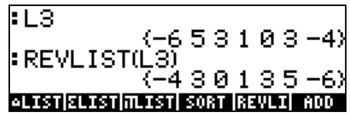
ΔLIST	:	Berekent toename onder de opeenvolgende elementen in de lijst
ΣLIST	:	Berekent de optelsom van de elementen in de lijst.
ΠLIST	:	Berekent het product van de elementen in de lijst.
SORT	:	Rangschikt de elementen in toenemende volgorde
REVLIST	:	Keert de volgorde van de lijst om
ADD	:	Operator voor term-voor-term optelling van twee lijsten van dezelfde lengte (er zijn al eerder voorbeelden van deze operator getoond)

Voorbeelden van toepassingen van deze functies in de ALG-modus zijn:





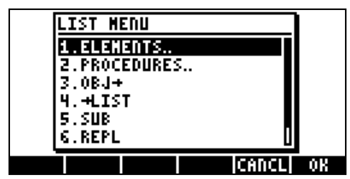




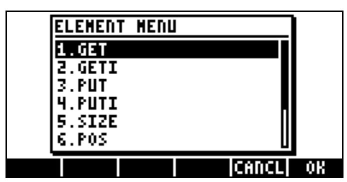
U kunt SORT en REVLIST combineren om een lijst in afnemende volgorde te rangschikken:

Het bewerken van elementen van een lijst

Het menu PRG (programmeringmenu) bevat een submenu LIST met een aantal functies voor het bewerken van elementen van een lijst. Met systeemvlag 117 ingesteld op CHOOSE boxes:

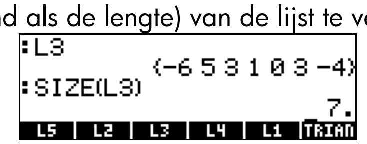


Item 1. ELEMENTS.. bevat de volgende functies die u kunt gebruiken bij het bewerken van elementen in lijsten:



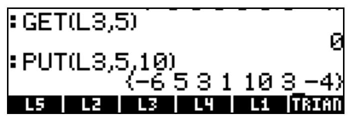
Lijstopmaak

U kunt de functie SIZE, van het submenu PRG/LIST/ELEMENTS gebruiken om de opmaak (ook bekend als de lengte) van de lijst te verkrijgen, bijvoorbeeld:



Het uittrekken en invoegen van elementen in een lijst

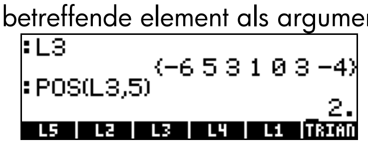
Voor het uittrekken van een lijst gebruikt u de functie GET, beschikbaar in het submenu PRG/LIST/ELEMENTS. De argumenten van de functie GET zijn de lijst en het getal van het element dat u wenst uit te trekken. Voor het invoegen van een element op de lijst gebruikt u de functie PUT (ook beschikbaar in het submenu PRG/LIST/ELEMENTS). De argumenten van de functie PUT zijn de lijst, de positie die u wilt vervangen en de waarde die vervangen zal worden. Het volgende beeldscherm toont voorbeelden van de toepassingen van de functies GET en PUT:



Ook kunt u de functies GETI en PUTI, ook beschikbaar in het submenu PRG/LIST/ELEMENTS/, gebruiken voor het uittrekken en invoegen van elementen in een lijst. Deze functies zijn echter vooral handig bij het programmeren. De functie GETI gebruikt dezelfde argumenten als GET en retourneert de lijst, de locatie van het element plus een en het element op de vereiste positie. De functie PUTI gebruikt dezelfde argumenten als GET en retourneert de lijst en het lijstopmaak.

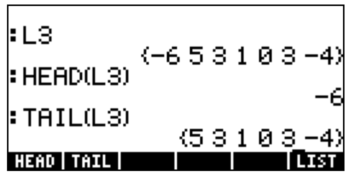
Positie van het element in de lijst

Om de positie van een element in een lijst te bepalen, gebruikt u de functie POS die de lijst en het betreffende element als argumenten heeft. Voorbeeld,



De functies HEAD en TAIL

De functie HEAD extraheert het eerste element van de lijst. De functie TAIL verwijdert het eerste element van een lijst en retourneert de rest van de lijst. Vervolgens worden enkele voorbeelden getoond:



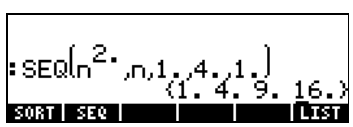
De functie SEQ

Item 2. PROCEDURES.. in het menu PRG/LIST bevat de volgende functies die u kunt gebruiken voor de bewerking in lijsten:

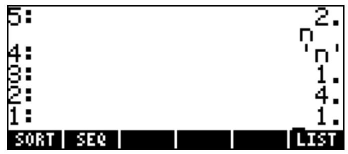
De functies REVLIST en SORT werden eerder behandeld als onderdeel van het menu MTH/LIST. De functies DOLIST, DOSUBS, NSUB, ENDSUB en STREAM zijn ontworpen als programmeringsfuncties voor de bewerking van lijsten in de RPN-modus. De functie SEQ is handig voor het produceren van een waardenlijst met een gegeven speciale uitdrukking en wordt hier nader toegelicht.

De functie SEQ neemt als argumenten een uitdrukking bestaande uit een index, de indexnaam en het begin en einde en waardetoename voor de index en retourneert een lijst die bestaat uit de evaluatie van de uitdrukking voor alle mogelijke waarden van de index. De algemene vorm van de functie is SEQ (*uitdrukking, index, begin, einde, toename).*

In het volgende voorbeeld die in de ALG-modus staat, identificeren we *uitdrukking* = n^2, *index* = n, *begin* = 1, *einde* = 4, en *toename* = 1:



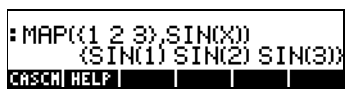
De gevormde lijst komt overeen met de waarden {1^2, 2^2, 3^2, 4^2}. In de RPN-modus, kunt u op volgende wijze de verschillende argumenten van de functie op een lijst weergeven:



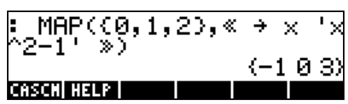
alvorens de functie SEQ toe te passen.

De functie MAP

De functie MAP, beschikbaar via het commandocatalogus (→ CAT), neemt als argumenten een lijst van getallen en een functie f (X) of een programma van de << → a … >> en produceert een lijst die bestaat uit de toepassing van de functie f of van het programma voor de lijst van getallen. De volgende oproep voor de functie MAP past bijvoorbeeld de functie SIN(X) toe op de lijst {1,2,3}:

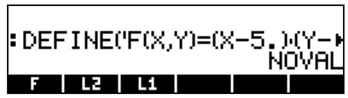


De volgende oproep voor de functie MAP gebruikt als tweede argument een programma in plaats van een functie:

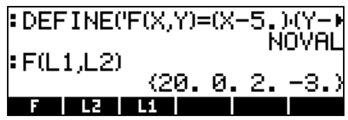


Het definiëren van functies die lijsten gebruiken

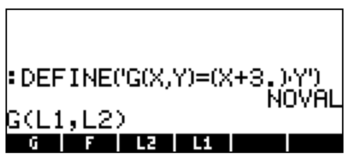
In hoofdstuk 3 introduceerden we de functie DEFINE (← DEF) om reële getallenfuncties met één of meer argumenten aan te maken. U kunt een met DEF gedefinieerde functie ook gebruiken met argumentenlijsten, behalve dat elke functie waaraan een optelling toegevoegd wordt de ADD-operator dient te gebruiken in plaats van het plusteken (+). Bijvoorbeeld bij het definiëren van de functie F(X,Y) = (X-5)*(Y-2), hier getoond in de ALG-modus:

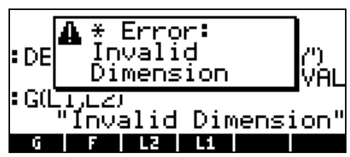


kunt u lijsten (bijvoorbeeld variabelen L1 en L2,die eerder gedefinieerd zijn in dit hoofdstuk) gebruiken om de functie te evalueren, hetgeen resulteert in:

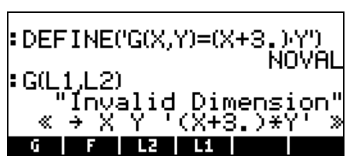


Aangezien de functieverklaring geen optellingen bevat, is de toepassing voor het opnemen van argumenten eenvoudig. Indien u echter de functie G(X,Y) = (X+3)*Y definieert, zal de poging mislukken om deze functie met lijstargumenten (L1, L2) te evalueren:

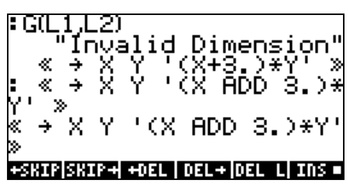




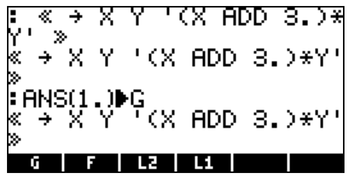
Dit probleem kan worden opgelost door de inhoud van variabele te bewerken. We kunnen deze variabele in het stapelgeheugen weergeven met .



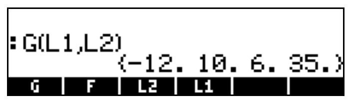
om het plusteken (+) te vervangen door ADD:



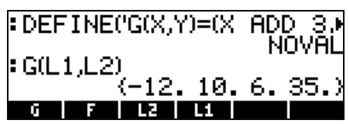
Vervolgens slaat u de bewerkte uitdrukking op in variabele G:



Het evalueren van G(L1,L2) geeft nu het volgende resultaat:



Als alternatief, kunt u de functie definiëren met ADD in plaats van met het plusteken (+), d.w.z. gebruik DEFINE('G(X,Y)=(X ADD 3)*Y') :



U kunt de functie ook als G(X,Y) = (X--3)*Y definiëren.

Toepassingen van lijsten

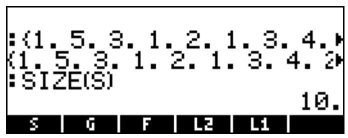
Deze paragraaf toont enkele toepassingen van lijsten voor de berekeningen van statistieken van een monster. Onder monster verstaan we een lijst van waarden van bijv. $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Stel dat het monster de volgende lijst is

{1, 5, 3, 1, 2, 1, 3, 4, 2, 1}

die u opslaat in een variabele genaamd S (Het onderstaande beeldscherm toont deze handeling in de ALG-modus, alhoewel de bewerking in de RPN-modus er zeer sterk op lijkt. Denkt u er wel om dat in de RPN-modus u de functieargumenten in het stapelgeheugen plaatst voordat u de functie activeert):

De harmonische betekenis van een lijst

Het gaat om een monster groot genoeg is, zodat u het aantal elementen (n=10) in het beeldscherm kunt tellen. Voor een langere lijst kunt u de functie SIZE gebruiken om dat getal te krijgen, bijvoorbeeld

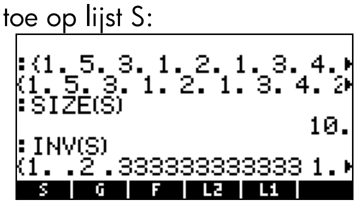


Stel dat u de harmonische betekenis van het monster gedefinieerd als

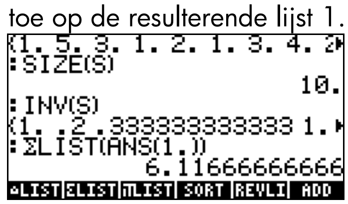
$$s_h = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s_n}} = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\cdots+\frac{1}{s_n}\right)}.$$

wilt berekenen. Voor de berekening van deze waarde kunt u de volgende procedure volgen:

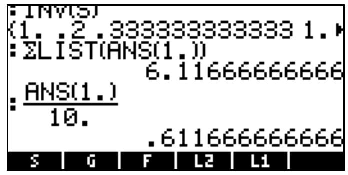
1. Pas functie INV() toe op lijst S:



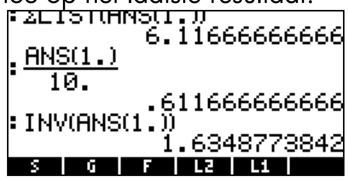
2. Pas functie ΣLIST() toe op de resulterende lijst 1.



3. Deel het bovenstaande resultaat door n = 10:



4. Pas functie INV () toe op het laatste resultaat:



De harmonische betekenis van lijst S is dus s_h = 1.6348…

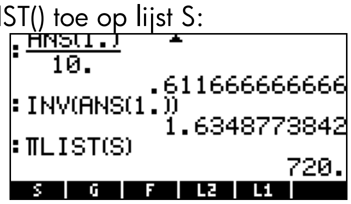
De geometrische betekenis van een lijst

De geometrische betekenis van een monster wordt gedefinieerd als

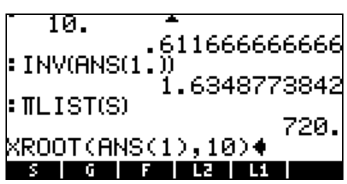
$$x_g = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

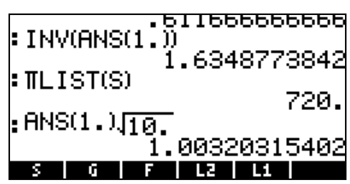
Voor de geometrische betekenis van de lijst opgeslagen in S kunt de volgende procedure gebruiken:

1. Pas de functie ΠLIST() toe op lijst S:



2. Pas functie XROOT(x,y), d.w.z. toetsencombinatie , toe op het resultaat in 1:





De geometrische betekenis van lijst S is dus s_g = 1.003203…

Het gewogen gemiddelde

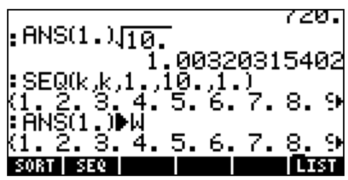
Stel dat de gegevens in lijst S, hierboven gedefinieerd, nl.:

S = {1,5,3,1,2,1,3,4,2,1}

beïnvloed zijn door de gewichten,

W = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

Indien u de gewichtenlijst definieert als W = {w_1,w_2,…,w_n}, ziet u dat u het *k*-de element is in lijst W, hierboven, kunt definiëren door w_k = k. Zo kunt u dus de functie SEQ gebruiken om deze lijst te genereren en daarna als volgt in de variabele W op te slaan:

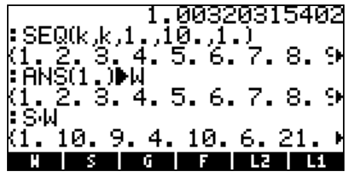


Gegeven is de gegevenslijst {s_1, s_2, …, s_n } en de gewichtenlijst {w_1, w_2, …, w_n }, het gewogen gemiddelde van de gegevens in S is gedefinieerd als

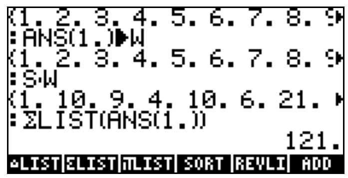
$$s_w = \frac{\sum_{k=1}^{n} w_k \cdot s_k}{\sum_{k=1}^{n} w_k} .$$

Voor de berekening van het gewogen gemiddelde van de gegevens in lijst S met de gewichten in lijst W, kunt u de volgende procedure nemen:

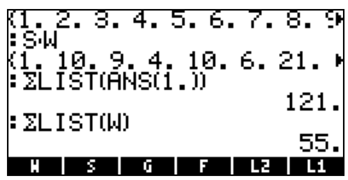
1. Vermenigvuldig de lijsten S en W:



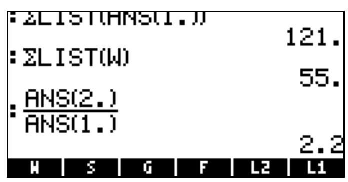
2. Gebruik de functie ΣLIST in dit resultaat voor de berekening van de teller s_w:



3. Gebruik de functie ΣLIST opnieuw voor de berekening van de noemer s_w:



4. Gebruik de uitdrukking ANS(2)/ANS(1) voor de berekening van het gewogen gemiddelde:



Het gewogen gemiddelde van de lijst S met de gewichten in lijst W is dus s_w= 2.2.

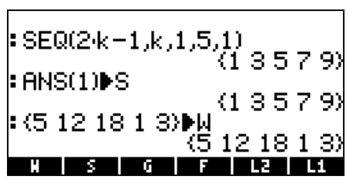
Opmerking: ANS(1) verwijst naar het meest recente resultaat (55), terwijl ANS (2) naar het voorlaatste resultaat (121) verwijst.

Stastistieken van gegroepeerde gegevens

De gegroepeerde gegevens worden gewoonlijk uitgedrukt in een tabel met de frequentie (w) van gegevens in gegevenklassen of bins toont. Elke klasse of bin wordt weergegeven door een soortteken (s), gewoonlijk het middelpunt van de klasse. Hier volgt een voorbeeld van gegroepeerde gegevens:

Klasse grenzen	Klasse teken s_k	Frequentie telling w_k
0 - 2	1	5
2 - 4	3	12
4 - 6	5	18
6 - 8	7	1
8 -10	9	3

De gegevens van het klasseteken kunnen opgeslagen worden in variabele S, terwijl de frequentietelling opgeslagen kan worden in variabele W:

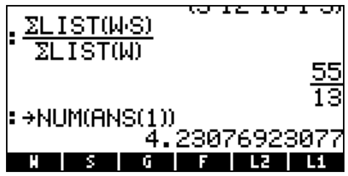


Gegeven is de lijst van klassetekens S = {s_1, s_2, …, s_n } en de lijst van de frequentietellingen W = {w_1, w_2, …, w_n }, het gewogen gemiddelde van de gegevens in S met de gewichten W vertegenwoordigt de gemiddelde waarde van de gegroepeerde gegevens, genaamd s, in deze context:

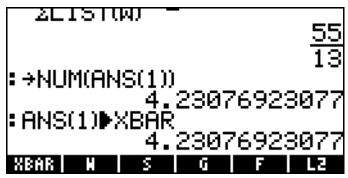
$$\overline{s} = \frac{\sum_{k=1}^{n} w_k \cdot s_k}{\sum_{k=1}^{n} w_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} w_k \cdot s_k}{N},$$

waar $N = \sum_{k=1}^{n} w_k$ staat voor de totale frequentietelling.

U kunt daarom de gemiddelde waarde voor de gegevens in de lijsten S en W berekenen door middel van de eerder beschreven procedure voor het gewogen gemiddelde, d.w.z.



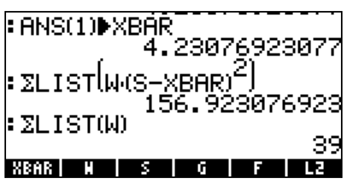
U slaat deze waarde op in een variabele genaamd XBAR:

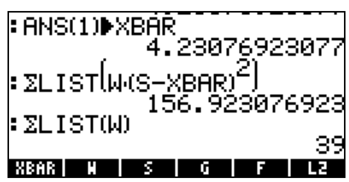


De variantie van deze gegroepeerde gegevens worden gedefinieerd als

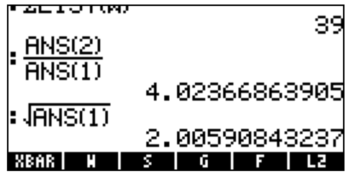
$$V = \frac{\sum_{k=1}^{n} w_k \cdot (s_k - \bar{s})^2}{\sum_{k=1}^{n} w_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} w_k \cdot (s_k - \bar{s})^2}{N}$$

Voor de berekening van dit laatste resultaat, kunt u het volgende gebruiken:





De standaardafwijking van de gegroepeerde gegevens is de vierkantswortel van de variantie:


39
ANS(2)
ANS(1)
4.02366863905
√ANS(1)
2.00590843237
XBAR W S G F L2

Hoofdstuk 9
Vectoren

Dit hoofdstuk laat voorbeelden zien van het invoeren en bewerken van vectoren, zowel wiskundige vectoren die uit vele elementen bestaan, als fysieke vectoren met 2 en 3 componenten.

Definities

Wiskundig gezien is een vector een reeks van 2 of meer elementen, geplaatst in een rij of een kolom. Deze worden *rij-* en *kolomvectoren* genoemd. Hieronder vindt u voorbeelden:

$$v = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad u = [1, -3, 5, 2]$$

Fysieke vectoren hebben twee of drie componenten en kunnen gebruikt worden om fysieke hoeveelheden weer te geven, zoals bijvoorbeeld positie, snelheid, versnelling, krachten, momenten, lineaire en hoekmomenum, hoeksnelheid en –versnelling, enz. In een Cartesisch coördinatenstelsel (x,y,z), zijn de eenheidvectoren **i**, **j**, **k** verbonden met elke coördinatenrichting, zodat een fysieke vector **A** kan geschreven kan worden aan de hand van zijn componenten A_x, A_y, A_z, als **A** = A_x**i** + A_y**j** + A_z**k**.
Een alternatieve notatie voor deze vector is: **A** = [A_x, A_y, A_z], **A** = (A_x, A_y, A_z) of **A** = < A_x, A_y, A_z >. Een tweedimensionale versie van deze vector wordt geschreven als **A** = A_x**i** + A_y**j**, **A** = [A_x, A_y], **A** = (A_x, A_y), of **A** = < A_x, A_y >. Aangezien in de rekenmachine de vectoren tussen [ ] haakjes worden geschreven, kiezen we vanaf nu voor de notatie **A** = [A_x, A_y, A_z] of **A** = [A_x, A_y, A_z] om te verwijzen naar twee- of driedimensionale vectoren. De grootte van een vector A wordt gedefinieerd als |**A**| = $\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$. Een eenheidsvector in de richting van vector **A**, wordt gedefinieerd als $\mathbf{e}_A$ = **A**/|**A**|. Vectoren kunnen worden vermenigvuldigd door middel van een scalair, bijv. k**A** = [kA_x, kA_y, kA_z]. Vector k**A** is, fysiek gezien, parallel aan vector A, indien k>0, of anti-parallel aan vector **A**, indien k<0. De negatieve van een vector wordt gedefinieerd als –**A**=(-1)**A** = [–A_x, –A_y, –A_z]. Een

deling door een scalair, kan worden gezien als een vermenigvuldiging, d.w.z. $\mathbf{A}/k = (1/k)\cdot\mathbf{A}$. Optelling en aftrekking van vectoren kan worden gedefinieerd als $\mathbf{A}\pm\mathbf{B} = [A_x \pm B_x, A_y \pm B_y, A_z \pm B_y]$, waarbij **B** de vector $\mathbf{B} = [B_x, B_y, B_z]$ is. Er zijn twee definities van producten van fysieke vectoren, een scalair of intern product (het scalaire product) en een vector of extern product (het vectoriële product). Het scalaire product geeft een scalair-waarde, gedefinieerd als $\mathbf{A}\bullet\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos(\theta)$, waarbij θ de hoek is tussen de twee vectoren. Het vectoriële product geeft een vector $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ waarvan de grootte $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin(\theta)$, en de richting worden aangegeven door de zogenaamde rechtsregels (raadpleeg een handboek over wiskunde, fysica of mechanica om deze bewerking grafisch voorgesteld te zien). Vanuit Cartesisch oogpunt, $\mathbf{A}\bullet\mathbf{B} = A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$ en $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = [A_yB_z-A_zB_y,A_zB_x-A_xB_z,A_xB_y-A_yB_x]$. De hoek tussen twee vectoren kan worden afgeleid uit de definitie van het scalaire product als $\cos(\theta) = \mathbf{A}\bullet\mathbf{B}/|\mathbf{A}||\mathbf{B}| = \mathbf{e}_A\bullet\mathbf{e}_B$. Als twee vectoren **A** en **B** elkaar kruisen ($\theta = 90^0 = \pi/2^{rad}$) is $\mathbf{A}\bullet\mathbf{B} = 0$.

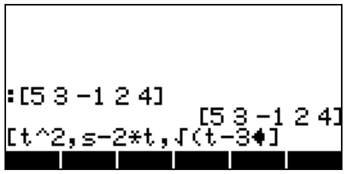
Vectoren invoeren

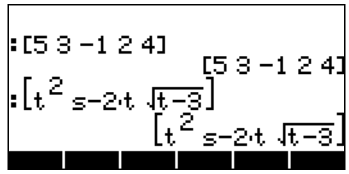
In de rekenmachine worden vectoren weergegeven als een opeenvolging van nummers tussen haakjes en ze worden ingevoerd als rijvectoren. De haakjes worden in de rekenmachine ingevoerd met de toetsencombinatie ⬑ [] , behorende bij de toets ×. Hierna volgen enkele voorbeelden van vectoren:

`[3.5, 2.2, -1.3, 5.6, 2.3]`	Een algemene lijnvector
`[1.5,-2.2]`	Een 2-D vector
`[3,-1,2]`	Een 3-D vector
`['t','t^2','SIN(t)']`	Een algebraïsche vector

Vectoren invoeren in het stapelgeheugen

Indien de rekenmachine ingesteld is in de ALG-modus, wordt een vector ingevoerd in het stapelgeheugen tussen twee haakjes (⬑ []) met daarin de componenten of elementen van de vector, onderling gescheiden door komma's (↱ ,). De onderstaande beeldschermen geven de invoer aan van een numerieke vector, gevolgd door een algebraïsche vector. De linkerafbeelding toont de algebraïsche vector voordat op ⬑ is gedrukt. De rechterafbeelding geeft het beeldscherm weer nadat de algebraïsche vector is ingevoerd:



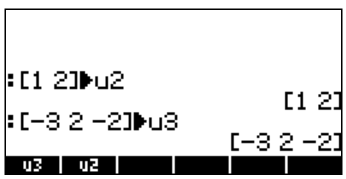


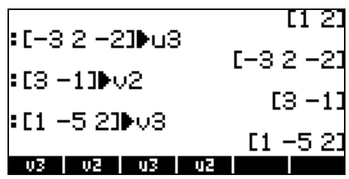
In de RPN-modus kunt u een vector invoeren in het stapelgeheugen door twee haakjes te openen en de vectorcomponenten of -elementen in te voeren, gescheiden door komma's (→ ,) of spaties (SPC). U ziet dat nadat u op ENTER heeft gedrukt de rekenmachine de vectorelementen gescheiden door spaties weergeeft in beide modi.

Vectoren opslaan in variabelen

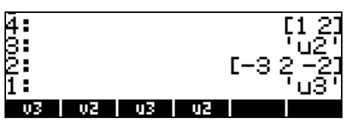
Vectoren kunnen worden opgeslagen in variabelen. De beeldschermen hieronder geven de volgende vectoren weer,

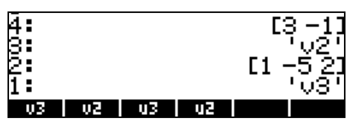
u$_2$ = [1, 2], **u**$_3$ = [-3, 2, -2], **v**$_2$ = [3,-1], **v**$_3$ = [1, -5, 2] opgeslagen in respectievelijk de variabelen u2, u3, v2 en v3, Eerst in de ALG-modus:





En vervolgens in de RPN-modus (voordat u herhaaldelijk op STO▶ , drukt):





De Matrixschrijver (MTRW) invoeren om vectoren in te voegen

Vectoren kunnen eveneens worden ingevoerd door gebruik te maken van de Matrixschrijver ← MTRW (de derde toets van de vierde rij boven in het toetsenbord). Dit commando genereert een soort van spreadsheet met de rijen en kolommen van een matrix. (In een volgend hoofdstuk wordt er meer informatie gegeven over het gebruik van de Matrixschrijver). Voor een vector willen we alleen elementen in de bovenste rij invoeren. De cel in de bovenste rij en de eerste kolom wordt automatisch geselecteerd. Onder in de spreadsheet vindt u de volgende softmenutoetsen:

EDIT VEC■ ←WID WID→ GO→■ GO↓

De toets EDIT wordt gebruikt om de inhoud van een geselecteerde cel in de Matrixschrijver weer te geven.

De toets VEC geeft, wanneer geselecteerd, een vector, die het tegenovergestelde is met een matrix van één rij en vele kolommen.

Vectoren vs. matrices

Om de VEC toets beter te begrijpen, raden we de volgende oefeningen aan:

(1) Activeer de Matrixschrijver (← MTRW). Indien u VEC■ en GO→■ selecteert, voer dan 3 ENTER 5 ENTER 2 ENTER ENTER in. Dit geeft [3. 5. 2.]. (In de RPN-modus, kunt u de volgende toetsencombinatie gebruiken om hetzelfde resultaat te verkrijgen: 3 SPC 5 SPC 2 ENTER ENTER).

(2) 2) Indien u VEC deselecteert en GO→■ selecteert, voer dan 3 SPC 5 SPC 2 ENTER ENTER in. Dit geeft [[3. 5. 2.]].

Hoewel deze twee resultaten alleen van elkaar verschillen in het aantal haakjes dat gebruikt wordt, vertegenwoordigen ze verschillende wiskundige objecten in de rekenmachine. De eerste is een vector met drie elementen en de tweede een matrix met één rij en drie kolommen. Er zijn verschillen in de manier waarop wiskundige bewerkingen plaatsvinden naargelang ze plaats vinden op een vector of op een matrix. Daarom raden we aan de toets VEC■ voorlopig geselecteerd te laten, wanneer u de Matrixschrijver gebruikt.

De toets ←WID wordt gebruikt om de breedte van de kolommen in de spreadsheet te verkleinen. Druk enkele malen op deze toets om de kolombreedte in uw Matrixschrijver te zien verkleinen.

De toets WID→ wordt gebruikt om de breedte van de kolommen in de spreadsheet te vergroten. Druk enkele malen op deze toets om de kolombreedte in uw Matrixschrijver te zien vergroten.

De toets GO→■ , wanneer geselecteerd, zorgt ervoor dat u automatisch naar de cel verhuist die zich rechts bevindt van de huidige cel wanneer u op ENTER drukt. Deze optie vormt de standaardinstelling.

De toets GO↓ , wanneer geselecteerd, zorgt ervoor dat u automatisch naar de cel verhuist die zich onder de huidige cel bevindt, wanneer u op ENTER drukt.

Naar rechts bewegen vs. naar beneden bewegen in de Matrix-schrijver

Activeer de Matrixschrijver en voer 3 ENTER 5 ENTER 2 ENTER ENTER in waarbij de toets GO→■ is geselecteerd (standaard). Voer vervolgens dezelfde getallen in waarbij de toets GO↓■ is geselecteerd om het verschil te zien. In het eerste geval heeft u een vector ingevoerd met drie elementen. In het tweede geval heeft u een matrix ingevoerd met drie rijen en één kolom.

Activeer de Matrixschrijver opnieuw door gebruik te maken van ← MTRW en druk vervolgens op NXT om het tweede softtoetsmenu uit te testen. De volgende toetsen verschijnen:

+ROW -ROW +COL -COL →STK GOTO

De toets +ROW voegt een rij nullen toe aan de positie van de geselecteerde cel in de spreadsheet.

De toets -ROW verwijdert de rij die overeenkomt met de geselecteerde cel n de spreadsheet.

De +COL toets voegt een kolom nullen toe aan de positie van de geselecteerde cel n de spreadsheet.

De toets -COL verwijdert de kolom die overeenkomt met de geselecteerde cel toets.

De toets →STK plaatst de inhoud van de geselecteerde cel in het stapelgeheugen.

Indien u de toets GOTO indrukt, zal de gebruiker gevraagd worden het nummer van de rij en de kolom aan te geven waar hij of zij de cursor wil plaatsen.

Door opnieuw op NXT te drukken, wordt het laatste menu weergegeven, dat slechts één functie bevat DEL (wissen).

De functie DEL verwijdert de inhoud van de geselecteerde cel en vervangt die door een nul.

Om de werking van deze toetsen beter te begrijpen, raden we u aan de volgende oefening te maken:

(1) Activeer de Matrixschrijver door op ← MTRW te drukken. Controleer of VEC■ en GO→■ geselecteerd zijn.

(2) Druk op de volgende toetsencombinaties:

1 ENTER 2 ENTER 3 ENTER
NXT GOTO 2 OK 1 OK OK
2 ENTER 1 ENTER 5 ENTER
4 ENTER 5 ENTER 6 ENTER
7 ENTER 8 ENTER 9 ENTER

(3) Breng de cursor twee posities omhoog met de pijltoets omhoog ▲▲ ▲. Druk vervolgens op -ROW. De tweede rij verdwijnt.

(4) Druk op +ROW. Een rij met drie nullen verschijnt in de tweede rij.

(5) Druk op -COL. De eerste kolom verdwijnt.

(6) Druk op +COL. Een rij met twee nullen verschijnt in de eerste rij.

(7) Druk op GOTO 3 OK 3 OK OK om naar positie (3,3) te bewegen.

(8) Druk op →STK. Dit plaatst de inhoud van cel (3,3) in het stapelgeheugen, hoeweldit nog niet weergegeven zal worden.

(9) Druk op NXT Dit plaatst een nul in locatie (3,3), maar deze functie lijkt niet goed te werken.

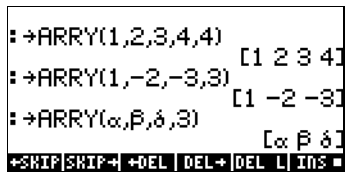
Samenvatting over het gebruik van de Matrixschrijver bij het invoeren van vectoren

In het kort: , Activeer de schrijver (← MTRW)om een vector in te voeren met behulp van de Matrixschrijver en plaats de elementen van de vector door op ENTER te drukken na elk element. Druk vervolgens op ENTER ENTER. Controleer of de toetsen VEC■ en GO→■ geselecteerd zijn.

Voorbeeld: ← MTRW ' ALPHA ← X Y^x 2 ENTER 2 ENTER 5 +/- ENTER ENTER
geeft: ['x^2' 2 –5]

Een vector opbouwen met →ARRY

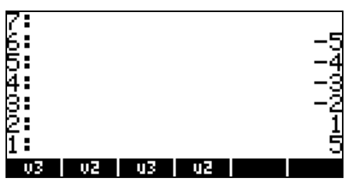
De functie →ARRY, beschikbaar in de functiecatalogus (→ _CAT_ → ▶, maak gebruik van ▲▼ om de functie te zoeken), kan ook gebruikt worden om als volgt een vector of reeks op te bouwen. In de ALG-modus voert u →ARRY in *(vectorelementen, aantal elementen)*, bijv.:

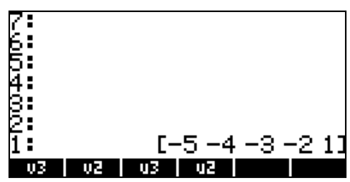


In de RPN-modus:

(1) Voer de n elementen in van de reeks in de volgorde waarop u wilt dat ze verschijnen in de reeks (van links naar rechts) in het RPN-stapelgeheugen.
(2) Voer *n* in als laatste element.
(3) Gebruik de functie →ARRY.

Het volgende beeldscherm geeft het RPN-stapelgeheugen weer vóór en na het toepassen van de functie→ARRY.



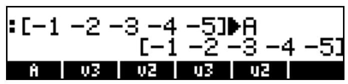


In de RPN-modus, neemt de functie [→ARRY] de objecten van het stapelgeheugenniveaus *n+1, n, n-1*, …, tot en met niveau 3 en 2 en verandert deze in een vector van *n* elementen. Het object dat zich oorspronkelijk op stapelgeheugenniveau n+1 bevond, wordt het eerste element, het object dat zich oorspronkelijk op niveau n bevond, wordt het tweede element, enz.

Opmerking: de functie →ARRY is eveneens beschikbaar in het menu PRG/TYPE (← _PRG_)

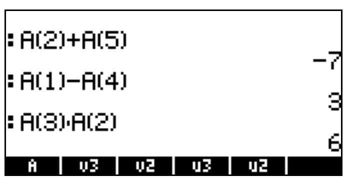
Vectorelementen identificeren, onttrekken en invoegen

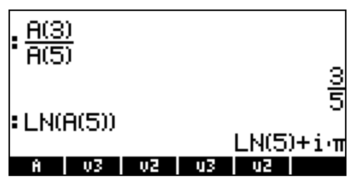
Wanneer u een vector opslaat met een variabelennaam, bijv. A, kunt u de elementen van die vector identificeren als A(*i*), waar i een heel getal is die kleiner dan of gelijk is aan de vectorgrootte. Maak bijvoorbeeld de volgende pijl aan en sla hem op in variabele A: [-1, -2, -3, -4, -5]:

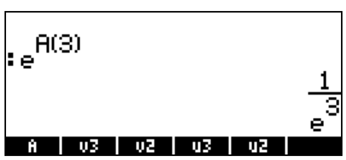


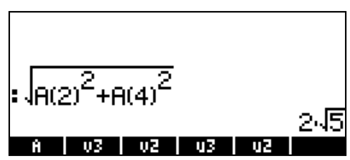
Om bijvoorbeeld het derde element van A op te roepen , kunt u A(3) invoeren in de rekenmachine. In de ALG-modus, voert u gewoon A(3) in. In de RPN-modus, voert u 'A(3)' ENTER EVAL in.

U kunt werken met de elementen van de reeks door algebraïsche uitdrukkingen te schrijven en te evalueren, zoals bijvoorbeeld:







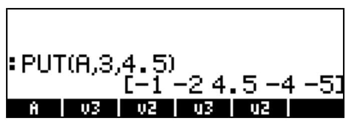


Er kunnen ook meer ingewikkelde uitdrukkingen met elementen van A geschreven worden. Bijvoorbeeld met behulp van de vergelijkingenschrijver (↱ EQW) kunnen we de volgende som van elementen van A weergeven:

Door de volledige uitdrukking te markeren en door de softmenutoets EVAL te gebruiken, krijgen we het volgende resultaat: -15.

Opmerking: vector A kan ook worden omschreven als een *geïndexeerde variabele,* omdat de benaming A niet één maar vele waarden vertegenwoordigt, die worden geïdentificeerd door middel van een subindex.

Om <u>een element in een reeks te vervangen</u>, moet u bijvoorbeeld gebruikmaken van de functie PUT (beschikbaar in de functiecatalogus →_CAT of in het submenu PRG/LIST/ELEMENTS. Over dit laatste menu vindt u meer informatie in Hoofdstuk 8). In de ALG-modus, moet u gebruikmaken van de functie PUT met de volgende argumenten: PUT (*reeks, te vervangen positie, nieuwe waarde*). Voer bijvoorbeeld het volgende uit om bijvoorbeeld de inhoud van A(3) in 4.5 te wijzigen:



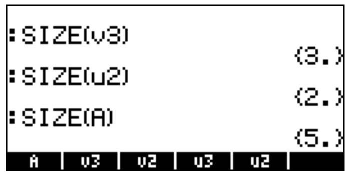
In de RPN-modus kunt u de <u>waarde van een element</u> van A wijzigen door een nieuwe waarde op te slaan in dat element. Gebruik bijvoorbeel om de inhoud van A(3) te wijzigen in 4.5 in plaats van de huidige waarde van –3.,

4 . 5 ENTER ' ALPHA A ←() 3 ENTER STO▸

Druk → A om te controleren of de wijziging is doorgevoerd, . Het volgende resultaat wordt nu getoond: [-1 -2 4.5 -4 -5].

Opmerking: het op deze manier wijzigen van een waarde van een reekselement is niet mogelijk in de ALG-modus, indien u probeert om 4.5 op te slaan in A(3). De volgende foutmelding verschijnt: Invalid Syntax.

<u>Om de lengte van een vector na te gaan</u>, kunt u de functie SIZE gebruiken, beschikbaar via de commandocatalogus (N) of via het submenu PRG/LIST/ELEMENTS. Sommige voorbeelden, gebaseerd op reeksen of vectoren die eerder zijn opgeslagen, staan hieronder:

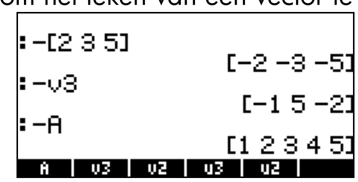


Eenvoudige bewerkingen met vectoren

Om bewerkingen met vectoren te illustreren, gebruiken we de vectoren A, u2, u3, v2, en v3, die al zijn opgeslagen in een eerdere oefening.

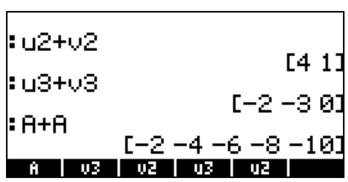
Het teken wijzigen

Gebruik de toets +/- om het teken van een vector te wijzigen, bijv.:



Optellen, aftrekken

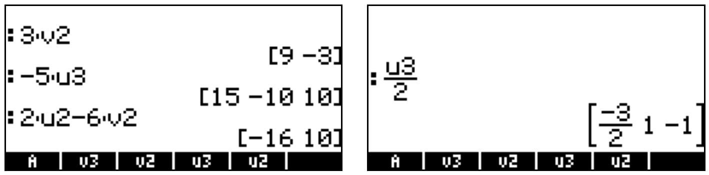
Bij het optellen en aftrekken van vectoren is het vereist dat de twee vectorïele operanden dezelfde lengte hebben:



Bij het optellen en aftrekken van vectoren van een verschillende lengte, krijgt u een foutmelding (*Invalid Dimension*), bijv., v2+v3, u2+u3, A+v3,...

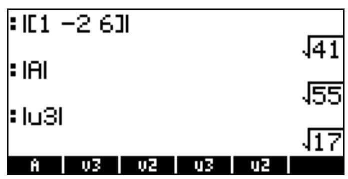
Vermenigvuldiging met een scalair, deling door een scalair

Vermenigvuldiging met een scalair of deling door een scalair is eenvoudig:



Absolute waardefunctie

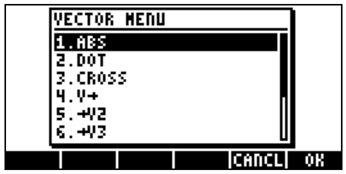
De absolute waardefunctie (ABS), wanneer toegepast op een vector, geeft de grootte weer van de vector. Voor een vector A = [A_1,A_2,…,A_n] wordt de grootte als volgt gedefinieerd: $|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + \cdots + A_z^2}$. In de ALG-modus moet u de functiebenaming invoeren, gevolgd door het vectorargument. `ABS([1,-2,6])`, `ABS(A)`, `ABS(u3)` zal bijvoorbeeld als volgt in het beeldscherm verschijnen:

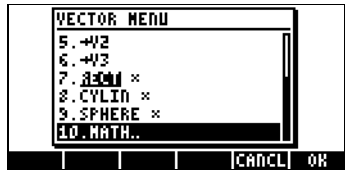


Het menu MTH/VECTOR

Het menu MTH (← MTH) bevat een menu van functies specifiek voor vectorobjecten:

Het menu VECTOR bevat de volgende functies (systeemvlag 117 is ingesteld op CHOOSE boxes):



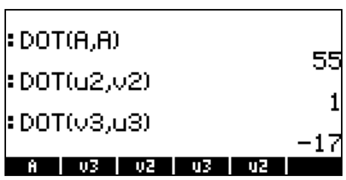


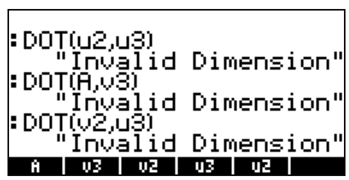
Grootte

De grootte van een vector, zoals we al eerder besproken hebben, kan worden nagegaan met behulp van de functie ABS. Deze functie kan ook rechtstreeks geactiveerd worden vanaf het toetsenbord (⇦ ABS). Voorbeelden van toepassingen van de functie ABS vindt u hierboven:

Scalair product

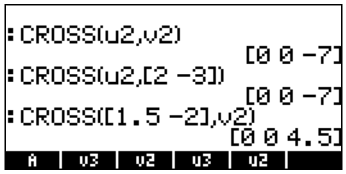
De functie DOT wordt gebruikt om het scalaire product te berekenen van twee vectoren van dezelfde lengte. Sommige voorbeelden van toepassingen van de functie DOT, met vectoren A, u2, u3, v2 en v3 die al eerder zijn opgeslagen, worden vervolgens in de ALG-modus getoond. Er verschijnt een foutmelding wanneer u probeert om een scalair product te berekenen van twee vectoren van verschillende lengtes:

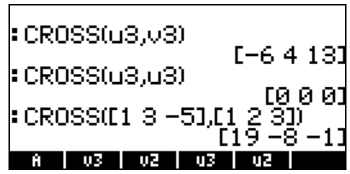




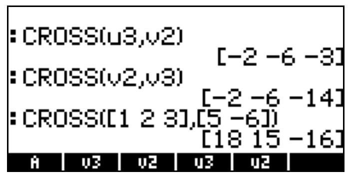
Vectorieel product

De functie CROSS wordt gebruikt om het vectoriële product te berekenen van twee 2-D vectoren, van twee 3-D vectoren of van een 2-D en een 3-D vector. Bij het berekenen van een vectorieel product, wordt een 2-D vector in de vorm $[A_x, A_y]$, geïnterpreteerd als de 3-D vector $[A_x, A_y, 0]$. Voorbeelden van twee 2-D en twee 3-D vectoren in de ALG-modus worden hieronder gegeven. U ziet dat het vectoriële product van twee 2-D vectoren een vector oplevert die alleen in de z-richting wijst, d.w.z. een vector in de vorm $[0, 0, C_z]$:





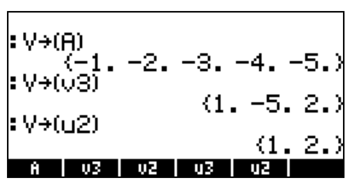
Voorbeelden van vectoriële producten van een 3-D vector met een 2-D vector, of viceversa, worden hieronder weergegeven:



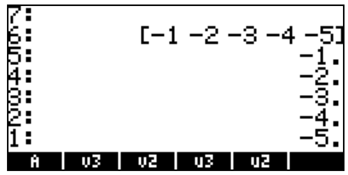
Wanneer u een vectorieel product berekent van vectoren van een andere lengte dan 2 of 3, wordt de foutmelding (*Invalid Dimension*) weergegeven, b.v. CROSS(v3,A), enz.

Een vector ontleden

De functie V→ wordt gebruikt om een vector te ontleden in zijn elementen of componenten. Indien de functie wordt gebruikt in de ALG-modus, zal V→ de elementen van een vector in een lijst weergeven, b.v.

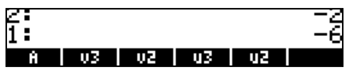


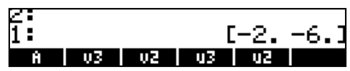
In de RPN-modus plaatst de functie V→ de componenten van een vector in het stapelgeheugen, bijv. V→(A) geeft de volgende uitvoer in het RPN-stapelgeheugen (vector A is terug te vinden in het stapelgeheugen op niveau 6:).



Een twee-dimensionele vector opbouwen

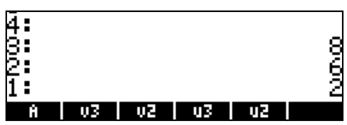
Functie →V2 wordt gebruikt in de RPN-modus om een vector op te bouwen met waarden uit geheugenniveaus 1: en 2:. De volgende beeldschermen geven het stapelgeheugen weer vóór en na het toepassen van functie →V2.

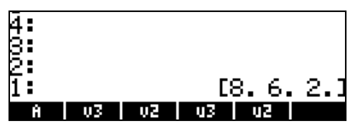




Een driedimensionele vector opbouwen

Functie →V3 wordt gebruikt in de RPN-modus om een vector op te bouwen met de waarden in het stapelgeheugen op niveaus 1:, 2:, en 3:. De volgende beeldschermen geven het stapelgeheugen weer vóór en na het toepassen van functie →V2.





Het coördinatenstelsel wijzigen

De functies RECT, CYLIN, en SPHERE worden gebruikt om het ingestelde coördinatenstelsel te wijzigen naar het rechthoekige (Cartesische) stelsel, het cilindrische (polaire) of het sferische coördinatenstelsel. Het ingestelde systeem wordt geselecteerd weergegeven in het bijbehorende CHOOSE box (systeemvlag 117 niet ingesteld) of geselecteerd in de bijbehorende SOFT menulabel (systeemvlag 117 ingesteld). In de volgende afbeelding wordt het RECTangular (rechthoekig) coördinatenstelsel weergegeven zoals geselecteerd in deze twee opmaken:

Wanneer het rechthoekige, of Cartesische coördinatenstelsel wordt geselecteerd, wordt in de bovenste regel van het scherm een XYZ-veld weergegeven, en elke 2-D of 3-D vector die in de rekenmachine wordt ingevoerd, wordt weergegeven als de (x,y,z) componenten van de vector. Om de vector A = 3**i**+2**j**-5**k**, in te voeren, gebruiken we [3,2,-5], en de vector wordt als volgt weergegeven:

Als in de plaats van Cartesische componenten van een vector cilindrische (polaire) elementen ingevoerd worden, moeten we de grootte, r, invoeren van de projectie van de vector op het x-y-vlak, evenals de hoek θ (in de huidige hoekmeting), die de afwijking weergeeft tussen r en de positieve x-as eneen z component van de vector. De hoek θ moet voorafgegaan worden door het hoekteken (∠) met ALPHA ↱ 6. Stel bijvoorbeeld dat we een vector hebben met r = 5, θ = 25° (DEG moet dan geselecteerd worden als de hoekmeting) en z = 2.3, dan kunnen we deze vector als volgt invoeren:

↰ [] 5 ↱ , ALPHA ↱ 6 2 5 ↱ , 2 . 3

Vóór u op ENTER drukt, zal het beeldscherm eruit zien zoals in de onderstaande linkerafbeelding. Nadat u op ENTER heeft gedrukt, zal het beeldscherm eruit zien zoals de rechterafbeelding (Voor dit voorbeeld werd de numerieke opmaak gewijzigd naar Fix met drie decimalen).

U ziet dat de vector is weergegeven in Cartesischee coördinaten, met de componenten x = r cos(θ), y = r sin(θ), z = z, ook al hebben we ze ingevoerd als polaire coördinaten. Dit door het feit dat het beeldscherm van de vector standaard het huidige coördinatenstelsel is. Voor dit geval is gegeven x = 4.532, y = 2.112 en z = 2.300.

Stel dat we nu een vector invoeren in sferische coördinaten (d.w.z. in de vorm (ρ,θ,ϕ), waarbij ρ de lengte voorstelt van de vector, θ de hoek is die de xy-projectie vormt van de vector met de positieve zijde van de x-as, en ϕ de hoek is die ρ vormt met de positieve zijde van de z-as), waarbij ρ = 5, θ = 25° en ϕ = 45°. We maken gebruik van de volgende toetsencombinatie:
← [] 5 → , ALPHA → 6 2 5 → , ALPHA → 6 4 5

De onderstaande afbeelding geeft de omzetting weer van de vector van sferische naar Cartesischee coördinaten, waarbij x = ρ sin(ϕ) cos(θ), y = ρ sin (ϕ) cos (θ), z = ρ cos(ϕ). In dit geval x = 3.204, y = 1.494, en z = 3.536.

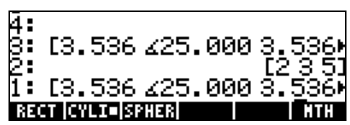
Indien het CYLINdrisch systeem geselecteerd wordt, verschijnt er in de bovenste regel in het beeldscherm een R∠Z-veld en wordt er een vector ingevoerd met cilindrische coördinaten weergegeven in zijn cilindrische (of polaire) coördinatenvorm (r,θ,z). Om dit te oefenen, moet u het coördinatenstelsel wijzigen naar CYLINdrisch en zult u merken dat de vector die wordt weergegeven in het laatste beeldscherm wijzigt naar zijn cilindrische (polaire) coördinatenvorm. De tweede component wordt weergegeven met het hoekteken ervoor geplaatst om de aard van de hoek aan te duiden.

De conversie van Cartesische naar cilindrische coördinaten is zodanig dat r = $(x^2+y^2)^{1/2}$, θ = $\tan^{-1}(y/x)$ en z = z. Voor het bovenstaande geval was de omzetting zodanig dat (x,y,z) = (3.204, 2.112, 2.300) het volgende resultaat geeft (r,θ,z) = (3.536,25°,3.536).

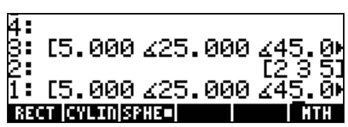
Indien we nu een vector van hele getallen in Cartesische vorm invoeren, wordt deze weergegeven met Cartesiaanse coördinaten, zelfs wanneer het CYLINdrische coördinatenstelsel geselecteerd is, bijv.:

Dit komt omdat de hele getallen bedoeld zijn om met het CAS gebruikt te worden en daarom worden de componenten van deze vector in de Cartesische vorm behouden. Om de omzetting naar polaire coördinaten te verkrijgen, moet u de componenten van de vector invoeren als reële getallen (m.a.w. u dient een decimale punt toe te voegen), b.v. [2., 3., 5.].

Indien we een vector in sferische coördinaten invoeren wanneer het cilindrisch coördinatensysteem geselecteerd is, wordt de vector automatisch omgezet naar zijn cilindrische (polair) equivalent (r,θ,z) waarbij r = ρ sin ϕ, θ = θ, z = ρ cos ϕ. De volgende afbeelding geeft bijvoorbeeld een vector weer die werd ingevoerd in sferische coördinaten en die omgezet werd naar polaire coördinaten. In dit gevalis ρ = 5, θ = 25° en ϕ = 45°, terwijl de omzetting aangeeft dat r = 3.563 en z = 3.536. (Veranderen naar DEG)



Laten we vervolgens het coördinatensysteem wijzigen naar de sferische coördinaten met behulp van de functie SPHERE uit het submenu VECTOR in het menu MTH. Wanneer dit coördinatenstelsel geselecteerd is, zal boven in het beeldscherm de opmaak R∠∠ weergegeven worden. Het laatste beeldscherm geeft de verandering weer:



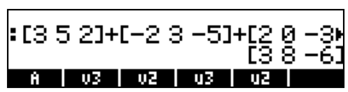
U ziet dat de vectoren die ingevoerd werden met behulp van cilindrische polaire coördinaten nu omgezet zijn naar het sferisch coördinatenstelsel. De omzetting is als volgt: $\rho = (r^2+z^2)^{1/2}$, $\theta = \theta$ en $\phi = \tan^{-1}(r/z)$. Maar de vector die oorspronkelijk in Cartesische coördinaten werd ingevoerd, blijft in deze vorm staan.

Vectorbewerkingen toepassen

Deze sectie bevat enkele voorbeelden van vectorbewerkingen die u kunt terugvinden in toepassingen van de fysica en de mechanica.

Resultante van krachten

Stel dat een partikel onderhevig is aan de volgende krachten (in N): $\mathbf{F}_1 = 3\mathbf{i}+5\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_2 = -2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ en $F_3 = 2\mathbf{i}-3\mathbf{k}$. Om de resultante te bepalen, d.w.z. de som van al deze krachten, kunt u de volgende werkwijze volgen in de ALG-modus:



De resultante is dus R = $\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\mathbf{F}_3 = (3\mathbf{i}+8\mathbf{j}-6\mathbf{k})$N. In de RPN-modus wordt dit als volgt uitgevoerd:

[3,5,2] ENTER [-2,3,-5] ENTER [2,0,3] ENTER + +

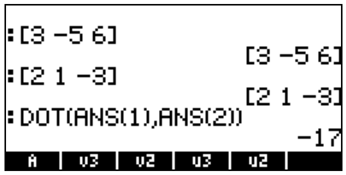
De hoek tussen vectoren

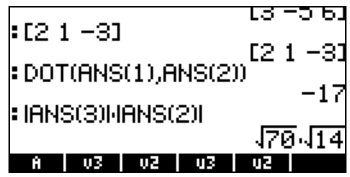
De hoek tussen twee vectoren **A**, **B**, kan worden berekend als $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}/|\mathbf{A}||\mathbf{B}|)$.

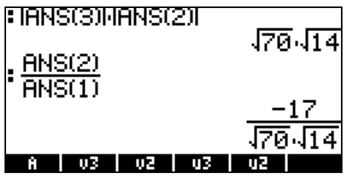
Indien u bijvoorbeeld de hoek wil berekenen tussen vectoren $\mathbf{A} = 3\mathbf{i}-5\mathbf{j}+6\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, kunt u de volgende bewerking proberen (de hoekmeting wordt ingesteld op graden) in de ALG-modus:

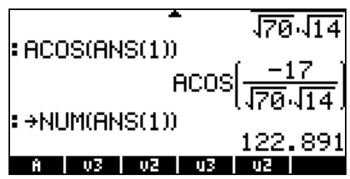
1 - Voer vectoren [3,-5,6] in, druk op ENTER, [2,1,-3], druk vervolgens weer op ENTER.
2 - DOT(ANS(1),ANS(2)) berekent het scalair product
3 - ABS(ANS(3))*ABS((ANS(2)) berekent het product van grootheden
4 - ANS(2)/ANS(1) berekent cos(θ)
5 – ACOS(ANS(1)), gevolgd door,→NUM(ANS(1)), berekent θ

De te volgen stappen worden in de volgende beeldschermen weergegeven (uiteraard in deALG-modus,):







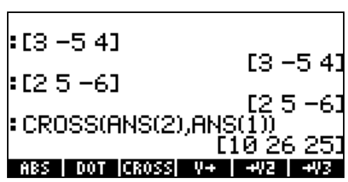


Het resultaat is dus θ = 122.891°. Voer het volgende in in de RPN-modus:

[3,−5,6] `ENTER` [2,1,−3] `ENTER` DOT
[3,−5,6] `ENTER` ABS [2,1,−3] `ENTER` ABS `×`
`÷` ACOS →NUM

Het moment van een kracht

Het moment dat uitgeoefend wordt door kracht **F** op een punt O wordt gedefinieerd als het vectorïele product **M** = **r**×**F**, waar **r**, ook bekend als de arm van de kracht, de positievector is die vertrekt vanuit O en in de richting wijst van het toepassingspunt van de kracht. Stel dat een kracht **F** = (2**i**+5**j**-6**k**) N een arm **r** = (3**i**-5**j**+4**k**)m heeft. Om het moment te bepalen waarop de kracht uitgevoerd werd door die arm, gebruiken we de functie CROSS, zoals hieronder getoond:

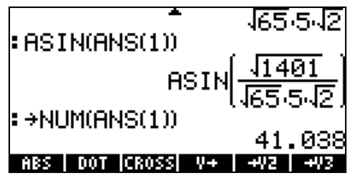


M = (10**i**+26**j**+25**k**) m·N. We weten dat de grootheid van M de volgende is: |**M**| = |**r**||**F**|sin(θ), waarbij θ de hoek is tussen **r** en **F**. We kunnen deze hoek berekenen als θ = $\sin^{-1}$(|**M**| /|**r**||**F**|) met behulp van de volgende bewerking:

1 – ABS(ANS(1))/(ABS(ANS(2))*ABS(ANS(3)) berekent sin(θ)

2 – ASIN(ANS(1)), gevolgd door →NUM(ANS(1)) berekent θ

In de volgende beeldschermen worden deze bewerkingen in de ALG-modus weergegeven:

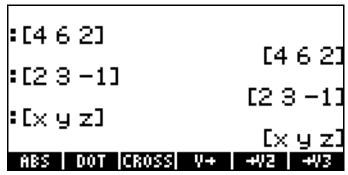


De hoek tussen de vectoren **r** en **F is** θ = 41.038°. In de RPN-modus kunnen we het volgende gebruiken: `[3,-5,4]` ENTER `[2,5,-6]` ENTER `CROSS` `ABS` `[3,-5,4]` ENTER `ABS` `[2,5,-6]` ENTER `ABS` × ÷ `ASIN` `→NUM`

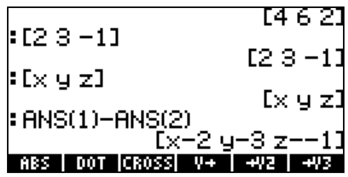
Vergelijking van een vlak in de ruimte

Bij een punt in de ruimte $P_0(x_0,y_0,z_0)$ en een vector **N** = N_x**i**+N_y**j**+N_z**k** normaal voor een vlak met een punt P_0 is het probleem om de vergelijking van het vlak te vinden. We kunnen een vector vormen die begint bij punt P_0 en eindigt bij punt P(x,y,z), een algemeen punt op het vlak. Deze vector **r** = P_0P = $(x-x_0)$**i**+ $(y-y_0)$**j** + $(z-z_0)$**k** kruist dus de normaalvector **N**, aangezien **r** volledig binnen het vlak valt. We hebben gezien dat voor twee normaalvectoren **N** en **r**, **N•r** =0. We kunnen dit resultaat dus gebruiken om de vergelijking te bepalen van het vlak.

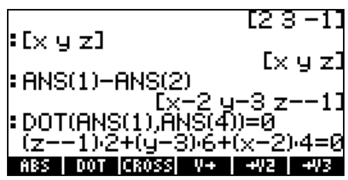
Om deze bewerking nader toe te lichten, neemt u het punt $P_0(2,3,-1)$ en de normaalvector **N** = 4**i**+6**j**+2**k**. We kunnen vector **N** en punt P_0 invoeren als twee vectoren, zoals hieronder wordt weergegeven. Als laatste voeren we de vector [x,y,z] in:



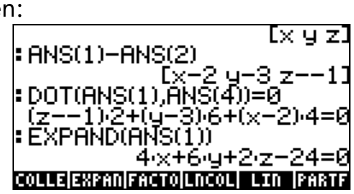
Vervolgens, berekenen we vector P_0P = **r** als ANS(1) – ANS(2)



Tenslotte nemen we het scalaire product van ANS(1) en ANS(4) en stellen het gelijk aan nul om de bewerking **N•r** =0 te voltooien:



We kunnen nu de functie EXPAND gebruiken (in het ALG-menu) om deze uitdrukking uit te breiden:



De vergelijking van het vlak door punt P_0(2,3,-1) en met een normaalvector **N** = 4**i**+6**j**+2**k**, is de volgende: 4x + 6y + 2z – 24 = 0. In de RPN-modus maakt u gebruik van:

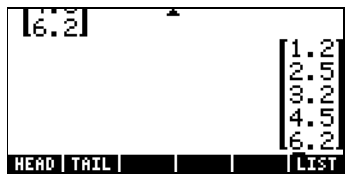
`[2,3,-1]` ENTER `['x','y','z']` ENTER − `[4,6,2] DOT EXPAND`

Rijvectoren, kolomvectoren en lijsten

De vectoren die in dit hoofdstuk worden behandeld, zijn allemaal rijvectoren. Soms is het nodig om een kolomvector aan te maken (bijv. om gebruik te maken van de vooringestelde statistische functies van de rekenmachines). De eenvoudigste manier om een kolomvector in te voeren is om elk vectorelement tussen haakjes te plaatsen, elk met een paar externe haakjes. Voer bijvoorbeeld het volgende in:

`[[1.2],[2.5],[3.2],[4.5],[6.2]]` ENTER

Dit wordt voorgesteld in de volgende kolomvector:



In deze paragraaf worden de verschillende manieren behandeld om een kolomvector in een lijnvector om te zetten, een lijnvector in een kolomvector, een lijst in een vector, of een vector (of matrix) in een lijst.

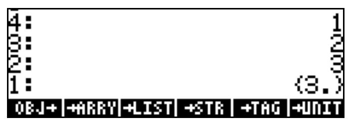
We laten eerst deze omzettingen zien in de RPN-modus. In deze modus gebruiken we de functies OBJ→, →LIST, →ARRY en DROP om de omzetting uit te voeren. Om deze functies toegankelijker te maken, stellen we systeemvlag 117 in op softmenu's (zie Hoofdstuk 1). Met deze vlaginstelling zijn functies als OBJ→, →ARRY en →LIST beschikbaar met ← PRG TYPE. De functies OBJ→, →ARRY en →LIST zijn te activeren met de softmenutoetsen F1 , F2 en F3 . De functie DROP is beschikbaar met ← PRG STACK DROP.

Vervolgens wordt de bewerking van functies OBJ→, →LIST, →ARRY en DROP uitgevoerd aan de hand van enkele voorbeelden.

De functie OBJ→

Deze functie ontleedt een object in zijn componenten. Indien het argument een lijst is, geeft de functie OBJ→ een lijst met elementen weer in het stapelgeheugen met het aantal elementen in stapelgeheugen 1, bijvoorbeeld: `{1,2,3}` ENTER ← PRG TYPE OBJ→ resulteert in:

Indien de functie OBJ→ toegepast wordt op een vector, geeft die de elementen weer van de vector in het stapelgeheugen, met het aantal elementen op niveau 1: tussen haakjes (een lijst). Het volgende voorbeeld illustreert deze toepassing: [1,2,3] ENTER ← PRG TYPE OBJ→ resulteert in:



Indien we nu de OBJ→ functie nogmaals toepassen, wordt de lijst in het stapelgeheugen op niveau 1:, {3.}, als volgt ontleed:

De functie →LIST

Deze functie wordt gebruikt om een lijst aan te maken met de elementen van de lijst en de lijstlengte en –grootte. In de RPN-modus zou de lijstgrootte, bijv. n, moeten worden opgeslagen op niveau 1:. van het stapelgeheugen. De elementen van de lijst zouden moeten worden opgeslagen op niveaus 2:, 3:,…, n+1:.Om bijvoorbeeld de lijst {1, 2, 3} aan te maken, voert u het volgende in: 1 ENTER 2 ENTER 3 ENTER 3 ENTER ← PRG TYPE →LIST.

De functie →ARRY

Deze functie wordt gebruikt om een vector of een matrix aan te maken. In deze paragraaf zullen we deze functie gebruiken om een vector of een kolomvector samen te stellen (d.w.z. een matrix van n rijen en 1 kolom). Om een normaalvector samen te stellen, voeren we de elementen van de vector in in het stapelgeheugen en op niveau 1: van het stapelgeheugen voeren we de vectorgrootte als een lijst in, bijv.: 1 ENTER 2 ENTER 3 ENTER ← {} 3 ENTER ← PRG TYPE →ARRY.

Om een kolomvector van n elementen samen te stellen, moet u de elementen van de vector in te voeren in het stapelgeheugen en op niveau 1 van het stapelgeheugen moet u de lijst {n 1} invoeren. Bijvoorbeeld, 1 ENTER 2 ENTER 3 ENTER ← {} 1 → , 3 ENTER ← PRG TYPE →ARRY.

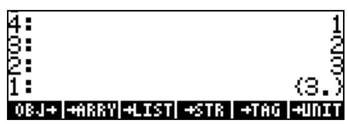
De functie DROP

Deze functie heeft hetzelfde effect als de wistoets (←).

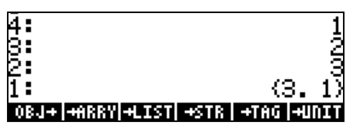
Een rijvector omzetten in een kolomvector

We geven de omzetting met vector [1,2,3] als voorbeeld. Voer deze vector in in het RPN-stapelgeheugen om de oefening te volgen. Om een rijvector om te zetten in een kolomvector, moeten we de volgende bewerkingen uitvoeren in het RPN-stapelgeheugen:

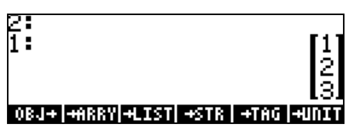
1 - Ontleed de vector met de functie OBJ→



2 - Druk op 1 + om de lijst op niveau 1: om te zetten van {3} naar {3,1}

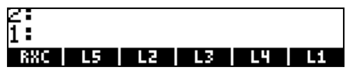


3 - Gebruik van de functie →ARRY om een kolomvector aan te maken



Deze drie stappen kunnen samengevoegd worden in een UserRPL-programma, dat als volgt wordt ingevoerd (nog steeds in de RPN-modus):
[→] « » [←] PRG TYPE OBJ→ [1] [+] →ARRY
[ENTER] ['] [ALPHA] [ALPHA] [R] [X] [C] [ENTER] [STO▶]

Een nieuwe variabele, RXC, zal beschikbaar zijn in de labels van het softmenu, nadat u op [VAR] gedrukt heeft:

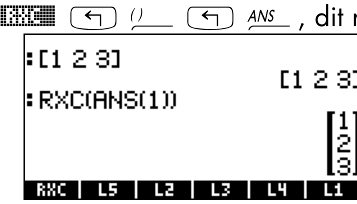


Druk op [→] RXC om het programma te zien dat zich in de variabele RXC bevindt:

<< OBJ→ 1 + →ARRY >>

Deze variabele, RXC, kan nu worden gebruikt om rechtstreeks een rijvector om te zetten in een kolomvector. In de RPN-modus moet u de rijvector invoeren en vervolgens op RXC drukken. Probeert u bijvoorbeeld: [1,2,3] [ENTER] RXC.

Nadat u deze variabele heeft gedefinieerd, kunnen we hem in de ALG-modus gebruiken om een rijvector om te vormen in een kolomvector. Wijzig uw rekenmachine naar de ALG-modus en probeer de volgende stappen: [1,2,3] [ENTER] [VAR] RXC [←] () [←] ANS , dit resulteert in:

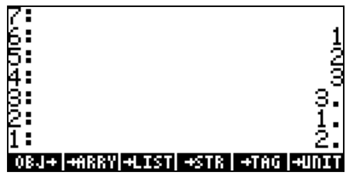


Een kolomvector omzetten in een rijvector

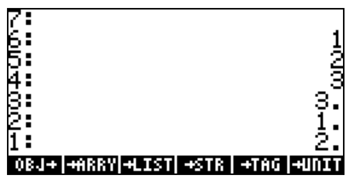
Om deze omzetting toe te lichten, voeren we de kolomvector [[1],[2],[3]] in in de RPN-modus. Voer daarna de volgende oefening uit om een rijvector in een kolomvector om te zetten:

1 - Maak gebruik van de functie OBJ→ om de kolomvector te ontleden

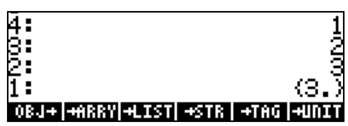
2 - Maak gebruik van de functie OBJ→ om de lijst op het geheugenniveau 1: te ontleden:



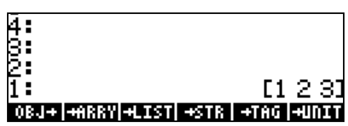
3- Druk op de wistoets ⌫ (ook bekend als de functie DROP) om het cijfer in het stapelgeheugen op niveau 1: te wissen.



4 - Maak gebruik van de functie →LIST om een lijst aan te maken



5 - Maak gebruik van de functie →ARRY om een rijvector aan te maken



Deze vijf stappen kunnen samengevoegd worden in een UserRPL-programma, dat als volgt wordt ingevoerd (nog steeds in de RPN-modus):

→ « » ← PRG TYPE OBJ→ OBJ→
← PRG STACK DROP ← PRG TYPE →LIST →ARRY ENTER
' ALPHA ALPHA C X R ENTER STO▸

Een nieuwe variabele, CXR, zal beschikbaar zijn in de labels van het softmenu, nadat u op VAR gedrukt heeft:

Druk op → CXR om het programma te zien in de variabele CXR:

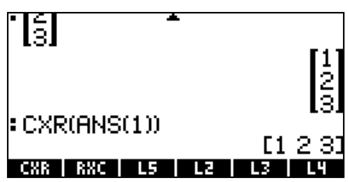
<< OBJ→ OBJ→ DROP →ARRY >>

Deze variabele, CXR, kan nu gebruikt worden om rechtstreeks een kolomvector om te zetten in een rijvector. In de RPN-modus, moet u de kolomvector invoeren en vervolgens op CXR drukken. Probeer bijvoorbeeld: [[1],[2],[3]] ENTER CXR.

Na de variabele CXR te hebben gedefinieerd, kunnen we deze gebruiken in de ALG-modus om een rijvector om te zetten in een kolomvector. Stel dus uw rekenmachine in op de ALG-modus en voer de volgende stappen uit:

[[1],[2],[3]] ENTER VAR CXR ← () ← ANS

die resulteert in:

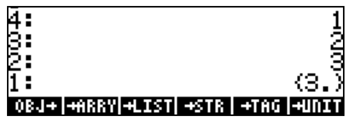


Een lijst in een vector omzetten

Om deze omzetting toe te lichten, voeren we de lijst {1,2,3} in in de RPN-modus. Volg daarna de volgende oefening om een lijst in een vector te veranderen:

1 - Gebruik de functie OBJ→ om de kolomvector te ontleden

2 - Voer een 1 in en gebruik de functie →LIST om een lijst samen te stellen in het stapelgeheugen op niveau 1:



3 - Gebruik de functie →ARRY om een vector samen te stellen

Deze drie stappen kunnen worden samengevoegd in een UserRPL-programma, dat als volgt wordt ingevoerd (in de RPN-modus):

→ « » ← PRG TYPE OBJ→ 1 →LIST →ARRY ENTER
' ALPHA ALPHA L X V ENTER STO▶

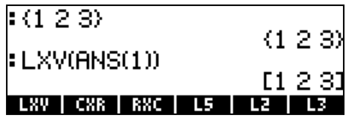
Een nieuwe variabele, LXV, zal beschikbaar worden in de labels van het softmenu door op de toets VAR te drukken:

Druk op → LXV om het programma te zien in de variabele LXV:

<< OBJ→ 1 →LIST →ARRY >>

Deze variabele, LXV, kan nu worden gebruikt om rechtstreeks een lijst in een vector om te zetten. In de RPN-modus moet u de lijst invoeren, en vervolgens op LXV drukken. Probeer bijvoorbeeld: {1,2,3} ENTER LXV.

Na de variabele LXV te hebben gedefinieerd, kunnen we ze gebruiken in de ALG modus om een lijst om te zetten in een vector. Bijgevolg, wijzig uw rekenmachine naar de ALG modus en probeer de volgende stappen: {1,2,3} ENTER VAR LXV ← () ← ANS , dit resulteert in:



Een vector (of een matrix) omzetten in een lijst

Om een vector in een lijst om te zetten, beschikt de rekenmachine over de functie AXL. U kunt deze functie vinden met de commandocatalogus:

→ _CAT ALPHA ALPHA A X L ALPHA OK

Als oefening past u de functie AXL toe op de vector [1,2,3] in de RPN-modus met [1,2,3] ENTER AXL. Het volgende beeldscherm geeft de toepassing weer van de functie AXL op dezelfde vector in de ALG-modus.

Hoofdstuk 10
Aannmaken en gebruiken van matrices

Dit hoofdstuk laat een aantal voorbeelden zien gericht op het maken van matrices in de rekenmachine en het gebruiken van matrixelementen.

Definities

Een matrix is niets meer dan een rechthoekige reeks van objecten (bijv., nummers, algebraïsch) met een aantal rijen en kolommen. Daarom heeft een matrix **A** met n rijen en m kolommen n×m elementen. Een generiek element van de matrix wordt voorgesteld door de geïndexeerde variabele a_{ij} die overeenkomt met rij i en kolom j. Door deze notatie kunnen we matrix **A** als **A** = $[a_{ij}]_{n\times m}$ schrijven. De volledige matrix is als volgt:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Een matrix is vierkant als m = n. De transpositie van een matrix wordt gevormd door rijen met kolommen te verwisselen en vice versa. De transpositie van matrix **A** is dus $\mathbf{A}^T = [(a^T)_{ij}]_{m\times n} = [a_{ji}]_{m\times n}$. De hoofddiagonaal van een vierkantmatrix is de verzameling elementen a_{ii}. Een identiteitsmatrix, $\mathbf{I}_{n\times n}$, is een vierkantmatrix waarvan de hoofddiagonale elementen allemaal gelijk zijn aan 1 en alle niet-diagonale elementen nul zijn. Een 3×3 identiteitsmatrix wordt als volgt geschreven:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Een identiteitsmatrix kan worden geschreven als $\mathbf{I}_{n\times n} = [\delta_{ij}]$, waarbij δ_{ij} bekend is als Kronecker's delta-functie en wordt gedefinieerd als:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & if\ i = j \\ 0, & if\ i \neq j \end{cases}.$$

Invoeren van matrices in het stapelgeheugen

In deze paragraaf stellen wij twee verschillende methoden voor om matrices in het stapelgeheugen van de rekenmachine in te voeren: (1) via de Matrixbewerker en (2) rechtstreeks invoeren van de matrix in het stapelgeheugen.

De Matrixbewerker gebruiken

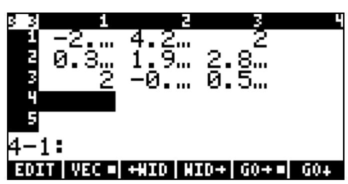
Zoals bij de vectoren, behandeld in Hoofdstuk 9, kunnen matrices via de Matrixbewerker in het stapelgeheugen worden ingevoerd. Bijvoorbeeld, om de matrix in te voeren:

$$\begin{bmatrix} -2.5 & 4.2 & 2.0 \\ 0.3 & 1.9 & 2.8 \\ 2 & -0.1 & 0.5 \end{bmatrix},$$

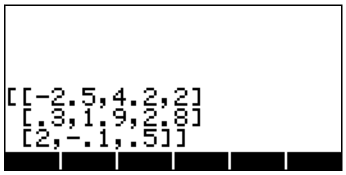
Activeer eerst de Matrixschrijver met de toetsencombinatie ← MTRW . Zorg ervoor dat de optie ⊞→■ is geselecteerd. Voer vervolgens de volgende toetsencombinaties in :

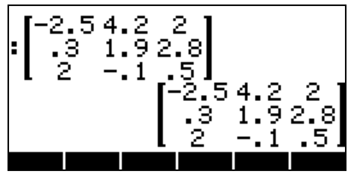
2 • 5 +/- ENTER 4 • 2 ENTER 2 ENTER ▼ ◄ ◄ ◄
• 3 ENTER 1 • 9 ENTER 2 • 8 ENTER
2 ENTER • 1 +/- ENTER • 5 ENTER

Het beeldscherm van de Matrixschrijver zou er nu als volgt uit kunnen zien:

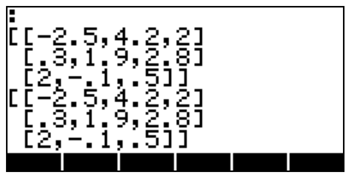


Druk nogmaals op ENTER om de matrix in het stapelgeheugen te plaatsen. Vervolgens verschijnt het stapelgeheugen in de ALG-modus voor en na het indrukken van de toets:





Als u de optie Textbook heeft geselecteerd (met MODE DISP en het aanvinken van ✓`Textbook`), zal de matrix eruitzien zoals hierboven. Anders ziet het beeldscherm er als volgt uit:



Het beeldscherm in de RPN-modus zal hier erg op lijken.

Opmerking: raadpleeg Hoofdstuk 9 voor meer informatie over het gebruik van de matrixschrijver.

De matrix rechtstreeks invoeren in het stapelgeheugen

Hetzelfde resultaat als hierboven kan worden verkregen door het volgende rechtstreeks in te voeren in het stapelgeheugen:

← [ ]
← [ ] 2 . 5 +/- → , 4 . 2 → , 2 ▶
→ ,
← [ ] . 3 → , 1 . 9 → , 2 . 8 ▶
→ ,
← [ ] 2 → , . 1 +/- → , . 5

Open de haken (← [ ]) om de matrix direct in het stapelgeheugen in te voeren en sluit de haken (← [ ]) achter elke rij van de matrix. De komma's (→ , .) en de haken tussen de rijen moeten de elementen van elke rij scheiden. (**Opmerking**: in de RPN-modus kunt u de binnenste haken weglaten nadat de eerste reeks is ingevoerd, dus in plaats van bijvoorbeeld [[1 2 3] [4 5 6] [7 8 9]], krijgt u [[1 2 3] 4 5 6 7 8 9].)

Bewaar deze matrix onder de naam A voor later gebruik. Gebruik STO▶ ALPHA A in de ALG- modus. Gebruik ' ALPHA A STO▶ in de RPN-modus.

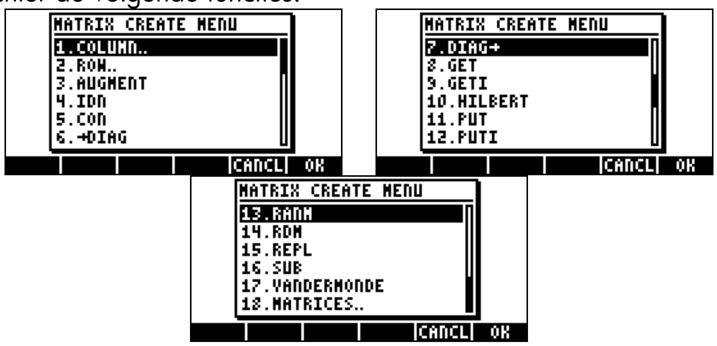
Aanmaken van matrices met de functies van de rekenmachine

Sommige matrices kunnen worden aangemaakt met de functies van de rekenmachine, toegankelijk via het submenu MTH/MATRIX/MAKE in het menu MTH (← MTH),

of via het menu MATRICES/CREATE toegankelijk via ← MATRICES :

Het submenu MTH/MATRIX/MAKE (voortaan het menu MAKE genoemd) bevat de volgende functies:

Het submenu MATRICES/CREATE (voortaan het menu CREATE genoemd) bevat echter de volgende functies:

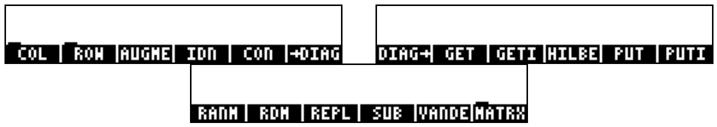


Zoals u bij het bestuderen van deze menu's (MAKE en CREATE) kunt zien, bevatten ze dezelfde functies GET, GETI, PUT, PUTI, SUB, REPL, RDM, RANM, HILBERT, VANDERMONDE, IDN, CON, →DIAG en DIAG→. Het menu CREATE bevat ook de submenu's COLUMN (kolom) en ROW (rij), die ook toegankelijk zijn in het menu MTH/MATRIX. Het menu MAKE bevat ook de functie SIZE, die niet in het menu CREATE staat. Beide menu's, MAKE en CREATE, bieden de gebruiker echter dezelfde functies. In de volgende voorbeelden ziet u hoe u via het matrixmenu MAKE bepaalde functies kunt activeren. Aan het einde van deze paragraaf staat een tabel met de benodigde toetsen om dezelfde functies met het menu CREATE te krijgen als systeemvlag 117 op SOFT menu's is ingesteld.

Als u die systeemvlag (vlag 117) op SOFT menu heeft ingesteld, is het menu MAKE beschikbaar via de toetsen: ← MTH MATRX MAKE

De beschikbare functies worden weergegeven als softmenutoetsen (gebruik NXT om naar de volgende functies te gaan):

Met systeemvlag 117 ingesteld op SOFT menu's zullen de functies van het menu CREATE, beschikbaar met ← MATRICES CREAT , er als volgt uitzien:

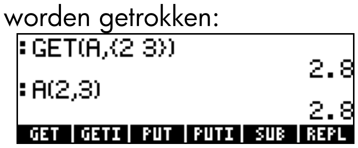


In de volgende paragrafen passen we de matrixfuncties in de menu's MAKE en CREATE toe.

De functies GET en PUT

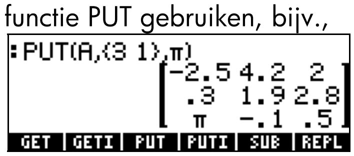
De functies GET, GETI, PUT, en PUTI werken op dezelfde wijze met matrices als met lijsten of vectoren, dat wil zeggen dat u de positie van het element dat u wilt met GET of PUT moet aangeven. Terwijl lijsten en vectoren echter maar één index verlangen om een element te identificeren, hebben matrices een lijst van twee indexen {rij, kolom} nodig om matrixelementen te identificeren. Voorbeelden van het gebruik van GET en PUT volgen.

Laten we de eerder bewaarde variabele A gebruiken om het gebruik van de functies GET en PUT te laten zien. Element a_{23} kan bijvoorbeeld in de ALG-modus van matrix A af worden getrokken:



U ziet dat we hetzelfde resultaat bereiken door A(2,3) en ENTER in te voeren. In de RPN-modus kunt u deze oefening uitvoeren met A ENTER 3 ENTER GET of A(2,3) ENTER.

Stel dat we de waarde 'π' in element a_{31} van de matrix willen plaatsen. Hiervoor kunnen we de functie PUT gebruiken, bijv.,

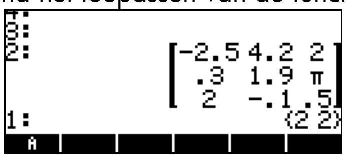
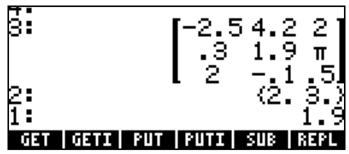


In de RPN-modus kunt u gebruik maken van: VAR A {3,1} ENTER ← π PUT. In de RPN-modus kunt u ook het volgende gebruiken:

π ' A(2,3) ENTER STO▶. Voer in om de inhoud van variabele A na deze bewerking te bekijken.

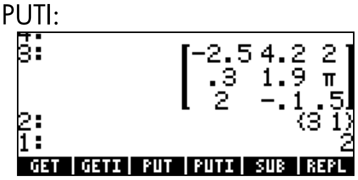
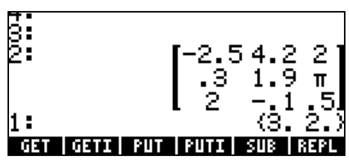
De functies GETI en PUTI

De functies PUTI en GETI worden gebruikt in UserRPL-programma's, omdat ze een index bijhouden van herhaalde toepassingen van de functies PUT en GET. De kolommen in de indexlijst in matrices veranderen eerst. Ter verduidelijking raden wij de volgende oefening aan in de RPN-modus: {2,2} ENTER GETI. Hieronder worden de schermen van het RPN-stapelgeheugen weergegeven voor en na het toepassen van de functie GETI:

U ziet dat het scherm klaar is voor een volgend gebruik van GETI of GET, door de kolomindex van de originele referentie met 1 te verhogen, (bijv. van {2,2} naar {2,3}), terwijl de afgetrokken waarde, namelijk A(2,2) = 1.9 op niveau 1 van het stapelgeheugen zichtbaar is.

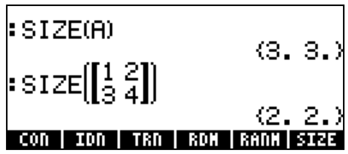
Stel dat we de waarde 2 in element {3 1} door middel van PUTI willen invoeren. Probeer de volgende toetsen in de RPN-modus:
{3 1} ENTER 2 ENTER PUTI. Hieronder worden de schermen van het RPN-stapelgeheugen weergegeven voor en na het toepassen van de functie PUTI:

De 2 was hier geplaatst in positie {3 1}, bijv., A(3,1) = 2 en de indexlijst werd met 1 (eerst de kolom) verhoogd, bijv. van {3,1} naar {3,2}. De matrix staat op niveau 2 en de toegenomen indexlijst staat op niveau 1.

De functie SIZE

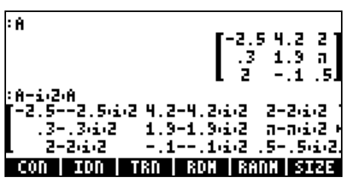
De functie SIZE geeft een lijst met het aantal rijen en kolommen van de matrix op niveau 1 van het stapelgeheugen. Het volgende beeldscherm laat een aantal toepassingen zien met de functie SIZE in de ALG-modus:

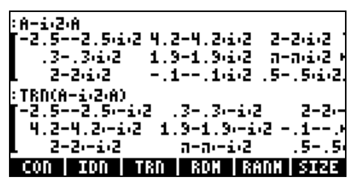


Deze oefeningen worden in de RPN-modus uitgevoerd met A SIZE, en [[1,2],[3,4]] ENTER SIZE .

De functie TRN

De functie TRN wordt gebruikt voor het verkrijgen van de transconjugaat van een matrix, bijv. de transpositie (TRAN) gevolgd door haar conjugaat complexe (CONJ). De volgende beeldschermen laten bijvoorbeeld de originele matrix in variabele A zien en haar transpositie in een klein lettertype (zie Hoofdstuk 1) zien:



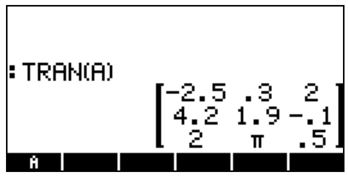


Als het argument een echte matrix is, zorgt TRN eenvoudigweg voor de transpositie van de echte matrix. Probeer, bijvoorbeeld, TRN(A), en vergelijk dit met TRAN(A).

In de RPN-modus wordt de transconjugaat of matrix **A** berekent met A TRN.

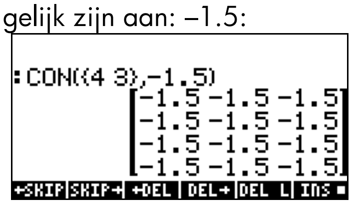
Opmerking: de rekenmachine bevat ook de functie TRAN in het submenu MATRICES/OPERATIONS:

Bijvoorbeeld, in de ALG-modus:



De functie CON

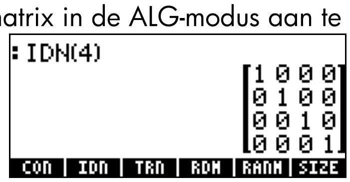
De functie neemt als argument een constante waarde en een lijst van twee elementen overeenkomstig het aantal rijen en kolommen van de aan te maken matrix. Defunctie CON maakt een matrix met constante elementen aan. In de ALG-modus maakt het volgende commando een 4×3 matrix aan met elementen die allemaal gelijk zijn aan: –1.5:



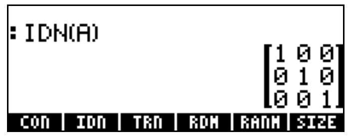
In de RPN-modus wordt dit uitgevoerd met {4,3} ENTER 1 . 5 +/- ENTER CON.

De functie IDN

De functie IDN (IdeNtity matrix) maakt een identiteitsmatrix aan naar gelang de opmaak. Een identiteitsmatrix moet een vierkantmatrix zijn, daarom is er maar één waarde vereist voor de volledige beschrijving. Voer het volgende in om een 4×4 identiteitsmatrix in de ALG-modus aan te maken:



U kunt ook een bestaande vierkantmatrix gebruiken als het argument van functie IDN, bijv.



De uiteindelijke identiteitsmatrix zal dezelfde dimensies als de argumentmatrix hebben. Een poging om een rechthoekmatrix (bijv. niet-vierkant) als het argument van IDN te gebruiken, zal een foutmelding geven.

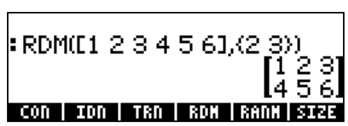
De twee bovenstaande oefeningen worden in de RPN-modus gemaakt met: 4 ENTER IDN en A IDN.

De functie RDM

De functie RDM (Re-DiMensioning) wordt gebruikt voor het herschrijven van vectoren en matrices als matrices en vectoren. De invoer naar de functie bestaat uit de originele vector of matrix gevolgd door een lijst met één getal bij het omzetten naar een vector of twee getallen bij het omzetten naar een matrix. In het eerste geval symboliseert het getal de dimensie van de vector, in het laatste geval het aantal rijen en kolommen van de matrix. De volgende voorbeelden laten het gebruik van de functie RDM zien:

Een vector opnieuw in een matrix dimensioneren

Het volgende voorbeeld laat zien hoe een vector van 6 elementen opnieuw in een matrix van 2 rijen en 3 kolommen kan worden gedimensioneerd in de ALG-modus:

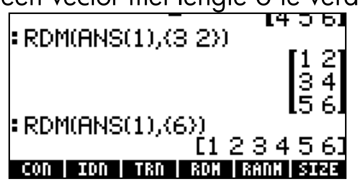


In de RPN-modus voeren we het volgende in [1,2,3,4,5,6] ENTER {2,3} ENTER RDM om de hierboven weergegeven matrix te genereren.

Een vector opnieuw in een andere matrix dimensioneren
We gebruiken de hierboven gemaakte matrix nu in de ALG-modus en we dimensioneren het opnieuw in een matrix van 3 rijen en 2 kolommen:

In de RPN-modus gebruiken we: `{3,2}` ENTER `RDM`.

Een matrix opnieuw in een vector dimensioneren
Om een matrix opnieuw in een vector te dimensioneren, gebruiken we als argumenten de matrix gevolgd door een lijst met het aantal elementen in de matrix. Voer bijvoorbeeld in de ALG-modus het volgende in om de matrix uit het vorige voorbeeld in een vector met lengte 6 te veranderen:

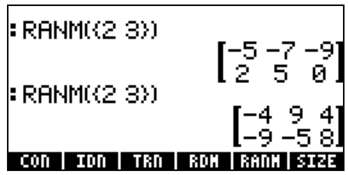


In de RPN-modus gaan we ervan uit dat de matrix in het stapelgeheugen staat en voer dan het volgende in: `{6}` ENTER `RDM`.

Opmerking: de functie RDM biedt een meer directe en efficiëntere manier om lijsten in schema's te veranderen en vice versa dan beschreven in Hoofdstuk 9.

De functie RANM

De functie RANM (RANdom matrix) zal een matrix met willekeurig hele elementen aanmaken volgens een gegeven lijst met het aantal rijen en kolommen (bijv. de dimensies van de matrix). In de ALG-modus worden bijvoorbeeld twee verschillende 2×3 matrices met willekeurige elementen aangemaakt met hetzelfde commando, namelijk: `RANM({2,3})`:

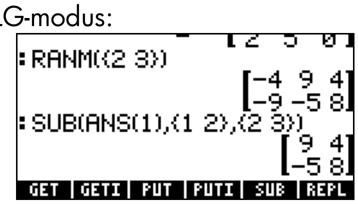


Gebruik in de RPN-modus: {2,3} ENTER RANM.

Het is bijna vanzelfsprekend dat de resultaten in uw rekenmachine verschillend zullen zijn dan de hierboven genoemde. De aangemaakte willekeurige getallen zijn hele getallen die gelijkmatig over de reeks [-10,10], verdeeld zullen worden, d.w.z. alle 21 getallen hebben dezelfde kans om te worden geselecteerd. Defunctie RANM is handig voor het aanmaken van matrices van elke lengte om matrixbewerkingen van matrixfuncties te verduidelijken.

De functie SUB

De functie SUB trekt een submatrix van een bestaande matrix af mits de begin- en eindpositie van de submatrix wordt aangegeven. Als we bijvoorbeeld de elementen a_{12}, a_{13}, a_{22} en a_{23} van het laatste resultaat willen aftrekken als een 2×2 submatrix in de ALG-modus:

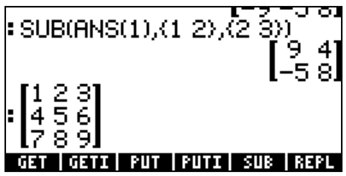


Voer het volgende in wanneer we ervan uitgaan dat de originele 2×3 matrix in de RPN-mode al in het stapelgeheugen staat: {1,2} ENTER {2,3} ENTER SUB.

De functie REPL

De functie REPL verplaatst of voegt een submatrix toe aan een grotere. De invoer voor deze functie is de te vervangen matrix, de plaats waar de vervanging begint en de matrix die ingevoegd moet worden. Voer, uitgaande van de matrix uit het voorgaande voorbeeld de volgende matrix in:

`[[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]`. Het onderstaande linkerbeeldscherm laat de nieuwe matrix in de ALG-modus zien, voordat `ENTER` is ingedrukt. Het rechterbeeldscherm laat de toepassing van de functie RPL zien om de matrix te vervangen in `ANS(2)`, de 2×2 matrix in de 3×3 matrix die zich nu in `ANS(1)` bevindt, beginnende op positie `{2,2}`:

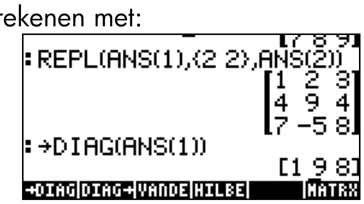


Wanneer we in de RPN-modus werken en ervan uitgaande dat de 2×2 matrix al in het stapelgeheugen staat, gaan we als volgt te werk:

`[[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]` `ENTER` `▶` (deze laatste toets wisselt de inhoud op niveaus 1 en 2 van het stapelgeheugen) `{1,2}` `ENTER` `▶` (een andere wissel van niveaus 1 en 2) `REPL`.

De functie →DIAG

De functie →DIAG neemt de hoofddiagonaal van een vierkantmatrix van dimensies *n*×*n* en maakt een vector van dimensie *n* met de elementen van de hoofddiagonaal. Voorbeeld: we kunnen de hoofddiagonaal voor de matrix uit de vorige oefening berekenen met:



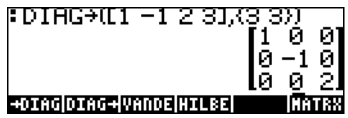
Met de 3×3 matrix in het stapelgeheugen in de RPN-modus moeten we gewoon de functie →`DIAG` activeren om hetzelfde resultaat als hierboven te krijgen.

De functie DIAG→

De functie DIAG→ neemt een vector en een lijst met matrixdimensies {rijen, kolommen} en maakt een diagonaalmatrix waarbij de hoofddiagonaal vervangen wordt door de juiste vectorelementen. Voorbeeld: het commando

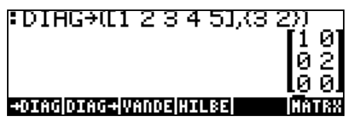
DIAG→([1,-1,2,3],{3,3})

produceert een diagonaalmatrix met de eerste 3 elementen van het vectorargument:



In de RPN-modus kunnen we [1,-1,2,3] ENTER {3,3} ENTER DIAG→ gebruiken om hetzelfde resultaat te krijgen als hierboven.

Een ander voorbeeld van de toepassing van de functie DIAG→ in de ALG-modus:



Voer [1,2,3,4,5] ENTER {3,2} ENTER DIAG→ in in de ALG-modus.

In dit geval moest een 3×2 matrix worden aangemaakt met zo veel mogelijk elementen van de vector [1,2,3,4,5] als hoofddiagonale elementen. Bij een rechthoekmatrix moet de hoofddiagonaal beginnen in positie (1,1) en naar positie (2,2), (3,3), enz. verplaatst worden totdat het aantal rijen of het aantal kolommen uitgeput zijn. In dit geval was het aantal kolommen (2) voor het aantal rijen (3) uitgeput, dus de hoofddiagonaal bevatte enkel de elementen in posities (1,1) en (2,2). Alleen de eerste twee elementen van de vector waren dus nodig om de hoofddiagonaal te vormen.

De functie VANDERMONDE

De functie VANDERMONDE maakt de Vandermondematrix aan met dimensie *n gebaseerd* op een bestaande lijst van invoergegevens. De dimensie *n* is natuurlijk de lengte van de lijst. Als de invoerlijst uit objecten $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ *bestaat*, wordt een Vandermondematrix in de rekenmachine weergegeven als een matrix met de volgende elementen:

$$
\begin{bmatrix}
1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\
1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\
1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}
\end{bmatrix}
$$

Gebruik bijvoorbeeld het volgende commando in de ALG-modus voor de lijst {1,2,3,4}:

Gebruik in de RPN-modus: `{1,2,3,4}` ENTER `VANDERMONDE`.

De functie HILBERT

De functie HILBERT maakt de Hilbertmatrix aan overeenkomstig een dimensie n. De $n \times n$ Hilbertmatrix is per definitie $\mathbf{H}_n = [h_{jk}]_{n \times n}$, dus:

$$
h_{jk} = \frac{1}{j+k-1}
$$

De Hilbertmatrix is van toepassing op numerieke curvenaanpassingen volgens de methode van lineaire vierkanten.

Een programma voor het maken van een matrix uit een aantal lijsten

In deze paragraaf geven wij uitleg over een aantal UserRPL-programma's voor het maken van een matrix uit een aantal objectlijsten. De lijsten kunnen bestaan uit kolommen van de matrix (programma CRMC) of rijen van de matrix (programma CRMR). De programma's worden ingevoerd met de rekenmachine in de RPN-modus en de instructies voor de toetsen met systeemvlag 117 ingesteld op SOFT menu's. Deze paragraaf is bedoeld als oefening voor het invoeren van programmeerfuncties in de rekenmachine. U vindt de programma's hieronder. Links staan de toetsen die nodig zijn om de stappen van het programma uit te voeren en rechts staan de karakters die u na invoer in uw beeldscherm ziet staan. We beginnen met de stappen die nodig zijn om het programma CRMC te activeren.

Lijsten symboliseren kolommen van de matrix

Het programma CRMC stelt u in staat een p×n matrix (bijv., p rijen, n kolommen) samen te voegen uit n lijsten met p elementen. Om het programma te maken, type:

De toetsencombinatie:	Geeft:
↱ « »	«
↰ PRG STACK DUP	DUP
↱ → SPC ALPHA ↰ N	→ n
↱ « »	<<
1 ↰ PRG STACK SWAP	1 SWAP
↰ PRG BRCH FOR FOR	FOR
ALPHA ↰ J	j
↰ PRG TYPE OBJ→	OBJ→
→ARRY	→ARRY
↰ PRG BRCH IF IF	IF
ALPHA ↰ J SPC	j
ALPHA ↰ N	n
↰ PRG TEST <	<
↰ PRG BRCH IF THEN	THEN
ALPHA ↰ J SPC 1 +	j 1 +
↰ PRG STACK NXT ROLL	ROLL
↰ PRG BRCH IF END	END
↰ PRG BRCH FOR NEXT	NEXT
↰ PRG BRCH IF IF	IF
ALPHA ↰ N SPC 1	n 1
↰ PRG TEST >	>
↰ PRG BRCH IF THEN	THEN
1 SPC	1
ALPHA ↰ N SPC 1 −	n 1 -
↰ PRG BRCH FOR FOR	FOR

ALPHA ← J SPC	j
ALPHA ← J SPC 1 +	j 1 +
← PRG STACK NXT ROLL	ROLL
← PRG BRCH FOR NEXT	NEXT
← PRG BRCH IF END	END
ALPHA ← N SPC	n
← MTH MATRX COL COL→	COL→
ENTER	Programma staat op niveau 1
Zo slaat u het programma op:	' ALPHA ALPHA C R M C ALPHA STO▶

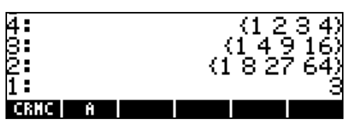
Opmerking: als u dit programma in uw HOME directory bewaart, zal het vanuit elke andere subdirectory toegankelijk zijn.

voer om de inhoud van het programma te bekijken het volgende in VAR → CRMC. De programmalijst is de volgende:

```
« DUP → n « 1 SWAP FOR j OBJ→ →ARRY IF j n < THEN j 1 +
 ROLL END NEXT IF n 1 > THEN 1 n 1 - FOR j j 1 + ROLL
 NEXT END n COL→ » »
```

Voor het gebruik van dit programma in de RPN-modus voert u de n lijsten in in de gewenste volgorde in kolommen van de matrix in, voert u de n waarde in en vervolgens CRMC. Probeer de volgende oefening als voorbeeld:
{1,2,3,4} ENTER {1,4,9,16} ENTER {1,8,27,64} ENTER 3 ENTER CRMC

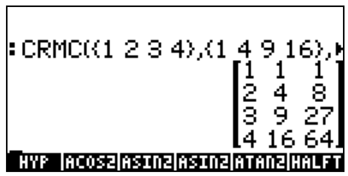
De volgende beeldschermen laten het RPN-stapelgeheugen zien voor en na het gebruik van programma CRMC:



Voer CRMC in gevolgd door haken (← ()) voor het gebruik van het programma in de ALG-modus. Voer tussen haakjes de gegevenslijsten met de kolommen van de matrix gescheiden door komma's en tenslotte een komma en het aantal kolommen. Het commando zou er als volgt uit moeten zien:

```
CRMC({1,2,3,4}, {1,4,9,16}, {1,8,27,64}, 3)
```

Het ALG-beeldscherm met de uitvoering van programma CRMC is de volgende:



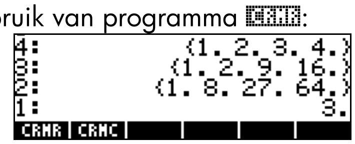
Lijsten symboliseren rijen van de matrix

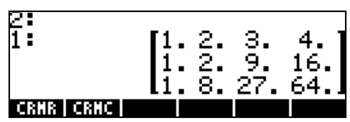
Het vorige programma kan makkelijk worden aangepast voor het maken van een matrix als de invoerlijsten de rijen van de uiteindelijke matrix zullen worden. De enige uit te voeren verandering is het veranderen van COL→ in ROW→ in de programmalijst. Voer voor deze verandering het volgende in:

↱ CRMC	Plaatst programma CRMC in tapelgeheugen
▼ ↱ ▼ ▲ ◀ ◀ ◀	Naar het einde van het programma
⌫ ⌫ ⌫	Verwijdert COL
ALPHA ALPHA R O W ALPHA ENTER	Voert ROW in, activeert het programma

Om het programma op te slaan: ' ALPHA ALPHA C R M R ALPHA STO▶

{1,2,3,4} ENTER {1,4,9,16} ENTER {1,8,27,64} ENTER 3 ENTER CRMR
De volgende beeldschermen laten het RPN-stapelgeheugen zien voor en na het gebruik van programma CRMR:





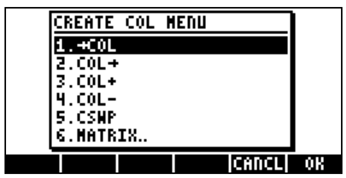
Deze programma's kunnen nuttig zijn voor statistische toepassingen; vooral voor het maken van de statistische matrix ΣDAT. Voorbeelden van het gebruik van deze programma's vindt u in de volgende hoofdstukken.

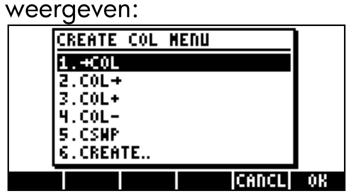
Bewerken van matrices via kolommen

De rekenmachine bevat een menu met functies voor het bewerken van matrices door te werken in de kolommen. Dit menu is toegankelijk via het menu MTH/MATRIX/COL.: (← MTH) zoals in de onderstaande afbeelding met systeemvlag 117 ingesteld op CHOOSE boxes:

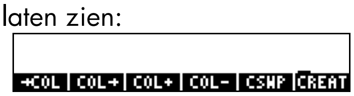
of via het submenu MATRICES/CREATE/COLUMN:

Beide manieren zullen dezelfde functies weergeven:





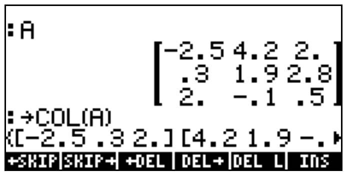
Wanneer systeemvlag 117 ingesteld is op SOFT menu's, is het menu COL beschikbaar via ← MTH MATRX MAKE COL of via ← MATRICES CREAT COL .
Beide manieren zullen dezelfde functies laten zien:

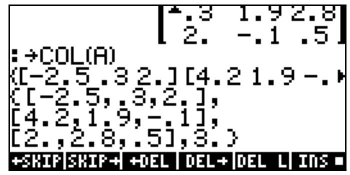


De werking van deze functies vindt u hieronder.

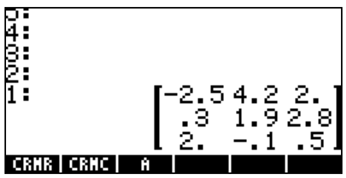
De functie →COL

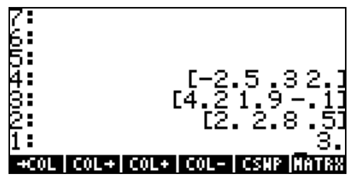
De functie →COL neemt een matrix als argument en ontleedt deze in vectoren overeenkomstig de kolommen. Een toepassing van de functie →COL in de ALG-modus vindt u hieronder. De gebruikte matrix is al eerder opgeslagen onder de naam variabele A. De matrix wordt afgebeeld in het linkerbeeldscherm. De rechterafbeelding laat de matrix ontleed in kolommen zien. Om het volledige resultaat te bekijken, moet u de regeleditor gebruiken (activeren met ▽).





In de RPN-modus moet u de matrix in het stapelgeheugen plaatsen en in de functie →COL activeren met bijv. →COL. De onderstaande afbeelding laat het RPN-stapelgeheugen zien voor en na het toepassen van de functie →COL.



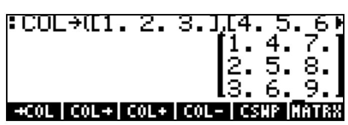


Met dit resultaat staat na ontleding de eerste kolom op het hoogste niveau van het stapelgeheugen en op niveau 1 van het stapelgeheugen staat het aantal kolommen van de originele matrix. De matrix blijft bij de ontleding niet bestaan d.w.z. het is niet meer toegankelijk in het stapelgeheugen.

De functie COL→

De functie COL→ geeft het tegenovergestelde effect van functie →COL, bijv.voor n vectoren van dezelfde lengte en het aantal n, maakt de functie COL→ een matrix aan door de invoervectoren als kolommen van de uiteindelijke matrix in te voeren. Hier volgt een voorbeeld in de ALG-mode. Het gebruikte commando is:

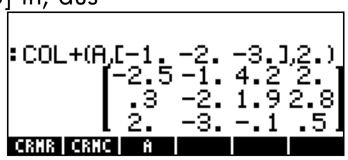
```
COL→([1,2,3],[4,5,6],[7,8,9],3)
```



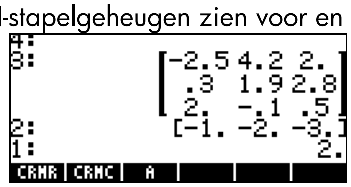
Plaats in de RPN-modus de n vectoren op niveaus n+1, n, n-1,…,2, van het stapelgeheugen en het aantal n elementen op niveau 1 van het stapelgeheugen. Op deze manier plaatst de functie COL→ de vectoren als kolommen in de uiteindelijke matrix. De volgende afbeelding laat het RPN-stapelgeheugen zien voor en na het gebruik van de functie COL→.

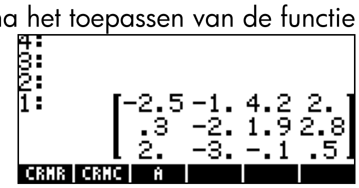
De functie COL+

De functie COL+ neemt als argument een matrix, een vector van dezelfde lengte als het aantal rijen in de matrix en een heel getal n dat de locatie van een kolom aangeeft. De functie COL+ voegt de vector in kolom n van de matrix in. Voorbeeld: in de ALG-modus voegen we de tweede kolom in matrix A met de vector [-1,-2,-3] in, dus



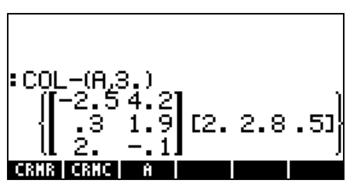
In de RPN-modus voert u eerst de matrix in, daarna de vector en het kolomaantal en als laatste de functie COL+. De onderstaande afbeelding laat het RPN-stapelgeheugen zien voor en na het toepassen van de functie COL+.



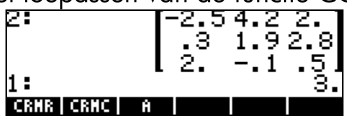


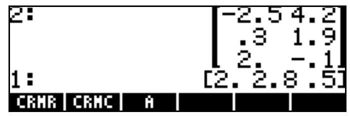
De functie COL-

De functie COL- neemt als argument een matrix en een heel getal dat de positie van een kolom in de matrix vertegenwoordigt. De functie plaatst de originele matrix min een kolom en de verwijderde kolom voorgesteld als een vector terug. Hier volgt een voorbeeld in de ALG-modus met de in A opgeslagen matrix:



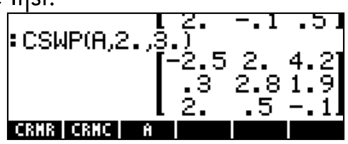
Plaats in de RPN-modus eerst de matrix in het stapelgeheugen, voer daarna het getal in dat de positie van een kolom vertegenwoordigt en als laatste de functie COL-. De volgende afbeelding laat het RPN-stapelgeheugen zien voor en na het toepassen van de functie COL-.



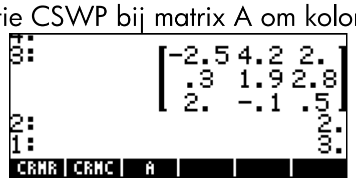


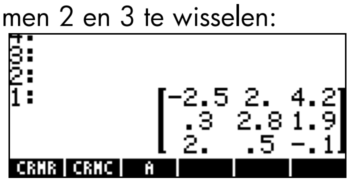
De functie CSWP

De functie CSWP (Colom SWaP) neemt als argumenten twee indexen, bijv. i en j (twee verschillende kolommen in een matrix) en een matrix en maakt een nieuwe matrix waarbij kolommen i en j verwisseld zijn. Het volgende voorbeeld in de ALG-modus laat een toepassing van deze functie zien. We gebruiken de matrix opgeslagen in variabele A voor het voorbeeld. Deze matrix staat boven in de lijst.



In de RPN-modus wisselt de functie CSWP de kolommen van een matrix om in de lijst op niveau 3 van het stapelgeheugen, waarvan de indexen in de lijst op niveaus 1 en 2 van het stapelgeheugen staan. Voorbeeld: de volgende afbeelding laat het RPN-stapelgeheugen zien voor en na het toepassen van de functie CSWP bij matrix A om kolommen 2 en 3 te wisselen:

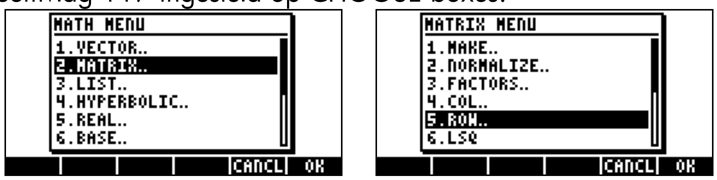




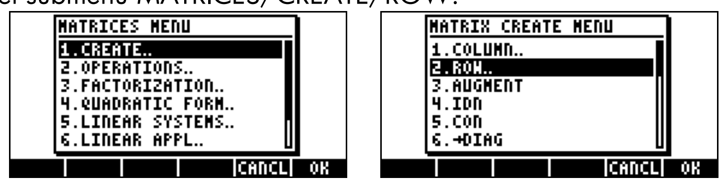
Zoals u kunt zien zijn de kolommen verwisseld die oorspronkelijk de posities 2 en 3 innamen. Het verwisselen van kolommen en van rijen (zie hieronder) wordt vaak gebruikt bij het oplossen van lineaire vergelijkingsstelsels met matrices. In een volgend hoofdstuk worden deze bewerkingen behandeld.

Bewerken van matrices via rijen

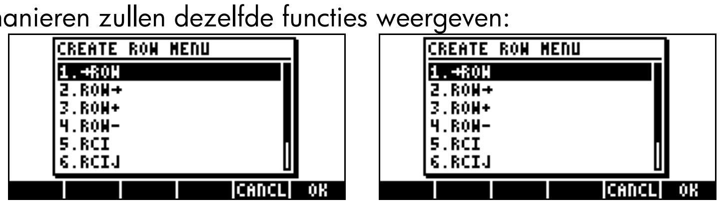
De rekenmachine bevat een menu met functies voor het bewerken van matrices door te werken in de rijen. Dit menu is toegankelijk via het menu MTH/MATRIX/ROW.. met (↰ MTH) zoals in de anderstaande afbeelding met systeemvlag 117 ingesteld op CHOOSE boxes:



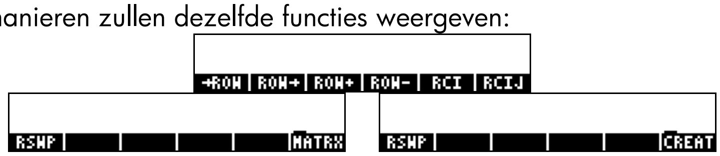
of via het submenu MATRICES/CREATE/ROW:



Beide manieren zullen dezelfde functies weergeven:



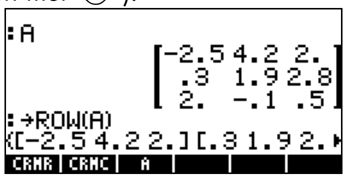
Wanneer systeemvlag 117 ingesteld is op SOFT menus is het menu ROW toegankelijk via ↰ MTH MATRX MAKE ROW of via ↰ MATRICES CREAT ROW. Beide manieren zullen dezelfde functies weergeven:

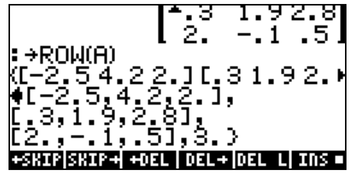


De werking van deze functies vindt u hieronder.

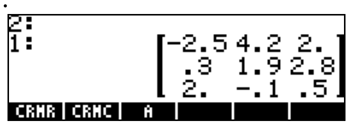
De functie →ROW

De functie →ROW neemt een matrix als argument en ontleedt deze in vectoren overeenkomstig de kolommen. Een toepassing van de functie →ROW in de ALG-modus staat hieronder. De gebruikte matrix is al eerder opgeslagen onder de naam variabele A. De matrix wordt afgebeeld in het linkerbeeldscherm. Het rechterbeeldscherm laat de matrix ontleed in kolommen zien. Om het volledige resultaat te zien, gebruikt u de regeleditor (activeren met ▽).





In de RPN-modus moet u de matrix in het stapelgeheugen plaatsen en de functie →ROW activeren met →ROW. De onderstaande afbeelding laat het RPN-stapelgeheugen zien voor en na het toepassen van de functie →ROW.

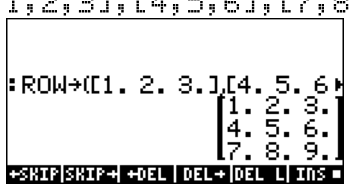


Met dit resultaat staat na ontleding de eerste rij op het hoogste niveau van het stapelgeheugen en op niveau 1 van het stapelgeheugen staat het aantal rijen van de originele matrix. De matrix blijft na ontleding niet bestaan, d.w.z. het is niet meer toegankelijk in het stapelgeheugen.

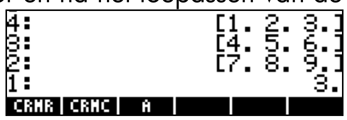
De functie ROW→

De functie ROW→ heeft de tegenovergestelde werking als de functie →ROW, d.w.z. n vectoren van dezelfde lengte en het aantal n, de functie ROW→ maakt een matrix aan door de invoervectoren als rijen van de uiteindelijke matrix in te voeren. Hier volgt een voorbeeld in de ALG-modus. Het gebruikte commando is:

```
ROW→([1,2,3],[4,5,6],[7,8,9],3)
```

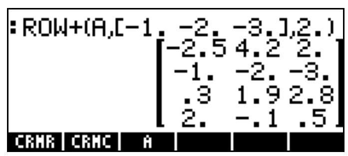


Plaats in de RPN-modus de n vectoren op niveaus n+1, n, n-1,…,2 van het stapelgeheugen en het aantal n op niveau 1 van het stapelgeheugen. Op deze manier plaatst de functie ROW→ de vectoren als kolommen in de uiteindelijke matrix. De volgende afbeelding laat het RPN-stapelgeheugen zien voor en na het toepassen van de functie ROW→.

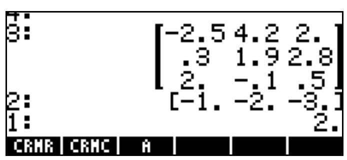


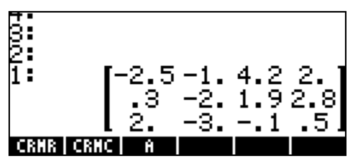
De functie ROW+

De functie ROW+ neemt als argument een matrix, een vector van dezelfde lengte als het aantal rijen in de matrix en een heel getal n dat de positie van een rij aangeeft. De functie ROW+ voegt de vector in rij n van de matrix in. Voorbeeld: in de ALG-modus voegen we de tweede rij in matrix A met de vector [-1,-2,-3] in, dus



In de RPN-modus voert u eerst de matrix in, daarna de vector en het rijenaantal en als laatste de functie ROW+. De onderstaande afbeelding laat het RPN-stapelgeheugen zien voor en na het toepassen van de functie ROW+.

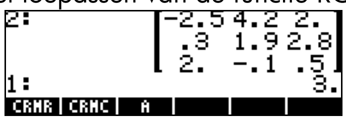


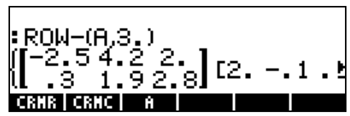


De functie ROW-

De functie ROW- neemt als argument een matrix en een heel getal dat de positie van een rij in de matrix vertegenwoordigt. De functie plaatst de originele matrix min een rij en de verwijderde rij voorgesteld als een vector terug. Hier volgt een voorbeeld in de ALG-modus met de in A opgeslagen matrix:

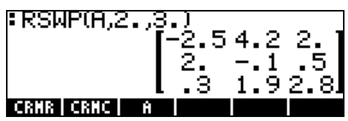
Plaats in de RPN-modus eerst de matrix in het stapelgeheugen, voer daarna het getal in dat de positie van een rij vertegenwoordigt en als laatste de functie ROW-. De volgende afbeelding laat het RPN-stapelgeheugen zien voor en na het toepassen van de functie ROW -.



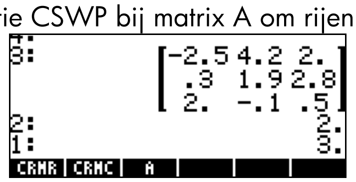


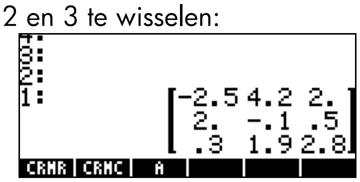
De functie RSWP

De functie RSWP (Row SWaP) neemt als argumenten twee indexen, bijv. i en j (twee verschillende rijen in een matrix) en een matrix en maakt een nieuwe matrix aan waarbij rijen i en j zijn verwisseld. Het volgende voorbeeld in de ALG-modus laat een toepassing van deze functie zien. We gebruiken de matrix opgeslagen in variabele A voor het voorbeeld. Deze matrix staat boven in de lijst.



In de RPN-modus wisselt de functie CSWP de rijen van een matrix in de lijst op niveau 3 van het stapelgeheugen om, waarvan de indexen in de lijst op niveaus 1 en 2 van het stapelgeheugen staan. Voorbeeld: de volgende afbeelding laat het RPN-stapelgeheugen zien voor en na het toepassen van de functie CSWP bij matrix A om rijen 2 en 3 te wisselen:

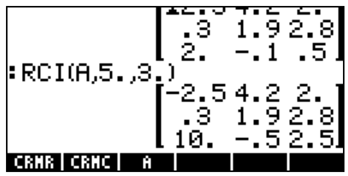




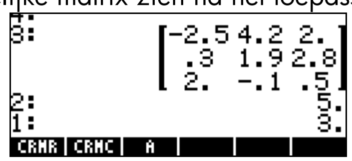
Zoals u kunt zien zijn de kolommen verwisseld die oorspronkelijk de posities 2 en 3 innamen.

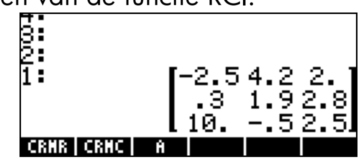
De functie RCI

De functie RCI stelt u in staat *Rij* I te vermenigvuldigen met een *C*onstante waarde en de uiteindelijke rij op dezelfde positie te vervangen. Het volgende voorbeeld in de ALG-modus neemt de in A opgeslagen matrix en vermenigvuldigt de constante waarde 5 in rij nummer 3, waardoor de rij met dit product vervangen wordt.



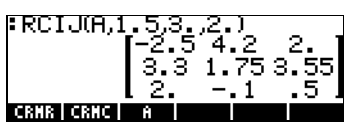
Dezelfde oefening in de RPN-mode staat in de volgende afbeelding. Het linkerbeeldscherm laat de matrixinstelling, de factor en het rijnummer op niveaus 3, 2 en 1 in het stapelgeheugen zien. Het rechterbeeldscherm laat de uiteindelijke matrix zien na het toepassen van de functie RCI.



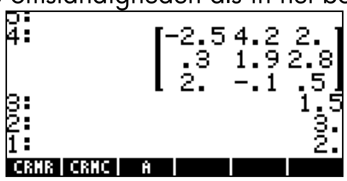


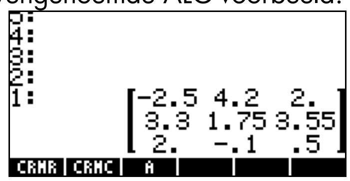
De functie RCIJ

De functie RCIJ stelt u in staat "Rij I te nemen en deze te vermenigvuldigen met een constante C en die vermenigvuldigde rij vervolgens op te tellen bij rij J, waardoor rij J wordt vervangen door de uiteindelijke som". Deze manier van rijbewerking wordt vaak gebruikt in het Gaussisch- of Gauss-Jordan-eliminatieproces (in een volgend hoofdstuk wordt hier meer over verteld). De argumenten van de functie zijn: (1) de matrix, (2) de constante waarde, (3) de met de constante te vermenigvuldigende rij in (2) en (4) de door de uiteindelijke som te vervangen rij zoals hierboven beschreven. Voorbeeld: we nemen de in variabele A opgeslagen matrix en vermenigvuldigen kolom 3 met 1.5 en tellen het bij kolom 2 op. Het volgende voorbeeld staat in de ALG-modus:



Voer in de RPN-modus eerst de matrix in gevolgd door de constante waarde, vervolgens door de met de constante waarde te vermenigvuldigende rij en tenslotte de rij die vervangen moet worden. De volgende afbeelding laat het RPN-stapelgeheugen zien voor en na het toepassen van de functie RCIJ onder dezelfde omstandigheden als in het bovengenoemde ALG-voorbeeld:





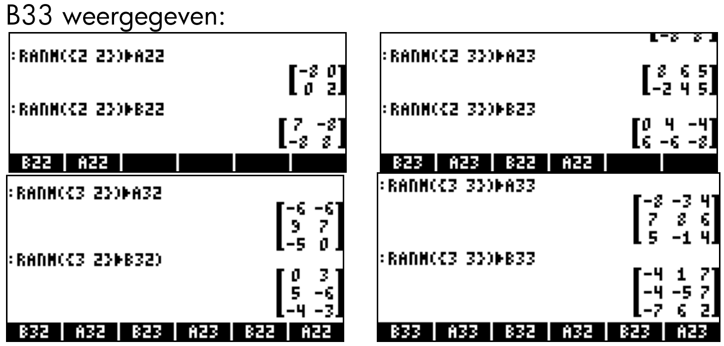
Hoofdstuk 11
Matrixbewerkingen en lineaire algebra

In Hoofdstuk 10 hebben we een matrix geïntroduceerd en een aantal functies laten zien om matrices in te voeren, aan te maken of te bewerken. In dit Hoofdstuk laten we voorbeelden van matrixbewerkingen zien en toepassingen op problemen van lineaire algebra

Bewerkingen met matrices

Matrices kunnen net als andere wiskundige grootheden worden opgeteld en afgetrokken. Ze kunnen met een scalair of onderling worden vermenigvuldigd. Een belangrijke bewerking voor lineaire algebratoepassingen is de inversie van een matrix. Details van deze bewerkingen ziet u hieronder.

Om de bewerkingen te illustreren, zullen we een aantal matrices aanmaken die we in variabelen zullen opslaan. De algemene benaming voor de matrices is Aij en Bij waarbij *i* voor het aantal rijen staat en *j* voor het aantal kolommen van de matrices. De te gebruiken matrices zijn gegenereerd met de functie RANM (willekeurige matrices). Als u deze oefening in uw rekenmachine probeert, krijgt u andere matrices dan die u hieronder ziet, tenzij u ze precies opslaat in de rekenmachine, zoals hieronder. Hier worden de in de ALG-modus aangemaakte matrices A22, B22, A23, B23, A32, B32, A33 en B33 weergegeven:



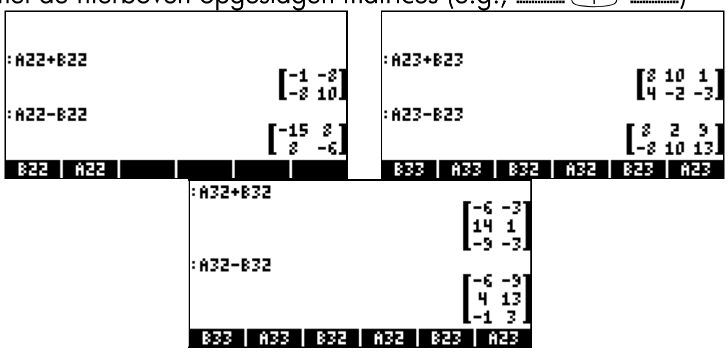
In de RPN-modus moet u de volgende stappen volgen:

{2,2} ENTER RANM 'A22' STO▶ {2,2} ENTER RANM 'B22' STO▶
{2,3} ENTER RANM 'A23' STO▶ {2,3} ENTER RANM 'B23' STO▶
{3,2} ENTER RANM 'A32' STO▶ {3,2} ENTER RANM 'B32' STO▶

{3,3} `ENTER` RANM 'A33' `STO▶`   {3,3} `ENTER` RANM 'B33' `STO▶`

Optellen en aftrekken

Neem enkele matrices als **A** = $[a_{ij}]_{m\times n}$ en **B** = $[b_{ij}]_{m\times n}$ als voorbeeld. Optellen en aftrekken van deze twee matrices is alleen mogelijk als ze hetzelfde aantal rijen en kolommen hebben. De resulterende matrix **C** = **A** ± **B** = $[c_{ij}]_{m\times n}$ heeft de elementen $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$. Hieronder ziet u enkele voorbeelden in de ALG-modus met de hierboven opgeslagen matrices (e.g., `A22` `+` `B22`)



In de RPN-modus moet u de volgende stappen volgen:

A22 `ENTER` B22 `ENTER` `+`   A22 `ENTER` B22 `ENTER` `−`
A23 `ENTER` B23 `ENTER` `+`   A23 `ENTER` B23 `ENTER` `−`
A32 `ENTER` B32 `ENTER` `+`   A32 `ENTER` B32 `ENTER` `−`

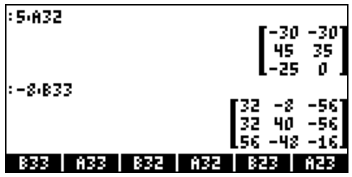
Het omzetten van de ALG-voorbeelden naar de RPN-modus is eenvoudig, zoals u hieronder kunt zien. De overige voorbeelden van matrixbewerkingen zullen alleen in de ALG-modus uitgevoerd worden.

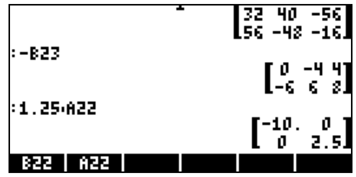
Vermenigvuldiging

Er zijn verschillende vermenigvuldigingsbewerkingen met matrices. Ze worden hieronder beschreven.

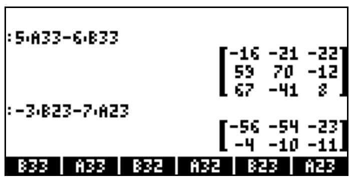
Vermenigvuldiging met een scalair

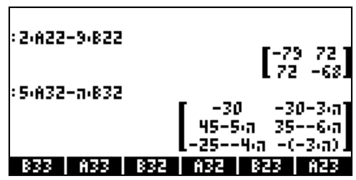
Vermenigvuldiging van de matrix **A** = $[a_{ij}]_{m\times n}$ met een scalair k leidt tot de matrix **C** = k**A** = $[c_{ij}]_{m\times n}$ = $[ka_{ij}]_{m\times n}$. De negatieve waarde van een matrix in het bijzonder wordt omschreven door de bewerking -**A** =(-1)**A** = $[-a_{ij}]_{m\times n}$. Enkele voorbeelden van vermenigvuldiging van een matrix met een scalair worden hieronder getoond.



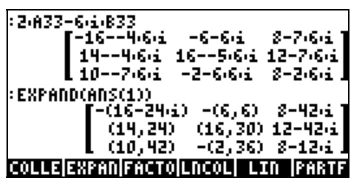


Door optellen en aftrekken te combineren met vermenigvuldiging met een scalair kunnen we combinaties vormen van matrices van dezelfde lengte, bijv.



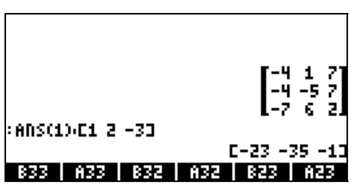


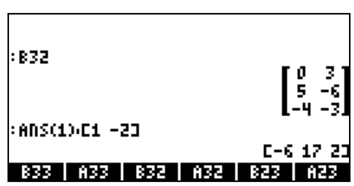
In een lineaire combinatie van matrices kunnen we een matrix vermenigvuldigen met een imaginair getal om een matrix van complexe getallen te krijgen, bijv.



Matrix-vectorvermenigvuldiging

Matrix-vectorvermenigvuldiging is alleen mogelijk indien het aantal kolommen van de matrix gelijk is aan de lengte van de vector. Deze bewerking volgt de regels van matrixvermenigvuldiging zoals wordt uiteengezet in het volgende deel. Hier volgen enkele voorbeelden van matrix-vectorvermenigvuldiging:





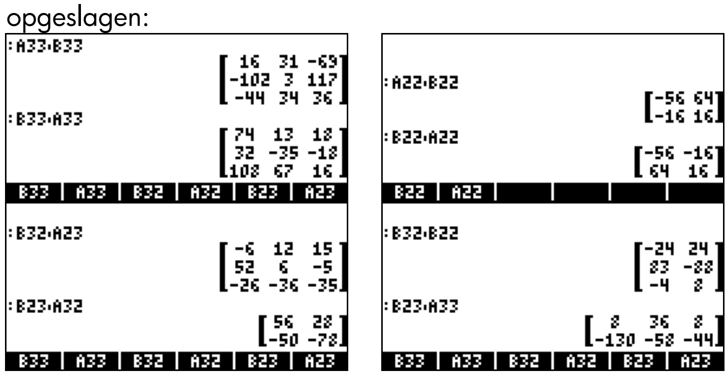
Anderzijds is vector-matrixvermenigvuldiging niet gedefinieerd. Deze vermenigvuldiging kan echter wel uitgevoerd worden als een speciaal geval van matrixvermenigvuldiging, zoals hieronder gedefinieerd.

Matrixvermenigvuldiging

Matrixvermenigvuldiging is gedefinieerd als $\mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times p}\cdot\mathbf{B}_{p\times n}$, waarbij $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times p}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{p\times n}$ en $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m\times n}$. Matrixvermenigvuldiging is alleen mogelijk als het aantal kolommen in de eerste operand gelijk is aan het aantal rijen in de tweede operand. De algemene term in het product c_{ij} wordt gedefinieerd als

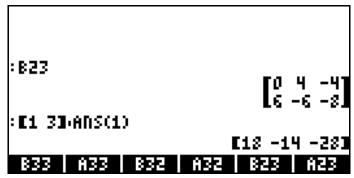
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj},\ for\ i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n.$$

Dit komt op hetzelfde neer als het stellen dat het element in de i-ste rij en de j-ste kolom van het product **C**, het resultaat is van een term-voor-term vermenigvuldiging van de i-ste rij van **A** met de j-ste kolom van **B**, en het bij elkaar optellen van de producten. Matrixvermenigvuldiging is niet commutatief, d.w.z. in het algemeen $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$. Verder kan het zijn dat een van de vermenigvuldigingen zelfs niet bestaat. De volgende beeldschermen tonen het resultaat van vermenigvuldigingen van de matrices die we eerder hebben opgeslagen:



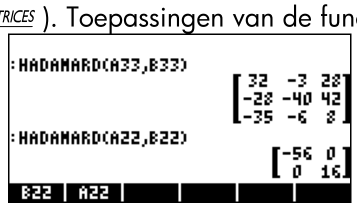
De matrix-vectorvermenigvuldiging, zoals geïntroduceerd in de vorige paragraaf, kan gezien worden als het product van een matrix m×n met een matrix n×1 (d.w.z. een kolomvector) hetgeen als resultaat een m×1 matrix (d.w.z. nog een vector) geeft. Bekijk de voorbeelden uit de vorige paragraaf om deze bewering te verifiëren. De vectoren die zijn gedefinieerd in hoofdstuk 9 zijn matrixvermenigvuldiging dus eigenlijk kolomvectoren.

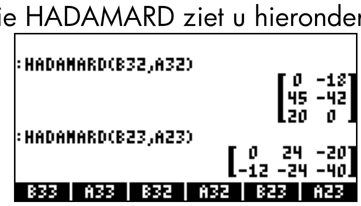
Het product van een vector met een matrix is mogelijk als de vector een rijvector is, d.w.z. een 1×m matrix, die vermenigvuldigd met een matrix m×n een 1xn matrix (nog een rijvector) geeft. U dient dubbele haakjes te gebruiken zodat de rekenmachine een rijvector herkent:



Term-voor-term vermenigvuldiging

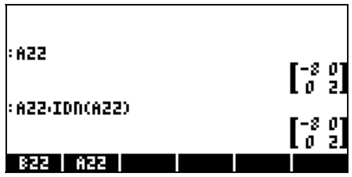
Term voor term vermenigvuldiging van twee matrices van dezelfde afmetingen is mogelijk met de functie HADAMARD. Vanzelfsprekend is het resultaat een matrix van dezelfde afmetingen. Deze functie is beschikbaar via de functiecatalogus (CAT), of via het submenu MATRICES/OPERATIONS (MATRICES). Toepassingen van de functie HADAMARD ziet u hieronder:





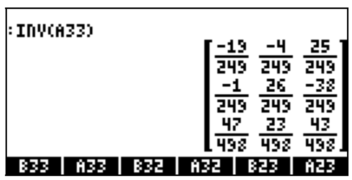
De identiteitsmatrix

In Hoofdstuk 9 introduceerden we de identiteitsmatrix als de matrix **I** = $[\delta_{ij}]_{n\times n}$, waarbij δ_{ij} de Kronecker's delta functie is. Identiteitsmatrices kunnen worden verkregen door de in Hoofdstuk 9 beschreven functie IDN te gebruiken. De identiteitsmatrix heeft de eigenschap dat **A·I** = **I·A** = **A**. Om deze eigenschap te verifiëren, geven we de volgende voorbeelden met de matrices die we eerder hebben opgeslagen:

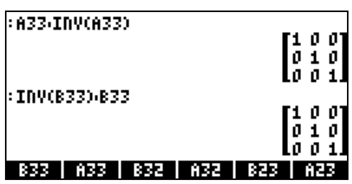


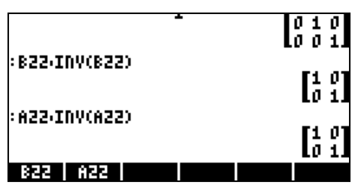
De inverse matrix

De inverse van een vierkante matrix **A** is de matrix $\mathbf{A}^{-1}$ zodat $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$, waarbij **I** de identiteitsmatrix is met dezelfde afmetingen als **A**. U verkrijgt de inverse van een matrix met de inverse functie INV (d.w.z. de toets 1/x) in de rekenmachine. Voorbeelden van inverse van enkele eerder opgeslagen matrices ziet u hieronder:



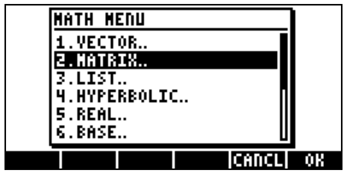
Om de eigenschappen van de inverse matrix te verifiëren, geven we de volgende vermenigvuldigingen:





Een matrix karakteriseren (Het matrixmenu NORM)

Het matrixmenu NORM (NORMALIZE) is toegankelijk met de toetsencombinatie ← MTH (systeemvlag 117 ingesteld op CHOOSE boxes (keuzevensters)):



Dit menu bevat de volgende functies:

Deze functies worden hieronder beschreven. Omdat veel van deze functies concepten uit de matrixtheorie zoals singuliere waarden, rangorde, enz. gebruiken, zullen we samen met de beschrijving van de functies een korte beschrijvingen van deze concepten geven.

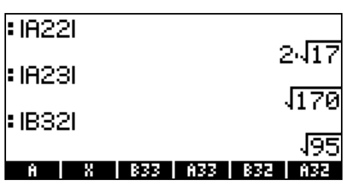
De functie ABS

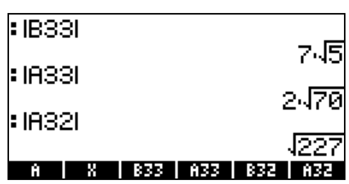
De functie ABS berekent wat de Frobenius-norm van een matrix wordt genoemd. Voor een matrix **A** = $[a_{ij}]_{m\times n}$ wordt de Frobenius-norm van de matrix gedefinieerd als

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2}$$

Als de matrix in kwestie een rijvector of een kolomvector is dan is de Frobeniusnorm, ||**A**||$_F$, simpelweg de grootheid van de vector. De functie ABS is direct via het toetsenbord beschikbaar als ↰ ABS .

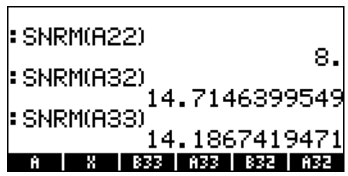
Probeer de volgende oefeningen in de ALG-modus (gebruik de eerder voor matrixbewerkingen opgeslagen matrices):





De functie SNRM

De functie SNRM berekent de Spectrale NoRM van een matrix, gedefinieerd als de grootste singuliere waarde van de matrix, ook bekend als de Euclidische norm van de matrix. Bijvoorbeeld:



Singuliere waardeontbinding

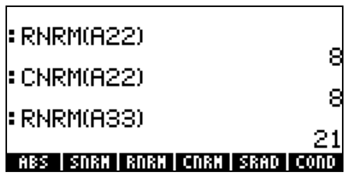
Om de werking van de functie SNRM, te begrijpen, is het nodig het begrip van matrixontbinding te introduceren. Matrixontbinding houdt de bepaling van twee of meer matrices in die de originele matrix geven wanneer ze in een bepaalde volgorde (en met misschien wat matrixinversie en transpositie toegevoegd) vermenigvuldigd worden. De Singuliere Waarde Ontbinding (SWO) is zo dat een rechthoekige matrix $\mathbf{A}_{m\times n}$ wordt geschreven als $\mathbf{A}_{m\times n}$ = $\mathbf{U}_{m\times m} \cdot \mathbf{S}_{m\times n} \cdot \mathbf{V}^{T}_{n\times n}$,

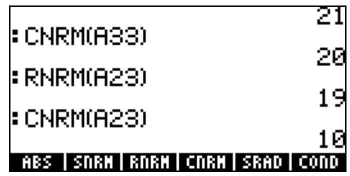
waarbij **U** en V orthogonale matrices zijn en **S** een diagonale matrix. De diagonale elementen van **S** worden de <u>singuliere waarden</u> van A genoemd en zijn gewoonlijk zodanig geordend dat $s_i \geq s_{i+1}$, met i = 1, 2, …, n-1. De kolommen [$\mathbf{u}_j$] van **U** en [$\mathbf{v}_j$] van **V** zijn de bijbehorende singuliere vectoren. (<u>Orthogonale matrices</u> zijn zodanig dat $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{I}$. Een <u>diagonale matrix</u> heeft alleen langs de hoofddiagonaal elementen die niet gelijk zijn aan nul)

De rangorde van een matrix kan bepaald worden aan de hand van de SWO door het aantal niet-singuliere waarden te tellen. Voorbeelden van SWO zullen worden gegeven in een volgende paragraaf.

De functies RNRM en CNRM

De functie RNRM geeft de RijNoRM van een matrix en de functie CNRM geeft de kolomnorm (Column NoRM) van een matrix. Voorbeelden:

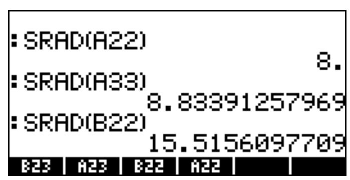




Rijnorm en kolomnorm van een matrix
De rijnorm van een matrix wordt berekend door de sommen te nemen van de absolute waarden van alle elementen in iedere rij en dan het maximum van deze sommen te selecteren. De kolomnorm van een matrix wordt berekend door de sommen te nemen van de absolute waarden van alle elementen in iedere kolom en dan het maximum van deze sommen te selecteren.

De functie SRAD

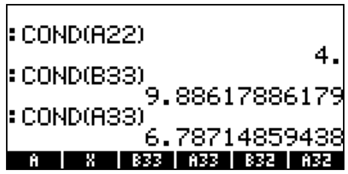
De functie SRAD bepaalt de Spectrale RADius van een matrix, gedefinieerd als de grootste van de absolute waarden van de eigenwaarden. Bijvoorbeeld:



Definitie van eigenwaarden en eigenvectoren van een matrix
De eigenwaarden van een vierkante matrix zijn het resultaat van de matrixvergelijking $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \lambda\cdot\mathbf{x}$. De waarden van λ die voldoen aan de vergelijking zijn de eigenwaarden van de matrix **A**. De waarden van x die het resultaat zijn van de vergelijking voor iedere waarde van l zijn de eigenvectoren van de matrix. Verdere informatie over het berekenen van eigenwaarden en eigenvectoren vindt u verderop in dit hoofdstuk.

De functie COND

De functie COND bepaalt het conditiegetal van een matrix. Voorbeeld:

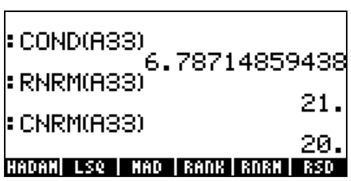


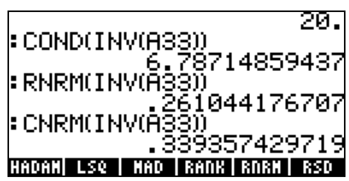
Conditiegetal van een matrix

Het conditiegetal van een vierkante niet-singuliere matrix wordt gedefinieerd als het product van de matrixnorm maal de norm van de inverse matrix, d.w.z. cond($\mathbf{A}$) = $||\mathbf{A}||\times||\mathbf{A}^{-1}||$. We kiezen als matrixnorm $||\mathbf{A}||$, het maximum van de rijnorm (RNRM) en kolomnorm (CNRM) en de norm van de inverse matrix $||\mathbf{A}^{-1}||$, wordt geselecteerd als het minimum van de rijnorm en kolomnorm. Dus, $||\mathbf{A}||$ = max(RNRM($\mathbf{A}$),CNRM($\mathbf{A}$)) en $||\mathbf{A}^{-1}||$ = min(RNRM($\mathbf{A}^{-1}$), CNRM($\mathbf{A}^{-1}$)).

Het conditiegetal van een singuliere matrix is oneindig. Het conditiegetal van een niet-singuliere matrix is een maat van hoe dichtbij de matrix bij singulier-zijn ligt. Hoe groter de waarde van het conditiegetal, hoe dichter de matrix bij singulier-zijn is. (Voor een <u>singuliere matrix</u> bestaat geen inverse matrix.)

Probeer de volgende oefening voor het conditiegetal op matrix A33. Het conditiegetal is COND(A33), rijnorm en kolomnorm voor A33 worden links getoond. De bijbehorende getallen voor de inverse matrix (INVA33), worden rechts getoond:

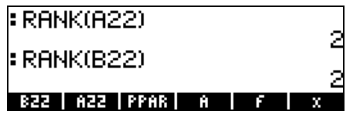




Aangezien RNRM(A33) > CNRM(A33), nemen we ||A33|| = RNRM(A33) = 21. Aangezien ook CNRM(INV(A33)) < RNRM(INV(A33)), nemen we ||INV(A33)|| = CNRM(INV(A33)) = 0.261044... Het conditiegetal wordt dus ook berekend als CNRM(A33)*CNRM(INV(A33)) = COND(A33) = 6.7871485…

De functie RANK

De functie RANK berekent de rangorde van een vierkante matrix. Probeer de volgende voorbeelden:

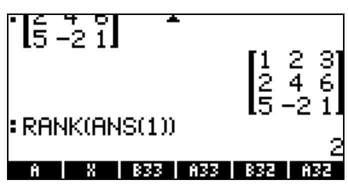


De rangorde van een matrix
De rangorde van een vierkante matrix is het maximale aantal lineaire onafhankelijke rijen of kolommen dat de matrix bevat. Stel dat je een vierkante matrix $\mathbf{A}_{n\times n}$ schrijft als $\mathbf{A} = [\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \ldots\ \mathbf{c}_n]$, waarbij $\mathbf{c}_i$ (i = 1, 2, …, n) vectoren zijn die de kolommen van de matrix **A**, vertegenwoordigen, dan kan elk van deze kolommen, laten we zeggen $\mathbf{c}_k$, geschreven worden als

$$\mathbf{c}_k = \sum_{j\neq k,\, j\in\{1,2,\ldots,n\}} d_j \cdot \mathbf{c}_j ,$$

waarbij de d_j constante waarden zijn, zeggen we dat $\mathbf{c}_k$ lineair afhankelijk is van de kolommen in de optelling. (Merk op dat de waarden van j elke waarde in de verzameling {1, 2, …, n}, omvat in elke combinatie zolang j≠k). Als de bovenstaande uitdrukking voor geen enkele kolomvector geschreven kan worden, zeggen we dat de kolommen lineair onafhankelijk zijn. Een vergelijkbare definitie voor de lineaire onafhankelijkheid van rijen kan ontwikkeld worden door de matrix te schrijven als een kolom van rijvectoren. Indien we dus zien dat rangorde (**A**) = n, dan heeft de matrix een inverse en is het een niet-singuliere matrix. Indien echter rangorde (**A**) < n, dan is de matrix singulier en bestaat er geen inverse.

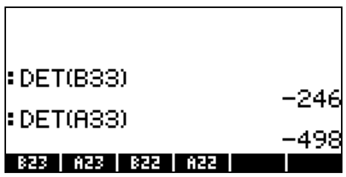
Probeer bijvoorbeeld de rangorde te vinden voor de matrix:

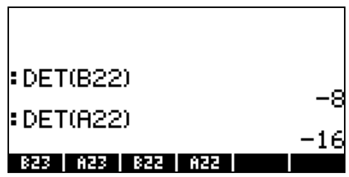


U zult zien dat de rangorde 2 is. Dat komt omdat de tweede rij [2,4,6] gelijk is aan de eerste rij [1,2,3] met 2 vermenigvuldigd, dus is rij twee lineair afhankelijk van rij 1 en het maximum aantal lineaire onafhankelijke rijen is 2. U kunt controleren dat het maximum aantal lineaire onafhankelijke kolommen 3 is. Aangezien de rang het maximum aantal lineair onafhankelijke rijen of kolommen is, is het in dit geval 2.

De functie DET

De functie DET berekent de determinant van een vierkante matrix. Bijvoorbeelden:



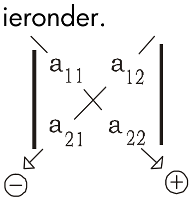


De determinant van een matrix

De determinant van een 2x2 of een 3x3 matrix wordt weergegeven in dezelfde ordening van elementen van de matrices, maar dan ingesloten tussen verticale lijnen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

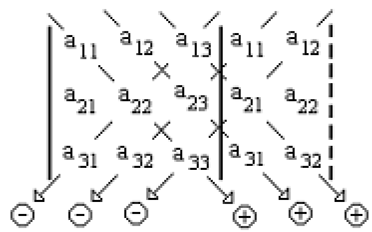
Een 2x2 determinant wordt berekend door de elementen in de diagonaal te vermenigvuldigen en deze producten begeleid door het plus- of minteken op te tellen zoals in het diagram hieronder.



De 2x2 determinant is dus

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Een 3x3 determinant wordt berekend door de determinant *aan te vullen*, een bewerking die bestaat uit het kopiëren van de eerste twee kolommen van de determinant en ze rechts van kolom 3 te plaatsen zoals in het diagram hieronder. Het diagram laat tevens de te vermenigvuldigen elementen zien met het corresponderende teken dat bij het product hoort. Dit is uitgevoerd op een vergelijkbare manier zoals eerder is gedaan voor een 2×2 determinant. Na vermenigvuldiging worden de resultaten bij elkaar opgeteld om de determinant te verkrijgen.



Voor vierkante matrices van een hogere orde kunnen determinanten berekend worden door kleinere ordedeterminanten, co-factoren genoemd, te gebruiken. Het algemene idee is een determinant van een n×n matrix (wordt ook naar verwezen als n×n determinant) "uit" te breiden naar een som van de co-factoren, die (n-1)×(n-1) determinanten zijn, vermenigvuldigd met de elementen van een enkele rij of kolom met afwisselende plus- en mintekens. Deze "uitbreiding" wordt dan naar het volgende (lagere) niveau gebracht met co-factoren van de orde (n-2)×(n-2), enz. tot we alleen een lange som van 2×2 determinanten over houden. De 2×2 determinanten zijn dan berekend met de hierboven getoonde methode.

De methode van determinantberekening door co-factoruitbreiding is erg inefficiënt in de zin dat het een aantal bewerkingen met zich meebrengt dat snel groeit met het groter worden van de afmetingen van de determinant. Een efficiëntere methode, die in numerieke toepassingen de voorkeur geniet, is een resultaat te gebruiken uit een Gauss' eliminatie. De methode van Gauss' eliminatie wordt gebruikt om stelsels van lineaire vergelijkingen op te lossen. Meer informatie van deze methode worden verderop in dit hoofdstuk behandeld.

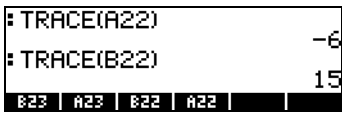
Om de determinant van een matrix A aan te duiden, schrijven we det(A). De determinant van een singuliere matrix is gelijk aan nul.

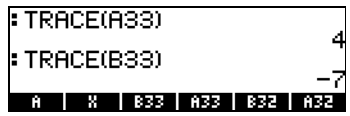
De functie TRACE

De functie TRACE berekent de diagonaalsom van een vierkante matrix, gedefinieerd als de som van de elementen in de hoofddiagonaal,oftewel

$$tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \ .$$

Voorbeelden:





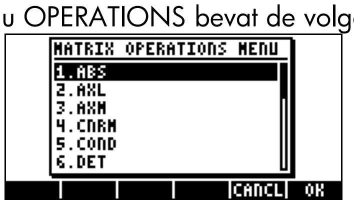
De functie TRAN

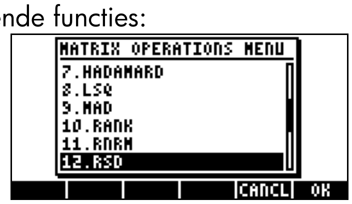
De functie TRAN geeft de getransponeerde van een reële of de toegevoegde getransponeerde van een complexe matrix. TRAN is gelijk aan TRN. De werking van de functie TRN is behandeld in Hoofdstuk 10.

Aanvullende matrixbewerkingen (Het matrixmenu OPER)

Het matrixmenu OPER (OPERATIONS) is toegankelijk met de toetsencombinatie MATRICES (systeemvlag 117 ingesteld op CHOOSE boxes):

Het menu OPERATIONS bevat de volgende functies:

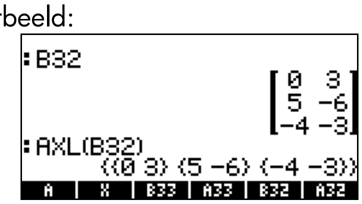


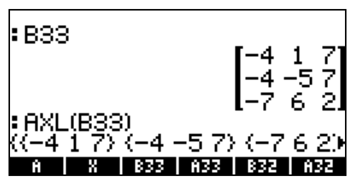


De functies ABS, CNRM, COND, DET, RANK, RNRM, SNRM, TRACE en TRAN- vindt u ook in het menu MTH/MATRIX/NORM (het onderwerp van de vorige paragraaf). De functie SIZE werd behandeld in hoofdstuk 10. De functie HADAMARD werd eerder behandeld in de context van matrixvermenigvuldiging. De functies LSQ , MAD en RSD hebben betrekking op de oplossing van stelsels van lineaire vergelijkingen en zullen worden behandeld verderop in dit hoofdstuk. In deze paragraaf behandelen we alleen de functies AXL en AXM

De functie AXL

De functie AXL converteert een rij (matrix) in een reeks en vice-versa. Bijvoorbeeld:

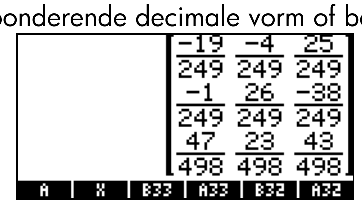


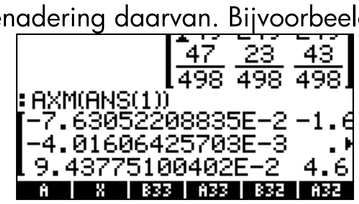


Opmerking: deze laatste bewerking is vergelijkbaar met de bewerking van het CRMR-programma dat is behandeld in Hoofdstuk 10.

De AXM

De functie AXM converteert een rij met gehele of gebroken elementen in de corresponderende decimale vorm of benadering daarvan. Bijvoorbeeld:





Functie LCXM

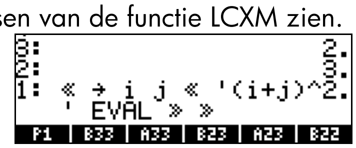
Functie LCXM kan worden gebruikt om matrices te genereren zodat het element aij een functie is van i en j. De invoer voor deze functie bestaat uit twee hele getallen, n en m die het aantal rijen en kolommen van de te genereren matrix weergeven en een programma dat i en j als invoer neemt. De getallen n en m en het programma bezetten respectievelijk de niveaus 3, 2 en 1 van het stapelgeheugen. De dunctie LCXM is toegankelijk via de commandocatalogus ⇨ _CAT_ .

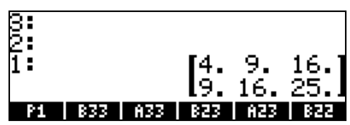
Om bijvoorbeeld een 2´3 matrix te genereren waarvan de elementen zijn gegeven als $a_{ij} = (i+j)^2$, sla dan eerst het volgende programma op in de variabele P1 in de RPN-modus. Zo ziet het RPN-stapelgeheugen eruit voordat u op STO▸ drukt.

Om de functie LCXM uit te voeren, moet u in dit geval het volgende invoeren:

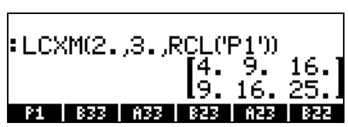
2 ENTER 3 ENTER ⇨ CAT LCXM ENTER

De volgende afbeelding laat het RPN-stapelgeheugen voor en na het toepassen van de functie LCXM zien.





In de ALG-modus kan dit voorbeeld verkregen worden door:



Het programma P1moet nog steeds zijn aangemaakt en opgeslagen in de RPN-modus.

Oplossing van lineaire stelsels

Een stelsel van *n* lineaire vergelijkingen in *m* variabelen kan geschreven worden als

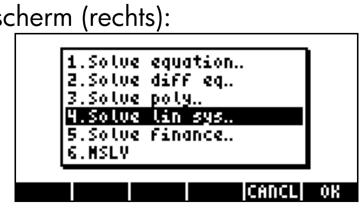
$$\begin{array}{l}
a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \ldots + a_{1,m-1}\cdot x_{m-1} + a_{1,m}\cdot x_m = b_1,\\
a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \ldots + a_{2,m-1}\cdot x_{m-1} + a_{2,m}\cdot x_m = b_2,\\
a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 + \ldots + a_{3,m-1}\cdot x_{m-1} + a_{3,m}\cdot x_m = b_3,\\
\quad . \qquad . \qquad . \qquad \ldots \qquad . \qquad . \qquad .\\
\quad . \qquad . \qquad . \qquad \ldots \qquad . \qquad . \qquad .\\
a_{n-1,1}\cdot x_1 + a_{n-1,2}\cdot x_2 + a_{n-1,3}\cdot x_3 + \ldots + a_{n-1,m-1}\cdot x_{m-1} + a_{n-1,m}\cdot x_m = b_{n-1},\\
a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + a_{n3}\cdot x_3 + \ldots + a_{n,m-1}\cdot x_{m-1} + a_{n,m}\cdot x_m = b_n.
\end{array}$$

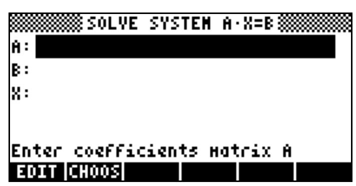
Dit stelsel van lineaire vergelijkingen kan geschreven worden als een matrixvergelijking $A_{n\times m}\cdot x_{m\times 1} = b_{n\times 1}$, indien we de volgende matrices en vectoren definiëren:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}_{m\times 1}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

De numerieke solver gebruiken voor lineaire stelsels

Er zijn vele manieren om een stelsel van lineaire vergelijkingen met de rekenmachine op te lossen. Een mogelijkheid is met de numerieke solver ⇒ NUM.SLV . Selecteer optie *4. Solve lin sys..* in het hieronder (links) getoonde scherm van de numerieke solver en druk op OK. U krijgt dan het volgende invoerscherm (rechts):





Voer matrix **A**, in de vorm [[a_{11}, a_{12}, …], … […]] in het **A**-veld in om het lineaire stelsel **A**·**x** = **b** op te lossen. Voer tevens de vector **b** in in het B-veld.

Wanneer het X-veld is geselecteerd, druk dan op [SOLVE]. De oplossingsvector x zal worden getoond in het X:-veld indien er een oplossing beschikbaar is. De oplossing wordt tevens gekopieerd naar niveau 1 van het stapelgeheugen. Een aantal voorbeelden volgen.

Een vierkant stelsel

Het stelsel van lineaire vergelijkingen

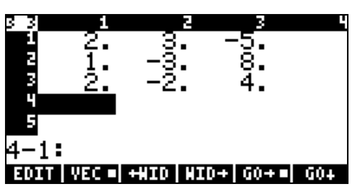
$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 13,$$
$$x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -13,$$
$$2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -6,$$

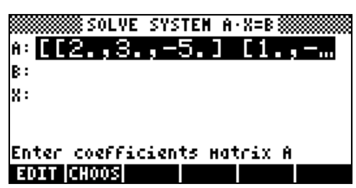
kan worden geschreven als de matrixvergelijking **A**·**x** = **b**, indien

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -3 & 8 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad and \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 13 \\ -13 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

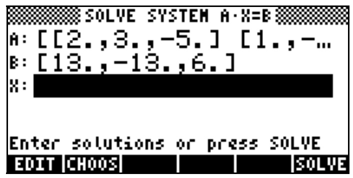
Dit stelsel heeft hetzelfde aantal vergelijkingen als onbekenden en er zal naar worden verwezen als een vierkant stelsel. Over het algemeen zou er een enkele oplossing voor het stelsel moeten zijn. De oplossing is het kruispunt van de drie vlakken in het coördinatenstelsel (x_1, x_2, x_3) weergegeven door de drie vergelijkingen.

Om matrix **A** in te voeren, kunt u de Matrixschrijver activeren terwijl het A:-veld is geselecteerd. Het volgende scherm toont het gebruik van de Matrixschrijver voor het invoeren van matrix **A** en het invoerscherm voor de numerieke solver na het invoeren van matrix **A** (druk op ENTER in de Matrixschrijver):

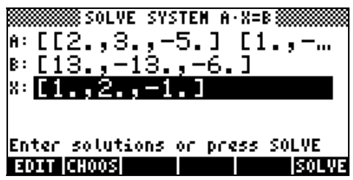




Druk op ▼ om het B:-veld te selecteren. De vector b kan worden ingevoerd als een rijvector met een enkele set haakjes, bijv. [13,-13,-6] OK.
Na het invoeren van matrix A en vector b en met het X:-veld geselecteerd kunnen we op SOLVE drukken om te proberen dit stelsel van vergelijkingen op te lossen:

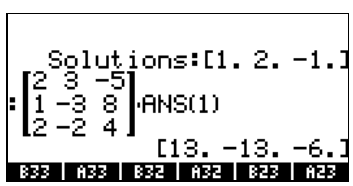


De volgende oplossing werd gevonden.



Druk op ENTER om de oplossing in het stapelgeheugen te bekijken. De oplossing is x = [1,2,-1].

Voer de matrix A in en vermenigvuldig met deze oplossingsvector om te controleren of de oplossing correct is (voorbeeld weergegeven in de algebraïsche modus)



Onderbepaald stelsel

Het stelsel van lineaire vergelijkingen

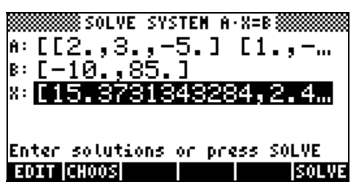
$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -10,$$
$$x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 85,$$

kan worden geschreven als de matrixvergelijking **A**·**x** = **b**, indien

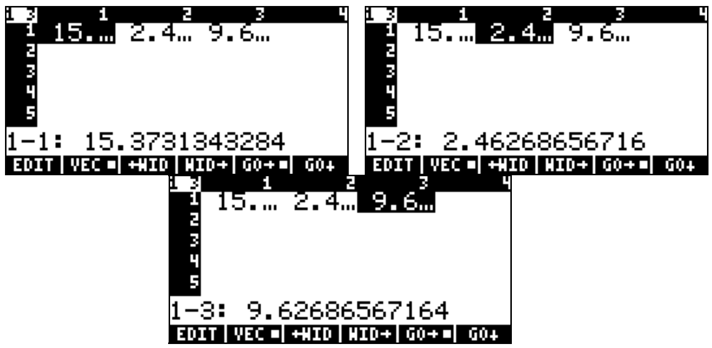
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad and \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -10 \\ 85 \end{bmatrix}.$$

Dit stelsel heeft meer onbekenden dan vergelijkingen en is daarom niet uniek bepaald. We kunnen de betekenis van deze stelling visualiseren door te zorgen dat ieder van deze lineaire vergelijkingen een vlak vertegenwoordigt in het driedimensionale cartesische coördinatenstelsel (x_1, x_2, x_3). De oplossing voor het hierboven getoonde stelsel van vergelijkingen is het kruispunt van twee vlakken in de ruimte. We weten echter dat het kruispunt van twee (niet-parallelle) vlakken een rechte lijn is en niet een enkel punt. Daarom voldoet meer dan een punt aan het stelsel. In die betekenis is het stelsel niet uniek bepaald.

Laten we de numerieke solver gebruiken om te proberen dit stelsel van vergelijkingen op te lossen: NUM.SLV ▼▼▼ OK . Voer matrix A en vector b in zoals aangegeven in het vorige voorbeeld en druk op SOLVE wanneer het X:-veld is gemarkeerd:



Druk indien nodig op de toets EDIT om de details te zien van de oplossingsvector. Hiermee wordt de Matrixschrijver geactiveerd. Gebruik in deze omgeving de pijltoetsen rechts en links om door de vector te bewegen, bijv.



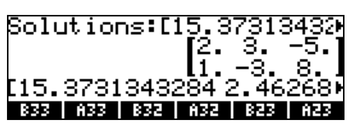
De oplossing is dus **x** = [15.373, 2.4626, 9.6268].

Druk op ENTER om terug te keren naar de numerieke solveromgeving.

De procedure die we hieronder beschrijven, kan worden gebruikt om de matrix A en de oplossingsvector X naar het stapelgeheugen te kopiëren. Probeer het volgende om te controleren of de oplossing correct is:

- Druk op ▲ ▲ om het A:-veld te markeren.
- Druk op NXT CALC ENTER, om matrix A naar het stapelgeheugen te kopiëren.
- Druk op OK om terug te keren naar de numerieke solveromgeving.
- Druk op ▼ ▼ CALC ENTER, om de oplossingsvector X naar het stapelgeheugen te kopiëren.
- Druk op OK om terug te keren naar de numerieke solveromgeving.
- Druk op ENTER om terug te keren naar het stapelgeheugen.

Het stapelgeheugen ziet er in de ALG-modus als volgt uit:

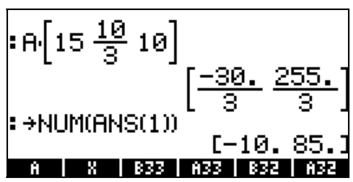


Laten we het laatste resultaat als volgt in een variabele X, opslaan en de matrix in variabele A:

Druk op STO▶ ALPHA X ENTER om de oplossingsvector op te slaan in variabele X
Druk op ◄ ◄ ◄ om de drie niveaus van het stapelgeheugen te wissen
Druk op STO▶ ALPHA A ENTER om de matrix in variabele A op te slaan

Laten we nu de oplossing controleren met: A × X ENTER ,wat als uitkomst het volgende geeft (druk op ▼ om de vectorelementen te zien): [-9.99999999999 85.], redelijk dichtbij de originele vector **b** = [-10 85].

Probeer ook A × [15,10/3,10] ENTER →NUM ENTER, d.w.z.



Deze uitkomst geeft aan dat x = [15,10/3,10] ook een oplossing is voor het stelsel, hetgeen onze waarneming bevestigt dat een stelsel met meer onbekenden dan vergelijkingen niet uniek bepaald (onderbepaald) is.

Hoe komt de rekenmachine tot de oplossing x = [15.37… 2.46… 9.62…] die eerder werd getoond? Feitelijk minimaliseert de rekenmachine de afstand van een punt, dat de oplossing zal vormen, naar elk van de vlakken die wordt vertegenwoordigd door de vergelijkingen in het lineaire stelsel. De rekenmachine gebruikt een kleinste kwadraatmethode , d.w.z. dat de som van de kwadraten van deze afstanden, of fouten, wordt geminimaliseerd.

Overbepaald stelsel

Het stelsel van lineaire vergelijkingen

$$x_1 + 3x_2 = 15,$$
$$2x_1 - 5x_2 = 5,$$

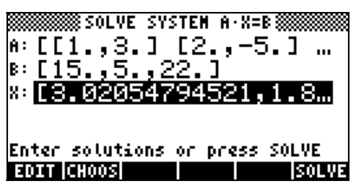
$$-x_1 + x_2 = 22,$$

kan worden geschreven als de matrixvergelijking **A**·**x** = **b**, indien

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad and \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 22 \end{bmatrix}.$$

Dit stelsel heeft meer vergelijkingen dan onbekenden (een overbepaald stelsel). Het stelsel heeft niet een enkele oplossing. Elk van de lineaire vergelijkingen in het stelsel hierboven vertegenwoordigt een rechte lijn in een tweedimensionaal cartesisch coördinatenstelsel (x_1, x_2). Tenzij twee van de drie vergelijkingen in het stelsel dezelfde vergelijking vertegenwoordigen, hebben de drie lijnen meer dan een kruispunt. Om die reden is de oplossing niet uniek. Sommige numerieke algoritmes kunnen worden gebruikt om een oplossing voor het stelsel af te dwingen door de afstand van het vermoedelijke oplossingspunt tot elk van de lijnen in het stelsel te minimaliseren. Dit is de benadering die de HP 49 G numerieke solver toepast.

Laten we de numerieke solver gebruiken om te proberen dit stelsel vergelijkingen op te lossen: NUM.SLV ▼▼▼ OK . Voer matrix A en vector b in zoals aangegeven in het vorige voorbeeld en druk op SOLVE wanneer het X:-veld is gemarkeerd:

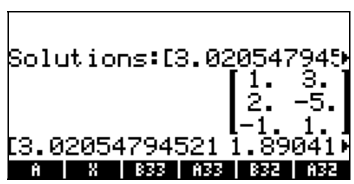


Druk indien nodig op de toets EDIT om de details te zien van de oplossingsvector. Hiermee wordt de Matrixschrijver geactiveerd. Gebruik in deze omgeving de pijltoetsen rechts en links om door de vector te bewegen, bijv.

Druk op `ENTER` om terug te keren naar de numerieke solveromgeving. Probeer het volgende om te controleren of de oplossing correct is:

- Druk op `▲` `▲` om het A:-veld te markeren.
- Druk op `NXT` `CALC` `ENTER` om matrix A naar het stapelgeheugen te kopiëren.
- Druk op `OK` om terug te keren naar de numerieke solveromgeving.
- Druk op `▼` `▼` `CALC` `ENTER` om de oplossingsvector X naar het stapelgeheugen te kopiëren.
- Druk op `OK` om terug te keren naar de numerieke solveromgeving.
- Druk op `ENTER` om terug te keren naar het stapelgeheugen.

Het stapelgeheugen ziet er nu in de ALG-modus als volgt uit:



Laten we het laatste resultaat als volgt in een variabele X, opslaan en de matrix in variabele A:

Druk op `STO▶` `ALPHA` `X` `ENTER` om de oplossingsvector op te slaan in variabele X
Druk op `◀` `◀` `◀` om de drie niveaus van het stapelgeheugen te wissen
Druk op `STO▶` `ALPHA` `A` `ENTER` om de matrix in variabele A op te slaan

Laten we nu de oplossing controleren met: `A` `×` `X` `ENTER`, wat de vector [8.6917… -3.4109… -1.1301…], geeft, die niet gelijk is aan [15 5 22], de oorspronkelijke vector b. De "oplossing" is simpelweg het punt dat het dichtst bij de drie lijnen ligt dat vertegenwoordigd wordt door de drie vergelijkingen in het stelsel, en niet een exacte oplossing.

Kleinste kwadraat oplossing (functie SQ)

De functie LSQ geeft de minimumnorm kleinste kwadraatoplossing van een lineair stelsel Ax = b, aan de hand van de volgende criteria:

- Als **A** een vierkante matrix is en **A** is niet-singulier (d.w.z. de inverse matrix bestaat, of de determinant is niet gelijk aan nul), geeft LSQ de exacte oplossing voor het lineaire stelsel.
- Als **A** minder dan een volle rijrangorde heeft (onderbepaald stelsel van vergelijkingen), geeft LSQ de oplossing met de minimum euclidische lengte uit een oneindig aantal oplossingen.
- Als **A** minder dan een volle kolomrangorde heeft (overbepaald stelsel van vergelijkingen), geeft LSQ de "oplossing" met de minimum restwaarde **e** = **A**·**x** – **b**. Het vergelijkingenstelsel kan geen oplossing hebben en daarom is de gegeven waarde geen reële oplossing voor het stelsel, maar enkel de oplossing met de kleinste restwaarde.

De functie LSQ neemt als invoer vector **b** en matrix **A** in die volgorde. De functie LSQ vindt u in de Functiecatalogus (→ _CAT). Vervolgens gebruiken we de functie LSQ om de eerder gevonden oplossingen met de numerieke solver te herhalen:

Vierkant stelsel

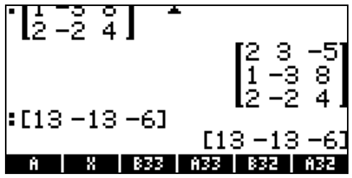
Bekijk het stelsel

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 13,$$
$$x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -13,$$
$$2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -6,$$

met

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -3 & 8 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad and \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 13 \\ -13 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

De oplossing met LSQ ziet u hieronder:



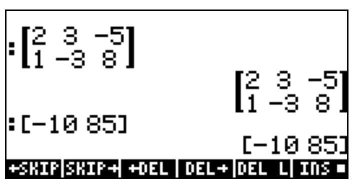
Onderbepaald stelsel
Bekijk het stelsel

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -10,$$
$$x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 85,$$

met

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad and \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -10 \\ 85 \end{bmatrix}.$$

De oplossing met LSQ ziet u hieronder:



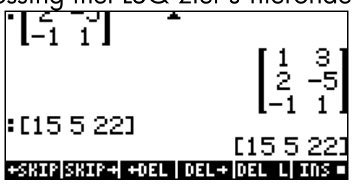
Overbepaald stelsel
Bekijk het stelsel

$$x_1 + 3x_2 = 15,$$
$$2x_1 - 5x_2 = 5,$$
$$-x_1 + x_2 = 22,$$

met

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \textit{and} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 22 \end{bmatrix}.$$

De oplossing met LSQ ziet u hieronder:



Vergelijk deze drie oplossingen met de oplossingen die berekend zijn met de numerieke solver.

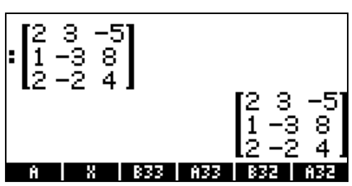
Oplossing met de inverse matrix

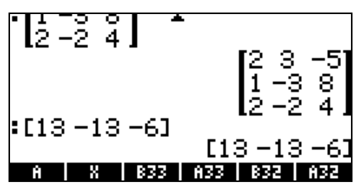
De oplossing voor het stelsel $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$, waarbij $\mathbf{A}$ een vierkante matrix is, is $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\cdot \mathbf{b}$. Dit is de uitkomst van vermenigvuldiging van de eerste vergelijking met $\mathbf{A}^{-1}$, d.w.z. $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}$. Per definitie is $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$, dus schrijven we $\mathbf{I}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}$. Tevens is $\mathbf{I}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}$, dus hebben we $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{b}$.

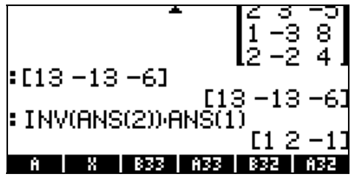
Voor het eerder gebruikte voorbeeld, namelijk:

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 13,$$
$$x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -13,$$
$$2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -6,$$

kunnen we de oplossing in de rekenmachine als volgt vinden:







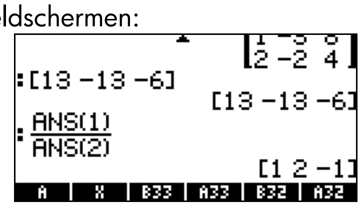
dat is dezelfde uitkomst die we eerder hebben gevonden.

Oplossing door "deling" van matrices

Terwijl de bewerking delen voor matrices niet is gedefinieerd, kunnen we de toets ÷ van de rekenmachine gebruiken om vector **b** door matrix **A** te delen om x op te lossen in de matrix vergelijking **A**·**x** = **b**. Dit is een willekeurige uitbreiding van de algebraïsche deelbewerking voor matrices, d.w.z. van **A**·**x** = **b**, durven we te schrijven **x** = **b**/**A** (Wiskundigen zouden hier kromme tenen van krijgen!) Dit wordt vanzelfsprekend geïnterpreteerd als (1/**A**)·**b** = **A**$^{-1}$·**b** en dat is hetzelfde als het gebruik van de inverse van A zoals in de vorige paragraaf. De procedure voor **b** "delen" door **A** wordt hieronder getoond voor dit geval.

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 13,$$
$$x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -13,$$
$$2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -6,$$

De procedure ziet u in de volgende beeldschermen:



Dezelfde oplossing als die hierboven werd gevonden met de inverse matrix.

Een meervoudige verzameling vergelijkingen met dezelfde coëfficiëntenmatrix oplossen

Stel dat u de volgende drie verzamelingen vergelijkingen wilt oplossen:

X +2Y+3Z = 14, 2X +4Y+6Z = 9, 2X +4Y+6Z = -2,

3X -2Y+ Z = 2, 3X -2Y+ Z = -5, 3X -2Y+ Z = 2,
4X +2Y -Z = 5, 4X +2Y -Z = 19, 4X +2Y -Z = 12.

We kunnen de drie stelsels van vergelijkingen als een enkele matrixvergelijking schrijven: **A**·**X** = **B**, waarbij

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{(1)} & X_{(2)} & X_{(3)} \\ Y_{(1)} & Y_{(2)} & Y_{(3)} \\ Z_{(1)} & Z_{(2)} & Z_{(3)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 14 & 9 & -2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 5 & 19 & 12 \end{bmatrix}.$$

De subindices in de namen van de variabelen X, Y en Z, bepalen naar welk vergelijkingenstelsel zij verwijzen. Om dit uitgebreide stelsel op te lossen, gebruiken we de volgende procedure in de RPN-modus,

```
[[14,9,-2],[2,-5,2],[5,19,12]] ENTER
[[1,2,3],[3,-2,1],[4,2,-1]] ENTER ÷
```

De uitkomst van deze bewerking is:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Gauss' eliminatie en Gauss-Jordan-eliminatie

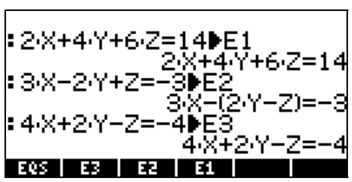
Gauss' eliminatie is een procedure waarmee de vierkante matrix van coëfficiënten horende bij een stelsel van n lineaire vergelijkingen in n onbekenden is gereduceerd tot een bovendriehoeksmatrix (*Echelon vorm*) via een serie rijbewerkingen. Deze procedure staat bekend als de *voorwaartse eliminatie*. Het terugbrengen van de coëfficiëntenmatrix tot een bovendriehoekse vorm maakt de oplossing van alle *n* onbekenden mogelijk met gebruik van maar een vergelijking tegelijkertijd in een procedure die bekend staat als *achterwaartse substitutie*.

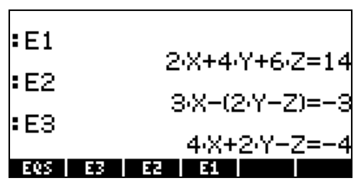
Voorbeeld van Gauss' eliminatie met gebruik van vergelijkingen

Om de Gauss' eliminatieprocedure te verduidelijken, gebruiken we het volgende stelsel van 3 vergelijkingen in 3 onbekenden:

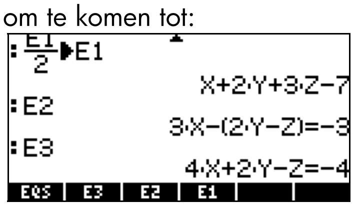
$$\begin{aligned} 2X + 4Y + 6Z &= 14, \\ 3X - 2Y + Z &= -3, \\ 4X + 2Y - Z &= -4. \end{aligned}$$

We kunnen deze vergelijkingen opslaan in respectievelijk de variabelen E1, E2 en E3, in de rekenmachine zoals u hieronder kunt zien. Als backup is ook een lijst met de drie vergelijkingen aangemaakt en opgeslagen in variabele EQS. Op deze manier zijn de vergelijkingen nog beschikbaar voor de gebruiker als er een fout wordt gemaakt.

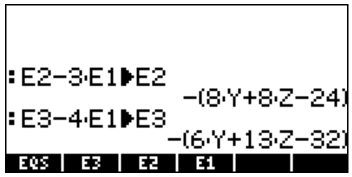


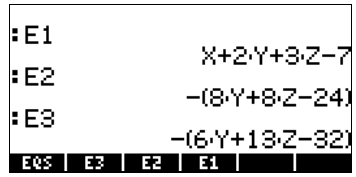


Om het proces van voorwaartse eliminatie te starten, delen we de eerste vergelijking (E1) door 2 en slaan deze op in E1 en tonen de drie vergelijkingen opnieuw om te komen tot:

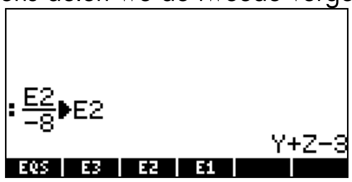


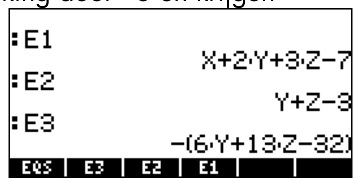
Vervolgens vervangen we de tweede vergelijking E2 door (vergelijking 2 – 3×vergelijking 1, d.w.z. E1-3×E2) en de derde door (vergelijking 3 – 4×vergelijking 1), om te komen tot



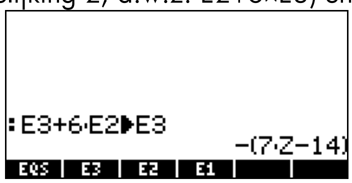


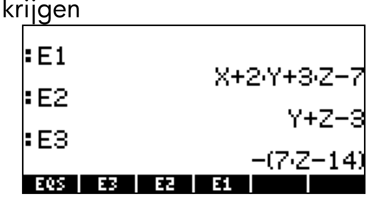
Vervolgens delen we de tweede vergelijking door –8 en krijgen





Vervolgens vervangen we de derde vergelijking E3, door (vergelijking 3 + 6×vergelijking 2, d.w.z. E2+6×E3) en krijgen

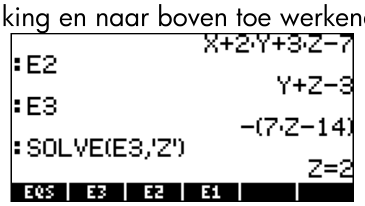


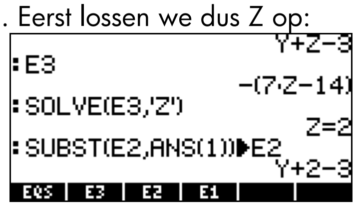


U ziet dat wanneer we een lineaire combinatie van vergelijkingen uitvoeren de rekenmachine de uitkomst verandert in een uitdrukking aan de linkerzijde van het isteken, d.w.z. de uitdrukking = 0. Zo wordt de laatste verzameling vergelijkingen geïnterpreteerd als zijnde de volgende equivalente verzameling van vergelijkingen.

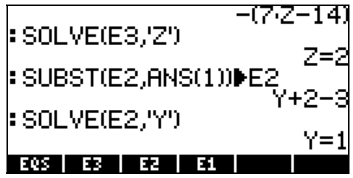
$$X + 2Y + 3Z = 7,$$
$$Y + Z = 3,$$
$$-7Z = -14.$$

Het proces van achterwaartse substitutie in Gauss' eliminatie bestaat uit het vinden van de waarden van de onbekenden, beginnend met de laatste vergelijking en naar boven toe werkend. Eerst lossen we dus Z op:

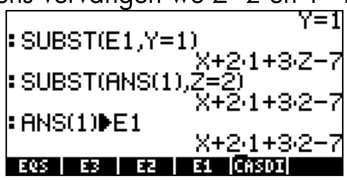


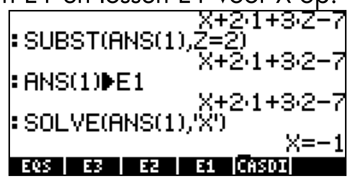


Vervolgens vervangen we Z=2 in vergelijking 2 (E2) en lossen E2 voor Y op:



Vervolgens vervangen we Z=2 en Y=1 in E1 en lossen E1 voor X op:





De oplossing is daarom X = -1, Y = 1, Z = 2.

Voorbeeld van Gauss' eliminatie met matrices

Het stelsel van vergelijkingen dat we hebben gebruikt in het voorbeeld hierboven kan worden geschreven als de matrixvergelijking $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$, als we het volgende gebruiken:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

We maken eerst de bij A behorende <u>aangevulde matrix</u> aan om met Gauss' eliminatie een oplossing te krijgen voor het stelsel matrixvergelijkingen, d.w.z.:

$$\mathbf{A}_{aug} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 14 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

De matrix $\mathbf{A}_{aug}$ is hetzelfde als de originele matrix **A** met een nieuwe rij, die correspondeert met de elementen van vector **b** en rechts van de meest rechtse kolom van **A** is toegevoegd (d.w.z. aangevuld).

Wanneer de aangevulde matrix eenmaal samengesteld is, kunnen we doorgaan met het uitvoeren van rijbewerkingen aan de matrix die de originele A matrix zullen reduceren tot een bovendriehoeksmatrix. Voor deze oefening gebruiken we de RPN-modus (MODE +/- OK), met systeemvlag 117 ingesteld op SOFT menu. Gebruik in uw rekenmachine dan de volgende toetsencombinaties. Voer eerst de aangevulde matrix in en maak er een extra kopie van in het stapelgeheugen (Deze stap is niet noodzakelijk, maar is een verzekering dat u een extra kopie heeft van de aangevulde matrix voor het geval u een fout maakt in de voorwaartse eliminatieprocedure die we gaan uitvoeren.):

[[2,4,6,14],[3,-2,1,-3],[4,2,-1,-4]] ENTER ENTER

Bewaar de aangevulde matrix in variabele AAUG:
' ALPHA ALPHA A A U G ALPHA STO▶

Met een kopie van de aangevulde matrix in het stapelgeheugen drukt u op ← MTH MATRX ROW om het bewerkenmenu ROW te activeren. Voer vervolgens de volgende rijbewerkingen uit op uw aangevulde matrix.
Vermenigvuldig rij 1 met ½: 2 1/x 1 RCI

Vermenigvuldig rij 1 met –3 voeg het toe aan rij 2, waarbij deze vervangen wordt: 3 +/- SPC 1 SPC 2 RCIJ

Vermenigvuldig rij 1 met –4 voeg het toe aan rij 3, waarbij deze vervangen wordt: 4 +/- SPC 1 SPC 3 RCIJ

Vermenigvuldig rij 2 met –1/8: 8 +/- 1/x 2 RCI
Vermenigvuldig rij 2 met 6 voeg het toe aan rij 3, waarbij deze vervangen wordt: 6 SPC 2 SPC 3 RCIJ

Als u deze bewerkingen met de hand uit zou voeren, zou u het volgende schrijven:

$$\mathbf{A}_{aug} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 14 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A}_{aug} \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -8 & -8 & -24 \\ 0 & -6 & -13 & -32 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & -13 & -32 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A}_{aug} \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{array}\right)$$

Het teken ≅ (" is equivalent aan") geeft aan dat hetgeen volgt equivalent is aan de vorige matrix met enkele rij- (of kolom-) bewerkingen.

De resulterende matrix is bovendriehoeks en equivalent aan het stelsel van vergelijkingen.

$$\begin{aligned} X + 2Y + 3Z &= 7, \\ Y + Z &= 3, \\ -7Z &= -14, \end{aligned}$$

hetgeen nu met een vergelijking tegelijkertijd kan worden opgelost door achterwaartse substitutie, zoals in het vorige voorbeeld.

Gauss-Jordan-eliminatie met gebruik van matrices

Gauss-Jordan-eliminatie bestaat uit het voortzetten van de rijbewerkingen in de bovendriehoeksmatrix, die resulteerde uit het voorwaartse eliminatieproces en in een identiteitsmatrix resulteert in de plaats van de originele **A** matrix. Voor het geval dat we zojuist hebben behandeld kunnen we bijvoorbeeld de rijbewerkingen als volgt voortzetten:

Vermenigvuldig rij 3 met –1/7: `7` `+/-` `1/x` `3` `RCI`
Vermenigvuldig rij 3 met –1, voeg het toe aan rij 2, waarbij deze vervangen wordt: `1` `+/-` `SPC` `3` `SPC` `2` `RCIJ`

Vermenigvuldig rij 3 met –3, voeg het toe aan rij 1, waarbij deze vervangen wordt:
`3` `+/-` `SPC` `3` `SPC` `1` `RCIJ`

Vermenigvuldig rij 2 met –2, voeg het toe aan rij 1, waarbij deze vervangen wordt: 2 +/- SPC 2 SPC 1 RCI+

Als u dit proces met de hand schrijft, krijgt u de volgende stappen:

$$\mathbf{A}_{aug} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$A_{aug} \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Pivoteren

Als u zorgvuldig kijkt naar de rijbewerkingen in de hierboven getoonde voorbeelden zult u zien dat veel van deze bewerkingen een rij delen door het corresponderende element in de hoofddiagonaal. Dit element wordt een pivotelement genoemd, of eenvoudigweg een pivot. In veel situaties is het mogelijk dat het pivotelement nul wordt. In dat geval kunnen we de rij niet door de pivot delen. Om de numerieke oplossing van een stelsel van vergelijkingen te verbeteren met Gauss' eliminatie of Gauss-Jordan-eliminatie wordt voorts aanbevolen dat de pivot het element is met de grootste absolute waarde in een gegeven kolom. In dergelijke gevallen verwisselen we rijen alvorens rijbewerkingen uit te voeren. Het verwisselen van rijen wordt *gedeeltelijk pivoteren* genoemd. Om deze aanbeveling op te volgen is het vaak noodzakelijk rijen te verwisselen in de aangevulde matrix tijdens het uitvoeren van de Gauss' eliminatie of Gauss-Jordan-eliminatie.

Tijdens het pivoteren in een matrixeliminatieprocedure kunt u de numerieke oplossing nog verder verbeteren door als pivot het element met de grootste absolute waarde in de betreffende kolom en rij te kiezen. Deze bewerking kan in sommige pivotbewerkingen vereisen dat u niet alleen rijen maar ook kolommen verwisselt. Wanneer rij- en kolomverwisselingen zijn toegestaan bij het pivoteren wordt de procedure *volledig pivoteren* genoemd.

Bij het verwisselen van rijen en kolommen tijdens gedeeltelijk of volledig pivoteren is het noodzakelijk om de verwisselingen te volgen, omdat de volgorde van de onbekenden in de oplossing door deze verwisselingen wordt veranderd. Een manier om de kolomverwisselingen te volgen in gedeeltelijke of volledige pivotmodus is om aan het begin van de procedure een *permutatiematrix* **P** = $\mathbf{I}_{n\times n}$ aan te maken. Elke verwisseling van een rij of kolom in de aangevulde matrix $\mathbf{A}_{aug}$ wordt ook geregistreerd als een verwisseling van respectievelijk een rij of kolom in de permutatiematrix. Wanneer de oplossing wordt gegeven, vermenigvuldigen we de permutatiematrix met de onbekende vector **x** om de volgorde van de onbekenden in de oplossing te verkrijgen. Met andere woorden, de uiteindelijke oplossing wordt gegeven door $\mathbf{P}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}'$, waarbij $\mathbf{b}'$ de laatste kolom van de aangevulde matrix is nadat de oplossing is gevonden.

Voorbeeld van Gauss-Jordan-eliminatie met volledig pivoteren

Laten we volledig pivoteren verduidelijken met een voorbeeld. Los het volgende stelsel van vergelijkingen op met volledig pivoteren en de Gauss-Jordan-eliminatieprocedure.

$$\begin{aligned} X + 2Y + 3Z &= 2,\\ 2X + \ 3Z &= -1,\\ 8X + 16Y - Z &= 41. \end{aligned}$$

De aangevulde matrix en de permutatiematrix zijn als volgt:

$$\mathbf{A}_{aug} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 8 & 16 & -1 & 41 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sla de aangevulde matrix op in variabele AAUG, druk dan op [→] [AAUG] om een kopie in het stapelgeheugen te krijgen. We willen het commando CSWP (Kolomverwisseling) klaar voor gebruik hebben en gebruiken daarvoor: [→] _CAT [ALPHA][ALPHA][C][S][ALPHA] (vind CSWP), [OK]. U krijgt een foutbericht, druk op [ON] en negeer het bericht.

Maak vervolgens het menu ROW beschikbaar door te drukken op: [←] _MATRICES [CREAT] [ROW].

Nu zijn we klaar om de Gauss-Jordan-eliminatie met volledig pivoteren te beginnen. We moeten de permutatiematrix met de hand volgen, dus neem uw notitieboekje en schrijf de hierboven getoonde matrix **P**.

Eerst controleren we de pivot a_{11}. U ziet dat het element met de grootste absolute waarde in de eerste rij en eerste kolom de waarde is van a_{31} = 8. Aangezien we willen dat dit getal de pivot is, verwisselen we de rijen 1 en 3, met: 1 SPC 3 NXT RSWP. De aangevulde matrix en de permutatiematrix zijn nu:

$$\begin{bmatrix} 8 & 16 & -1 & 41 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Als we de pivot op positie (1,1) controleren zien we dat 16 nu een betere pivot is dan 8, dus voeren we een kolomverwisseling uit: 1 SPC 2 ↱ CAT OK CSWP. De aangevulde matrix en de permutatiematrix zijn nu:

$$\begin{bmatrix} 16 & 8 & -1 & 41 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nu hebben we de grootst mogelijke waarde in positie (1,1), d.w.z. dat we volledig pivoteren hebben uitgevoerd op (1,1). Vervolgens gaan we door en delen door de pivot:
1 6 1/x 1 NXT RCI. De permutatiematrix verandert niet maar de aangevulde matrix is nu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/16 & 41/16 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

De volgende stap is het elimineren van 2 van positie (3,2) met:
2 +/- SPC 1 SPC 3 RCIJ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/16 & 41/16 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 25/8 & -25/8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nu we de elementen van kolom 1 onder de pivot hebben opgevuld met nullen kunnen we verdergaan met het controleren van de pivot op positie (2,2). We zien dat het getal 3 in positie (2,3) een betere pivot is en dus verwisselen we de kolommen 2 en 3 met: [2] [SPC] [3] [↱] CAT [OK]

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/16 & 1/2 & 41/16 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 25/8 & 0 & -25/82 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Als we de pivot op positie (2,2),controleren, zien we nu dat de waarde 25/8, op positie (3,2), groter is dan 3, dus verwisselen we de rijen 2 en 3 door: [2] [SPC] [3] [NXT] [RSWP]

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/16 & 1/2 & 41/16 \\ 0 & 25/8 & 0 & -25/8 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nu zijn we klaar om rij 2 te delen door de pivot 25/8, met: ['] [8] [÷] [2] [5] [▶] [SPC] [2] [NXT] [RCI]

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/16 & 1/2 & 41/16 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vervolgens elimineren we de 3 van de positie (3,2) met: [3] [+/-] [SPC] [2] [SPC] [3] [RCIJ]

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/16 & 1/2 & 41/16 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nu we de positie onder pivot hebben opgevuld met nullen kunnen we verdergaan met het controleren van de pivot op positie (3,3). De huidige waarde van 2 is groter dan ½ of 0, dus laten we het ongewijzigd. Nu delen

we de hele derde rij door 2 om de pivot naar 1, te converteren met:
`2` `1/x` `3`

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -1/16 & 1/2 & 41/16 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vervolgens elimineren we de ½ op positie (1,3) met:
`2` `1/x` `+/-` `SPC` `3` `SPC` `1`

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -1/16 & 0 & 33/16 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tenslotte elimineren we de –1/16 van de positie (1,2) met:
`1` `6` `1/x` `SPC` `2` `SPC` `1`

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nu hebben we een identiteitsmatrix in het gedeelte van de aangevulde matrix dat correspondeert met de originele coëfficiëntmatrix A en dus kunnen we verdergaan met het verkrijgen van de oplossing terwijl we de gecodeerde rij- en kolomverwisselingen in de permutatiematrix **P** aanpakken. We identificeren de onbekende vector **x**, de gemodificeerde onafhankelijke vector **b’** en de permutatiematrix **P** als:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b'} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De oplossing wordt gegeven door **P**·**x**=**b**’ of

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Hetgeen resulteert in:

$$\begin{bmatrix} Y \\ Z \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

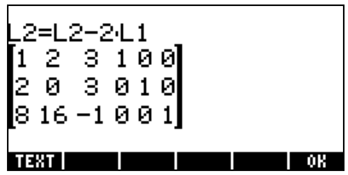
Stap-voor-stap rekenmachineprocedure om lineaire stelsels op te lossen

Het voorbeeld dat we zojuist hebben uitgewerkt, is natuurlijk de stap-voor-stapprocedure die door de gebruiker wordt uitgevoerd om volledig pivoteren te gebruiken voor het oplossen van lineaire vergelijkingen met de Gauss-Jordaneliminatie. U kunt de stap-voor-stapprocedure die de rekenmachine gebruikt om zonder tussenkomst van de gebruiker een stelsel van vergelijkingen op te lossen volgen door de optie step/step in het CAS van de rekenmachine als volgt te activeren:

Gebruik dan voor dit voorbeeld in de RPN-modus:

`[2,-1,41]` ENTER `[[1,2,3],[2,0,3],[8,16,-1]]` ENTER ÷

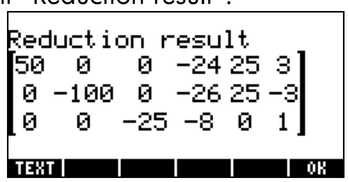
De rekenmachine laat een aangevulde matrix zien die bestaat uit de coëfficiëntenmatrix **A** en de identiteitsmatrix **I** en toont tegelijkertijd de volgende te berekenen procedure:



L2 = L2-2·L1 staat voor "vervang rij 2 (L2) met de bewerking L2 – 2·L1. Als we deze bewerking met de hand hadden uitgevoerd, zou dat op volgende hebben geleken: [2][+/-][SPC][1][SPC][1] [L*+]. Druk op [OK] en volg de bewerkingen in het beeldscherm van uw rekenmachine. U ziet de volgende bewerkingen uitgevoerd worden:

L3=L3-8·L1, L1 = 2·L1--1·L2, L1=25·L1--3·L3, L2 = 25·L2-3·L3,

en uiteindelijk het bericht "Reduction result":



Wanneer u op [OK] drukt, geeft de rekenmachine de uiteindelijke uitkomst [1 2 –1].

Het stap-voor-stap berekenen van de inverse matrix

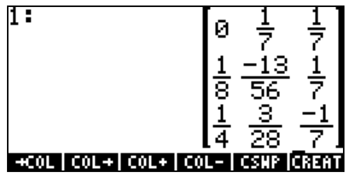
De berekening van een inverse matrix kan beschouwd worden als het berekenen van de oplossing voor een aangevuld stelsel [**A** | **I**]. We zouden bijvoorbeeld voor de matrix **A** uit het vorige voorbeeld de aangevulde matrix als volgt schrijven

$$\mathbf{A}_{aug(I)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Om de tussenstappen in de berekening en de inversie te zien, voert u de bovenstaande matrix **A** in en drukt op [1/x], terwijl de optie step/step in het CAS van de rekenmachine geactiveerd blijft. Gebruik het volgende:

`[[ 1,2,3],[3,-2,1],[4,2,-1]]` [ENTER][1/x]

Nadat u door de verschillende stappen bent gelopen, is de gegeven oplossing:



Hetgeen de rekenmachine liet zien was, niet precies een Gauss-Jordan-eliminatie met volledig pivoteren, maar een manier om de inverse van een matrix te berekenen door een Gauss-Jordan-eliminatie zonder pivoteren uit te voeren. Deze procedure om de inverse te berekenen, is gebaseerd op de aangevulde matrix $(\mathbf{A}_{aug})_{n\times n} = [\mathbf{A}_{n\times n} \,|\mathbf{I}_{n\times n}]$.

De rekenmachine liet u de stappen zien tot het punt waarop de linkerhelft van de aangevulde matrix was geconverteerd tot een diagonale matrix. Van toenaf was de laatste stap het delen van iedere rij door de corresponderende pivot van de hoofddiagonaal. Met andere woorden, de rekenmachine heeft $(\mathbf{A}_{aug})_{n\times n} = [\mathbf{A}_{n\times n} \,|\mathbf{I}_{n\times n}]$, omgezet in $[\mathbf{I} \,|\mathbf{A}^{-1}]$.

Inverse matrices en determinanten

U ziet dat alle elementen in de inverse matrix die hierboven is berekend, gedeeld worden door de waarde 56 of een van de factoren van deze waarde (28, 7, 8, 4 of 1). Als u de determinant van de matrix **A**, berekent krijgt u *det*(**A**) = 56.

We zouden kunnen schrijven $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C}/det(\mathbf{A})$, waarbij **C** de matrix is.

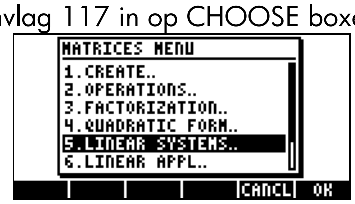
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 7 & -13 & 8 \\ 14 & 6 & -8 \end{bmatrix}.$$

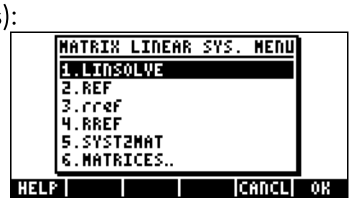
Het resultaat $(\mathbf{A}^{-1})_{n\times n} = \mathbf{C}_{n\times n} / det(\mathbf{A}_{n\times n})$, is een algemene uitkomst die van toepassing is op elke niet-singuliere matrix **A**. Een algemene vorm voor de elementen van **C** kan geschreven worden op basis van een Gauss-Jordan algoritme.

Gebaseerd op de hierboven weergegeven vergelijking $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C}/\det(\mathbf{A})$, is de inverse matrix $\mathbf{A}^{-1}$niet gedefinieerd als *det*(**A**) = 0. Dus de voorwaarde *det*(**A**) = 0 definieert ook een singuliere matrix.

Oplossing voor lineaire stelsels met functies van de rekenmachine

De eenvoudigste manier om een stelsel van lineaire vergelijkingen $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$, in de rekenmachine op te lossen, is om **b**, in te voeren, **A**, in te voeren en dan de deelfunctie / te gebruiken. Als het stelsel van lineaire vergelijkingen overbepaald of onderbepaald is, kan een "oplossing" worden gevonden met de functie LSQ (Kleinste Kwadraten) zoals eerder weergegeven. De rekenmachine biedt echter andere mogelijkheden om lineaire stelsels van vergelijkingen op te lossen door functies uit het menu MATRICES' LINEAR SYSTEMS.. te gebruiken. Dit menu is toegankelijk via ← MATRICES (Stel de systeemvlag 117 in op CHOOSE boxes):

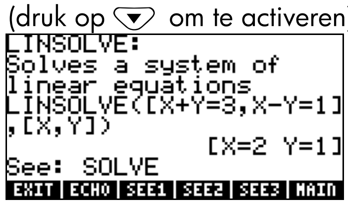


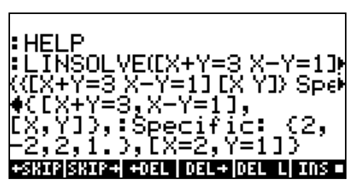


De functies van dit menu zijn LINSOLVE, REF, rref, RREF en SYST2MAT.

De functie LINSOLVE

De functie LINSOLVE neemt als argumenten een serie vergelijkingen en een vector met de namen van de onbekenden en geeft de oplossing voor het lineaire stelsel. De volgende schermen laten de helptekst (zie Hoofdstuk 1) voor de functie LINSOLVE, zien en het bijbehorende voorbeeld dat in de tekst is opgenomen. Het rechterscherm toont het resultaat als u de regeleditor gebruikt (druk op ▽ om te activeren):





Nog een voorbeeld in de ALG-modus. Voer het volgende in:

```
LINSOLVE([X-2*Y+Z=-8,2*X+Y-2*Z=6,5*X-2*Y+Z=-12],
                        [X,Y,Z])
```

om de oplossing te produceren: `[X=-1,Y=2,Z = -3]`.

De functie LINSOLVE werkt met symbolische uitdrukkingen. De functies REF, rref en RREF, werken met de aangevulde matrix in een benadering volgens de Gauss' eliminatie.

De functies REF, rref en RREF

De bovendriehoekse vorm waartoe de aangevulde matrix is gereduceerd tijdens het voorwaartse eliminatiegedeelte van de Gauss' eliminatieprocedure noemen we de Echelonvorm. De functie REF (Terugbrengen tot Echelonvorm) geeft een dergelijke matrix met de aangevulde matrix op niveau 1 van het stapelgeheugen.

Bekijk de aangevulde matrix:

$$\mathbf{A}_{aug} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & -2 & 1 & 12 \end{array}\right].$$

Deze geeft een lineair stelsel van vergelijkingen, **A**·**x** = **b**, weer waarbij

A = `[[1,-2,1],[2,1,-2],[5,-2,1]]`,

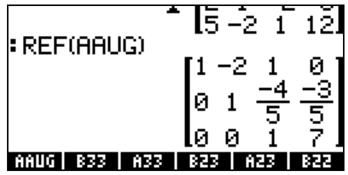
en

b = `[[0],[-3],[12]]`.

Voer de aangevulde matrix in en sla deze op in de variabele AAUG in de ALG-modus.

`[[1,-2,1,0],[2,1,-2,-3][5,-2,1,12]` ► `AAUG`

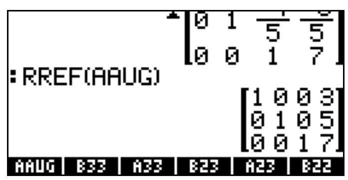
Toepassing van REF-functieprocedures.



De uitkomst is de bovendriehoekse (echelonvorm) coëfficiëntenmatrix die resulteert uit de voorwaartse eliminatiestap in een Gauss' eliminatieprocedure.

De diagonale matrix die resulteert uit de Gauss-Jordan-eliminatie noemen we een gereduceerde echelonvorm. De RREF-function staat voorGereduceerde Echelonvorm Deze functieoproep moet een gereduceerde echelonvorm produceren zodat de coëfficiëntenmatrix is gereduceerd tot een identiteitsmatrix. De extra kolom in de aangevulde matrix bevat alleen de oplossing voor het stelsel van vergelijkingen.

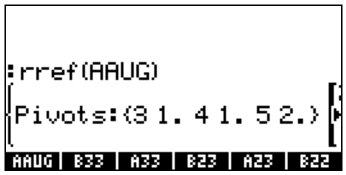
Als voorbeeld laten we de uitkomst zien van het toepassen van de functie RREF op de matrix AAUG in de ALG-modus:

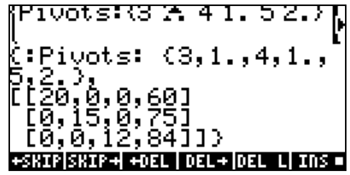


De uitkomst is een uiteindelijke aangevulde matrix die het resultaat is van een Gauss-Jordan-eliminatie zonder pivoteren.

Een gereduceerde echelonvorm voor een aangevulde matrix kan worden verkregen met de *rref-functie.* Deze functie maakt een reeks aan van pivots en een equivalente matrix in gereduceerde echelonvorm zodat de coëfficiëntenmatrix wordt gereduceerd tot een diagonale matrix.

Bij de matrix AAUG bijvoorbeeld geeft de rref-functie de volgende uitkomst:





Het tweede scherm hierboven wordt verkregen door de regeleditor te activeren (druk op ▽). De uitkomst laat pivots zien van 3, 1, 4, 1, 5 en 2 en een gereduceerde diagonale matrix.

De functie SYST2MAT

Deze functie converteert een stelsel van lineaire vergelijkingen in een equivalente aangevulde matrix. Het volgende voorbeeld is beschikbaar in de helptekst van de rekenmachine:

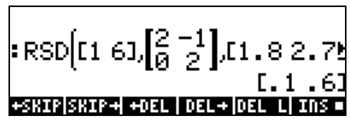
De uitkomst is de aangevulde matrix die correspondeert met het stelsel van vergelijkingen:

$$X+Y = 0$$
$$X\text{-}Y = 2$$

Restfouten in oplossingen voor lineaire stelsels (functie RSD)

De functie RSD berekent de restanten of fouten in de oplossing van de matrixvergelijking $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$, die een stelsel van n lineaire vergelijkingen in n onbekenden weergeeft. We kunnen bij het oplossen van dit stelsel denken aan het oplossen van de matrixvergelijking: $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = 0$. Stel dat we als eerste benadering via een numerieke methode we de oplossing x(0) produceren. We evalueren $f(\mathbf{x}(0)) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(0) = \mathbf{e} \neq 0$. Dus **e** is een vector van resten van Functie voor de vector $\mathbf{x} = \mathbf{x}(0)$.

Om de functie RSD te gebruiken, heeft u de termen **b**, **A** en **x**(0), als argumenten nodig. De vector die wordt gegeven is e = **b** - **A**·**x**(0). Als we bijvoorbeeld **A** = `[[2,-1][0,2]]`, x(0) = `[1.8,2.7]` en **b** = `[1,6]` gebruiken, kunnen we de restvector als volgt vinden:



De uitkomst is **e** = **b** - **A**·**x**(0) = `[ 0.1 0.6 ]`.

> **Opmerking:** Als we de vector Δ**x** = **x** – **x** (0) de correctie in de waarden van x (0), laten vertegenwoordigen, kunnen we een nieuwe matrixvergelijking voor Δx, schrijven, namelijk **A**·Δ**x** = **e**. Als we Δ**x** oplossen, kunnen we de werkelijke oplossing vinden voor het originele stelsel als **x** = **x**(0) + Δ**x**.

Eigenwaarden en eigenvectoren

Met een gegeven vierkante matrix **A** kunnen we de eigenwaardevergelijking **A**·**x** = λ·**x** schrijven, waarbij de waarden van λ die aan de vergelijking voldoen eigenwaarden van matrix **A**. genoemd worden. Voor elke waarde van λ kunnen we uit dezelfde vergelijking waarden van **x** vinden die voldoen aan de eigenwaardevergelijking. Deze waarden van **x** noemen we de eigenvectoren van matrix **A**. De eigenwaardevergelijking kan ook worden geschreven als (**A** – λ·**I**)x = 0.

Deze vergelijking heeft alleen een niet-triviale oplossing als de matrix (**A** – λ·**I**) singulier is, d.w.z. als det(**A** – λ·**I**) = 0.

De laatste vergelijking genereert een algebraïsche vergelijking met een polynoom van *n* orde voor een vierkante matrix $\mathbf{A}_{n\times n}$. De resulterende vergelijking noemen we de karakteristieke polynoom van matrix **A**. Als we de karakteristieke polynoom oplossen krijgen we de eigenwaarden van de matrix.

De rekenmachine voorziet in een aantal functies die informatie verschaffen over eigenwaarden en eigenvectoren van een vierkante matrix. Enkele van

deze functies vindt u in het menu MATRICES/EIGEN dat u activeert met
← MATRICES .

De functie PCAR

De functie PCAR genereert de karakteristieke polynoom van een vierkante matrix met behulp van de inhoud van de variabele VX (een CAS-gereserveerde variabele, standaard 'X') als de onbekende in de polynoom. Voer bijvoorbeeld de volgende matrix in de ALG-modus in en zoek de karakteristieke vergelijking met PCAR:
`[[1,5,-3],[2,-1,4],[3,5,2]]`

Met de variabele λ om eigenwaarden weer te geven, dient deze karakteristieke polynoom geïnterpreteerd te worden als

$$\lambda^3\text{-}2\lambda^2\text{-}22\lambda+21=0.$$

De functie EGVL

De functie EGVL (Eigenwaarden) produceert de eigenwaarden van een vierkante matrix. De eigenwaarden van de matrix hieronder worden bijvoorbeeld berekend in de ALG-modus met de functie EGVL:

De eigenwaarden λ = [-√10, √10].

Opmerking: in sommige gevallen kan het zijn dat u de 'exacte' oplossing voor de karakteristieke polynoom niet kunt vinden en dan krijgt u als uitkomst een lege lijst na het toepassen van de functie EGVL. Verander de berekeningsmodus in Approx in het CAS, wanneer dit gebeurt, en herhaal de berekening.

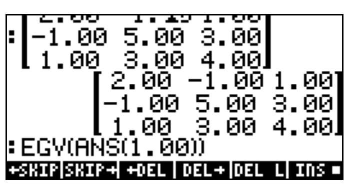
In de exacte modus bijvoorbeeld geeft de volgende oefening een lege lijst als oplossing:

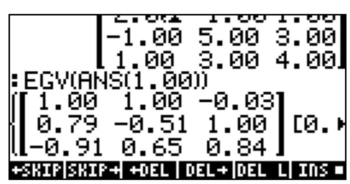
Verander de modus in Approx en herhaal de invoer om de volgende eigenwaarden te krijgen:
`[(1.38,2.22), (1.38,-2.22), (-1.76,0)].`

De functie EGV

De functie EGV (eigenwaarden en eigenvectoren) produceert de eigenwaarden en eigenvectoren van een vierkante matrix. De eigenvectoren worden gegeven als de kolommen van een matrix, terwijl de corresponderende eigenwaarden de componenten van een vector zijn.

De eigenvectoren en eigenwaarden in de ALG-modus van de matrix hieronder worden gevonden door bijvoorbeeld de functie EGV toe te passen.





De uitkomst laat de eigenwaarden als de kolommen van de matrix zien in de uitkomstenlijst. Om de eigenwaarden te zien, kunnen we het volgende gebruiken: GET(ANS(1),2), d.w.z. neem het tweede element in de lijst van de vorige uitkomst. De eigenwaarden zijn:

In het kort:

$$\lambda_1 = 0.29,\ \mathbf{x}_1 = [\ 1.00,\ 0.79,\ -0.91]^T,$$
$$\lambda_2 = 3.16,\ \mathbf{x}_2 = [1.00,\ -0.51,\ 0.65]^T,$$
$$\lambda_3 = 7.54,\ \mathbf{x}_1 = [-0.03,\ 1.00,\ 0.84]^T.$$

Opmerking: een symmetrische matrix produceert alle reële eigenwaarden en de eigenvectoren zijn wederzijds loodrecht. Voor het zojuist uitgewerkte voorbeeld kunt u controleren dat $\mathbf{x}_1 \bullet \mathbf{x}_2 = 0$, $\mathbf{x}_1 \bullet \mathbf{x}_3 = 0$ en $\mathbf{x}_2 \bullet \mathbf{x}_3 = 0$.

De functie JORDAN

De functie JORDAN is bedoeld om een diagonalisatie of Jordancyclusontbinding van een matrix te produceren. Voor een gegeven vierkante matrix **A**, geeft de functie JORDAN in de RPN-modus vier uitvoeritems, namelijk:

- De minimumpolynoom van matrix **A** (stapelgeheugenniveau 4)
- De karakteristieke polynoom van matrix **A** (stapelgeheugenniveau 3)
- Een lijst met eigenvectoren die overeenkomt met iedere eigenwaarde van matrix **A** (stapelgeheugenniveau 2)
- Een vector met de eigenvectoren van matrix **A** (stapelgeheugenniveau 4)

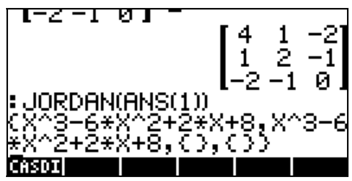
Probeer bijvoorbeeld deze oefening in de RPN-modus:

```
[[4,1,-2],[1,2,-1],[-2,-1,0]]   JORDAN
```

De uitvoer is als volgt:

4: ‘X^3+-6*x^2+2*X+8’
3: ‘X^3+-6*x^2+2*X+8’
2: { }
1: { }

Dezelfde oefening in de ALG-modus, ziet er als volgt in de volgende beeldschermen uit:



De functie MAD

Deze functie verschaft ook informatie m.b.t. de eigenwaarden van een matrix ook al is deze niet beschikbaar in het menu EIGEN. De functie MAD is beschikbaar via het submenu MATRICES OPERATIONS (MATRICES) en is bedoeld om de aanvullende matrix van een matrix te produceren

De functie MAD genereert in de RPN-modus een aantal eigenschappen van een vierkante matrix, namelijk:

- de determinant (stapelgeheugenniveau 4)
- de formele inverse (stapelgeheugenniveau 3)
- de matrix coëfficiënten van de polynoom p(**x**) gedefinieerd door $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{I}-\mathbf{A})\cdot p(\mathbf{x})=m(\mathbf{x})\cdot\mathbf{I}$ (stapelgeheugenniveau 2)
- de karakteristieke polynoom van de matrix (stapelgeheugenniveau 1)

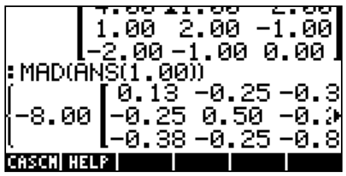
U ziet dat de vergelijking $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{I}-\mathbf{A})\cdot p(\mathbf{x})=m(\mathbf{x})\cdot\mathbf{I}$ in vorm vergelijkbaar is met de eigenwaardevergelijking $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \lambda\cdot\mathbf{x}$.

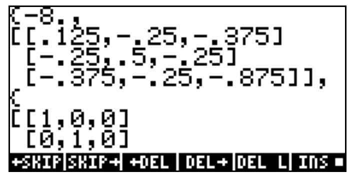
Probeer als voorbeeld in de RPN-modus:

```
[[4,1,-2] [1,2,-1][-2,-1,0]] MAD
```

Het resultaat is:
4: -8.
3: [[0,13 –0,25 –0,38][-0,25 0,50 –0,25][-0,38 –0,25 –0,88]]
2: {[[1 0 0][0 1 0][0 0 1]] [[-2 1 –2][1 –4 –1][-2 –1 –6] [[-1 2 3][2 –4 2][3 2 7]]}
1: ‘X^3+-6*x^2+2*X+8’

Dezelfde oefening in de ALG-modus ziet er als volgt uit:





Het factoriseren van matrices

Het factoriseren van een matrix bestaat uit het verkrijgen van matrices die bij vermenigvuldiging een gegeven matrix geven. We laten het factoriseren van matrices zien via de functies in het matrixmenu FACT. Dit menu is toegankelijk via ← MATRICES .

De functies in dit menu zijn: LQ, LU, QR,SCHUR, SVD, SVL.

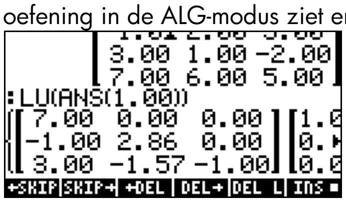
De functie LU

De functie LU neemt als invoer de vierkante matrix **A** en geeft een benedendriehoeksmatrix **L**, een bovendriehoeksmatrix **U** en een permutatiematrix **P** in respectievelijk stapelgeheugenniveau 3, 2 en 1. De uitkomsten **L**, **U** en **P**, voldoen aan de vergelijking **P**·**A** = **L**·**U**. Als u de functie

LU oproept voert de rekenmachine een Crout LU-ontbinding van **A** uit met gedeeltelijk pivoteren.
In de RPN-modus geeft bijvoorbeeld:
`[[-1,2,5][3,1,-2][7,6,5]] LU`
het volgende:

3:[[7 0 0][-1 2.86 0][3 –1.57 –1]]
2: [[1 0.86 0.71][0 1 2][0 0 1]]
1: [[0 0 1][1 0 0][0 1 0]]

Dezelfde oefening in de ALG-modus ziet er als volgt uit:



Orthogonale matrices en singuliere-waardedecompositie

Een vierkante matrix is orthogonaal wanneer de kolommen eenheidsvectoren vertegenwoordigen die wederzijds orthogonaal zijn. Als we dus uitgaan van de matrix **U** = [$\mathbf{v}_1$ $\mathbf{v}_2$ … $\mathbf{v}_n$] waarbij de $\mathbf{v}_i$, i = 1, 2, …, n, kolomvectoren zijn en als $v_i \bullet v_j = \delta_{ij}$, waarbij δ_{ij} de Kronecker's delta functie is, dan is **U** een orthogonale matrix. Deze voorwaarden impliceren ook dat $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{I}$.

De singuliere-waardedecompositie (SVD) van een rechthoekige matrix $\mathbf{A}_{m\times n}$ bestaat uit de bepaling van de matrices **U**, **S** en **V**, zodat $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{U}_{m\times m} \cdot \mathbf{S}_{m\times n} \cdot \mathbf{V}^T_{n\times n}$, waarbij **U** en **V** orthogonale matrices zijn en **S** een diagonale matrix. De diagonale elementen van S worden de <u>singuliere waarden</u> van **A** genoemd en zijn gewoonlijk zodanig geordend dat $s_i \geq s_{i+1}$, met i = 1, 2, …, n-1. De kolommen [$\mathbf{u}_j$] van **U** en [$\mathbf{v}_j$] van **V** zijn de corresponderende singuliere vectoren.

De functie SVD

In de RPN-modus neemt de functie SVD (Singuliere-waardedecompositie) als invoer de matrix $\mathbf{A}_{n\times m}$, en geeft de matrices $\mathbf{U}_{n\times n}$, $\mathbf{V}_{m\times m}$ en een vector s respectievelijk in stapelgeheugen niveaus 3, 2 en 1. De afmeting van vector s is gelijk aan het minimum van de waarden n en m. De matrices **U** en **V** zijn zoals eerder voor de singuliere-waardedecompositie gedefinieerd en de vector s vertegenwoordigt de hoofddiagonaal van de matrix S die we eerder hebben gebruikt.

In de RPN-modus bijvoorbeeld:
`[[5,4,-1],[2,-3,5],[7,2,8]] SVD`

3: [[-0.27 0.81 –0.53][-0.37 –0.59 –0.72][-0.89 3.09E-3 0.46]]
2: [[-0.68 –0.14 –0.72][0.42 0.73 –0.54][-0.60 0.67 0.44]]
1: [12.15 6.88 1.42]

De functie SVL

De functie SVL (Singuliere waarden) geeft de singuliere waarden van een matrix $A_{n \times m}$ als een vector s wiens afmeting gelijk is aan het minimum van de waarden n en m. In de RPN-modus geeft bijvoorbeeld
`[[5,4,-1],[2,-3,5],[7,2,8]] SVL`
de functie [12.15 6.88 1.42].

De functie SCHUR

In de RPN-modus produceert de functie SCHUR de *Schur-decompositie* van een vierkante matrix **A** en geeft de matrices **Q** en **T**, in respectievelijk stapelgeheugen niveau 2 en 1, zodat $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T$, waarbij **Q** een orthogonale matrix is en T een driehoeksmatrix. In de RPN-modus geeft bijvoorbeeld

`[[2,3,-1][5,4,-2][7,5,4]] SCHUR`

als resultaat:
2: [[0.66 –0.29 –0.70][-0.73 –0.01 –0.68][-0.19 –0.96 0.21]]
1: [[-1.03 1.02 3.86][0 5.52 8.23][0 –1.82 5.52]]

De functie LQ

De functie LQ produceert de *LQ factorisering* van een matrix $\mathbf{A}_{n \times m}$ en geeft een beneden $L_{n \times m}$ trapezoïdale matrix, een $\mathbf{Q}_{m \times m}$ orthogonale matrix en een $\mathbf{P}_{n \times n}$ permutatie matrix in stapelgeheugenniveaus 3, 2 en 1. De matrices **A**, **L**, **Q** en **P** staan met elkaar in verband door $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}$. (Een trapezoïdale matrix uit een n×m matrix is het equivalent van een driehoeksmatrix uit een n×n matrix). Bijvoorbeeld:

`[[ 1, -2, 1][ 2, 1, -2][ 5, -2, 1]] LQ`

geeft het volgende:

3: [[-5.48 0 0][-1.10 –2.79 0][-1.83 1.43 0.78]]
2: [[-0.91 0.37 -0.18] [-0.36 -0.50 0.79] [-0.20 -0.78 -0.59]]
1: [[0 0 1][0 1 0][1 0 0]]

De functie QR

In de RPN-modus produceert de functie QR de *QR factorisering* van een matrix $\mathbf{A}_{n\times m}$ en geeft een $\mathbf{Q}_{n\times n}$ orthogonale matrix, een $R_{n\times m}$ boventrapezoïdale matrix en een $P_{m\times m}$ permutatiematrix in stapelgeheugenniveaus 3, 2 en 1. De matrices **A**, **P**, Q en R staan met elkaar in verband door $\mathbf{A}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}$. Bijvoorbeeld `[[ 1,-2,1][ 2,1,-2][ 5,-2,1]] QR` geeft het volgende:
3: [[-0.18 0.39 0.90][-0.37 –0.88 0.30][-0.91 0.28 –0.30]]
2: [[-5.48 –0.37 1.83][0 2.42 –2.20][0 0 –0.90]]
1: [[1 0 0][0 0 1][0 1 0]]

Opmerking: voorbeelden en definities voor alle functies in dit menu staan in de helptekst van de rekenmachine. Probeer deze oefeningen in de ALG-modus om de resultaten in die modus te zien.

Matrix Kwadratische Vormen

Een _kwadratische vorm_ van een vierkante matrix **A** is een polynoomuitdrukking die voorkomt uit $\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^T$. Als we bijvoorbeeld gebruiken **A** = [[2,1,–1][5,4,2][3,5,–1]] en x = [X Y Z]^T, dan wordt de corresponderende kwadratische vorm berekend als

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2X+Y-Z \\ 5X+4Y+2Z \\ 3X+5Y-Z \end{bmatrix}$$

Resultaat: $\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^T = 2X^2+4Y^2\text{-}Z^2+6XY+2XZ+7ZY$

Het menu QUADF

De HP 49 G rekenmachine bevat het menu QUADF voor bewerkingen met kwadratische vormen. Het menu QUADF is toegankelijk via ← MATRICES .

Dit menu bevat de functies AXQ, CHOLESKY, GAUSS, QXA en SYLVESTER.

De functie AXQ

De functie AXQ produceert in RPN-modus de kwadratische vorm die correspondeert met een matrix $\mathbf{A}_{n\times n}$ op stapelgeheugenniveau 2 met de n variabelen in een vector op stapelgeheugenniveau 1. De functie geeft de kwadratische vorm opstapelgeheugenniveau 1 en de vector van variabelen op stapelgeheugenniveau 1. Bijvoorbeeld:

[[2,1,-1],[5,4,2],[3,5,-1]] ENTER
['X','Y','Z'] ENTER AXQ

geeft

2: '2*X^2+(6*Y+2*Z)*X+4*Y^2+7*Z*y-Z^2'
1: ['X' 'Y' 'Z']

De functie QXA

De functie QXA neemt als argumenten een kwadratische vorm op stapelgeheugenniveau 2 en een vector van variabelen op stapelgeheugenniveau 1 en geeft de vierkante matrix **A** waaruit de kwadratische vorm op stapelgeheugenniveau 2, wordt afgeleid en de variabelenlijst op stapelgeheugenniveau 1. Bijvoorbeeld

'X^2+Y^2-Z^2+4*X*Y-16*X*Z' ENTER
['X','Y','Z'] ENTER QXA

geeft

2: [[1 2 –8][2 1 0][-8 0 –1]]
1: ['X' 'Y' 'Z']

Diagonale weergave van een kwadratische vorm

Bij een gegeven symmetrische vierkante matrix **A**, is het mogelijk de matrix **A** te diagonaliseren door een orthogonale matrix **P** te vinden zodat $\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{D}$, waarbij **D** een diagonale matrix is. Als $\mathbf{Q} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^T$ een kwadratische vorm gebaseerd op **A** is, dan is het mogelijk om de kwadratische vorm **Q** zo te schrijven dat deze alleen vierkante termen bevat van een variabele y, zo dat $\mathbf{x} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{y}$, door **Q** te gebruiken als $\mathbf{Q} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^T = (\mathbf{P}\cdot\mathbf{y})\cdot\mathbf{A}\cdot (\mathbf{P}\cdot\mathbf{y})^T = \mathbf{y}\cdot(\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P})\cdot\mathbf{y}^T = y\cdot D\cdot y^T$.

De functie SYLVESTER

De functie SYLVESTER neemt als argument een symmetrische vierkante matrix A en geeft een vector die de diagonale termen van een diagonale matrix D bevat en de matrix P, zo dat $P^T\cdot A\cdot P = D$. Bijvoorbeeld:

```
[[2,1,-1],[1,4,2],[-1,2,-1]] SYLVESTER
```

geeft het volgende:

2: [1/2 2/7 -23/7]

1: [[2 1 –1][0 7/2 5/2][0 0 1]]

De functie GAUSS

De functie GAUSS geeft een diagonale weergave van een kwadratische vorm $Q = \mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^T$ en neemt daarbij als argumenten de kwadratische vorm op stapelgeheugenniveau 2 en de vectorvariabelen op stapelgeheugenniveau 1. Deze functieoproep geeft het volgende:

- Een verzameling coëfficiënten die de diagonale termen van **D** (stapelgeheugenniveau 4) weergeven.
- Een matrix **P** zodat $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{P}$ (stapelgeheugenniveau 3)
- De gediagonaliseerde kwadratische vorm (stapelgeheugenniveau 2)
- De variabelenlijst (stapelgeheugenniveau 1)

Bijvoorbeeld:

```
'X^2+Y^2-Z^2+4*X*Y-16*X*Z' ENTER
    ['X','Y','Z'] ENTER GAUSS
```

geeft

4: [1 –0,333 20,333]

3: [[1 2 –8][0 –3 16][0 0 1]]

2: ’61/3*Z^2+ -1/3*(16*Z+-3*Y)^2+(-8*z+2*Y+X)^2’

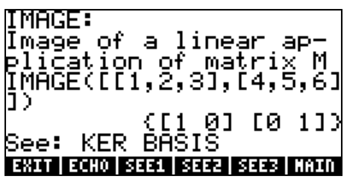
1: [‘X’ ‘Y’ ‘Z’]

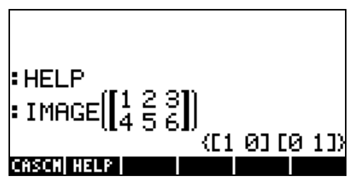
Lineaire toepassingen

Het LINEAIRE Toepassingenmenu is beschikbaar via ← MATRICES .

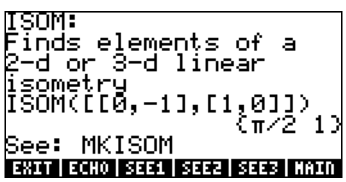
Informatie over de functies in dit menu vindt u hieronder met behulp van de eigen helpteksten van de rekenmachines. De afbeeldingen tonen de helpteksten en de bijgevoegde voorbeelden.

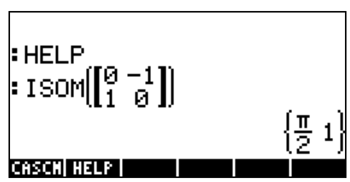
De functie IMAGE



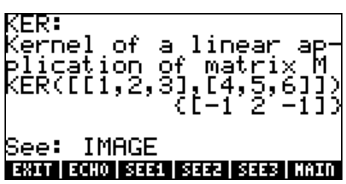


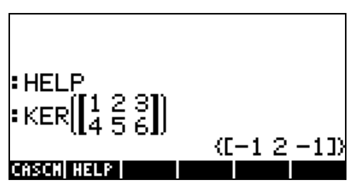
De functie ISOM



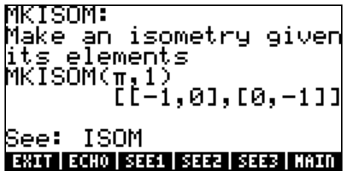


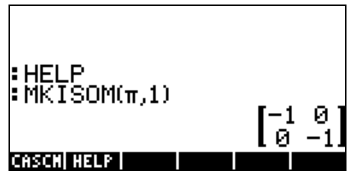
De functie KER





De functie MKISOM





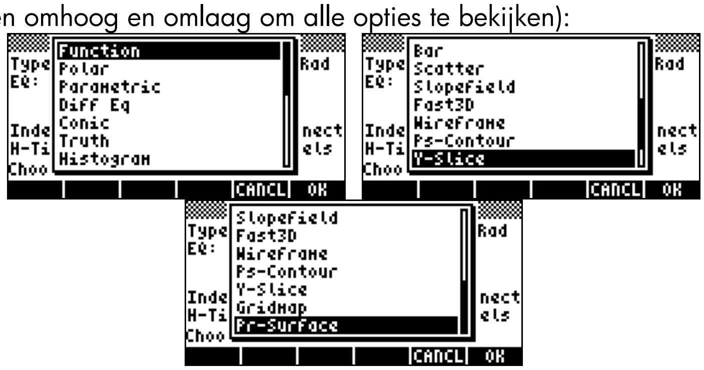
Hoofdstuk 12
Grafieken

In dit hoofdstuk introduceren we enkele van de grafische mogelijkheden van de rekenmachine. We geven grafieken van functies weer in Cartesische coördinaten en polaire coördinaten, parametrische diagrammen, conische grafieken, staafdiagrammen, puntgrafieken en een aantal driedimensionale grafieken.

Grafische opties in de rekenmachine

Voor de lijst van grafische opmaken van de rekenmachine gebruikt u de toetsencombinaties ← 2D/3D (F4). Als u de RPN-modus gebruikt, moet u deze twee toetsen tegelijkertijd indrukken om de grafische functies te activeren. Na activering van de 2D/3D functie geeft de rekenmachine het beeldscherm PLOT SETUP met daarin het veld TYPE zoals hieronder getoond.

Net naast het veld TYPE staat waarschijnlijk de optie *Function* geselecteerd. Dit is het standaardtype grafiek voor de rekenmachine. Als u de lijst van beschikbare grafieksoorten wilt zien, drukt u op de softmenutoets CHOOS. Er verschijnt dan een drop-downmenu met de volgende opties (gebruik de pijltoetsen omhoog en omlaag om alle opties te bekijken):



Deze grafische opties worden hieronder kort beschreven.

Function: voor vergelijkingen in de vorm y = f(x) in Cartesische coördinaten voor oppervlakken
Polar: voor vergelijkingen in de vorm van r = f(θ) in polaire coördinaten in het oppervlak
Parametric: voor grafiekvergelijkingen in de vorm x = x(t), y = y(t) in het oppervlak
Diff Eq: voor het plotten van de numerieke oplossing van een lineaire differentiaalvergelijking
Conic:voor het plotten van conische vergelijkingen (cirkels, ellipsen, hyperbolen, parabolen)
Truth: voor het plotten van ongelijkheden in het oppervlak
Histogram: voor het plotten van frequentiekolomdiagrammen (statistiektoepassingen)
Bar: voor het plotten van eenvoudige staafdiagrammen
Scatter: voor het plotten van puntgrafieken van discrete gegevensverzamelingen (statistiektoepassingen)
Slopefield: voor het plotten van de lijnen voor de richtingscoëffiënten van een functie f(x,y) = 0.
Fast3D: voor het plotten van gebogen oppervlakken in de ruimte
Wireframe: voor het plotten van gebogen oppervlakken met ijzerdraadroosters
Ps-Contour: voor het plotten van profielgrafieken van oppervlakken
Y- Slice: voor grafieken van een doorsnede van een functie f(x,y).
Gridmap: voor het plotten van reële en denkbeeldige deeltjes van een complexe functie
Pr-Surface: voor parametrische oppervlakken met x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v).

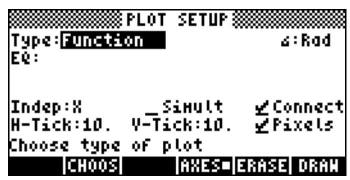
Een uitdrukking in de vorm *y = f(x)* plotten

In dit deel laten we een voorbeeld zien van een diagram van een functie in de vorm *y = f(x).* Om verder te gaan met het diagram moet u eerst de variabele x wissen als deze in de huidige directory is gedefinieerd (x wordt de onafhankelijke variabele in de functie PLOT van de rekenmachine, het is

dus beter om deze niet vooraf te definiëren). Maak een subdirectory met de naam 'TPLOT' (voor 'test plot') of een andere naam aan om de volgende oefening uit te voeren.
Laten we bijvoorbeeld de volgende functie plotten:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$$

- Ga eerst naar de PLOT SETUP-omgeving door op ← 2D/3D te drukken. Zorg dat de optie Function is geselecteerd als TYPE en dat 'X' is geselecteerd als de onafhankelijke variabele (INDEP). Druk op NXT OK om terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine. Het beeldscherm PLOT SETUP moet er ongeveer zo uitzien:



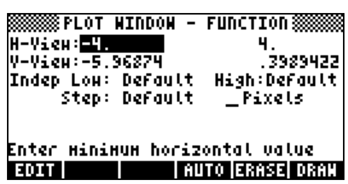
- **Opmerking**: U ziet dat er een nieuwe variabele, PPAR, in de labels van de softmenutoets verschijnt. Dit staat voor Plot PARameters (diagramparameters). Druk op → PPAR om de inhoud te bekijken. U krijgt later in dit hoofdstuk een uitgebreide uitleg over de inhoud van PPAR. Druk op ◄ om de regel uit het stapelgeheugen te verwijderen.

- Ga naar de PLOTomgeving door op ← Y= te drukken (druk deze toetsen tegelijkertijd in als u in de RPN-modus staat). Druk op ADD om naar de vergelijkingenschrijver te gaan. U wordt gevraagd om de rechterkant van een vergelijking Y1(x) = ▪ in te vullen. Voer de functie in die u wilt plotten, de Vergelijkingenschrijver toont het volgende:

- Druk op ENTER om terug te keren naar het scherm PLOT SETUP. De uitdrukking ‘Y1(X) = EXP(-X^2/2)/√(2*π)’ wordt gemarkeerd. Druk op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

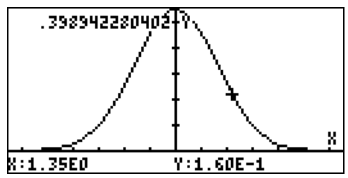
> **Opmerking** : Er verschijnen twee nieuwe variabelen in de labels van de softmenutoets, namelijk EQ en Y1. Druk op ↱ EQ om de inhoud van EQ te bekijken. De inhoud van EQ is alleen de functienaam ‘Y1(X)’. De variabele EQ wordt door de rekenmachine gebruikt om de vergelijking(en) op te slaan en er een grafiek van te maken.
>
> Druk op ↱ Y1 om de inhoud van Y1 te bekijken. De functie Y1(X) wordt gedefinieerd als het programma:
>
> `<< →X ‘EXP(-X^2/2)/√(2*π)‘ >>.`
>
> Druk twee keer op ◄ om de inhoud uit het stapelgeheugen te verwijderen.

- Ga naar de PLOT WINDOW-omgeving door op ↰ WIN te drukken (druk deze tegelijkertijd in als u in de RPN-modus staat). Gebruik een bereik van –4 tot 4 voor de H-VIEW en druk dan op AUTO om automatisch de V-VIEW te genereren. Het beeldscherm PLOT WINDOW ziet er als volgt uit:



- Om de grafiek te plotten: ERASE DRAW (wacht tot de rekenmachine klaar is met de grafieken)
- Om labels te zien: EDIT NXT LABEL MENU
- Om terug te keren naar het eerste grafiekmenu: NXT NXT PICT

- Om de curve te traceren: TRACE (X,Y). Gebruik dan de pijltjes links en rechts (◄ ►) om door de grafiek te bewegen. De coördinaten van de punten die u traceert, worden onder in het scherm getoond. Controleer of x = 1.05 , y = 0.231. Controleer ook of x = -1.48 , y = 0.134. Hier ziet u de afbeelding van de grafiek in de traceermodus



- Druk op NXT CANCL en dan NXT OK om terug te keren naar het menu en de PLOT WINDOW-omgeving.

Enkele handige PLOT-handelingen voor FUNCTION-diagrammen

Als we deze PLOT-opties willen behandelen, moeten we de functie aanpassen, zodat hij echte wortels krijgt (omdat de huidige curve helemaal boven de x-as staat, heeft deze geen echte wortels). Druk op ↱ Y1 om de inhoud van de functie Y1 in het stapelgeheugen weer te geven: << →X 'EXP(-X^2/2)/ √(2*π) ' >>. Zo bewerkt u de uitdrukking:

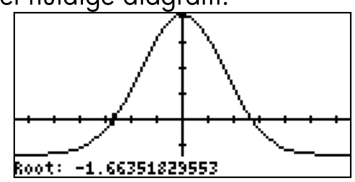
▼	Activeert de lijneditor
↱ ▼	Zet de cursor aan het eind van de lijn
◄ ◄ ◄ − 0 • 1	Past de uitdrukking aan
ENTER	Keert terug naar het beeldscherm van de rekenmachine

Sla de aangepaste uitdrukking nu op in variabele y met de toetsen ↰ Y1 in de RPN-modus, of met de toetsen ↰ ANS STO► Y1 in de ALG-modus.

De te plotten functie is nu: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) - 0.1$

Ga naar de PLOT WINDOW-omgeving door op ↰ WIN te drukken (druk deze tegelijkertijd in als u in de RPN-modus staat). Gebruik een bereik van –4 tot 4 voor de H-VIEW en druk dan op ▼ AUTO om de V-VIEW te genereren. Druk op ERASE DRAW om de grafiek te plotten.

- Als de grafiek is geplot, drukt u op FCN om in het menu *function* te komen. Met dit menu kunt u meer informatie krijgen over het diagram, dus de snijpunten met de x-as, wortels, richtingscoëffiënten van de raaklijn, het gebied onder de curve, enz.
- Als u bijvoorbeeld de wortel links van de curve wilt vinden, zet u de cursor bij dat punt en drukt u op ROOT. U krijgt het volgende resultaat: ROOT: -1.6635…. Druk op NXT voor het menu . Dit is het resultaat van ROOT in het huidige diagram:



- Als u de cursor naar de rechterzijde van de curve beweegt door op de pijltoets rechts (▶) te drukken en daarna op ROOT, krijgt u als resultaat ROOT: 1.6635... De rekenmachine geeft voordat de wortel werd weergegeven, aan dat deze werd gevonden via *SIGN REVERSAL.* Druk op NXT voor het menu.
- Als u op ISECT drukt, krijgt u het snijpunt van de curve met de x-as, wat eigenlijk de wortel is. Plaats de cursor precies bij de wortel en druk op ISECT. U krijgt hetzelfde bericht als eerder, namelijk *SIGN REVERSAL*, voordat het resultaat verschijnt: I-SECT: 1.6635…. Met de functie ISECT kunt u het snijpunt van twee curven bepalen dat het dichtst bij de cursor staat. In dit geval, waarbij we maar één curve hebben, namelijk Y1(X), zoeken we het snijpunt f(x) met de x-as, maar u moet de cursor precies bij de wortel zetten om hetzelfde resultaat te krijgen. Druk op NXT voor het menu.
- Plaats de cursor op een punt op de curve en druk op SLOPE om de waarde van de richtingscoëffiënt op dat punt te krijgen. Bijvoorbeeld bij de negatieve wortel: SLOPE: 0.16670…. Druk op NXT voor het menu.

- Om het hoogste punt in de curve te krijgen, zet u de cursor naast de top en drukt u op EXTR. Het resultaat is EXTRM: 0. Druk voor NXT om het menu.
- De andere toetsen in het eerste menu zijn AREA voor het berekenen van het gebied onder de curve en SHADE om een gebied onder de curve te arceren. Druk op NXT voor meer opties. Het tweede menu heeft onder meer de toets VIEW die enkele seconden knippert als de vergelijking wordt geplot. Druk op VIEW. U kunt ook op de toets NEXQ (volgende vergelijking) drukken om de naam van de functie Y1(x) te zien. Druk op NXT voor het menu .
- De toets F(X) geeft de waarde f(x) die overeenkomt met de positie van de cursor. Plaats de cursor ergens in de curve en druk op F(X). De waarde wordt weergegeven in de linkeronderhoek in het beeldscherm. Druk op NXT voor het menu.
- Plaats de cursor op een punt in de diagram en druk op TANL om de vergelijking van de raaklijn naar de curve op dat punt te krijgen. De vergelijking wordt weergegeven in de linkeronderhoek in het beeldscherm. Druk op NXT voor het menu.
- Als u op F' drukt, plot de rekenmachine de afgeleide functie, f'(x) = df/dx, net als de originele functie, f(x). U ziet dat de twee curven elkaar op twee punten snijden. Plaats de cursor bij het linkersnijpunt en druk op FCN ISECT voor I-SECT: (-0.6834…,0.21585). Druk op NXT voor naar het menu.
- Druk op EXIT (of NXT EXIT) om de FNC-omgeving te verlaten.
- Druk op CANCL om terug te keren naar de PLOT WINDOW-omgeving. Druk daarna op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

Opmerking: het stapelgeheugen toont alle uitgevoerde grafiekhandelingen, met identificatie.

- Ga naar de PLOT-omgeving door op ← Y= te drukken, tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus. U ziet dat het gemarkeerde veld in de PLOT-omgeving nu de afgeleide van Y1(X) bevat. Druk op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

- Druk op ↱ EQ om de inhoud van EQ te controleren. U ziet dat er nu een lijst staat in plaats van een enkele uitdrukking. De lijst heeft als elementen een uitdrukking voor de afgeleide van Y1(X) en Y1(X) zelf. Eerder bevatte EQ alleen Y1(x). Als we op F' hebben gedrukt in de FCN-omgeving, voegt de rekenmachine automatisch de afgeleide van Y1(x) toe aan de lijst met vergelijkingen in EQ.

Een grafiek opslaan voor later gebruik

Als u uw grafiek wilt opslaan in een variabele, gaat u naar de PICTURE-omgeving door op ◄ te drukken. Druk daarna op EDIT NXT NXT PICT→. De huidige afbeelding staat nu in een grafiekobject. Druk op PICT CANCL om terug te gaan naar het stapelgeheugen.

Op niveau 1 van het stapelgeheugen ziet u een grafiekobject beschreven als Grafiek `131 × 64`. Die kan worden opgeslagen in een variabelennaam, bijvoorbeeld PIC1.

Als u de afbeelding opnieuw weer wilt weergeven, roept u de inhoud van variabele PIC1 in het stapelgeheugen op. Het stapelgeheugen geeft de regel: `Graphic 131 × 64`. Als u de grafiek wilt zien, gaat u naar de PICTURE omgeving door op ◄ te drukken.

Wis de huidige afbeelding, EDIT NXT ERASE.

Zet de cursor in de linkerbovenhoek in het beeldscherm met de toetsen ◄ en ▲.

Druk op NXT REPL als u de afbeelding op niveau 1 van het stapelgeheugen wilt weergeven .

Druk op PICT CANCL om terug te keren naar de normale functie van de rekenmachine.

Opmerking: omdat het anders teveel papier zou kosten, geven we bij de instructies in dit hoofdstuk geen grafieken meer. We vragen de gebruiker deze grafieken zelf af te drukken.

Grafieken van transcendente functies

In dit deel gebruiken we enkele grafiekkenmerken van de rekenmachine om het typische gedrag van de natuurlijke log-, exponentiële, trigonometrische en hyperbolische functies te laten zien. U ziet in dit hoofdstuk geen grafieken, omdat ik die in uw rekenmachine wil zien.

Grafiek van ln(X)

Druk, tegelijkertijd in de RPN-modus, op de toets links-shift ⬅ en de toets 2D/3D (F4) om het venster PLOT SETUP op te roepen. Het veld **Type** wordt gemarkeerd. Als de optie `Function` niet al is geselecteerd, drukt u op de softtoets CHOOS, gebruik de pijltoetsen omhoog en omlaag om `Function` te selecteren en druk op OK om de selectie te voltooien. Controleer of het veld Indep: de variabele 'X' bevat. Als dat niet het geval is, drukt u twee keer op de pijltoets omlaag totdat het veld `Indep` is gemarkeerd, druk op de softtoets EDIT en pas de waarde van de onafhankelijke variabele aan zodat er 'X' staat. Druk op OK als u klaar bent. Druk op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

Nu gaan we de grootte van het diagramvenster wijzigen. Druk daarna, tegelijkertijd in de RPN-modus, op de toets links-shift ⬅ en de toets Y= (F1) voor het venster PLOT-FUNCTION. Als er een vergelijking is gemarkeerd in dit venster, drukt u zo vaak als nodig op DEL om het venster volledig te wissen. Als het venster PLOT-FUNCTION leeg is, krijgt u de volgende melding: **No Equ., Press ADD**. Druk op de softtoets ADD. Hierdoor wordt de vergelijkingenschrijver geactiveerd met de uitdrukking Y1(X)=◄. Typ LN(X). Druk op ENTER om terug te keren naar het beeldscherm PLOT FUNCTION. Druk op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

De volgende stap is het indrukken van de toets links-shift ⬅ en de toets WIN (F2) tegelijkertijd als u in de RPN-modus staat, zodat het venster PLOT WINDOW - FUNCTION verschijnt. Het beeldscherm zal waarschijnlijk de horizontale (H-View) en verticale (`V-View`) bereiken als volgt weergeven: H-View: -6.5 6.5, V-View: -3.1 3.2

Dit zijn de standaardwaarden voor respectievelijk het x- en y-bereik van het huidige grafiekenvenster. Verander de waarden van H-View als volgt: H-View:

-1 10 met 1 +/- OK 1 0 OK. Druk daarna op softtoets AUTO zodat de rekenmachine het verticale bereik kan bepalen. Na een paar seconden wordt dit bereik in het venster PLOT WINDOW-FUNCTION getoond. We kunnen nu de grafiek ln(X) produceren. Druk op ERASE DRAW om de natuurlijke-logaritmefunctie te plotten.

Druk op EDIT NXT LABEL <u>om labels aan de grafiek toe te voegen</u>. Druk op MENU om de menulabels te verwijderen en de grafiek volledig te zien. Druk op NXT om het huidige grafiekmenu op te roepen. Druk op NXT PICT om het originele grafische menu op te roepen.

Druk op TRACE (de cursor gaat naar de bovenzijde van de curve op een punt bij het midden van het horizontale bereik) <u>om de coördinaten van punten op de curve te bepalen</u>. Druk daarna op (X,Y) voor de coördinaten van de huidige locatie van de cursor. U ziet deze coördinaten onder in het scherm. Gebruik dan de pijltoetsen rechts en links om de cursor langs de curve te laten bewegen. Terwijl u de cursor langs de curve beweegt, worden de coördinaten onder in het scherm weergegeven. Controleer of Y:1.00E0, X:2.72E0. Dit is het punt (*e,1*), omdat *ln(e) = 1*. Druk op NXT voor het grafiekmenu.

Als we dan nu op FCN ROOT drukken, <u>krijgen we het snijpunt van de curve</u> met de x-as. De rekenmachine geeft de waarde `Root: 1`, ter bevestiging dat *ln(1) = 0*. Druk op NXT NXT PICT CANCL om terug te keren naar PLOT WINDOW – FUNCTION. Druk op ENTER om terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine. U ziet dat de wortel die in de grafiekomgeving werd gevonden naar het stapelgeheugen van de rekenmachine werd gekopieerd.

Opmerkingen: als u op VAR drukt, geeft de variabelenlijst de nieuwe waarden X en Y1. Druk op ↱ Y1 om de inhoud van deze variabele te bekijken. Het programma << → X 'LN(X)' >> verschijnt, dat u herkent als het programma dat geactiveerd kan worden met de functie 'Y1(X) = LN(X)' door de toetsen ↰ DEF in te drukken. Dit gebeurt eigenlijk als u een functie toevoegt ADD aan het venster PLOT – FUNCTION (het venster dat verschijnt als u drukt op ↰ Y=, tegelijkertijd in de RPN-modus), dus de functie wordt gedefinieerd en toegevoegd aan uw variabelenlijst.

Druk daarna op ‚ X om de inhoud van deze variabele te bekijken. De waarde 10.275 wordt in het stapelgeheugen geplaatst. Deze waarde wordt bepaald door uw selectie van het horizontale weergavenbereik. We hebben een bereik tussen -1 en 10 geselecteerd voor X. Voor de grafiek genereert de rekenmachine waarden tussen de bereikgrenzen door een constante toename te gebruiken en de gegenereerde waarden een voor een op te slaan in de variabele X als de grafiek wordt getekend. Voor het horizontale bereik (–1.10) lijkt de gebruikte stapgrootte 0.275 te zijn. Als de waarde X groter dan de maximale waarde in het bereik wordt (in dit geval als X = 10.275), dan wordt het tekenen van de grafiek onderbroken. De laatste waarde van X voor de betreffende grafiek wordt in variabele X bewaard. Wis X en Y1 voordat u verder gaat.

Grafiek van de exponentiële functie

Activeer eerst de functie *exp(X)* door in de RPN-modus tegelijkertijd de toets links-shift „ en de toets Y= (EEX) in te drukken in het venster PLOT-FUNCTION te komen. Druk op DEL om de functie LN(X) te verwijderen als u Y1 niet heeft verwijderd, zoals we in de vorige opmerking voorstelden. Druk op ADD en voer „ e^x ALPHA X ENTER in om EXP(X) in te voeren en ga terug naar het venster PLOT-FUNCTION. Druk op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

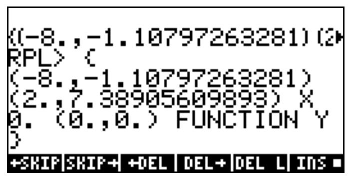
Druk daarna, tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, op de toets links-shift „ en de toets WIN (F2) voor het venster PLOT WINDOW - FUNCTION. Verander de waarden van H-View als volgt: H-View: -8 2

met 8 +/- OK 2 OK. Druk daarna op AUTO. Druk, nadat het verticale bereik is berekend, op ERASE DRAW om de exponentiële functie te plotten.

Druk op EDIT NXT LABEL om labels aan de grafiek toe te voegen. Druk op MENU om de menulabels te verwijderen en de grafiek volledig te zien. Druk op NXT NXT PICT CANCL om terug te keren naar PLOT WINDOW – FUNCTION. Druk op ENTER om terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine.

De PPAR-variabele

Druk indien nodig op VAR om de variabelenmenu's op te roepen. In het variabelenmenu moet een variabele PPAR staan. Druk op ↱ PPAR om de inhoud van deze variabele in het stapelgeheugen te zetten. Druk op de pijltoets omlaag om de stapelgeheugeneditor te activeren en gebruik de pijltoetsen omhoog en omlaag om de volledige inhoud van PPAR te bekijken. Het scherm toont de volgende waarden:



PPAR staat voor *Plot PARameters* (diagramparameters) en de inhoud omvat onder meer twee geordende paren van reële getallen (-8.,-1.10797263281) en (2.,7.38905609893), die staan voor de *coördinaten* van respectievelijk *de linkeronderhoek en de rechterbovenhoek* van het diagram. De PPAR vermeldt daarna de *naam van de onafhankelijke variabele*, X, gevolgd door een getal dat de *stapgrootte van de onafhankelijke variabele* bij het genereren van het diagram specificeert. Deze waarde is de standaardwaarde, nul (0.), die stapgrootten in X aangeeft die overeenkomen met 1 pixel in de grafiekenweergave. Het volgende element in PPAR is een *lijst met eerst de coördinaten van het snijpunt van de diagramassen*, dus (0.,0.), *gevolgd door een lijst die de cijfernotatie specificeert* op respectievelijk de x- en y-assen {10d # 10d}. Daarna vermeldt de PPAR het *diagramtype* dat moet worden gegenereerd, dus FUNCTION, en uiteindelijk het *label van de y-as*, dus Y.

De variabele PPAR, als deze niet bestaat, wordt steeds gegenereerd wanneer u een diagram aanmaakt. De inhoud van de functie zal veranderen, afhankelijk van het diagramtype en van de opties die u selecteert in het venster PLOT (het venster dat door de gelijktijdige activering van de toetsen ↰ en WIN (F2) verschijnt).

Inverse functies en de grafieken

Als $y = f(x)$, als we de functie $y = g(x)$ kunnen vinden, zodat, $g(f(x)) = x$, dan zeggen we dat $g(x)$ de *inverse functie* van $f(x)$ is. Meestal wordt de notatie $g(x) = f^{-1}(x)$ gebruikt om een inverse functie aan te geven. Met deze functie kunnen we het volgende schrijven: als $y = f(x)$, dan $x = f^{-1}(y)$. Ook $f(f^{-1}(x)) = x$ en $f^{-1}(f(x)) = x$.

Zoals we eerder al aangaven, zijn de functies ln(x) en exp(x) inverse functies van elkaar, dus ln(exp(x)) = x en exp(ln(x)) = x. Dit kan worden geverifieerd in de rekenmachine door de volgende uitdrukkingen in de vergelijkingenschrijver in te voeren en te evalueren: LN(EXP(X)) en EXP(LN(X)). Ze moeten beiden tot X geëvalueerd worden.

Als een functie $f(x)$ en de bijbehorende inverse $f^{-1}(x)$ tegelijkertijd worden geplot in dezelfde verzameling assen, dan zijn hun grafieken weerspiegelingen van elkaar over de lijn $y = x$. Laten we dit controleren met de rekenmachine voor de functies LN(X) en EXP(X) door de volgende procedure te volgen:

Druk, tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, op ⬅ Y= . De functie Y1(X) = EXP(X) moet nog van de vorige oefening in het venster PLOT - FUNCTION staan. Druk op ADD en voer de functie `Y2(X) = LN(X)` in. Activeer nu de functie Y3(X) = X. Druk op NXT OK om terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine.

Druk, tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, op ⬅ WIN en wijzig het bereik van de H-View als volgt: H-View: -8 8

Druk op AUTO om het verticale bereik te genereren. Druk op ERASE DRAW om de grafiek y = ln(x), y = exp(x) en y =x te produceren, de toetsen tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus.

U ziet dat alleen de grafiek van y = exp(x) duidelijk zichtbaar is. Er ging iets verkeerd bij de selectie van AUTO voor het verticale bereik. Het volgende is gebeurd: als u op AUTO drukt in het scherm PLOT FUNCTION – WINDOW, dan geeft de rekenmachine het verticale bereik dat hoort bij de eerste functie in de lijst met functies die geplot moeten worden. In dit geval is dat dus Y1(X) = EXP(X). We moeten het verticale bereik zelf invoeren om de andere twee functies in hetzelfde diagram weer te geven.

Druk op CANCL om terug te keren naar het scherm PLOT FUNCTION – WINDOW. Pas de verticale en horizontale bereiken aan zodat u het volgende krijgt: H-View: -8   8, V-View: -4   4

Als we deze bereiken selecteren, zorgen we dat de schaal van de grafiek 1 verticaal tot 1 horizontaal blijft. Druk op ERASE DRAW en u krijgt de diagrammen van de functies natuurlijke logaritme, exponentieel en *y* = *x*. De grafieken laten duidelijk zien dat LN(X) en EXP(X) weerspiegelingen van elkaar zijn over de lijn y = X. Druk op CANCL om terug te keren naar PLOT WINDOW – FUNCTION. Druk op ENTER om terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine.

Samenvatting van de bewerkingen met FUNCTION-diagrammen

In dit deel behandelen we de vensters PLOT SETUP, PLOT-FUNCTION en PLOT WINDOW. Deze worden geactiveerd met de toets links-shift in combinatie met de softmenutoetsen F1 tot en met F4 . Op basis van de grafische voorbeelden die we eerder gaven, is de procedure voor het produceren van een FUNCTION-diagram (dus een die een of meerdere functies in de vorm Y = F(X) in een grafiek zet) als volgt:

Druk op ← 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, omhet venster PLOT SETUP te activeren. Wijzig indien nodig `TYPE` in `FUNCTION` en voer de naam van de onafhankelijke variabele in.

<u>Instellingen</u>:

- Een vinkje bij `_Simult` betekent dat als u twee of meer diagrammen in dezelfde grafiek heeft, ze tegelijkertijd worden geplot als de grafiek wordt aangemaakt.
- Een vinkje bij `_Connect` betekent dat de curve een continue curve en geen verzameling individuele punten is.

- Een vinkje bij `_Pixels` betekent dat de markeringen die door `H-Tick` en `V-Tick` worden aangegeven, door zoveel pixels worden gescheiden.
- De standaardwaarde voor de `H-Tick` en `V-Tick` is 10.

Menuopties voor softtoetsen:

- Gebruik EDIT om functies van waarden in het geselecteerde veld te bewerken.
- Gebruik CHOOS om het diagramtype te selecteren dat moeten worden gebruikt als het veld `Type:` is gemarkeerd. Voor deze oefeningen moet het veld worden ingesteld op FUNCTION.

> **Opmerking:** de softmenutoetsen EDIT en CHOOS zijn niet tegelijkertijd beschikbaar. Een van beide wordt geselecteerd, dit hangt af van het gemarkeerde invoerveld.

- Druk op de softmenutoets AXES om het plotten van assen in de grafiek te selecteren of te deselecteren. Als de optie 'plot axes' is geselecteerd, verschijnt er een vierkantje in het toetslabel: AXES■. Als er geen vierkantje staat, worden de assen niet in deze grafiek geplot.
- Gebruik ERASE om grafieken die nog in het grafiekenvenster staan te verwijderen.
- Gebruik DRAW om de grafiek te produceren aan de hand van de huidige inhoud van PPAR voor de vergelijkingen die in het venster PLOT-FUNCTION staan.
- Druk op NXT om naar de tweede verzameling softmenutoetsen in dit scherm te gaan.
- Gebruik RESET om geselecteerde velden weer op de standaardwaarde in te stellen.
- Gebruik CANCL om eventuele wijzigingen in het venster PLOT SETUP te annuleren en terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine.
- Druk op OK om wijzigingen in de opties in het venster PLOT SETUP op te slaan en terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine.

Druk op ← Y=, tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus om het venster PLOT te activeren (in dit geval wordt dit venster PLOT –FUNCTION genoemd).

Opties voor softmenutoetsen

- Gebruik EDIT om de gemarkeerde vergelijking te bewerken.
- Gebruik ADD om nieuwe vergelijkingen aan het diagram toe te voegen.

Opmerking : ADD of EDIT zal de vergelijkingenschrijver EQW activeren, waarmee u nieuwe vergelijkingen kunt schrijven of oude vergelijkingen kunt bewerken.

- Gebruik DEL om de gemarkeerde vergelijking te verwijderen.
- Gebruik CHOOS om een vergelijking toe te voegen die al in uw variabelenmenu is gedefinieerd, maar niet in het venster PLOT – FUNCTION staat.
- Gebruik ERASE om grafieken die nog in het grafiekenvenster staan te verwijderen.
- Gebruik DRAW om de grafiek aan te maken aan de hand van de huidige inhoud van PPAR voor de vergelijkingen die in het venster PLOT-FUNCTION staan.
- Druk op NXT om de tweede menulijst te activeren
- Gebruik MOVE↑ en MOVE↓ om de geselecteerde vergelijking respectievelijk een locatie omhoog of omlaag te verplaatsen.
- Gebruik CLEAR om alle vergelijkingen die nu actief zijn in het venster PLOT – FUNCTION te wissen. De rekenmachine controleert of u alle functies wilt verwijderen, voordat ze daadwerkelijk worden verwijderd. Selecteer YES en druk op OK om alle functies te wissen. Selecteer NO en druk op OK als u de optie CLEAR wilt annuleren.
- Druk op OK als u klaar bent om terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine.

Druk op ← WIN , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus omhet venster PLOT WINDOW te activeren.

Instellingen:

- Voer de onder- en bovengrens in voor de horizontale (H-View) en verticale (V-View) bereiken in het diagrammenvenster. Of
- Voer de onder- en bovengrens in voor het horizontale beeld (H-View) en druk op AUTO, terwijl de cursor in een van de velden V-View staat om het verticale beeld (V-View) automatisch te genereren.

- Voer de onder- en bovengrens in voor het verticale beeld (V-View) en druk op AUTO, terwijl de cursor in een van de H-View-velden staat om het horizontale (H-View) bereik automatisch te genereren.
- De rekenmachine gebruikt het horizontale (H-View) bereik om gegevenswaarden te genereren voor de grafiek, tenzij u de opties Indep Low, (Indep) High en (Indep) Step wijzigt. Deze waarden bepalen respectievelijk de minimale, maximale en stapgroottewaarden van de onafhankelijke variabele die in het diagram moeten worden gebruikt. Als de optie Default in de velden Indep Low, (Indep) High en (Indep) Step is geselecteerd, zal de rekenmachine de minimale en maximale waarden gebruiken die door H-View worden bepaald.
- Een vinkje bij _Pixels betekent dat de waarden van de onafhankelijke variabele stapgrootte (Step:) worden aangegeven in pixels en niet in diagramcoördinaten.

<u>*Opties voor softmenutoetsen*</u>:

- Gebruik EDIT om een invoer in het venster te bewerken.
- Gebruik AUTO zoals werd uitgelegd bij <u>*Instellingen*</u> hierboven.
- Gebruik ERASE om grafieken die nog in het grafiekenvenster staan te verwijderen.
- Gebruik DRAW om de grafiek te produceren aan de hand van de huidige inhoud van PPAR voor de vergelijkingen die in het venster PLOT-FUNCTION staan.
- Druk op NXT om de tweede menulijst te activeren.
- Gebruik RESET om het geselecteerde veld (dus op de plaats waar de cursor staat) weer op de standaardwaarde te zetten.
- Gebruik CALC om in het stapelgeheugen van de rekenmachine te komen voor het uitvoeren van berekeningen die nodig kunnen zijn om een waarde voor een van de opties in dit venster te krijgen. Als het stapelgeheugen van de rekenmachine beschikbaar is, zijn de opties voor de softmenutoetsen CANCL ook OK beschikbaar.
- Gebruik CANCL als u de huidige berekening wilt annuleren en naar het scherm PLOT WINDOW terug wilt keren.
- Gebruik OK als u de resultaten van uw berekening wilt accepteren en naar het scherm PLOT WINDOW terug wilt keren.

- Gebruik TYPES voor informatie over het type objecten dat in het geselecteerde optieveld kan worden gebruikt.
- Gebruik CANCL om eventuele wijzigingen in het venster PLOT WINDOW te annuleren en terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine.
- Druk op OK om eventuele wijzigingen in het venster PLOT WINDOW te accepteren en terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine.

Druk op ← GRAPH, tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus. Plot de grafiek op basis van de instellingen die in variabele PPAR zijn opgeslagen en de huidige functies die in het venster PLOT - FUNCTION zijn gedefinieerd. Als er al een grafiek, een andere dan de grafiek die u aan het plotten bent, in het grafiekscherm staat, wordt het nieuwe diagram over het bestaande diagram geschreven. Dit kan niet het gewenste resultaat zijn en dus raad ik u aan de softmenutoetsen ERASE DRAW in de vensters PLOT SETUP, PLOT-FUNCTION of PLOT WINDOW te gebruiken.

Diagrammen van trigonometrische en hyperbolische functies

De hierboven gebruikte procedures voor het plotten van LN(X) en EXP(X), apart of tegelijkertijd, kunnen worden gebruikt om elke functie in de vorm y = f(x) te plotten. De lezer kan er diagrammen van trigonometrische en hyperbolische functies en hun inverse mee produceren. De onderstaande tabel geeft waarden die kunnen worden gebruikt voor de verticale en horizontale bereiken in elk geval. U kunt de functie Y=X gebruiken bij het gelijktijdig plotten van een functie en de inverse om hun 'reflectie' over de lijn Y = X te controleren.

	Bereik H-View		Bereik V-View	
Functie	**Minimum**	**Maximum**	**Minimum**	**Maximum**
SIN(X)	-3.15	3.15	AUTO	
ASIN(X)	-1.2	1.2	AUTO	
SIN & ASIN	-3.2	3.2	-1.6	1.6
COS(X)	-3.15	3.15	AUTO	

ACOS(X)	-1.2	1.2	AUTO	
COS & ACOS	-3.2	3.2	-1.6	1.6
TAN(X)	-3.15	3.15	-10	10
ATAN(X)	-10	10	-1.8	1.8
TAN & ATAN	-2	-2	-2	-2
SINH(X)	-2	2	AUTO	
ASINH(X)	-5	5	AUTO	
SINH & ASINH	-5	5	-5	5
COSH(X)	-2	2	AUTO	
ACOSH(X)	-1	5	AUTO	
COS & ACOS	-5	5	-1	5
TANH(X)	-5	5	AUTO	
ATANH(X)	-1.2	1.2	AUTO	
TAN & ATAN	-5	5	-2.5	2.5

Een tabel met waarden voor een functie aanmaken

Met de toetsencombinaties ← TBLSET (F5) en ← TABLE (F6), tegelijkertijd ingedrukken in de RPN-modus, kan de gebruiker een tabel met waarden van functies maken. We maken als voorbeeld een tabel van de functie Y(X) = X/(X+10) in het bereik -5 < X < 5 aan de hand van deze instructies:

- We genereren waarden van de hierboven gedefinieerde functie f(x) voor waarden van x van –5 tot 5 in stapgrootten van 0.5. Eerst moeten we ervoor zorgen dat het grafiektype op **FUNCTION** staat in het scherm PLOT SETUP (← 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus in). Het veld naast de optie *Type* wordt gemarkeerd. Als dit veld niet al is ingesteld op **FUNCTION**, druk dan op de softtoets CHOOS en selecteer de optie **FUNCTION**, druk vervolgens op OK.
- Druk vervolgens op ▼ om het veld naast de EQ-optie te markeren en voer de volgende functie-uitdrukking in: 'X/(X+10)'
- Druk op NXT OK om de wijzigingen in het scherm PLOT SETUP te accepteren. U keert terug naar het normale beeldscherm van de rekenmachine.

- De volgende stap is om naar het scherm Table Set-up te gaan met de toetsencombinatie ← TBLSET (dus de softtoets F5) – tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus. U krijgt een scherm waarin u de beginwaarde (*Start*) en de stapgrootte (*Step*) kunt selecteren. Voer het volgende in: 5 +/- OK 0 • 5 OK 0 • 5 OK (dus Zoomfactor = 0.5). Indien gewenst, kunt u herhaaldelijk op de ✓CHK-softmenutoets drukken tot een vinkje verschijnt voor de optie *Small Font*. Druk dan op OK. U gaat nu terug naar het normale beeldscherm van de rekenmachine.

De variabele TPAR

Als u de instellingen van de tabel heeft voltooid, maakt de rekenmachine een variabele TPAR (TabelPARameters) die informatie opslaat met betrekking tot de tabel die wordt gegenereerd. Druk op → TPAR om de inhoud van die variabele te bekijken.

- Druk op ← TABLE (dus softmenutoets F6) om de tabel te zien – tegelijkertijd indrukken in RPN-modus. U krijgt een tabel van waarden van *x = -5, -4.5, …* en de corresponderende waarden van f(x), standaard als Y1 genoteerd. U kunt de pijltoetsen omhoog en omlaag gebruiken om in de tabel te bewegen. U ziet dat we geen eindwaarde voor de onafhankelijke variabele x aan hoefden te geven. De tabel gaat daarom verder dan de voorgestelde maximumwaarde voor x, namelijk x = 5.

Enkele opties die beschikbaar zijn wanneer de tabel te zien is, zijn ZOOM, BIG en DEFN:

- De toets DEFN, indien geselecteerd, toont de definitie van de onafhankelijke variabele.
- De toets BIG- verandert de lettertekens van klein naar groot en andersom. Probeer het maar eens.
- De toets ZOOM geeft wanneer u erop drukt een menu met de volgende opties: *In*, *Out*, *Decimal*, *Integer* en *Trig*. Probeer de volgende oefeningen:

- Druk op OK met de optie *In* gemarkeerd. De tabel wordt zo uitgebreid dat de x-stapgrootte nu 0.25 in plaats van 0.5 is. De rekenmachine vermenigvuldigt dus heel eenvoudig de originele stapgrootte 0.5 met de zoomfactor 0.5 en komt zo tot de nieuwe stapgrootte 0.25. De optie *zoom in* is handig wanneer u een hogere resolutie wilt voor de waarden van x in uw tabel.
- Druk op ZOOM, selecteer nogmaals *In* en druk dan op OK om de resolutie met nog een factor 0.5 te verhogen. De x-stapgrootte is nu 0.0125.
- Druk op ZOOM ▲ OK om de optie *Un-zoom* te selecteren die weer teruggaat naar de vorige x-stapgrootte. De x-stapgrootte is nu afgenomen tot 0.25.
- U kunt nogmaals *un-zoom* uitvoeren of de optie *zoom out* gebruiken door op ZOOM OK te drukken om de originele x-stapgrootte van 0.5 te herstellen.
- De optie Decimal in ZOOM geeft x-stapgrootten van 0.10.
- De optie Integer in ZOOM geeft x-stapgrootten van 1.
- De optie Trig in geeft stapgrootten die betrekking hebben op breuken van π, dat is handig als u diagrammen maakt van trigonometrische functies.
- Druk op ENTER om terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine.

Diagrammen in polaire coördinaten

Ten eerste wilt u misschien de variabelen verwijderen die u in eerdere voorbeelden heeft gebruikt (bijvoorbeeld X, EQ, Y1, PPAR) met de functie PURGE (TOOL PURGE). Zo worden alle parameters voor de grafieken gewist. Druk op VAR om te controleren of de variabelen ook echt zijn verwijderd.

We gaan als volgt proberen de functie f(θ) = 2(1-sin(θ)) te plotten:

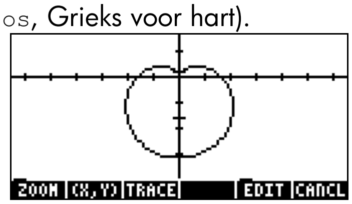
- Zorg eerst dat de hoekmeting van de rekenmachine op radialen is ingesteld.
- Druk op ← 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Wijzig `TYPE` in `Polar` door op CHOOS ▼ OK te drukken.
- Druk op ▼ en voer het volgende in:

' 2 × ← () 1 − SIN ALPHA → T OK.

- De cursor staat nu in het veld `Indep`. Druk op ' ALPHA → T OK om de onafhankelijke variabele te wijzigen in θ.
- Druk op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.
- Druk op ← WIN , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om in het venster PLOT te komen (in dit geval wordt dit venster PLOT–POLAR) genoemd.
- Wijzig het bereik van de H-VIEW in –8 tot 8 met 8 +/- OK 8 OK en het bereik van de V-VIEW in -6 tot 2 met 6 +/- OK 2 OK.

> **Opmerking:** de H-VIEW en V-VIEW bepalen alleen de schalen van het weergavenvenster. Hun bereiken hebben geen betrekking op het bereik van de waarden van de onafhankelijke variabele in dit geval.

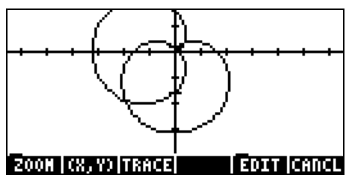
- Wijzig de waarde `Indep Low` in 0 en de waarde High in 6.28 (≈ 2π), met de volgende toetsen: 0 OK 6 . 2 8 OK.
- Druk op ERASE DRAW om de functie in polaire coördinaten te plotten. Het resultaat is een curve in de vorm van een hart. Deze curve noemen we een *cardiod* (`cardios`, Grieks voor hart).



- Druk op EDIT NXT LABEL MENU om de grafiek met labels te bekijken. Druk op NXT voor het menu. Druk op NXT PICT om het originele grafiekmenu op te roepen.
- Druk op TRACE (X,Y) om de curve te traceren. De gegevens onder in het beeldscherm zijn de hoek θ en de radius r, hoewel de letter is voorzien van een Y (standaardnaam van een afhankelijke variabele).
- Druk op NXT CANCL om terug te keren naar het scherm PLOT WINDOW. Druk op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

In deze oefening hebben we de te plotten vergelijking direct in het venster PLOT SETUP ingevoerd. We kunnen ook vergelijkingen invoeren met het venster PLOT, druk dan, tegelijkertijd in de RPN-modus, op ← Y=. Als u bijvoorbeeld op ← Y= drukt nadat u de vorige oefening heeft voltooid, wordt de vergelijking '2*(1-SIN(θ))' gemarkeerd. Daarnaast willen we ook nog de functie '2*(1-COS(θ))' samen met de vorige vergelijking plotten.

- Druk op ADD en voer 2 × ← () 1 − COS ALPHA → T ENTER in om de nieuwe vergelijking in te voeren.
- Druk op ERASE DRAW om de twee vergelijkingen te bekijken die in dezelfde afbeelding zijn geplot. Het resultaat is twee snijdende *cardioids*. Druk op CANCL ON om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.



Conische curven plotten

De meest gebruikte vorm van een conische curve in het x-y vlak is: $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F = 0$. We herkennen vergelijkingen die in canonische vorm voor de volgende figuren worden gegeven ook als conische vergelijkingen:

- cirkel: $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2 = r^2$
- ellips: $(x-x_o)^2/a^2 + (y-y_o)^2/b^2 = 1$
- parabool: $(y-b)^2 = K(x-a)$ of $(x-a)^2 = K(y-b)$
- hyperbool: $(x-x_o)^2/a^2 + (y-y_o)^2/b^2 = 1$ of $xy = K$,

waarbij x_o, y_o, a, b en K constant zijn.

Deze hebben de naam *conische curven* omdat deze figuren (cirkels, ellipsen, parabolen of hyperbolen) het resultaat zijn van het snijpunt van een vlak met een kegel. Een cirkel is bijvoorbeeld het snijpunt van een kegel met een loodvlak met de hoofdas van de kegel.

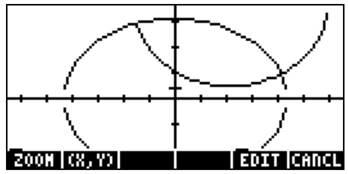
De rekenmachine heeft de mogelijkheid een of meer conische curven te plotten door Conic te selecteren als de functie TYPE in de PLOT-omgeving. Zorg dat u de variabelen PPAR en EQ verwijdert voordat u verder gaat. Laten we bijvoorbeeld de volgende lijst vergelijkingen opslaan.

{ '(X-1)^2+(Y-2)^2=3' , 'X^2/4+Y^2/3=1' }

in de variabele EQ.

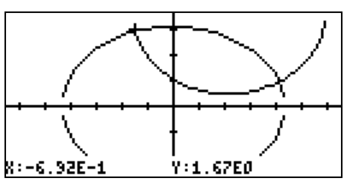
We herkennen deze vergelijkingen als die met een gecentreerde cirkel bij (1,2) met radius √3, en van een gecentreerde ellips bij (0,0) halve-aslengten van $a = 2$ en $b = \sqrt{3}$.

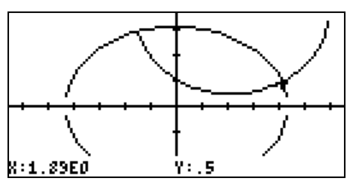
- Ga naar de PLOT-omgeving door op ← 2D/3D te drukken, tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, en `Conic` als het `TYPE` te selecteren. De lijst met vergelijkingen staat in het veld EQ.
- Zorg dat de onafhankelijke variabele (`Indep`) is ingesteld op 'X' en de afhankelijke variabele (`Depnd`) op 'Y'.
- Druk op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.
- Ga naar de PLOT WINDOW-omgeving door op ← WIN te drukken, tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus.
- Wijzig het bereik voor H-VIEW in -3 tot 3 met 3 +/- OK 3 OK. Wijzig ook het bereik van de V-VIEW naar –1.5 tot 2 met 1 • 5 +/- OK 2 OK.
- Wijzig de velden *Indep Low*: en *High:* naar Default met de toetsen NXT RESET terwijl deze velden zijn geselecteerd. Selecteer de optie *Reset value* nadat u op RESET heeft gedrukt. Druk op OK om het resetten van de waarden te voltooien. Druk op NXT om terug te keren naar het hoofdmenu.
- Plot de grafiek: ERASE DRAW.



> **Opmerkingen**: de bereiken `H-View` en `V-View` zijn geselecteerd om het snijpunt van de twee curven weer te geven. Er is geen algemene regel voor het selecteren van deze bereiken, alleen op basis van de informatie over de curven. Voor de bovenstaande vergelijkingen weten we bijvoorbeeld dat de cirkel reikt van -3+1 = -2 tot 3+1 = 4 in x en van -3+2=-1 tot 3+2=5 in y. Daarnaast zal de ellips, die bij de oorsprong (0,0) is ingevoerd, reiken van -2 tot 2 in x en van -√3 tot √3 in y.
>
> U ziet dat voor de cirkel en de ellips het gebied niet is geplot dat bij de linker en rechter uitersten van de curven hoort. Dit is het geval bij alle cirkels of ellipsen die worden geplot met `Conic` als `TYPE`.

- Om labels te zien: EDIT NXT LABEL MENU
- Om het menu op te roepen: NXT NXT PICT
- Druk op de menutoets (X,Y) om de coördinaten van het punt van het snijpunt te schatten en zet de cursor zo dicht mogelijk bij die punten met de pijltjestoetsen. De coördinaten voor de cursor worden in het beeldscherm getoond. Het linkersnijpunt ligt bijvoorbeeld dichtbij (-0.692, 1.67), terwijl het rechtersnijpunt dichtbij (1.89, 0.5) ligt.





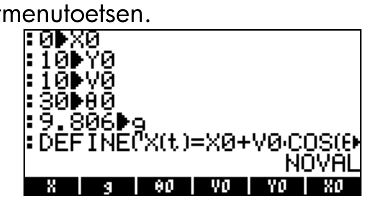
- Druk op NXT CANCL om het menu op te roepen en terug te keren naar de PLOT-omgeving.
- Druk op NXT OK om terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine.

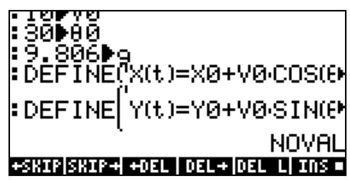
Parametrische diagrammen

Parametrische diagrammen in het vlak zijn diagrammen waarvan de coördinaten worden gegenereerd via het systeem van vergelijkingen x = x(t) en y = y(t), waarbij t de parameter is. Een voorbeeld van zo'n grafiek is de baan van een projectiel, $x(t) = x_0 + v_0 \cdot \text{COS } \theta_0 \cdot t$, $y(t) = y_0 + v_0 \cdot \sin \theta_0 \cdot t - ½ \cdot g \cdot t^2$. Om deze vergelijkingen, met de constante waarde x_0, y_0, v_0 en θ_0, te plotten, moeten we de waarden van deze parameters in variabelen opslaan. Maak voor dit voorbeeld een subdirectory 'PROJM' voor PROJectile Motion (beweging projectiel) en sla in deze subdirectory de volgende variabelen op: X0 = 0, Y0 = 10, V0 = 10 , θ0 = 30 en g = 9.806. Zorg dat de hoekmeting van de rekenmachine is ingesteld op DEG. Definieer vervolgens de functies (gebruik ← DEF):

X(t) = X0 + V0*COS(θ0)*t
Y(t) = Y0 + V0*SIN(θ0)*t – 0.5*g*t^2

waarmee de variabelen Y en X worden toegevoegd aan de labels van de softmenutoetsen.





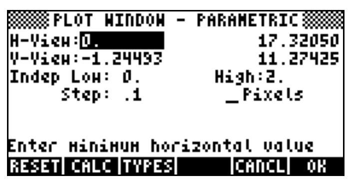
Volg deze stappen om de grafiek te maken:

- Druk op ← 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Wijzig `TYPE` in `Parametric` door op CHOOS ▼ ▼ OK te drukken.
- Druk op ▼ en typ 'X(t) + i*Y(t)' OK om het parametrische diagram te definiëren als dat van een complexe variabele. (De reële en denkbeeldige delen van de complexe variabele komen overeen met de x- en y-coördinaten van de curve.)
- De cursor staat nu in het veld `Indep`. Druk op ' ALPHA ← T OK om de onafhankelijke variabele te wijzigen in *t*.

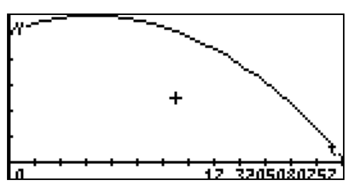
- Druk op [NXT] [OK] om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.
- Druk op [⬅] [WIN], tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om in het venster PLOT te komen (in dit geval wordt ditt venster PLOT–PARAMETRIC). We passen nu niet eerst de horizontale en verticale beelden aan, zoals bij andere diagramtypen, maar we stellen de laagste en hoogste waarden van de onafhankelijke variabele eerst als volgt in:
- Selecteer het veld `Indep Low` door op [▼] [▼] te drukken. Wijzig deze waarde in [0] [OK]. Wijzig daarna de waarde `High` in [2] [OK]. Voer [0] [.] [1] [OK] in voor de waarde `Step` (dus step = 0.1).

> **Opmerking:** door middel van deze instellingen geven we aan dat de parameter t de waarden van t = 0, 0.1, 0.2, …, enz. zal aannemen totdat de waarde 2.0 bereikt wordt.

- Druk op [AUTO]. De waarden van de bereiken van H-View en V-View worden nu automatisch gegenereerd op basis van de waarden van de onafhankelijke variabele t en de gebruikte definities van X(t) en Y(t). Het resultaat is:



- Druk op [ERASE] [DRAW] om het parametrische diagram te tekenen.
- Druk op [EDIT] [NXT] [LABEL] [MENU] om de grafiek met labels te zien. Van de vensterparameters is alleen de helft van de labels in de x-as te zien.



- Druk op NXT om het menu op te roepen. Druk op NXT PICT om het originele grafiekmenu op te roepen.
- Druk op TRACE (X,Y) om de coördinaten van een punt in de grafiek te bepalen. Gebruik ▶ en ◀ om de cursor in de curve te laten bewegen. Onder in het scherm ziet u de waarde van de parameter t en de coördinaten van de cursor als (X,Y).
- Druk op NXT CANCL om terug te keren naar de omgeving PLOT WINDOW. Druk vervolgens op ON of NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

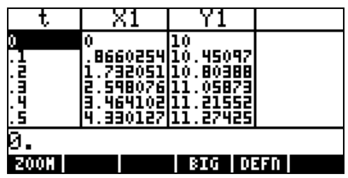
Als we dan naar de labels van de softmenutoetsen kijken, zien we dat we de volgende variabelen hebben: t, EQ, PPAR, Y, X, g, θ0, V0, Y0, X0. Variabelen t, EQ en PPAR worden door de rekenmachine gegenereerd om de huidige waarden op te slaan van de parameter, t, van de vergelijking die moet worden geplot, EQ (die 'X(t) + I∗Y(t)' bevat) en de diagramparameters. De andere variabelen bevatten de waarden van de constanten die in de definities van X(t) en Y(t) zijn gebruikt.

U kunt verschillende waarden in de variabelen opslaan en nieuwe parametrische diagrammen maken met de projectielvergelijkingen die we in dit voorbeeld hebben gebruikt. Als u de inhoud van het huidige beeld wilt wissen voordat u een nieuw diagram maakt, moet u naar de schermen PLOT, PLOT WINDOW of PLOT SETUP door op ← Y= , ← WIN of ← 2D/3D te drukken (tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus). Druk daarna op ERASE DRAW. Druk op CANCL om terug te keren naar het scherm PLOT, PLOT WINDOW of PLOT SETUP. Druk op ON of NXT OK om terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine.

Een tabel voor parametrische vergelijkingen genereren

In een eerder voorbeeld hebben we een waardentabel (X,Y) gemaakt voor een uitdrukking in de vorm Y=f(X), dus een grafiek van het type Function. In deze paragraaf laten we een procedure zien voor het genereren van een tabel die overeenkomt met een parametrische diagram. Hierbij gebruiken we de parametrische vergelijkingen die we in het bovenstaande voorbeeld hebben gedefinieerd.

- We gaan eerst naar het venster TABLE SETUP door op ← TBLSET te drukken, tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus. Voor de onafhankelijke variabele wijzigen we de waarde Starting in 0,0 en de waarde Step in 0,1. Druk op OK.
- Genereer de tabel door op ← TABLE te drukken, tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus. De ontstane tabel heeft drie kolommen die de parameter t en de coördinaten van de bijbehorende punten weergeven. Voor deze tabel zijn de coördinaten X1 en Y1 genoemd.



- Gebruik de pijltoetsen, ◀▶▲▼, om door de tabel te bewegen.
- Druk op ON om terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine.

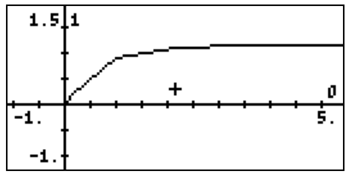
Deze procedure voor het aanmaken van een tabel die overeenkomt met het huidige diagramtype, kan op andere diagramtypen worden toegepast.

De oplossing van eenvoudige differentiaalvergelijkingen plotten

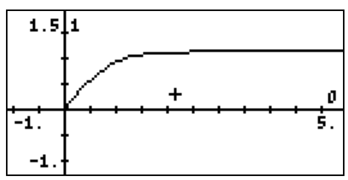
Het diagram van een eenvoudige differentiaalvergelijking krijgt u door `Diff Eq` te selecteren in het veld `TYPE` van de PLOT SETUP-omgeving. Stel dat we x(t) willen plotten van de differentiaalvergelijking $dx/dt = \exp(-t^2)$, met de beginvoorwaarden: x = 0 bij t = 0. Met de rekenmachine kan de oplossing van verschillende differentiaalvergelijkingen in de vorm Y'(T) = F(T,Y) worden geplot. In dit geval laten we Y→x en T→t, en daarom krijgen we F(T,Y)→f(t,x) $= \exp(-t^2)$.

Voordat we de oplossing x(t) gaan plotten voor t = 0 tot 5, verwijderen we eerst de variabelen EQ en PPAR.

- Druk op ⇦ 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Wijzig `TYPE` in `Diff Eq`.
- Druk op ▼ en voer ' ⇦ e^x — ALPHA ⇦ T Y^x 2 OK in.
- De cursor staat nu in het veld `H-Var`. Er moet staan: `H-Var:0` en ook `V-Var:1`. Dit is de code die door de rekenmachine wordt gebruikt om te bepalen welke variabelen er moeten worden geplot. `H-Var:0` betekent dat de onafhankelijke variabele (die later wordt geselecteerd) op de horizontale as wordt geplot. Daarnaast betekent `V-Var:1` dat de afhankelijke variabele (standaardnaam 'Y') op de verticale as wordt geplot.
- Druk op ▼. De cursor staat nu in het veld `Indep`. Druk op ⇨ ' ALPHA ⇦ T OK om de onafhankelijke variabele te wijzigen in *t*.
- Druk op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.
- Druk op ⇦ WIN , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om in het venster PLOT te komen (in dit geval heet het venster PLOT WINDOW – DIFF EQ).
- Wijzig de parameters van H-VIEW en V-VIEW in: H-VIEW: -1 5, V-VIEW: -1 1.5
- Wijzig de waarde `Init` in 0 en de waarde Final in 5 met de volgende toetsen: 0 OK 5 OK.
- De waarden Step en Tol geven de stap in de onafhankelijke variabele en de convergentietolerantie die de numerieke oplossing hanteert. We laten deze waarden op hun standaardinstellingen staan (als het woord *default* niet in de veld Step: staat, gebruiken we NXT RESET om de waarde in te stellen op de standaardwaarde. Druk op NXT om terug te keren naar het hoofdmenu.) Druk op ▼ .
- De waarde Init-Soln staat voor de beginwaarde van de oplossing waarmee het numerieke resultaat moet beginnen. In dit geval zijn de beginvoorwaarden x(0) = 0 en daarom moeten we deze waarden wijzigen in 0.0, met 0 OK.
- Druk op ERASE DRAW om de oplossing in de differentiaalvergelijking te plotten.
- Druk op EDIT NXT LABEL MENU om de grafiek met labels te zien.



- Druk op NXT voor het menu. Druk op NXT PICT om het originele grafiekmenu op te roepen.
- Terwijl de grafiek wordt geplot, zien we dat de grafiek niet echt mooi loopt. Dat komt omdat de plotter een te grote tijdstap heeft genomen. Om de grafiek te verfijnen en mooier te maken, gebruiken we een stap van 0.1. Probeer de volgende toetsencombinaties: CANCL ▼▼▼ . 1 OK ERASE DRAW. Het duurt nu langer voordat het diagram klaar is, maar de vorm is een stuk beter geworden.
- Druk op EDIT NXT LABEL MENU om de labels en het bereik van de assen te zien. U ziet dat de labels voor de assen worden weergegeven als 0 (horizontaal) en 1 (verticaal). Dit zijn de definities voor de assen die in het venster PLOT WINDOW (zie hierboven) worden gegeven, dus H-VAR (t): 0 en V-VAR(x): 1.



- Druk op NXT NXT PICT voor het menu en terug te keren naar de PICT-omgeving.
- Druk op (X,Y) om de coördinaten van een punt in de grafiek te bepalen. Gebruik ▶ en ◀ om de cursor in het diagramgebied te laten bewegen. Onder in het scherm ziet u de coördinaten van de cursor als (X,Y). De rekenmachine gebruikt X en Y als de standaardnamen voor respectievelijk de horizontale en verticale assen.
- Druk op NXT CANCL om terug te keren naar de PLOT WINDOW-omgeving. Druk daarna op ON om terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine.

Raadpleeg Hoofdstuk 16 voor meer informatie over het gebruik van grafische oplossingen van differentiaalvergelijkingen.

Waarheidsdiagrammen

Waarheidsdiagrammen worden gebruikt om tweedimensionale diagrammen van gebieden te maken die voldoen aan een bepaalde wiskundige voorwaarde die waar of niet waar kan zijn. Stel dat u het gebied voor X^2/36 + Y^2/9 < 1 wilt plotten,
ga dan als volgt te werk:

- Druk op ← 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Wijzig TYPE in Truth.
- Druk op ▼ en typ {'(X^2/36+Y^2/9 < 1)','(X^2/16+Y^2/9 > 1)'} OK om de te plotten voorwaarden te definiëren.
- De cursor staat nu in het veld `Indep`. Laat die staan als 'X' als hij al op die variabele is ingesteld of wijzig hem zo nodig in 'X'.
- Druk op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.
- Druk op ← WIN , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het venster PLOT te gaan (in dit geval wordt dit PLOT WINDOW – TRUTH window genoemd). We laten de standaardwaarde voor het bereik van het venster staan: `H-View: -6,5 6,5, V-View: -3,1  3,2` (Gebruik NXT RESET om ze te resetten (selecteer Reset all) OK NXT).

Opmerking: als de bereiken van het venster niet op de standaardwaarden staan ingesteld, kunt u ze het snelst instellen met NXT RESET te gebruiken (selecteer *Reset all*) OK NXT .

- Druk op ERASE DRAW om het waarheidsdiagram te tekenen. Omdat de rekenmachine een voorbeeld maakt van het hele diagramdomein, punt voor punt, duurt het enkele minuten voordat het waarheidsdiagram klaar is. Het huidige diagram moet een gearceerde ellips van semi-assen 6 en 3 (respectievelijk in x en y) vormen, gecentreerd bij de oorsprong.
- Druk op EDIT NXT LABEL MENU om de grafiek met labels te bekijken. Van de vensterparameters is alleen de helft van de labels in de x-as te zien.

Druk op NXT om het menu op te roepen. Druk op NXT PICT voor het originele grafiekmenu.

- Druk op (X,Y) om de coördinaten van een punt in de grafiek te bepalen. Gebruik de pijltjestoetsen om met de cursor door het geplotte gebied te bewegen. Onder in het scherm ziet u de waarde van de coördinaten van de cursor als (X,Y).
- Druk op NXT CANCL om terug te keren naar de PLOT WINDOW-omgeving. Druk vervolgens op ON of NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

Er kan meer dan een voorwaarde tegelijkertijd worden geplot, wanneer u de voorwaarden vermenigvuldigt. Als u bijvoorbeeld de grafiek van de punten waarbij $X^2/36 + Y^2/9 < 1$ en $X^2/16 + Y^2/9 > 1$ wilt plotten, gaat u als volgt te werk:

- Druk op ← 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Druk op ▼ en voer '(X^2/36+Y^2/9 < 1)· (X^2/16+Y^2/9 > 1)' OK in om de voorwaarden te definiëren die moeten worden geplot.
- Druk op ERASE DRAW om het waarheidsdiagram te tekenen. Wees opnieuw geduldig terwijl de rekenmachine de grafiek aanmaakt. Als u het diagram wilt onderbreken, drukt u een keer op ON. Druk vervolgens op CANCL .

Kolomdiagrammen, staafdiagrammen en puntgrafieken plotten

Kolomdiagrammen, staafdiagrammen en puntgrafieken worden gebruikt voor het plotten van discrete gegevens die in de gereserveerde variabele ΣDAT zijn opgeslagen. Deze variabele wordt niet alleen gebruikt voor deze diagramtypen, maar voor alle soorten statistische toepassingen, zoals u zult zien in Hoofdstuk 18. We zullen de kolomdiagrammen ook nog niet gebruiken totdat we bij dat hoofdstuk zijn, omdat er voor het plotten van een kolomdiagram gegevens gegroepeerd moeten worden en er een frequentieanalyse moet worden uitgevoerd voordat het diagram kan worden gemaakt. In dit deel laten we u zien hoe we gegevens in de variabele ΣDAT laden en hoe we staafdiagrammen en puntgrafieken plotten.

We gebruiken de volgende gegevens voor het plotten van staafdiagrammen en puntgrafieken:

x	y	z
3.1	2.1	1.1
3.6	3.2	2.2
4.2	4.5	3.3
4.5	5.6	4.4
4.9	3.8	5.5
5.2	2.2	6.6

Staafdiagrammen

Zorg eerst dat het CAS van de rekenmachine in de modus `Exact` staat. Voer daarna de hierboven gegeven gegevens in als een matrix, dus

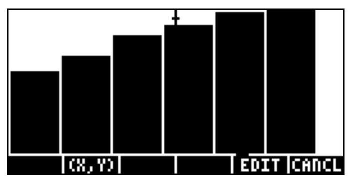
[[3.1,2.1,1.1],[3.6,3.2,2.2],[4.2,4.5,3.3],
[4.5,5.6,4.4],[4.9,3.8,5.5],[5.2,2.2,6.6]] ENTER

Om de gegevens op te slaan in ΣDAT, gebruikt u de functie STOΣ (via de functiecatalogus, ↱ CAT). Druk op VAR om het variabelenmenu op te roepen. In het stapelgeheugen moet een softmenutoets ΣDAT staan. In de onderstaande afbeelding wordt het opslaan van deze matrix in de ALG-modus weergegeven:

Zo maakt u de grafiek:

- Druk op ↰ 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Verander `TYPE` in `Bar`.

- Er verschijnt een matrix in het veld ΣDAT. Dit is de matrix die we eerder in ΣDAT hebben opgeslagen.
- Markeer het veld `Col:`. In dit veld kunt u de kolom van ΣDAT kiezen die moet worden geplot. De standaardwaarde is 1. Houd dit op diagramkolom 1 in ΣDAT.
- Druk op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.
- Druk op ← WIN , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT WINDOW te gaan.
- Wijzig de V-View in: `V-View: 0  5`.
- Druk op ERASE DRAW om het staafdiagram te tekenen.



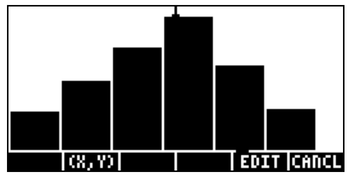
- Druk op CANCL om terug te keren naar de PLOT WINDOW-omgeving. Druk vervolgens op ON of NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

Het aantal staven dat moet worden geplot bepaalt de breedte van de staaf. De H- en V-VIEW zijn standaard ingesteld op 10. We hebben de V-VIEW gewijzigd zodat de maximumwaarde beter in kolom 1 van ΣDAT past. Staafdiagrammen zijn handig voor het plotten van categorische (dus niet-numerieke) gegevens.

Stel dat u de gegevens in kolom 2 van de ΣDAT-matrix wilt plotten:

- Druk op ← 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Druk op ▼▼ om het veld `Col:` te markeren en typ 2 OK, gevolgd door NXT OK.
- Druk op ← WIN , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.

- Wijzig de V-View in: `V-View: 0  6`
- Druk op ERASE DRAW.

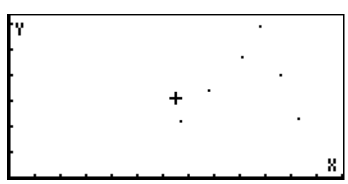


- Druk op CANCL om terug te keren naar het scherm PLOT WINDOW, daarna op ON om terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine.

Puntgrafieken

We gebruiken dezelfde ΣDAT-matrix om puntgrafieken te maken. We plotten eerst de waarden van y vs. x, daarna die van y vs. z. Dat doen we als volgt:

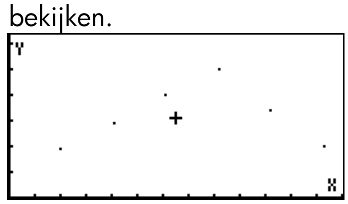
- Druk op ← 2D/3D, tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Verander `TYPE` in `Scatter`.
- Druk op ▼ ▼ om het veld **Cols**: te markeren. Voer 1 OK 2 OK in om kolom 1 als X en kolom 2 als Y te selecteren in de puntgrafiek Y-vs.-X.
- Druk op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te gaan.
- Druk op ← WIN, tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT WINDOW te gaan.
- Wijzig de bereiken van het grafiekvenster in: H-View: 0 6, V-View: 0 6.
- Druk op ERASE DRAW om het staafdiagram te tekenen. Druk op EDIT NXT LABEL MENU om het diagram zonder het menu te zien, maar met identificatielabels (de cursor staat wel in het midden van het diagram):



- Druk op NXT NXT EXIT om de EDIT-omgeving te verlaten.
- Druk op CANCL om terug te keren naar de PLOT WINDOW-omgeving. Druk vervolgens op ON of NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

Ga als volgt te werk om y vs. z te plotten:

- Druk op ← 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Druk op ▼▼ om het veld `Cols:` te markeren. Voer 3 OK 2 OK in om kolom 3 als X en kolom 2 als Y te selecteren in de puntgrafiek Y-vs.-X.
- Druk op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.
- Druk op ← WIN , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT WINDOW te gaan.
- Wijzig de bereiken van het grafiekvenster in: H-View: 0 7, V-View: 0 7.
- Druk op ERASE DRAW om het staafdiagram te tekenen. Druk op EDIT NXT LABEL MENU om het diagram zonder menu en met identificatielabels te bekijken.



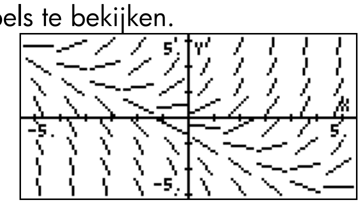
- Druk op NXT NXT EXIT om de EDIT-omgeving te verlaten.
- Druk op CANCL om terug te keren naar de PLOT WINDOW-omgeving. Druk vervolgens op ON of NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

Richtingscoëfficiëntvelden

Richtingscoëfficiëntvelden worden gebruikt om de oplossingen van een differentiaalvergelijking in de vorm y' = f(x,y) te visualiseren. Eigenlijk staan er in het diagram segmenten die de oplossingscurven raken, omdat y' = dy/dx, geëvalueerd op elk punt (x,y), de richtingscoëffiënt van de raaklijn bij punt (x,y) weergeeft.

Om bijvoorbeeld de oplossing voor de differentiaalvergelijking y' = f(x,y) = x+y weer te geven, kunt u het volgende doen:

- Druk op ← 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Verander `TYPE` in `Slopefield`.
- Druk op ▼ en voer 'X+Y' OK in.
- Zorg ervoor dat 'X' is geselecteerd als de variabele `Indep:` en 'Y' als de variabele `Depnd:`.
- Druk op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.
- Druk op ← WIN , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT WINDOW te gaan.
- Wijzig de bereiken van het diagramvenster in: X-Left:-5, X-Right:5, Y-Near:-5, Y-Far: 5
- Druk op ERASE DRAW om het diagram van het richtingscoëffiëntveld te tekenen. Druk op EDIT NXT LABEL MENU om het diagram zonder menu en met identificatielabels te bekijken.



- Druk op NXT NXT EXIT om de EDIT-omgeving te verlaten.

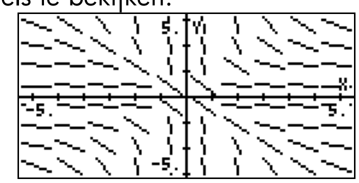
- Druk op CANCL om terug te keren naar de PLOT WINDOW-omgeving. Druk vervolgens op ON of NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

Als u de diagram van de richtingscoëfficiëntvelden op papier kunt maken, kunt u lijnen met de hand volgen die de lijnsegmenten in het diagram raken.

Deze lijnen bestaan uit lijnen van y(x,y) = constant, voor de oplossing van y' = f(x,y). De richtingscoëfficiëntvelden zijn dus handig voor het in beeld brengen van moeilijk op te lossen vergelijkingen.

Probeer ook een diagram voor het richtingscoëfficientveld voor de functie y' = f(x,y) = - $(y/x)^2$ met:

- Druk op ← 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Verander `TYPE` in `Slopefield`.
- Druk op ▼ en voer '– (Y/X)^2' OK in.
- Druk op ERASE DRAW om het diagram voor het richtingscoëfficiëntveld te tekenen. Druk op EDIT NXT LABEL MENU om het diagram zonder menu en met identificatielabels te bekijken.



- Druk op NXT NXT PICT om de EDIT-omgeving te verlaten.
- Druk op CANCL om terug te keren naar de omgeving PLOT WINDOW. Druk vervolgens op ON of NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

Snelle 3D-grafieken

Snelle 3D-grafieken worden gebruikt om driedimensionale vlakken te visualiseren die worden weergegeven door vergelijkingen in de vorm z = f(x,y). Als u bijvoorbeeld z = f(x,y) = x^2+y^2 wilt visualiseren, kunnen we het volgende gebruiken:

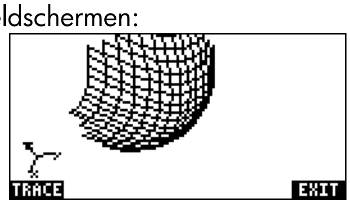
- Druk op ← 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Verander TYPE in Fast3D.
- Druk op ▼ en voer 'X^2+Y^2' OK in.
- Zorg ervoor dat 'X' is geselecteerd als de variabele Indep: en 'Y' als de variabele Depnd:.

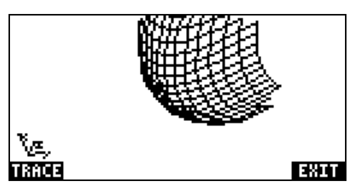
- Druk op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.
- Druk op ← WIN , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT WINDOW te gaan.
- Houd de standaardbereiken van het diagramvenster als volgt: X-Left:-1, X-Right:1, Y-Near:-1, Y-Far: 1, Z-Low: -1, Z-High: 1, Step Indep: 10, Depnd: 8

> **Opmerking**: de waarden Step Indep: en Depnd: geven het aantal stippellijnen aan dat in het diagram gebruikt moet worden. Hoe hoger het aantal, hoe langer het duurt om de grafiek te maken, ook al is de benodigde tijd voor het genereren van een grafiek relatief kort. Voor nu zullen we de standaardwaarden van 10 en 8 voor de Step-gegevens laten staan.

- Druk op ERASE DRAW om het driedimensionale oppervlak te tekenen. Het resultaat is een ijzerdraadweergave van het oppervlak met het referentiecoördinatenstelsel linksonder in het scherm. met behulp van de pijltjestoetsen (◄►▲▼) kunt u de richting van het oppervlak veranderen. De richting van het referentiecoördinatenstelsel zal ook veranderen. Probeer zelf de richting van het oppervlak te veranderen. De volgende afbeeldingen tonen enkele weergaven van de grafiek:

- Druk op EXIT wanneer u klaar bent.
- Druk op CANCL om terug te keren naar de PLOT WINDOW-omgeving.
- Verander de Step-gegevens als volgt: `Step Indep: 20  Depnd: 16`
- Druk op ERASE DRAW om de grafiek van het vlak te zien. Voorbeelden van beeldschermen:





- Druk op EXIT wanneer u klaar bent.
- Druk op CANCL om terug te keren naar het PLOT WINDOW.
- Druk op ON of NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

Probeer ook een Snelle 3D-grafiek voor het vlak z = f(x,y) = sin (x^2+y^2)

- Druk op ← 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Druk op ▼ en voer 'SIN(X^2+Y^2)' OK in.
- Druk op ERASE DRAW om het diagram te tekenen.
- Druk op EXIT wanneer u klaar bent.
- Druk op CANCL om terug te keren naar PLOT WINDOW.
- Druk op ON of NXT OK om terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine.

Draaddiagrammen

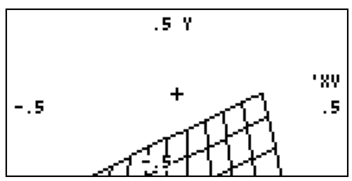
Draaddiagrammen (Wireframe) zijn diagrammen met driedimensionale oppervlakken, die worden beschreven als z = f(x,y). In tegenstellingen tot *snelle 3D-diagrammen* zijn draaddiagrammen statische diagrammen. De gebruiker kan het gezichtspunt voor het diagram kiezen, dus het punt waar vandaan het oppervlak te zien is. Als u bijvoorbeeld een draaddiagram voor het oppervlak z = x + 2y –3 wilt maken, doet u het volgende:

- Druk op ← 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Verander `TYPE` in `Wireframe`.
- Druk op ▼ en voer 'X+2*Y-3' OK in.
- Zorg ervoor dat 'X' is geselecteerd als de variabele `Indep:` en 'Y' als de variabele `Depnd:`.
- Druk op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.
- Druk op ← WIN , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT WINDOW te gaan.

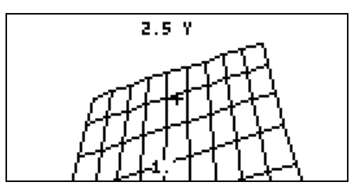
- Houd de standaardbereiken voor het diagramvenster als volgt: X-Left:-1, X-Right:1, Y-Near:-1, Y-Far: 1, Z-Low: -1, Z-High: 1, XE:0,YE:-3, ZE:0, Step Indep: 10 Depnd: 8

De coördinaten XE, YE, ZE staan voor "oogcoördinaten", de coördinaten waar vandaan een toeschouwer het diagram ziet. De gegeven waarden zijn de standaardwaarden. De waarden Step Indep: en Depnd: geven het aantal stippellijnen aan dat in het diagram gebruikt moet worden. Hoe groter het aantal, hoe langer het duurt voordat de grafiek gemaakt is. Voor nu zullen we de standaardwaarden van 10 en 8 voor de Step-gegevens laten staan.

- Druk op ERASE DRAW om het driedimensionale oppervlak te tekenen. Het resultaat is een draadbeeld van het oppervlak.
- Druk op EDIT NXT LABEL MENU om de grafiek met labels en bereiken te zien. Deze versie van de grafiek is beperkt tot het onderste deel van het beeldscherm. U kunt het gezichtspunt wijzigen om een andere versie van de grafiek te zien.

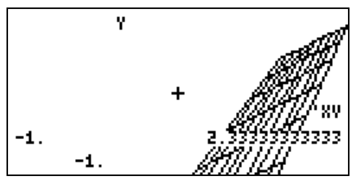


- Druk op NXT NXT PICT CANCL om terug te keren naar de PLOT WINDOW-omgeving.
- Verander de oogcoördinaten als volgt: `XE:0  YE:-3  ZE:3`
- Druk op ERASE DRAW om de grafiek van het vlak te zien.
- Druk op EDIT NXT LABEL MENU om de grafiek met labels en bereiken te bekijken.



Deze versie van de grafiek neemt meer ruimte in het beeldscherm in dan de vorige. We wijzigen het gezichtspunt nog een keer om een andere versie van de grafiek te zien.

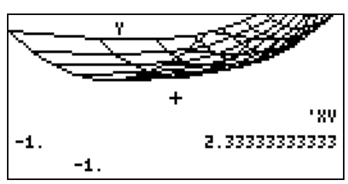
- Druk op NXT NXT PICT CANCL om terug te keren naar de PLOT WINDOW-omgeving.
- Verander de oogcoördinaten als volgt: `XE:3    YE:3    ZE:3`
- Druk op ERASE DRAW om het diagram van het oppervlak te zien. Nu zien we dat het grootste deel van het diagram aan de rechterzijde van het beeldscherm staat.



- Druk op CANCL om terug te keren naar de PLOT WINDOW-omgeving.
- Druk op ON of NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

Probeer ook een Wireframe-diagram voor het vlak z = f(x,y) = sin (x^2+y^2)

- Druk op ← 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Druk op ▽ en typ 'X^2+Y^2' OK.
- Druk op ERASE DRAW om het diagram van het richtingscoëfficiëntveld te tekenen. Druk op EDIT NXT MENU LABEL om het diagram zonder menu en met identificatielabels te bekijken.



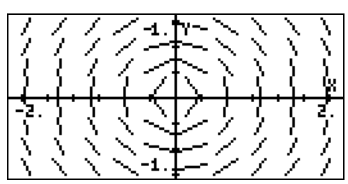
- Druk op NXT NXT PICT om de EDIT-omgeving te verlaten.

- Druk op CANCL om terug te keren naar de PLOT WINDOW-omgeving. Druk vervolgens op ON of NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

Ps-Contour-diagrammen

Ps-Contour-diagrammen zijn contourdiagrammen met driedimensionale oppervlakken, die worden beschreven als z = f(x,y). De contouren zijn projecties van vlakke oppervlakken z = constant op het x-y-vlak. Als u bijvoorbeeld een Ps-Contour-diagram voor het oppervlak $z = x^2+y^2$ wilt maken, doet u het volgende:

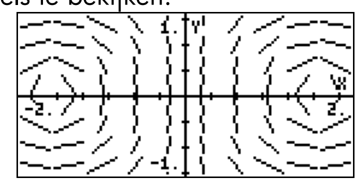
- Druk op ← 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Wijzig TYPE in Ps-Contour.
- Druk op ▼ en typ 'X^2+Y^2' OK.
- Zorg dat 'X' is geselecteerd als de variabele `Indep:` en 'Y' als de variabele `Depnd:` .
- Druk op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.
- Druk op ← WIN , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT WINDOW te gaan.
- Houdt de standaardbereiken van het diagramvenster als volgt: X-Left:-2, X-Right:2, Y-Near:-1 Y-Far: 1, Step Indep: 10, Depnd: 8
- Druk op ERASE DRAW om het contourdiagram te tekenen. wees geduldig want deze bewerking neem wat tijd in beslag. Het resultaat is een contourdiagram van het oppervlak. U ziet dat de contour niet noodzakelijk continu is, maar ze geven een goed beeld van de vlakke oppervlakken van de functie.
- Druk op EDIT NXT LABEL MENU om de grafiek met labels en bereiken te bekijken.



- Druk op NXT NXT PICT CANCL om terug te keren naar de PLOT WINDOW-omgeving.
- Druk op ON of NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

Probeer ook een Ps-Contour-diagram voor het vlak z = f(x,y) = sin x cos y.

- Druk op ← 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Druk op ▽ en voer 'SIN(X)*COS(Y)' OK in.
- Druk op ERASE DRAW om het diagram van het richtingscoëfficiëntveld te tekenen. Druk op EDIT NXT LABEL LABEL om het diagram zonder menu en met identificatielabels te bekijken.



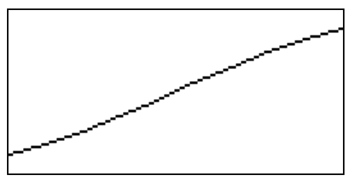
- Druk op NXT NXT PICT om de EDIT-omgeving te verlaten.
- Druk op CANCL om terug te keren naar de PLOT WINDOW-omgeving. Druk vervolgens op ON of NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

Y-snede-diagrammen

Y-snede-diagrammen (Y-Slice) zijn geanimeerde diagrammen van z-vs.-y voor verschillende waarden van x van de functie z = f(x,y). Als u bijvoorbeeld een Y-Slice-diagram voor het oppervlak z = x^3-xy^3 wilt maken, doet u het volgende:

- Druk op ← 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Wijzig TYPE in Y-Slice.
- Druk op ▽ en voer 'X^3+X*Y^3' OK in.
- Zorg dat 'X' is geselecteerd als de variabele Indep: en 'Y' als de variabele Depnd:.

- Druk op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.
- Druk op ← WIN , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT WINDOW te gaan.
- Houd de standaardbereiken van het diagramvenster als volgt: X-Left:-1, X-Right:1, Y-Near:-1, Y-Far: 1, Z-Low:-1, Z-High:1, Step Indep: 10 Depnd: 8
- Druk op ERASE DRAW om het driedimensionale oppervlak te tekenen. U ziet dat de rekenmachine een reeks curven op het scherm zet, die meteen weer verdwijnen. Als de rekenmachine alle y-snede-curven heeft gemaakt, gaat hij meteen over in het animeren van de verschillende curven. Hieronder ziet u een van de curven.



- Druk op ON om de animatie te stoppen. Druk op CANCL om terug te keren naar de PLOT WINDOW-omgeving.
- Druk op ON of NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

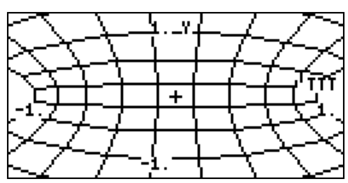
Probeer ook een Ps-Contour-diagram voor het vlak z = f(x,y) = (x+y) sin y.

- Druk op ← 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Druk op ▽ en voer '(X+Y)*SIN(Y)' OK in.
- Druk op ERASE DRAW om de Y-Slice-animatie te maken.
- Druk op ON om de animatie te stoppen.
- Druk op CANCL om terug te keren naar de PLOT WINDOW-omgeving. Druk vervolgens op ON of NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

Roosterdiagrammen

Roosterdiagrammen (Gridmap) laten een rooster zien met orthogonale curven die een functie beschrijven van een complexe variabele in de vorm w =f(z) = f(x+iy), waarbij z = x+iy een complexe variabele is. De geplotte functies komen overeen met het reële en denkbeeldige deel van w = Φ(x,y) + iΨ(x,y), ze geven dus de curven Φ(x,y) =constant en Ψ(x,y) = constant. Als u bijvoorbeeld een Roosterdiagram wilt maken voor de functie w = sin(z), doe dan als volgt:

- Druk op ← 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Verander TYPE in Gridmap.
- Druk op ▽ en voer 'SIN(X+i*Y)' OK in.
- Zorg dat 'X' is geselecteerd als de variabele Indep: en 'Y' als de variabele Depnd:.
- Druk op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.
- Druk op ← WIN , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT WINDOW te gaan.
- Houd de standaardbereiken voor het diagramvenster als volgt: X-Left:-1, X-Right:1, Y-Near:-1 Y-Far: 1, XXLeft:-1 XXRight:1, YYNear:-1, yyFar: 1, Step Indep: 10 Depnd: 8
- Druk op ERASE DRAW om het roosterdiagram te tekenen. Het resultaat is een rooster van functies dat overeenkomt met de reële en denkbeeldige delen van een complexe functie.
- Druk op EDIT NXT LABEL MENU om de grafiek met labels en bereiken te bekijken.



- Druk op NXT NXT PICT CANCEL om terug te keren naar de PLOT WINDOW-omgeving.
- Druk op ON of NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

De andere functies van een complexe variabele die we voor roosterdiagrammen kunnen proberen, zijn:

(1) SIN((X,Y))   dus F(z) = sin(z)   (2)(X,Y)^2   dus F(z) = z^2

(3) EXP((X,Y))	dus $F(z) = e^z$	(4) SINH((X,Y))	dus F(z) = sinh(z)
(5) TAN((X,Y))	dus F(z) = tan(z)	(6) ATAN((X,Y))	dus $F(z) = \tan^{-1}(z)$
(7) (X,Y)^3	dus $F(z) = z^3$	(8) 1/(X,Y)	dus F(z) = 1/z
(9) √ (X,Y)	dus $F(z) = z^{1/2}$		

Pr-oppervlakdiagrammen

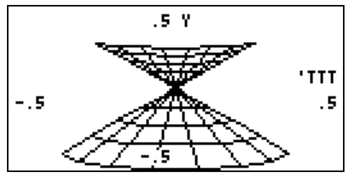
Pr-oppervlakdiagrammen (Pr-Surface - parametrische oppervlak) worden gebruikt om een driedimensionaal oppervlak te plotten waarvan de coördinaten (x,y,z) worden beschreven als x = x(X,Y), y = y(X,Y), z=z(X,Y), waarbij X en Y onafhankelijke parameters zijn.

Opmerking: de vergelijking x = x(X,Y), y = y(X,Y), z=z(X,Y) vormen een parametrische beschrijving van een oppervlak. X en Y zijn de onafhankelijke parameters. De meeste boeken zullen (u,v) als parameters gebruiken en niet (X,Y). Daarom wordt de parametrische beschrijving van een oppervlak gegeven als x = x(u,v), y = y(u,v), z=z(u,v).

Als u bijvoorbeeld een Pr-oppervlak-diagram voor het oppervlak x = x(X,Y) = X sin Y, y = y(X,Y) = x cos Y, z=z(X,Y)=X wilt maken, doet u het volgende:

- Druk op ← 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Wijzig TYPE in Pr-Surface.
- Druk op ▼ en voer '{X*SIN(Y), X*COS(Y), X}' OK in.
- Zorg dat 'X' is geselecteerd als de variabele Indep: en 'Y' als de variabele Depnd:.
- Druk op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.
- Druk op ← WIN , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT WINDOW te gaan.
- Houd de standaardbereiken van het diagramvenster als volgt: X-Left:-1, X-Right:1, Y-Near:-1, Y-Far: 1, Z-Low: -1, Z-High:1, XE: 0, YE:-3, zE:0, Step Indep: 10, Depnd: 8
- Druk op ERASE DRAW om het driedimensionale oppervlak te tekenen.

- Druk op EXIT NXT LABEL MENU om de grafiek met labels en bereiken te bekijken.



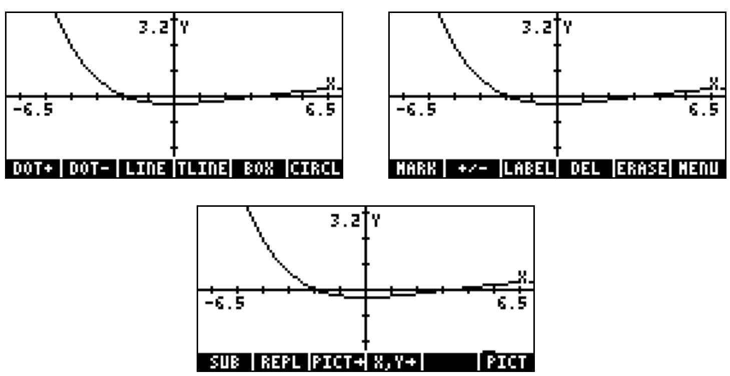
- Druk op NXT NXT PICT CANCL om terug te keren naar de PLOT WINDOW-omgeving.
- Druk op ON of NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

De variabele VPAR

De variabele VPAR (Volumeparameter) bevat informatie over het “volume” en wordt gebruikt om een driedimensionale grafiek te maken. Daarom krijgt u deze parameter als u een driedimensionale diagram aanmaakt, zoals Fast3D, Wireframe of Pr-Surface.

Interactief tekenen

Als we een tweedimensionale grafiek maken, krijgen we in het grafiekscherm de softmenutoets EDIT. Als u EDIT drukt, verschijnt een menu met de volgende opties (druk op NXT voor extra functies):



Met de bovenstaande voorbeelden kunt u de functies LABEL, MENU, PICT→ en REPL proberen. Veel van de overgebleven functies, zoals DOT+, DOT-, LINE, BOX, CIRCL, MARK, DEL, enz., kunnen worden gebruikt om punten, lijnen, cirkels, enz. in het grafiekscherm te tekenen, zoals we hierna zullen uitleggen. Probeer de volgende oefening om te zien hoe deze functies werken:

We krijgen een grafiekscherm te zien na het opvolgen van de volgende procedure:

- Druk op ← 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Verander `TYPE` zo nodig in `Function`
- Wijzig EQ in 'X'
- Zorg dat Indep: ook is ingesteld op 'X'
- Druk op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.
- Druk op ← WIN , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om in het venster PLOT te komen (in dit geval wordt het venster PLOT –POLAR genoemd).
- Wijzig het bereik van H-VIEW in –10 tot 10, met 1 0 +/- OK 1 0 OK, en het bereik van V-VIEW in -5 tot 5 met 5 +/- OK 5 OK.
- Druk op ERASE DRAW om de functie te plotten.
- Druk op EDIT NXT LABEL om labels aan de grafiek toe te voegen. Druk op NXT NXT (of ← PREV) het originele menu EDIT op te roepen.

We zullen nu het gebruik van de verschillende tekenfuncties op het resulterende grafiekscherm illustreren. Gebruik de cursor en de pijltjestoetsen (◀▶▲▼) om de cursor in het grafiekscherm te bewegen.

DOT+ en DOT-

Als DOT+ is geselecteerd, worden de pixels geactiveerd als de cursor beweegt, waardoor er een spoor van de cursorpositie achterblijft. Als DOT- is geselecteerd, krijgt u het tegenovergestelde effect, dus als u uw cursor beweegt, worden er pixels verwijderd.

Gebruik bijvoorbeeld de toetsen ▶▲ om de cursor ergens in het midden van het eerste kwadrant van het x-y-vlak te zetten. Druk daarna op DOT+. Het label wordt geselecteerd (DOT+■). Druk op de toets ▶ en houd deze ingedrukt. U ziet dat de horizontale lijn getraceerd wordt. Druk nu op DOT- en selecteer deze optie (DOT-■). Druk op de toets ◀ en houd deze ingedrukt. U ziet dat de lijn nu wordt gewist. Druk op DOT- als u klaar bent om deze optie te deselecteren.

MARK

Met dit commando kan de gebruiker een markeerpunt instellen dat op verschillende manieren gebruikt kan worden, zoals:

- Begin van de lijn met het commando LINE of TLINE
- Hoek voor een commando BOX
- Midden voor een commando CIRCLE

Als u alleen het commando MARK gebruikt, blijft er een x staan op de plaats van de markering (Druk op NXT MARK om dit in de praktijk te zien).

LINE

Dit commando wordt gebruikt om een lijn te tekenen tussen twee punten in de grafiek. Plaats de cursor ergens in het eerste kwadrant en drukt u op ← PREV LINE om deze functie in de praktijk te zien. Er wordt een MARK over de cursor geplaatst, die de oorsprong van de lijn aangeeft. Gebruik de toets ▶ om de cursor rechts van de huidige positie te zetten, bijvoorbeeld 1 cm naar rechts en druk op LINE. Er wordt een lijn getekend tussen het eerste en het laatste punt.

U ziet dat de cursor aan het eind van deze lijn nog altijd actief is, wat aangeeft dat de rekenmachine een lijn kan plotten vanuit dat punt. Druk op ▼ om de cursor omlaag te bewegen, bijvoorbeeld een cm, en druk weer op LINE. U moet nu een rechte hoek krijgen met een horizontaal en een verticaal segment. De cursor is nog steeds actief. Als u op LINE drukt, wordt de cursor zonder te bewegen geïnactiveerd. De cursor krijgt zijn normale vorm (een kruisje) en de functie LINE is niet meer actief.

TLINE

(Toggle LINE) Zet de cursor op het tweede kwadrant om deze functie in werking te zien. Druk op TLINE. Er wordt een MARK aan het begin van de togglelijn gezet. Beweeg de cursor met de pijltoetsen bij dit punt vandaan en druk op TLINE. Er wordt een lijn getekend van de huidige cursorpositie naar het eerder geselecteerde referentiepunt. Pixels die aan staan in het lijnpad worden uitgeschakeld en andersom. Druk opnieuw op TLINE om de recentste lijn te wissen. Om TLINE te deactiveren, zet u de cursor op het oorspronkelijke punt waar TLINE werd geactiveerd en drukt u op LINE LINE.

BOX

Dit commando wordt gebruikt om een vakje te tekenen in de grafiek. Zet de cursor op een leeg gebied in de grafiek en druk op BOX. De cursor is nu gemarkeerd. Beweeg de cursor met de pijltoetsen op een punt en beweeg in diagonale richting weg van de huidige cursorpositie. Druk opnieuw op BOX. Er wordt een rechthoek getekend, waarvan de diagonaal tussen de begin- en eindposities van de cursor staat. De oorspronkelijke positie van het vakje is nog altijd gemarkeerd met een x. Als u de cursor op een andere positie zet en op BOX drukt, krijgt u een nieuw vakje met het beginpunt. Om BOX te deactiveren, zet u de cursor op het oorspronkelijke punt waar BOX werd geactiveerd en drukt u op LINE LINE.

CIRCL

Dit commando produceert een cirkel. Markeer het midden van de cirkel met het commando MARK. Zet de cursor daarna op een punt dat tot de rand van de cirkel behoort en druk op CIRCL. Om CIRCL te deactiveren, zet u de cursor weer op de MARK-positie en drukt u op LINE.

Probeer dit commando door de cursor op een leeg gebied in de grafiek te zetten en op MARK te drukken. Zet de cursor op een ander punt en druk op CIRCL. Er wordt een cirkel centraal om MARK getekend die door het laatste punt loopt.

LABEL

Als u op LABEL drukt, worden de labels in de x- en y-assen van het huidige diagram geplaatst. Deze functie hebben we al regelmatig gebruikt in dit hoofdstuk.

DEL

Dit commando wordt gebruikt om delen van de grafiek tussen de twee MARK-posities te verwijderen. Zet de cursor op een punt in de grafiek en druk op MARK. Zet de cursor op een ander punt en druk opnieuw op MARK. Druk daarna op DEL. Het deel van de grafiek tussen de twee markeringen wordt verwijderd.

ERASE

De functie ERASE wist het volledige grafiekvenster. Dit commando is beschikbaar via het menu PLOT en net als in het diagramvenster toegankelijk via de softmenutoetsen.

MENU

Als u op MENU drukt, worden de labels van de softmenutoetsen verwijderd, zodat de grafiek zonder deze labels wordt weergegeven. Druk op NXT als u de labels weer wilt weergeven .

SUB

Met dit commando kunt u een subverzameling uit een grafiekobject halen. Het verwijderde object wordt automatisch in het stapelgeheugen geplaatst. Selecteer de subverzameling die u wilt verwijderen door een MARK op een punt in de grafiek te zetten, de cursor in de diagonale hoek van de rechthoek waarin de subverzameling in de grafiek staat en op SUB te drukken. Deze functie kan worden gebruikt om delen van een grafiekobject in de grafiek te verplaatsen.

REPL

Dit commando plaatst de inhoud van een grafiekobject dat nu in het stapelgeheugen op niveau 1 staat bij de cursor in het grafiekvenster. De linkerbovenhoek in het grafiekobject dat in de grafiek wordt ingevoegd, wordt bij de cursorpositie geplaatst. Als u dus een grafiek wilt maken uit het stapelgeheugen dat het grafiekvenster volledig vult, moet de cursor in de linkerbovenhoek in het beeldscherm staan.

PICT→

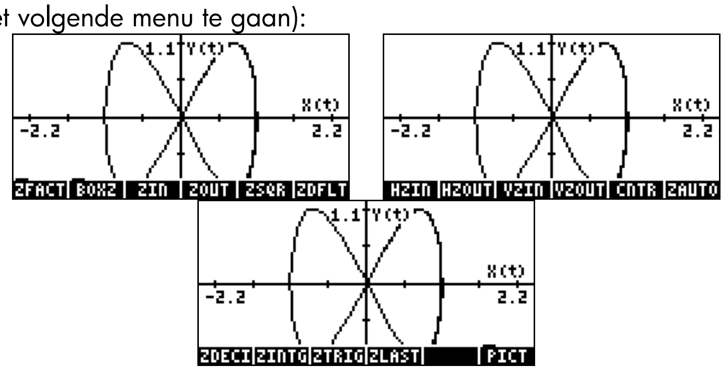
Dit commando plaatst een kopie van de grafiek in het grafiekvenster in het stapelgeheugen als een grafiekobject. Het grafiekobject dat in het stapelgeheugen wordt geplaatst, kan worden opgeslagen met een variabelennaam voor opslag of andere bewerkingen.

X,Y→

Dit commando kopieert de coördinaten van de huidige cursorpositie, in gebruikerscoördinaten, in het stapelgeheugen.

In- en uitzoomen in de grafiekweergave

Als u een tweedimensionale FUNCTION-grafiek interactief aanmaakt, heeft u met de eerste softmenutoets, met het label ZOOM, toegang tot functies die kunnen worden gebruikt om in en uit te zoomen in de huidige grafiekweergave. Het ZOOM-menu heeft de volgende functies (druk op NXT naar het volgende menu te gaan):



We zullen de functies beschrijven. U moet eerst een grafiek zoals in Hoofdstuk 12 aanmaken of met een van de programma's die eerder in dit hoofdstuk werden vermeld.

ZFACT, ZIN, ZOUT en ZLAST

Als u op ZFACT drukt, verschijnt er een invoervenster waarmee u de huidige X- en Y-factoren kunt wijzigen. De X- en Y-factoren hebben betrekking op de horizontale en verticale door de gebruiker gedefinieerde eenheidbereiken voor de betreffende pixelbereiken. Wijzig de H-Factor in 8., en druk op OK, wijzig de V-Factor in 2., en druk op OK. Verwijder het vinkje voor ✓`Recenter on cursor` en druk op OK.

Als u weer in de grafiekweergave zit, drukt u op ZIN . De grafiek wordt opnieuw getekend met de nieuwe verticale en horizontale schaalfactoren, gecentreerd bij de positie waar de cursor werd geplaatst, terwijl de originele PICT-grootte wordt behouden (dus het originele aantal pixels in beide richtingen). Blader met de pijltjestoetsen horizontaal of verticaal zo ver mogelijk in de ingezoomde grafiek.

Als u wilt uitzoomen, met de H- en V-Factoren ingesteld met ZFACT, drukt u op ZOOM ZOUT. De resulterende grafiek geeft meer details dan de ingezoomde grafiek.
Met ZLAST kunt u altijd terugkeren naar het laatste zoomvenster.

BOXZ

U kunt ook in- en uitzoomen in een bepaalde grafiek met de softmenutoets BOXZ. Met BOXZ selecteert u het rechthoekige deel (het “vakje”) waarop u wilt inzoomen. Zet de cursor op een van de hoeken van het vakje (met de pijltjestoetsen) en druk op ZOOM BOXZ. Als u de pijltjestoetsen nog een keer gebruikt, zet u de cursor in de tegenovergestelde hoek van het gewenste zoomvakje. De cursor volgt het zoomvakje in het scherm. Als het gewenste zoomvakje is geselecteerd, drukt u op ZOOM. De rekenmachine zoomt in op de inhoud van het geselecteerde zoomvakje en vult het hele scherm.

Als u nu op ZOUT drukt, zal de rekenmachine uit het huidige vakje zoomen met de H- en V-Factoren, wat misschien niet de grafiekweergave oplevert waarmee u deze handeling van het zoomvakje begon.

ZDFLT, ZAUTO

Als u op ZDFLT drukt, wordt het huidige diagram opnieuw getekend met de standaard x- en y-bereiken, dus –6.5 tot 6.5 in x en –3.1 tot 3.1 in y. Het commando ZAUTO maakt daarentegen een zoomvenster met het bereik van de huidige onafhankelijke variabele (x), maar past het bereik van de afhankelijke variabele (y) aan zodat deze in de curve past (net als met de functie AUTO in het invoervenster PLOT WINDOW (← WIN, tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus).

HZIN, HZOUT, VZIN en VZOUT

Deze functies zoomen in en uit het grafiekscherm in horizontale of verticale richting aan de hand van de huidige H- en V-factoren.

CNTR

Zoomt in met het midden van het zoomvenster op de huidige cursorpositie. De gebruikte zoomfactoren zijn de huidige H- en V-factoren.

ZDECI

Zoomt de grafiek om de limieten van het x-interval tot een decimale waarde af te ronden.

ZINTG

Zoomt de grafiek in zodat de pixeleenheden door de gebruiker gedefinieerde eenheden worden. Het minimale PICT-venster heeft bijvoorbeeld 131 pixels. Als u ZINTG gebruikt, met de cursor in het midden van het scherm, wordt het venster in gezoomd zodat de x-as wordt uitgebreid van –64.5 tot 65.5.

ZSQR

Zoomt de grafiek in zodat de plotschaal 1:1 blijft door de x-schaal aan te passen, waarbij de y-schaal ongewijzigd blijft, als het venster breder dan het hoog is. Zo krijgt u een proportionele zoom.

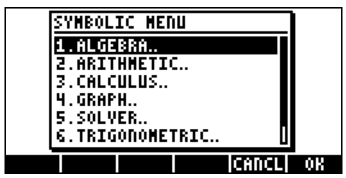
ZTRIG

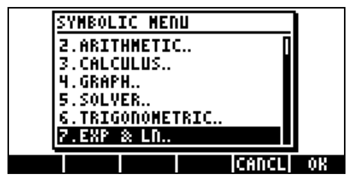
Zoomt de grafiek in zodat de x-schaal een bereik van ongeveer $–3\pi$ tot $+3\pi$, heeft, het voorkeursbereik voor trigonometrische functies.

Opmerking: geen van deze functies is programmeerbaar. Ze zijn alleen interactief bruikbaar. Verwar het commando ZFACT in het menu ZOOM niet met de functie ZFACTOR, die wordt gebruikt bij toepassingen in de gasdynamica en scheikunde (zie Hoofdstuk 3).

Het SYMBOLIC-menu en grafieken

Het SYMBOLIC-menu wordt geactiveerd met de toets SYMB (vierde toets vanaf links in de vierde rij vanaf boven). In dit menu staan een aantal menu's voor het Computer Algebraic System of CAS, namelijk:





Op een na zijn deze menu's direct toegankelijk via het toetsenbord door de juiste toetsencombinaties als volgt in te drukken. Het hoofdstuk van de gebruikershandleiding waarin deze menu's worden beschreven, staat ook vermeld:

ALGEBRA..	↱ ALG (the 4 key)	Ch. 5
ARITHMETIC..	↰ ARITH (the 1 key)	Ch. 5
CALCULUS..	↰ CALC (the 4 key)	Ch. 13
SOLVER..	↰ S.SLV (the 7 key)	Ch. 6
TRIGONOMETRIC..	↱ TRIG (the 8 key)	Ch. 5
EXP&LN..	↰ EXP&LN (the 8 key)	Ch. 5

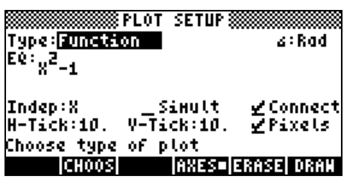
Het SYMB/GRAPH-menu

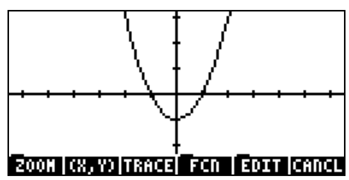
Het submenu GRAPH binnen het menu SYMB heeft de volgende functies:

DEFINE: hetzelfde als de toetsencombinatie ← DEF (de toets 2)
GROBADD: plakt twee GROBs eerste over de twee (zie Hoofdstuk 22)
PLOT(functie): plot een functie, hetzelfde als ← 2D/3D
PLOTADD(functie): voegt deze functie toe aan de lijst met te plotten functies, hetzelfde als ← 2D/3D
Plot setup: hetzelfde als ← 2D/3D
SIGNTAB(functie): tekentabel van bepaalde functies met intervallen van positieve en negatieve variantie, nulpunten en oneindige asymptoten
TABVAL: tabel met waarden voor een functie
TABVAR: variantietabel voor een functie

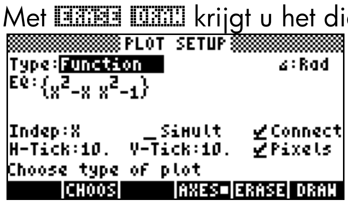
Voorbeelden van sommige van deze functies ziet u hieronder.

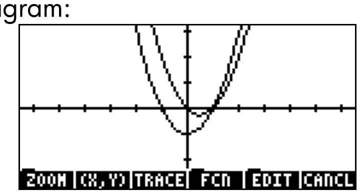
PLOT(X^2-1) is gelijk aan ← 2D/3D met EQ: X^2 -1. Met ERASE DRAW krijgt u het diagram:



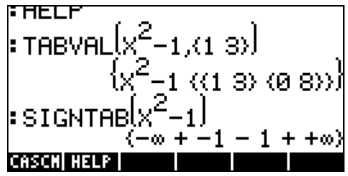


PLOTADD(X^2-X) is hetzelfde als ← 2D/3D maar voegt de functie toe aan EQ: X^2 -1. Met ERASE DRAW krijgt u het diagram:



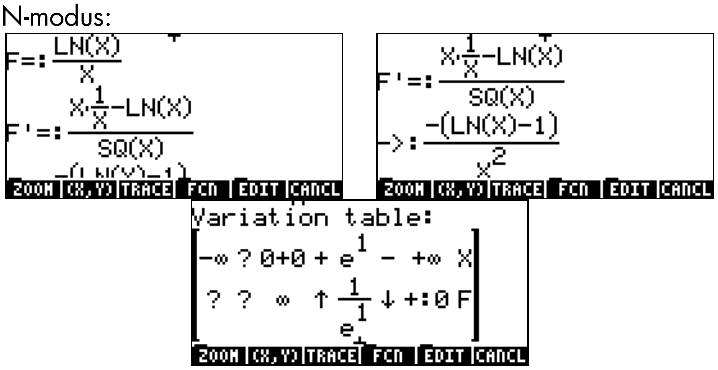


TABVAL(X^2-1,{1, 3}) produceert een lijst met {min max} waarden van de functie in het interval {1,3}, terwijl SIGNTAB(X^2-1) het teken toont van de functie in het interval (-∞,+), met f(x) > 0 in (-∞,-1), f(x) <0, in (-1,1), en f(x) > 0 in (1,+ ∞).

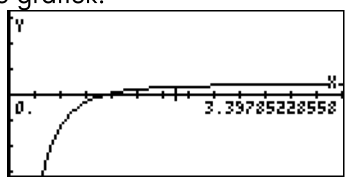


TABVAR(LN(X)/X) produceert de volgende variatietabel:

Een gedetailleerde interpretatie van de variatietabel is eenvoudiger te volgen in de RPN-modus:

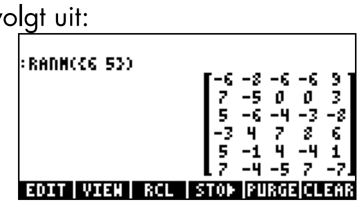


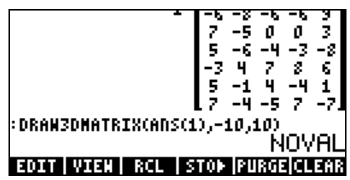
De uitkomst heeft een grafisch opmaak, met de originele functie, F(X), de afgeleide F'(X) meteen na de afleiding en na vereenvoudiging, en uiteindelijk een variantietabel. De tabel bestaat uit twee rijen, met rechts de labels. De bovenste rij geeft de waarden van X en de tweede rij geeft de waarden van F. De vraagtekens geven een onbepaaldheid of non-definitie aan. Voor X<0 is LN(X) bijvoorbeeld niet gedefinieerd en daarom tonen de X-lijnen een vraagteken bij dat interval. Bij nul (0+0) is F oneindig, omdat X = e, F = 1/e. F neemt toe voordat deze waarde bereikt wordt, zoals wordt aangegeven door de pijltoets omhoog, en neemt af als deze waarde (X=e) iets groter dan nul is geworden (+:0) terwijl X oneindig wordt. Deze observaties wordt als volgt weergegeven in de grafiek:



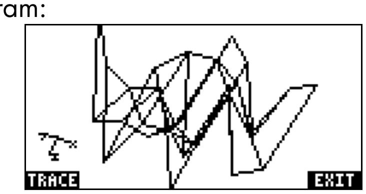
De functie DRAW3DMATRIX

Deze functie heeft als argument een n×m-matrix, **Z**, = [z_{ij}], en de minimum- en maximumwaarden voor het diagram. U wilt de waarden v_{min} en v_{max} selecteren, zodat ze de waarde in **Z** bevatten. De algemene oproep voor deze functie is daarom DRAW3DMATRIX(**Z**,v_{min},v_{max}). Om het gebruik van deze functie te illustreren, maken we eerst een matrix van 6×5 met RANM({6,5}) en roepen we daarna de functie DRAW3DMATRIX op. Dat ziet er als volgt uit:





Het diagram heeft de opmaak van een FAST3DPLOT. Hieronder ziet u verschillende weergaven van het diagram:



Hoofdstuk 13
Calculustoepassingen

In dit hoofdstuk laten we toepassingen zien van de functies van de rekenmachine op bewerkingen die betrekking hebben op calculus, bijvoorbeeld limieten, afgeleiden, integralen, machtreeksen, enz.

Het menu CALC (Calculus)

Veel van de functies in dit hoofdstuk staan in het menu CALC van de rekenmachine dat toegankelijk is met de toetsencombinatie ← CALC (behorende bij de toets 4). Het menu CALC toont de volgende items:

De eerste vier opties in dit menu zijn eigenlijk submenu's die van toepassing zijn op (1) afgeleiden en integralen, (2) limieten en krachtreeksen, (3) differentiaalvergelijkingen en (4) grafieken. De functies onder (1) en (2) zullen worden behandeld in dit hoofdstuk. Differentiaalvergelijkingen, het onderwerp van item (3) worden behandeld in hoofdstuk 16. Grafische functies, het onderwerp van item (4) werden behandeld aan het eind van hoofdstuk 12. De items 5 DERVX en 6 INTVX tenslotte zijn de functies waarmee u een afgeleide en een oneindige integraal kunt verkrijgen voor een functie van de standaard CAS-variabele (standaard 'X'). De functies DERVX en INTVX zullen later uitvoerig behandeld worden.

Limieten en afgeleiden

Differentiaal calculus behandelt afgeleiden of veranderingsgraden van functies en hun toepassingen in wiskundige analyses. De afgeleide van een functie wordt gedefinieerd als een limiet van het verschil van een functie wanneer de toename in de onafhankelijke variabele de nul benadert. Limieten worden gebruikt om de continuïteit van functies te controleren.

De functie lim

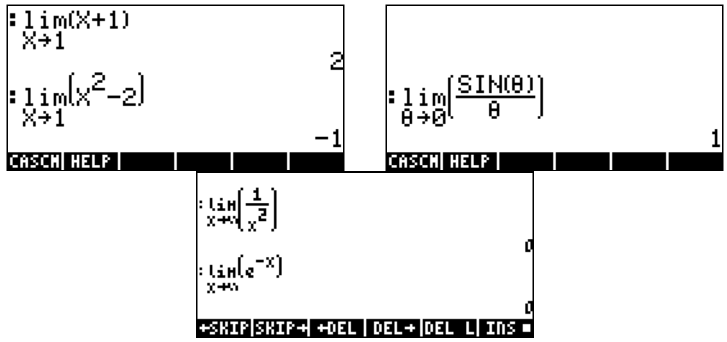
De rekenmachine biedt de functie *lim* om limieten van functies te berekenen. Deze functie gebruikt als invoer een uitdrukking die een functie weergeeft en de waarde waarvan de limiet dient te worden berekend. De functie *lim* is beschikbaar via de commandocatalogus (→ CAT ALPHA ← L) of via optie 2 LIMITS & SERIES… in het menu CALC (zie hierboven).

Opmerkingen: De functies die beschikbaar zijn in het menu LIMITS & SERIES worden hieronder getoond:

De functie DIVPC wordt gebruikt om twee polynomen te delen voor een reeksuitbreiding. De functies DIVPC, SERIES, TAYLOR0 en TAYLOR worden gebruikt in reeksuitbreidingen van functies en worden uitvoerig behandeld in dit hoofdstuk.

De functie *lim* wordt in de ALG-modus ingevoerd als `lim(f(x),x=a)` om de limiet $\lim_{x\to a} f(x)$ te berekenen. Voer in de RPN-modus eerst de functie in, dan de uitdrukking 'x=a' en tenslotte de functie lim. Voorbeelden in de ALG-modus ziet u hieronder, waaronder ook enkele limieten naar oneindigheid. De toetsencombinaties voor het eerste voorbeeld zijn als volgt (in de Algebraïsche modus en met systeemvlag 117 ingesteld op CHOOSE boxes (keuzevensters)):

← CALC 2 OK 2 OK X + 1 → , X → = 1 ENTER



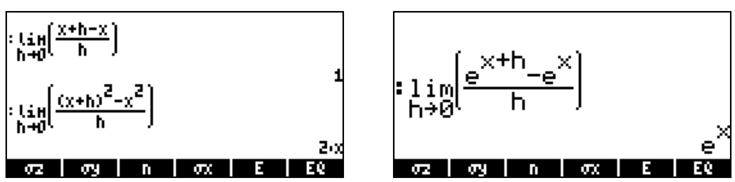
Het oneindigheidssymbool behoort bij de toets 0, d.w.z. ← ∞ .

Afgeleiden

De afgeleide van een functie f(x) bij x = a wordt gedefinieerd als de limiet

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{h->0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

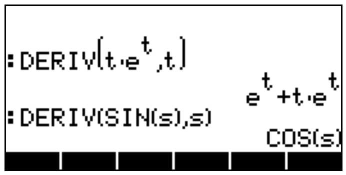
Enkele voorbeelden van afgeleiden met deze limiet worden in de volgende beeldschermen getoond:

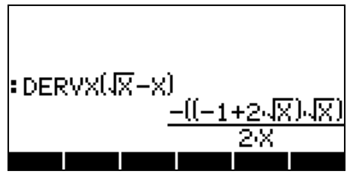


De functies DERIV en DERVX

De functie DERIV wordt gebruikt om afgeleiden die betrekking op een onafhankelijke variabele aan te nemen, terwijl de functie DERVX afgeleiden aanneemt m.b.t. de standaard CAS-variabele VX (standaard 'X'). Functie DERVX is direct via het menu CALC beschikbaar en beide functies zijn beschikbaar in het submenu DERIV.&INTEG in het menu CALCL (← CALC).

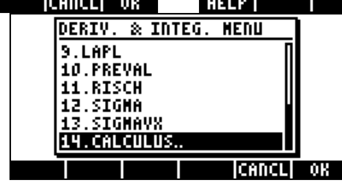
De functie DERIV vereist een functie, bijv. f(t), en een onafhankelijke variabele, bijv. t. De functie DERVX vereist alleen een functie van VX. Voorbeelden in de ALG-modus ziet u hieronder. Vergeet niet dat in RPN-modus de argumenten ingevoerd moeten worden voordat de functie wordt toegepast.





Het menu DERIV&INTEG

De functies die beschikbaar zijn in dit submenu ziet u hieronder:



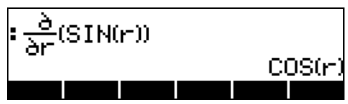
Van deze functies worden DERIV en DERVX gebruikt voor afgeleiden. De andere functies zijn functies voor primitieven en integralen (IBP, INTVX, PREVAL, RISCH, SIGMA en SIGMAVX), voor Fourierreeksen (FOURIER) en voor vectoranalyse (CURL, DIV, HESS, LAPL). Hieronder behandelen we de functies DERIV en DERVX, de resterende functies worden of later in dit Hoofdstuk of in volgende hoofdstukken behandeld.

Afgeleiden berekenen met ∂

Het symbool is beschikbaar als ↱ ∂ (de toets COS). Dit symbool kan worden gebruikt om een afgeleide in het stapelgeheugen of in de vergelijkingenschrijver in te voeren. Als u het symbool gebruikt om een

afgeleide in het stapelgeheugen te schrijven, moet het onmiddellijk gevolgd worden door de onafhankelijke variabele en daarna een paar haakjes rond de te differentiëren functie. Om de afgeleide d(sin(r),r) te berekenen in de ALG-modus voeren we dus het volgende in:
↱ ∂ ALPHA ↰ R ↰ () SIN ALPHA ↰ R ENTER

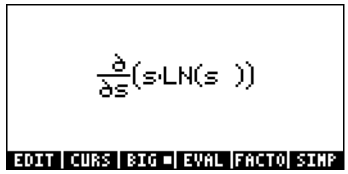
In de RPN-modus moet deze uitdrukking tussen aanhalingstekens staan alvorens het in het stapelgeheugen in te voeren. Het resultaat in de ALG-modus is:



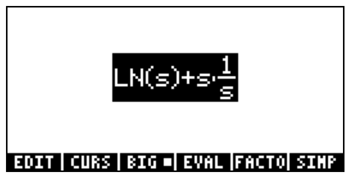
Wanneer u in de vergelijkingenschrijver op ↱ ∂ drukt ,geeft de rekenmachine de volgende uitdrukking:

De invoegcursor (◆) staat rechts van de noemer en wacht tot de gebruiker een onafhankelijke variabele invoert, bijv. s: ALPHA ↰ S . Druk dan op de pijltoets naar rechts (▷) om naar de plaatshouder tussen haakjes te bewegen:

Voer vervolgens de te differentiëren functie in, bijv. s*ln(s):



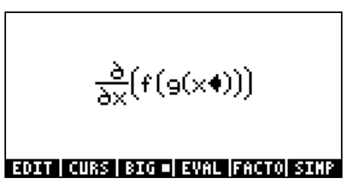
Om de afgeleide in de vergelijkingenschrijver te evalueren, drukt u vier keer op de pijltoets omhoog om de hele uitdrukking te selecteren. Druk dan op EVAL. De uitdrukking wordt in de vergelijkingenschrijver geëvalueerd als:

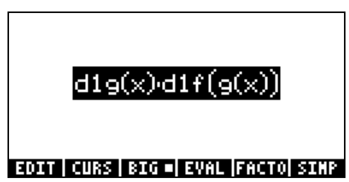


Opmerking: het symbool ∂ wordt formeel in de wiskunde gebruikt om een partiële afgeleide aan te duiden, d.w.z. de afgeleide van een functie met meer dan een variabele. De rekenmachine maakt echter geen onderscheid tussen gewone en partiële afgeleiden en gebruikt hetzelfde symbool voor beiden. De gebruiker dient dit onderscheid in het hoofd te houden bij het overzetten van uitkomsten van de rekenmachine op papier.

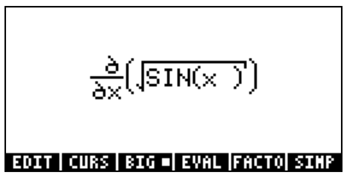
De kettingregel

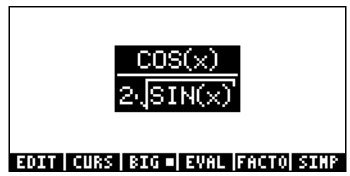
De kettingregel voor afgeleiden is van toepassing op afgeleiden van samengestelde functies. Een algemene uitdrukking voor de kettingregel is d{f[g(x)]}/dx = (df/dg)· (dg/dx). Met de rekenmachine geeft deze uitdrukking:





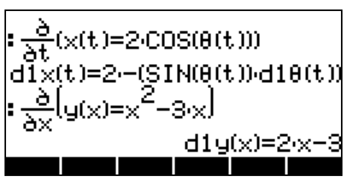
De termen d1 voor g(x) en f(g(x)) in de bovenstaande uitdrukking zijn afkortingen die de rekenmachine gebruikt om een eerste afgeleide aan te duiden wanneer de onafhankelijke variabele, in dit geval x, duidelijk gedefinieerd is. Het laatste resultaat wordt dus geïnterpreteerd als in de hierboven getoonde uitdrukking voor de kettingregel. Hier is nog een voorbeeld van een kettingregeltoepassing:

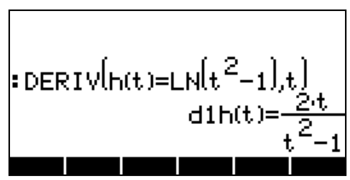


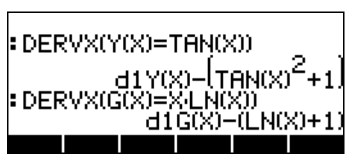


Afgeleiden van vergelijkingen

U kunt de rekenmachine gebruiken om afgeleiden van vergelijkingen te berekenen, d.w.z. uitdrukkingen die afgeleiden hebben aan beide kanten van het isteken. U ziet hieronder enkele voorbeelden:



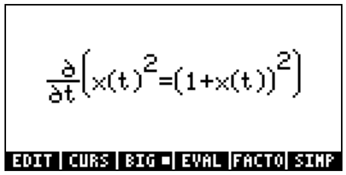


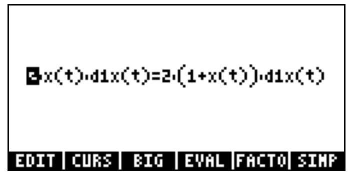


Merk op dat in de uitdrukkingen waarvoor het afgeleidenteken (∂) of de functie DERIV was gebruikt, het isteken in de vergelijking bewaard is gebleven, maar niet in de gevallen waarbij de functie DERVX werd gebruikt. In deze gevallen werd de vergelijking herschreven en werden alle termen naar de linkerkant van het isteken verplaatst. Het isteken werd tevens verwijderd, maar het is duidelijk dat de resulterende uitdrukking gelijk is aan nul.

Impliciete afgeleiden

Impliciete afgeleiden zijn mogelijk in uitdrukkingen als:





Toepassing van afgeleiden

Afgeleiden kunnen gebruikt worden om grafieken van functies te analyseren en om functies van een variabele te optimaliseren (d.w.z. het vinden van de minima en maxima). Enkele toepassingen van afgeleiden ziet u hieronder.

Grafieken van functies analyseren

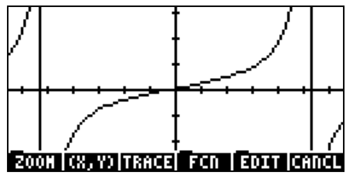
In hoofdstuk 11 behandelden we enkele functies die beschikbaar zijn in het grafiekenscherm om grafieken van functies in de vorm y = f(x) te analyseren. Deze functies zijn (X,Y) en TRACE om punten op de grafiek te bepalen en functies in de menu's ZOOM en FCN. De functies in het menu ZOOM stellen de gebruiker in staat om in te zoomen op een grafiek voor een meer gedetailleerde analyse. Deze functies worden in hoofdstuk 12 uitgebreid behandeld. Van de functies van het menu FCN kunnen we de functies SLOPE, EXTR, F' en TANL gebruiken om de richtingscoëfficiënt van een raaklijn op de grafiek en de extrema (minima en maxima) van de functie te bepalen, om de afgeleide te plotten en om de vergelijking van een raaklijn te vinden.

Probeer het volgende voorbeeld voor de functie y = tan(x).

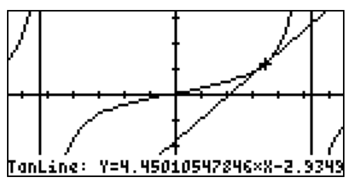
- Druk op [←] [2D/3D] , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
- Verander `TYPE` zo nodig in `FUNCTION` met [CHOOS].
- Druk op [▼] en voer de vergelijking 'TAN(X)' in.
- Zorg ervoor dat de onafhankelijke variabele is ingesteld op 'X'.
- Druk op [NXT] [OK] om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.
- Druk tegelijkertijd op [←] [WIN] om naar het beeldscherm PLOT te gaan.

- Verander het H-VIEW-bereik in -2 tot 2 en het V-VIEW-bereik in -5 tot 5.
- Druk op ERASE DRAW om de functie in polaire coördinaten te plotten.

Het resulterende diagram ziet er als volgt uit:



- U ziet dat er verticale lijnen zijn die asymptoten weergeven. Deze maken geen deel uit van de grafiek maar laten punten zien waar TAN(X) naar ± ∞ gaat voor bepaalde waarden van X.
- Druk op TRACE (X,Y) en beweeg de cursor naar het punt X: 1.08E0, Y: 1.86E0. Druk vervolgens op NXT FCN SLOPE. De uitkomst is Richtingscoëfficiënt: 4.45010547846.
- Druk op NXT NXT TANL. Deze bewerking geeft de vergelijking van de raaklijn en plot de grafiek in dezelfde afbeelding. Het resultaat ziet u in de afbeelding hieronder:

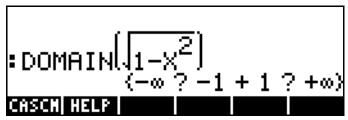


- Druk op NXT PICT CANCL ON om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te gaan. U ziet dat de gevraagde richtingscoëfficiënt en de raaklijn in het stapelgeheugen staan.

De functie DOMAIN

De functie DOMAIN, beschikbaar via de commandocatalogus (→ CAT), geeft het definitiedomein van een functie als een reeks getallen en specificaties. Bijvoorbeeld:

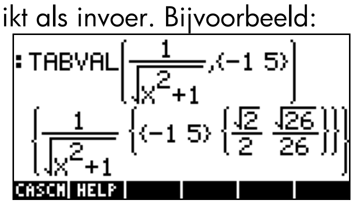
geeft aan dat tussen $-\infty$ en 0, de functie LN(X) niet gedefinieerd is (?), terwijl van 0 tot $+\infty$, de functie gedefinieerd is (+). Terwijl



aangeeft dat de functie tussen $-\infty$ en -1 niet gedefinieerd is en tussen 1 en $+\infty$ ook niet. Het domein van deze functie is daarom $-1<X<1$.

De functie TABVAL

Deze functie is toegankelijk via de commandocatalogus of via het submenu GRAPH in het menu CALC. De functie TABVAL neemt als argumenten een functie van de CAS-variabele f(X) en een reeks van twee getallen die een domein voor de functie f(X) weergeeft. Functie TABVAL geeft de invoerwaarden plus het bereik van de functie in overeenstemming met het domein dat werd gebruikt als invoer. Bijvoorbeeld:



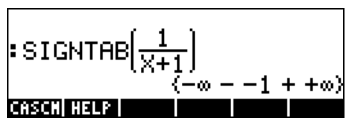
Deze uitkomst geeft aan dat het bereik van de functie $f(X) = \dfrac{1}{\sqrt{X^2+1}}$ overeenstemt met het domein D = { -1,5 } is R = $\left\{ \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{26}}{26} \right\}$.

De functie SIGNTAB

De functie SIGNTAB, beschikbaar via de commandocatalogus (↱ CAT), geeft informatie over het teken van een functie via het domein van de functie. Voor de functie TAN(X) bijvoorbeeld:

SIGNTAB geeft aan dat TAN(X) negatief is tussen $-\pi/2$ en 0 en positief tussen 0 en π /2. Voor dit geval geeft SIGNTAB geen informatie (?) in de intervallen tussen $-\infty$ en $-\pi$ /2 en ook niet tussen $+\pi$ /2 en ∞. SIGNTAB geeft hier dus alleen informatie over het hoofddomein van TAN(X), namelijk $-\pi /2 < X < +\pi /2$.

Een tweede voorbeeld van de functie SIGNTAB ziet u hieronder:



Hier is de functie negatief voor X<-1 en positief voor X> -1.

De functie TABVAR

Deze functie is toegankelijk via de commandocatalogus of via het submenu GRAPH in het menu CALC. Als invoer gebruikt deze functie de functie f(VX), waarbij VX de standaard CAS-variabele is. In de RPN-modus geeft de functie het volgende:

- Niveau 3: de functie f(VX)

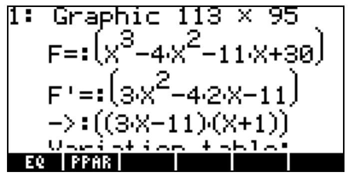
- Twee reeksen waarvan de eerste de variatie van de functie met betrekking op de onafhankelijke variabele aangeeft (d.w.z. waar de functie toe- en afneemt) en de tweede de variatie van de functie met betrekking tot de afhankelijke variabele.

- Een grafisch object dat laat zien hoe de variatietabel is berekend.

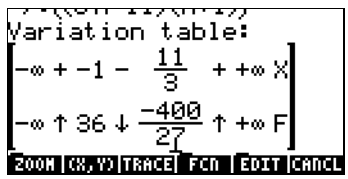
Voorbeeld: analyseer de functie $Y = X^3-4X^2-11X+30$ met de functie TABVAR. Gebruik de volgende toetsencombinaties in de RPN-modus:

'X^3-4*X^2-11*X+30' ENTER → CAT ALPHA T (selecteer TABVAR) OK

Dit is wat de rekenmachine laat zien in stapelgeheugenniveau 1:



Dit is een grafisch object. Druk op ▼ om het volledige resultaat te zien. De variatietabel van de functie wordt als volgt getoond:



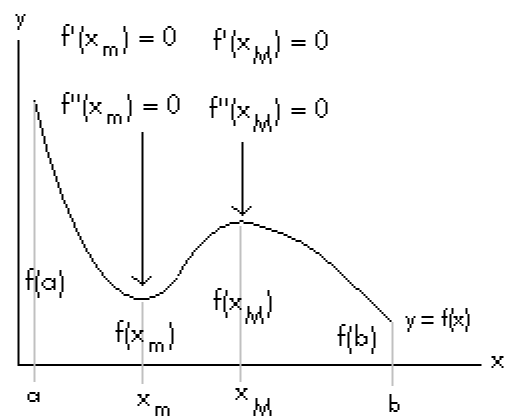
Druk op ON om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren. Druk op ◄ om deze laatste uitkomst uit het stapelgeheugen te halen.

Twee reeksen die corresponderen met de bovenste en de onderste rij van de grafiekmatrix die eerder werd getoond, staan nu op niveau 1. Deze reeksen kunnen handig zijn voor programmeerdoeleinden. Druk op ◄ om deze laatste uitkomst uit het stapelgeheugen te halen.

De interpretatie van de hierboven getoonde variatietabel is als volgt: de functie F(X) neemt toe voor X in het interval (-∞, -1) en bereikt een maximum gelijk aan 36 bij X = -1. Dan neemt F(X) af tot X = 11/3 en bereikt een minimum van –400/27. Daarna neemt F(X) toe totdat +∞ wordt bereikt. Ook is bij X = ±∞, F(X) = ±∞.

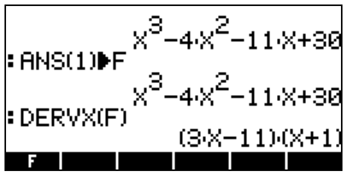
Met afgeleiden extreme punten berekenen

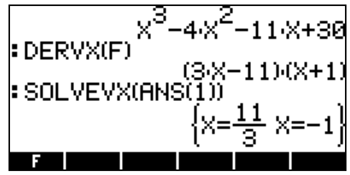
"Extreme punten" of extrema, is de algemene aanduiding voor maximum- en minimumwaarden van een functie in een gegeven interval. Omdat een afgeleide van een functie op een gegeven punt de richtingscoëfficiënt weergeeft van een lijn die de curve op dat punt raakt, geven waarden van x waarvoor f'(x) = 0, punten weer waar de grafiek van de functie een maximum of minimum bereikt. Verder bepaalt de waarde van de tweede afgeleide van de functie f'(x) op deze punten of het punt een *relatief of lokaal maximum* [f"(x)<0] *of minimum* [f"(x)>0] is. Deze ideeën worden verduidelijkt in de onderstaande afbeelding.



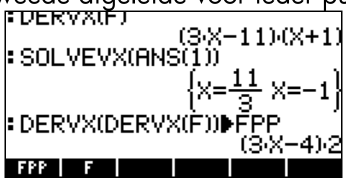
In deze afbeelding beperken we ons tot het bepalen van de extreme punten van de functie y = f(x) in het x-interval [a,b]. Binnen dit interval vinden we twee punten $x = x_m$ en $x = x_m$ waarbij f'(x)=0. Het punt $x = x_m$, waarbij f"(x)>0, geeft een lokaal minimum weer terwijl het punt $x = x_m$ waarbij f"(x)<0 een lokaal maximum weergeeft. Uit de grafiek van y = f(x) blijkt dat het absolute maximum in het interval [a,b] zich bevindt op x = a en het absolute minimum op x = b.

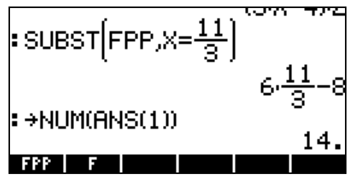
We kunnen de volgende invoer in de ALG-modus gebruiken om bijvoorbeeld te bepalen waar de kritieke punten van de functie 'X^3-4*X^2-11*X+30' zich bevinden.





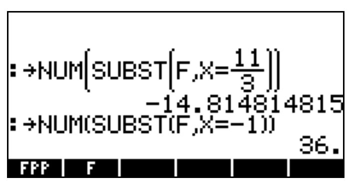
We vinden twee kritieke punten, een bij X = 11/3 en een bij X = -1. Gebruik om de tweede afgeleide voor ieder punt te evalueren:





Het laatste scherm laat zien dat f"(11/3) = 14, dus x = 11/3 een relatief minimum is. Voor x = -1 krijgen we het volgende:

Deze uitkomst geeft aan dat f"(-1) = -14, dus x = -1 een relatief maximum is. Evalueer de functie op deze punten om te verifiëren dat f(-1) > f(11/3) inderdaad waar is.



Hogere orde afgeleiden

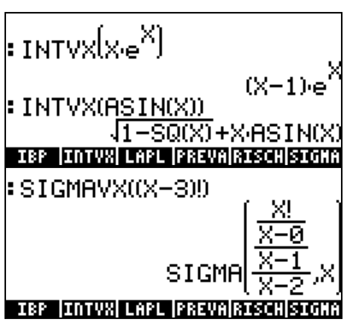
Hogere orde afgeleiden kunnen berekend worden door meerdere keren een afgeleide functie toe te passen, bijv.

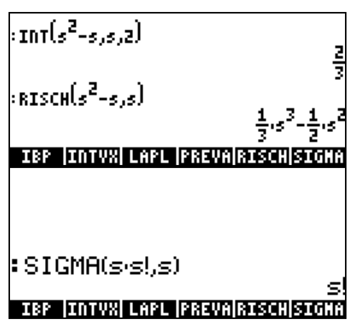
Primitieven en integralen

Een primitieve van een functie f(x) is een functie F(x) zodat f(x) = dF/dx. Bijvoorbeeld omdat d(x^3) /dx = $3x^2$, is F(x) = x^3 + C een primitieve van f(x) = $3x^2$ waarbij C een constante is. Een manier om een primitieve weer te geven is als een ongedefinieerde integraal, d.w.z.: $\int f(x)dx = F(x) + C$ alleen en echt alleen als f(x) = dF/dx en C = constant.

De functies INT, INTVX, RISCH, SIGMA en SIGMAVX

De rekenmachine geeft de functies INT, INTVX, RISCH, SIGMA en SIGMAVX om primitieven van functies te berekenen. De functies INT, RISCH en SIGMA werken met functies met willekeurige variabelen. De functies INTVX en SIGMAVX gebruiken functies van de CAS variabele VX (standaard 'x'). De functies INT en RISCH vereisen derhalve niet alleen dat de uitdrukking voor de functie geïntegreerd is maar ook de naam van de onafhankelijke variabele. De functie INT vereist bovendien een waarde van x waar de primitieve wordt geëvalueerd. De functies INTVX en SIGMAVX vereisen alleen dat de uitdrukking van de functie integreert met betrekking tot VX. Enkele voorbeelden in de ALG-modus ziet u hieronder:





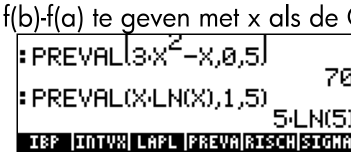
Let op: de functies SIGMAVX en SIGMA zijn bestemd voor integranden die betrekking hebben op een integraalfunctie zoals de faculteit(!)-functie hierboven. Het resultaat is een zogenaamde discrete afgeleide, d.w.z. alleen gedefinieerd voor hele getallen .

Eindige integralen

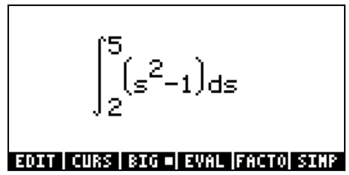
In een eindige integraal van een functie wordt de waarde van de resulterende primitieve geëvalueerd bij de boven- en benedenlimiet van een interval (a,b) en de geëvalueerde waarden afgetrokken. Symbolisch

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$ waarbij f(x) = dF/dx.

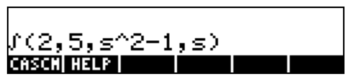
De functie PREVAL(f(x),a,b) van het CAS kan deze berekening vergemakkelijken door f(b)-f(a) te geven met x als de CAS-variabele VX.



Om eindige integralen te berekenen, geeft de rekenmachine ook het integralensymbool als de toetsencombinaties (behorende bij de toets). De eenvoudigste manier om een integraal aan te maken, is met de vergelijkingenschrijver (zie hoofdstuk 2 voor een voorbeeld). In de vergelijkingenschrijver geeft het symbool het integraalteken en voorziet in plaatshouders voor de integratielimieten (a,b), voor de functie f(x) en voor de integratievariabele (x). De volgende beeldschermen laten zien hoe een bepaalde integraal aangemaakt kan worden. De invoegcursor staat eerst in de ondergrens van de integratie, voeg een waarde in en druk op de pijltoets naar rechts ( ) om naar de bovengrens van de integratie te bewegen. Voer een waarde in op die positie en druk nogmaals op om naar de integrandlocatie te bewegen. Voer de integranduitdrukking in en druk nogmaals om naar de differentiaalplaatshouder te bewegen. Voer de integratievariabele inop die positie en de integraal kan worden berekend.



Nu kunt u op ENTER drukken om de integraal in het stapelgeheugen te plaatsen, u krijgt dan de volgende tekst (weergave in de ALG-modus):



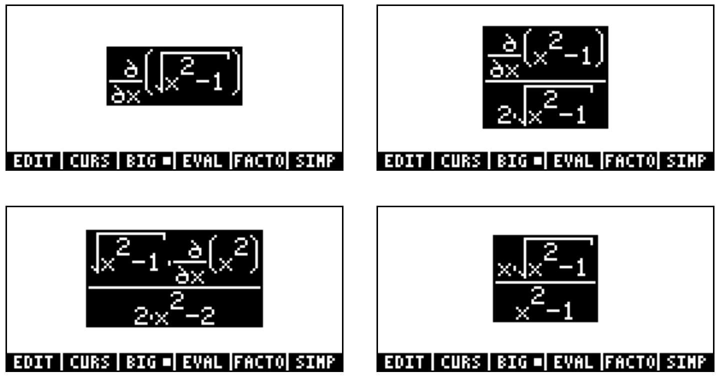
Dit is de algemene vorm voor de eindige integraal wanneer deze direct in het stapelgeheugen is ingevoerd, d.w.z. ∫(ondergrens, bovengrens, integrand, integratievariabele)

Als u nu op ENTER drukt, wordt de integraal in het stapelgeheugen geëvalueerd:

De integraal kan ook in de vergelijkingenschrijver worden geëvalueerd door de hele uitdrukking te selecteren en de softmenutoets EVAL te gebruiken.

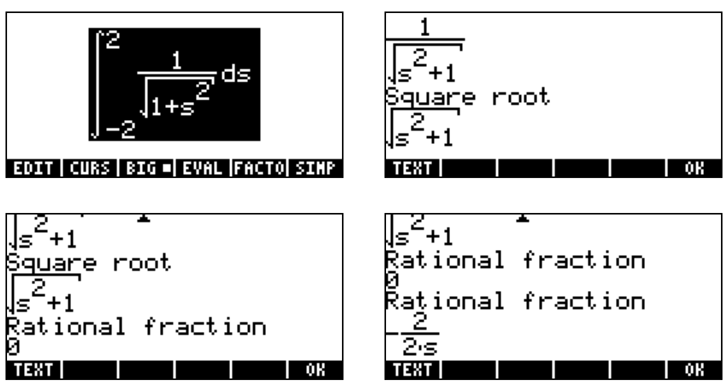
Stap-voor-stap evaluatie van afgeleiden en integralen

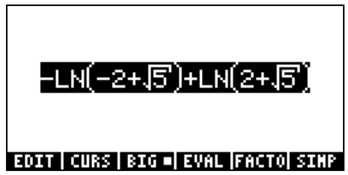
Met de optie Step/Step geselecteerd in de het scherm CAS MODES (zie hoofdstuk 1) wordt de evaluatie van afgeleiden en integralen stap voor stap getoond. Hier is bijvoorbeeld de evaluatie van een afgeleide in de vergelijkingenschrijver.



U ziet de toepassing van de kettingregel in de eerste stap, waardoor de afgeleide van de functie onder de integraal expliciet in de noemer blijft. In de tweede stap wordt de resulterende breuk gerationaliseerd (door de vierkantswortel uit de noemer te elimineren) en vereenvoudigd. De uiteindelijke versie ziet u in de derde stap. Iedere stap wordt weergegeven door op de menutoets EVAL te drukken tot u het punt bereikt waarbij het verder indrukken van de functie EVAL niet meer tot veranderingen in de uitdrukking leidt.

Het volgende voorbeeld laat de evaluatie stapsgewijs zien van een eindige integraal in de vergelijkingenschrijver:

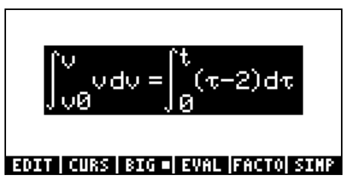


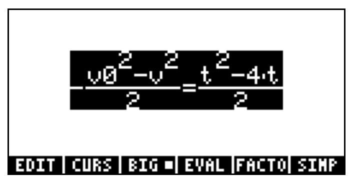


U ziet dat de stap-voor-stapprocedure informatie verschaft over de tussenstappen van CAS om deze integraal op te lossen. Eerst identificeert CAS een vierkantswortelintegraal, vervolgens een rationele breuk en een tweede rationele uitdrukking om dan het uiteindelijke resultaat te tonen. U ziet dat deze stappen voor de rekenmachine belangrijk zijn, ook al krijgt de gebruiker niet voldoende informatie over de individuele stappen.

Een vergelijking integreren

Een vergelijking integreren is eenvoudig, de rekenmachine integreert beide zijden van de vergelijking gewoon tegelijkertijd, bijv.



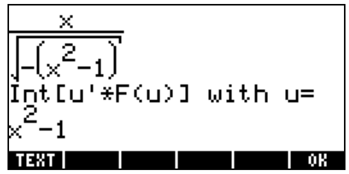


Integratietechnieken

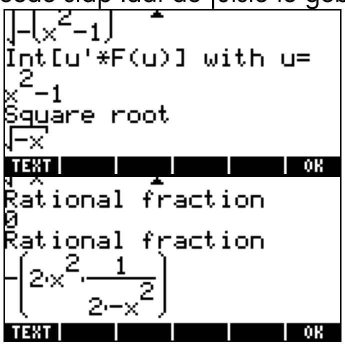
Verschillende integratietechnieken kunnen in de rekenmachines worden uitgevoerd, zoals in de volgende voorbeelden wordt getoond.

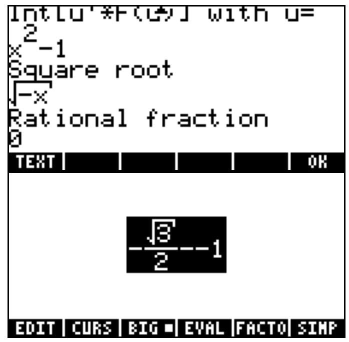
Substitutie of wissel van variabelen

Stel dat we de integraal $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ willen berekenen. Als we een stapsgewijze berekening gebruiken in de vergelijkingenschrijver is dit de opeenvolging van substituties van variabelen:



Deze tweede stap laat de juiste te gebruiken substitutie zien u = x^2-1.





De laatste vier stappen laten de voortgang in de oplossing zien: een vierkantswortel gevolgd door een breuk, een tweede breuk en het uiteindelijke resultaat. Dit resultaat kan worden vereenvoudigd met de functie SIMP om te komen tot:

Partiële integratie en differentialen

Een differentiaal van een functie y = f(x) wordt gedefinieerd als dy = f'(x) dx, waarbij f'(x) de afgeleide is van f(x). Differentialen worden gebruikt om kleine toenames in de variabelen weer te geven. De differentiaal van een product van twee functies y = u(x)v(x) wordt gegeven door dy = u(x)dv(x) +du(x)v(x), of eenvoudigweg d(uv) = udv - vdu. Dus de integraal van udv = d(uv) - vdu, wordt geschreven als $\int udv = \int d(uv) - \int vdu$. Omdat volgens de definitie van een integraal ∫dy = y, schrijven we de vorige uitdrukking als

$$\int u dv = uv - \int v du \ .$$

Deze formulering, die we partiële integratie noemen, kan worden gebruikt om een integraal te vinden als dv makkelijk te integreren is. De integraal $\int xe^x dx$ bijvoorbeeld, kan worden opgelost door partiële integratie als we gebruiken: u = x, dv = e^xdx, omdat v = e^x. Met du = dx, wordt de integraal $\int xe^x dx = \int udv = uv - \int vdu = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$.

De rekenmachine beschikt over de functie IBP in het menu CALC/DERIV&INTG. Deze functie neemt als argumenten de originele te integreren functie, namelijk u(X)*v'(X) en de functie v(X) en geeft u(X)*v(X) en -v(X)*u'(X). Met andere woorden, de functie IP geeft de twee termen van de rechterzijde in de partiële integratievergelijking. Voor het voorbeeld hierboven kunnen we in de ALG-modus het volgende schrijven:

We kunnen de functie IBP dus gebruiken om de componenten voor een partiële integratie te geven. De volgende stap dient afzonderlijk uitgevoerd te worden.

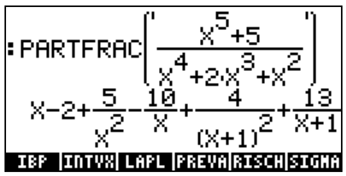
Belangrijk: De integraal kan direct worden berekend met bijvoorbeeld:

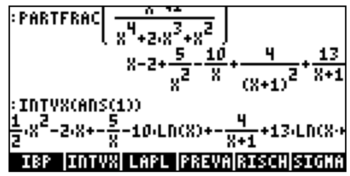
Integratie met partiële breuken

De functie PARTFRAC, behandeld in hoofdstuk 5, ontleedt partiële breuken van een breuk. Deze techniek is handig om een gecompliceerde breuk te reduceren tot een som van eenvoudige breuken die dan term voor term geïntegreerd kan worden. Om bijvoorbeeld

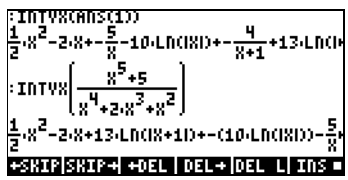
$$\int \frac{X^5 + 5}{X^4 + 2X^3 + X} dX$$

te integreren, kunnen we de breuk als volgt ontleden in partiële componentbreuken:





De directe integratie geeft met wat wisselen van de termen hetzelfde resultaat (Rigorous-modus ingesteld in het CAS – zie hoofdstuk 2):

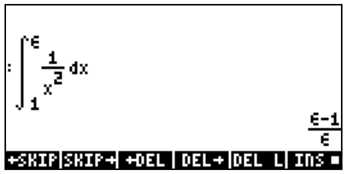


Oneigenlijke integralen

Dit zijn integralen met oneindige limieten van integratie. Gewoonlijk gaan we met een oneigenlijke integraal om door eerst de integraal te berekenen als een limiet naar oneindig, bijv.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_1^\varepsilon \frac{dx}{x^2}.$$

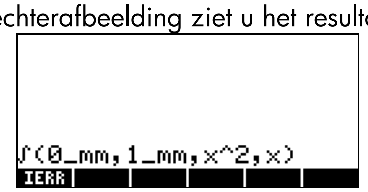
Met de rekenmachine gaan we als volgt te werk:

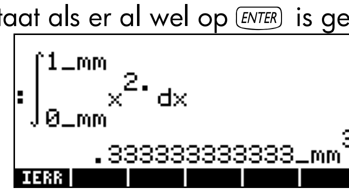
 

Anders kunt u de integraal direct naar oneindig evalueren, bijv.

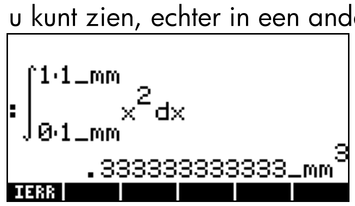
Integratie met eenheden

Een integraal kan worden berekend met eenheden die in de integratiegrenzen zijn opgenomen, zoals u in het onderstaande voorbeeld in de ALG-modus kunt zien. Het CAS is ingesteld op de modus Approx. In de linkerafbeelding ziet u de integraal ingevoerd in de regeleditor voordat er op ENTER is gedrukt. In de rechterafbeelding ziet u het resultaat als er al wel op ENTER is gedrukt.





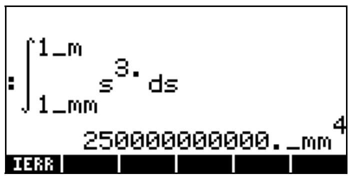
Als u de integraal met het CAS ingesteld op de Exact-modus invoert, wordt gevraagd deze in te stellen op de Approx-modus. De grenzen van de integraal worden, zoals u kunt zien, echter in een andere opmaak getoond.

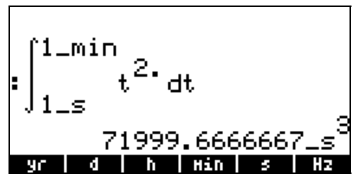


Deze grenzen staan voor 1×1_mm en 0×1_mm, wat hetzelfde is als 1_mm en 0_mm, zoals we hiervoor zagen. Let op de verschillende opmaken in de uitvoer.

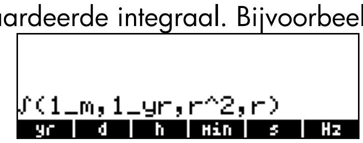
Enkele opmerkingen over het gebruik van eenheden in de integratiegrenzen:

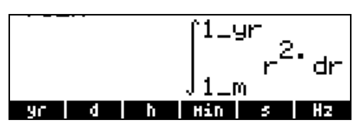
1 – De eenheden van de onderste integratiegrens worden ook in het eindresultaat gebruikt, zoals u in de twee onderstaande voorbeelden kunt zien:



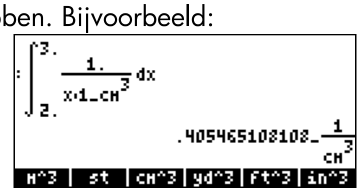


2 – De eenheden van de bovengrenzen moeten gelijk zijn aan de eenheden van de ondergrenzen. Anders geeft de rekenmachine gewoon de niet-gewaardeerde integraal. Bijvoorbeeld:

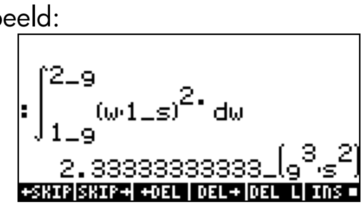


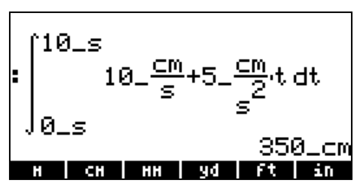


3 – De integrant kan ook eenheden hebben. Bijvoorbeeld:



4 – Als beide integratiegrenzen en de integrant eenheden hebben, worden de resulterende eenheden gecombineerd volgens de integratieregels. Bijvoorbeeld:





Oneindige reeksen

Een oneindige reeks heeft de vorm: $\sum_{n=0,1}^{\infty} h(n)(x-a)^n$. De oneindige reeks begint gewoonlijk met indexen n = 0 of n = 1. Iedere term in de reeks heeft een coëfficiënt h(n) die afhankelijk is van de index n.

Taylor- en Maclaurin-reeksen

Een functie f(x) kan worden ontwikkeld tot een oneindige reeks rond een punt $x=x_0$ d.m.v. een Taylor-reeks, namelijk:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!} \cdot (x-x_o)^n \ ,$$

waarbij $f^{(n)}(x)$ de n-de afgeleide van f(x) weergeeft met betrekking tot x, $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Indien de waarde x_0 nul is, wordt de reeks een Maclaurin-reeks genoemd, d.w.z.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

Taylorpolynoom en geheugensteun

In de praktijk kunnen we niet alle termen in een oneindige reeks evalueren, in plaats daarvan benaderen we de reeks met een polynoom van de orde k, $P_k(x)$ en schatten we de orde van een restterm $R_k(x)$, zodat

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!} \cdot (x-x_o)^n + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!} \cdot (x-x_o)^n \ ,$$

d.w.z. $f(x) = P_k(x) + R_k(x).$

De polynoom $P_k(x)$ noemen we een Taylorpolynoom. De orde van de restterm wordt geschat met betrekking tot een kleine hoeveelheid $h = x\text{-}x_0$, d.w.z. de polynoom evalueren bij een waarde van x die heel dicht bij x_0 ligt. De restterm, indien gegeven door

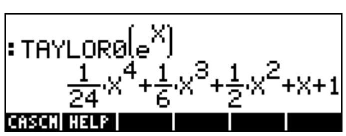
$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!} \cdot h^{k+1},$$

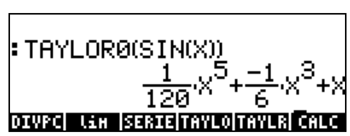
waarbij ξ een getal dichtbij $x = x_0$ is. Omdat ξ gewoonlijk onbekend is, geven we in plaats van een schatting van de restterm, een schatting van de orde van de restterm ten opzichte van h, d.w.z. we zeggen dat $R_k(x)$ een fout heeft van de orde h^{n+1} of $R \approx O(h^{k+1})$. Als h een klein getal is, bijv. $h<<1$, dan is h^{k+1} gewoonlijk erg klein, d.w.z. $h^{k+1}<<h^k<< \ldots << h << 1$. Daarom geldt voor x dichtbij x_0, hoe groter het aantal elementen in de Taylorpolynoom, hoe kleiner de orde van de restterm.

De Functies TAYLR, TAYLR0 en SERIES

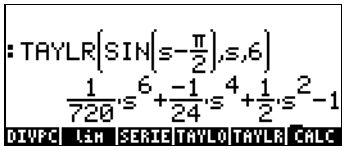
De functies TAYLR, TAYLR0 en SERIES worden gebruikt om Taylor-polynomen en Taylor-reeksen met resttermen te genereren. Deze functies zijn beschikbaar in het menu CALC/LIMITS&SERIES dat eerder in dit hoofdstuk is behandeld.

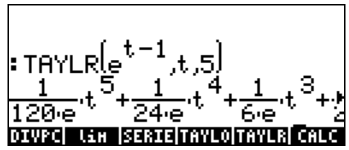
De functie TAYLOR0 ontwikkelt een Maclaurin-reeks uit, d.w.z. rond X = 0 van een uitdrukking in de standaard onafhankelijke variabele VX (standaard 'X'). De uitbreiding gebruikt een 4^e^ orde relatieve macht, d.w.z. het verschil tussen de hoogste en de laagste macht in de expansie is 4. Bijvoorbeeld:





De functie TAYLR geeft een Taylor-reeksuitbreiding van een functie met een willekeurige variabele x rond een punt x = a voor de orde k gespecificeerd door de gebruiker. De functie heeft dus de vorm TAYLR(f(x-a),x,k). Bijvoorbeeld:





De functie SERIES geeft een Taylor-polynoom en gebruikt als argumenten de te ontwikkelen functie f(x), een enkele variabelenaam (voor Maclaurin-reeks) of een uitdrukking in de vorm 'variabele = waarde' die het punt van uitbreiding van een Taylorreeks aangeeft en de volgorde van de aan te maken reeks. De functie SERIES geeft twee uitvoeritems: een lijst met vier items en een uitdrukking voor h = x – a, als het tweede argument in de functieoproep 'x=a' is, d.w.z. een uitdrukking voor de stapgrootte h. De lijst die als eerste uitvoer wordt gegeven bevat de volgende items:

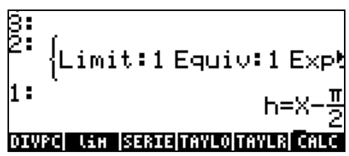
1 - Bi-directionele limiet van de functie op het ontwikkelpunt: $\lim_{x \to a} f(x)$

2 – Een equivalente waarde van de functie die x = a benadert.

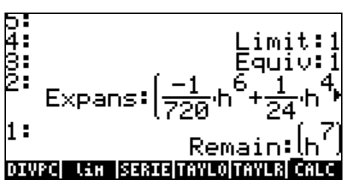
3 – Uitdrukking voor de Taylor-polynoom

4 – Volgorde van de resttermen

Vanwege de relatief grote uitvoer is deze functie makkelijker te hanteren in de RPN-modus. Bijvoorbeeld:



Plaats de inhoud op niveau 1van het stapelgeheugen door op ◄ te drukken en vervolgens op EVAL te drukken om de lijst te ontleden. Het resultaat ziet u hieronder:



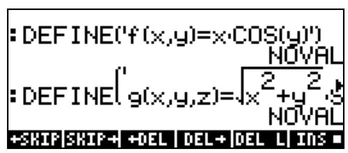
In de bovenstaande rechterafbeelding gebruiken we de regeleditor om de reeksuitbreiding in detail te bekijken.

Hoofdstuk 14
Multi-variabele calculustoepassingen

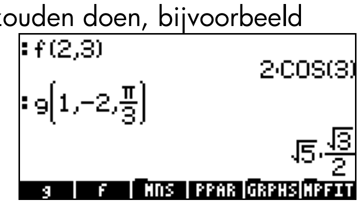
Met multi-variabel calculus worden functies van twee of meer variabelen bedoeld. In dit hoofdstuk laten we de basisconcepten zien van multi-variabele calculus, met onder meer partiële afgeleiden en meervoudige integralen.

Multi-variabele functies

Een functie van twee of meer variabelen kan in de rekenmachine worden gedefinieerd met de functie DEFINE (⬅ DEF). Om het concept van partiële afgeleiden te illustreren, definiëren we als volgt een aantal mulit-variabele functies, $f(x,y) = x \cos(y)$en $g(x,y,z) = (x^2+y^2)^{1/2}\sin(z)$:



We kunnen de functies evalueren zoals we dat met andere rekenmachinefuncties zouden doen, bijvoorbeeld



U kunt ook grafieken van tweedimensionale functies maken met curven in Fast3D-, Wireframe-, Ps-Contour-, Y-Slice-, Gridmap- en Pr-Surface-diagrammen zoals we in hoofdstuk 12 hebben besproken.

Partiële afgeleiden

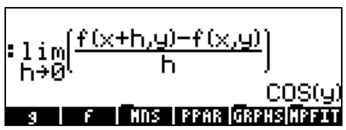
We nemen de functie van twee variabelen $z = f(x,y)$. De partiële afgeleide van de functie met betrekking tot x wordt gedefinieerd door de limiet

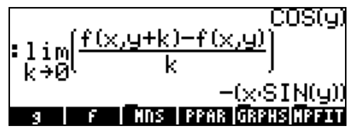
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad .$$

En:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} .$$

We gebruiken de eerder gedefinieerde multi-variabele functies om partiële afgeleiden te berekenen aan de hand van deze definities. Dit zijn de afgeleiden van f(x,y) met betrekking tot respectievelijk x en y:





U ziet dat bij de definitie van een partiële afgeleide met betrekking tot bijvoorbeeld x vereist daty vast wordt gehouden, terwijl we als limiet h→0 nemen. Dit lijkt een snelle manier om partiële afgeleiden van multi-variabele functies te berekenen: gebruik de regels voor gewone afgeleiden met betrekking tot de betreffende variabele waarbij alle andere variabelen als constante waarden worden beschouwd. De volgende uitdrukking

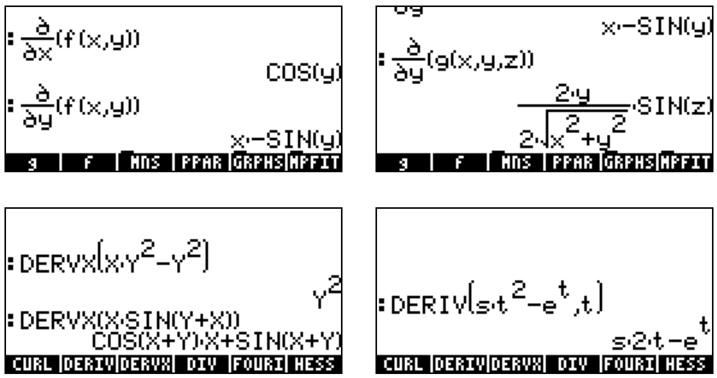
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\cos(y)\right) = \cos(y), \ \frac{\partial}{\partial y}\left(x\cos(y)\right) = -x\sin(y),$$

geeft dus hetzelfde resultaat als we vonden met de eerder berekende limieten. Nog een voorbeeld:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(yx^2 + y^2\right) = 2yx + 0 = 2xy$$

In deze berekening behandelen we y als een constante en nemen we afgeleiden van de uitdrukking met betrekking tot x.

U kunt de afgeleide functies ook in de rekenmachine gebruiken, bijvoorbeeld DERVX, DERIV, ∂ (uitvoerig besproken in hoofdstuk 13), om partiële afgeleiden te berekenen. U weet nog dat de functie DERVX de CAS-standaardvariabele VX (meestal ‘X’) gebruikt. Daarom kunt u met DERVX alleen afgeleiden berekenen met betrekking tot X. We laten u enkele voorbeelden van partiële afgeleiden van de eerste orde zien:



Afgeleiden van hogere orde

De volgende afgeleiden van de tweede orde kunnen worden gedefinieerd

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

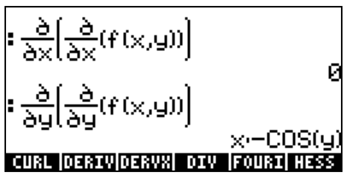
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

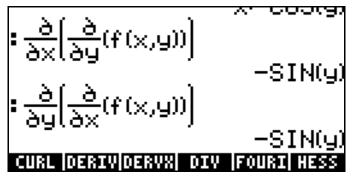
De laatste twee uitdrukkingen staan voor vectoriële afgeleiden, de tekens voor de partiële afgeleiden in de noemer tonen de volgorde van de derivatie. Links komt de derivatie eerst met betrekking tot x en daarna met betrekking tot y. Rechts is dit omgekeerd. Het is daarbij belangrijk op te merken dat als een functie continu en differentieerbaar is, dan:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Afgeleiden van de derde, vierde en vijfde orde worden op gelijke manier gedefinieerd.

Als u afgeleiden van een hogere orde wilt berekenen met de rekenmachine, herhaalt u de afgeleidenfunctie gewoon zo vaak als nodig is. U ziet hieronder enkele voorbeelden:



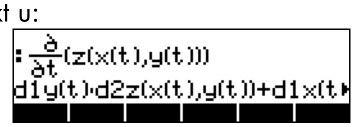


De kettingregel voor partiële afgeleiden

Neem de functie z = f(x,y), waarbij x = x(t), y = y(t). De functie z staat eigenlijk voor een samengestelde functie van *t* als we deze schrijven als z = f[x(t),y(t)]. De kettingregel voor de afgeleide dz/dt wordt in dit geval geschreven als

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

Als u de uitdrukking wilt zien die de rekenmachine geeft voor deze versie van de kettingregel, gebruikt u:



Het resultaat is dan d1y(t)·d2z(x(t),y(t))+d1x(t)·d1z(x(y),y(t)). De term d1y(t) moet worden geïnterpreteerd als "de afgeleide van y(t) met betrekking tot de 1e onafhankelijke variabele, dus t" of d1y(t) = dy/dt. Hetzelfde geldt voor: d1x(t) = dx/dt. Aan de andere kant betekent d1z(x(t),y(t)) "de eerste afgeleide van z(x,y) met betrekking tot de eerste onafhankelijke variabele, dus x" of $d1z(x(t),y(t)) = \partial z/\partial x$. Dan geldt ook $d2z(x(t),y(t)) = \partial z/\partial y$. De bovenstaande uitdrukking kan dus worden geïnterpreteerd als:

$$dz/dt = (dy/dt)\cdot(\partial z/\partial y) + (dx/dt)\cdot(\partial z/\partial x).$$

Differentiaaltotale van een functie z = z(x,y)

Uit de laatste vergelijking, als we vermenigvuldigen met dt, krijgen we de differentiaaltotale van de functie $z = z(x,y)$, dus $dz = (\partial z/\partial x)\cdot dx + (\partial z/\partial y)\cdot dy$.

Een andere versie van de kettingregel is van toepassing als $z = f(x,y)$, $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, dus $z = f[x(u,v), y(u,v)]$. De volgende formules geven de kettingregel voor deze situatie aan:

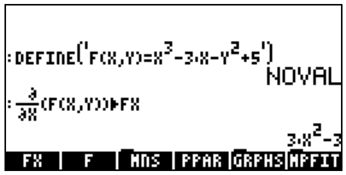
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

Uiterste waarden in functies van twee variabelen bepalen

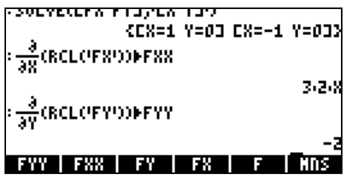
Als de functie $z = f(x,y)$ een uiterst punt (extrema) bij (x_o,y_o) moet hebben, moeten de afgeleiden $\partial f/\partial x$ en $\partial f/\partial y$ op dit punt verdwijnen. Dit zijn *noodzakelijke* voorwaarden. De *toereikende voorwaarden* waarbij de functie uiterste waarden bij punt (x_o,y_o) heeft, zijn $\partial f/\partial x = 0$, $\partial f/\partial y = 0$ en $\Delta = (\partial^2 f/\partial x^2)\cdot(\partial^2 f/\partial y^2)-[\partial^2 f/\partial x\partial y]^2 > 0$. Het punt (x_o,y_o) is een relatief maximum als $\partial^2 f/\partial x^2 < 0$, of een relatief minimum als $\partial^2 f/\partial x^2 > 0$. De waarde Δ wordt gezien als de discriminant.

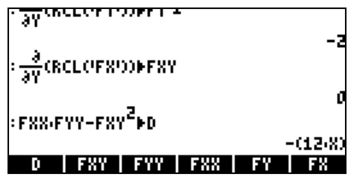
Als $\Delta = (\partial^2 f/\partial x^2)\cdot(\partial^2 f/\partial y^2)-[\partial^2 f/\partial x\partial y]^2 < 0$ bestaat er een voorwaarde die we een *zadelpunt* noemen, waarbij de functie een maximum in x bereikt als we y constant houden, terwijl we een minimum krijgen als we x constant houden, of andersom.

Voorbeeld 1 – Bepaal de uiterste waarden (als deze er zijn) van de functie $f(X,Y) = X^3-3X-Y^2+5$. We definiëren eerst de functie f(X,Y) en de afgeleiden fX(X,Y) = ∂f/∂X, fY(X,Y) = ∂f/∂Y. Daarna lossen we de vergelijkingen fX(X,Y) = 0 en fY(X,Y) = 0 tegelijkertijd op:

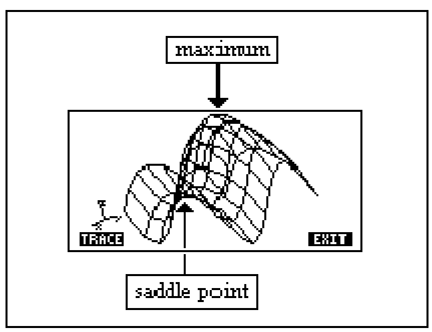


We vinden kritische punten bij (X,Y) = (1,0) en (X,Y) = (-1,0). Om de discriminant te berekenen gaan we verder met het berekenen van de twee afgeleiden, fXX(X,Y) = ∂^2f/∂X^2, fXY(X,Y) = ∂^2f/∂X/∂Y en fYY(X,Y) = ∂^2f/∂Y^2.





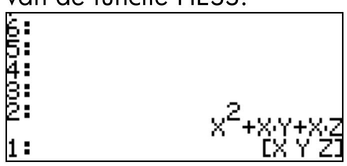
Het laatste resultaat geeft aan dat de discriminant Δ = -12X is, dus voor (X,Y) = (1,0), Δ <0 (zadelpunt) en voor (X,Y) = (-1,0), Δ>0 en ∂^2f/∂X^2<0 (relatief maximum). De onderstaande afbeelding, in de rekenmachine uitgevoerd en in de computer bewerkt, bewijst het bestaan van deze twee punten:

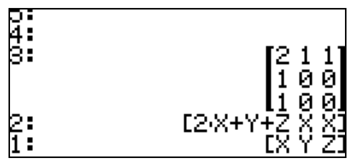


De functie HESS gebruiken om uiterste waarden te analyseren

Met de functie HESS kunnen de uiterste waarden van een functie van twee variabelen worden geanalyseerd, zoals u hierna kunt zien. De functie HESS neemt meestal als invoer een functie van n onafhankelijke variabelen $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en een vector van de functies ['x_1' 'x_2'…'x_n']. De functie HESS geeft de Hessian-matrix van de functie ϕ, gedefinieerd als de matrix $\mathbf{H} = [h_{ij}] = [\partial^2\phi/\partial x_i \partial x_j]$, de gradiënt van de functie met betrekking tot de n-variabelen, **grad** $f = [\ \partial\phi/\partial x_1, \partial\phi/\partial x_2\ , \ldots\ \partial\phi/\partial x_n]$ en de lijst variabelen ['x_1' 'x_2'…'x_n'].

Toepassingen van de functie HESS kunnen gemakkelijker bekeken worden in de RPN-modus. Gebruik als voorbeeld de functie $\phi(X,Y,Z) = X^2 + XY + XZ$. We zullen de functie HESS in het volgende voorbeeld op de functie ϕ toepassen. De beeldschermen tonen het RPN-stapelgeheugen voor en na het gebruik van de functie HESS.





Als deze wordt toegepast op een functie van twee variabelen, geeft de gradiënt op niveau 2, als deze gelijk wordt gesteld aan nul, de vergelijkingen voor kritische punten, dus $\partial\phi/\partial x_i = 0$, terwijl de matrix op niveau 3 tweede afgeleiden weergeeft. Het resultaat van de functie HESS kan dus worden gebruikt om uiterste waarden in de functies van twee variabelen te analyseren. Voor de functie $f(X,Y) = X^3\text{-}3X\text{-}Y^2\text{+}5$ gaat u als volgt te werk in de RPN-modus:

'X^3-3*X-Y^2+5' `ENTER` ['X','Y'] `ENTER`	Voert functie en variabelen in
HESS	Past functie HESS toe
SOLVE	Zoekt kritische punten
`EVAL`	Splitst de vector
's1' `STO▶` 's2' `STO▶`	Slaat kritische punten op

De variabelen s1 en s2 bevatten op dit punt de respectievelijke vectoren ['X=-1','Y=0] en ['X=1','Y=0]. De Hessian-matrix staat nu op niveau 1.

'H' `STO▶`	Slaat Hessian-matrix op

VAR H S1 SUBST → →NUM Vervangt s1 door H

De resulterende matrix **A** heeft a_{11} elementen $a_{11} = \partial^2\phi/\partial X^2 = -6.$, $a_{22} = \partial^2\phi/\partial X^2 = -2.$ en $a_{12} = a_{21} = \partial^2\phi/\partial X\partial Y = 0$. De discriminant voor dit kritische punt s1(-1,0) is $\Delta = (\partial^2 f/\partial x^2)\cdot(\partial^2 f/\partial y^2)-[\partial^2 f/\partial x\partial y]^2 = (-6.)(-2.) = 12.0 > 0$. Omdat $\partial^2\phi/\partial X^2 < 0$, geeft punt s1 een relatief maximum.

Nu vervangen we het tweede punt, s2, in H:

VAR H S2 SUBST → →NUM Vervang s2 door H

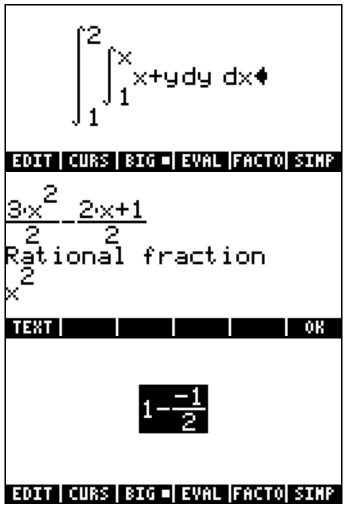
De resulterende matrix heeft elementen $a_{11} = \partial^2\phi/\partial X^2 = 6.$, $a_{22} = \partial^2\phi/\partial X^2 = -2.$ en $a_{12} = a_{21} = \partial^2\phi/\partial X\partial Y = 0$. De discriminant voor dit kritische punt s2(1,0) is $\Delta = (\partial^2 f/\partial x^2)\cdot(\partial^2 f/\partial y^2)-[\partial^2 f/\partial x\partial y]^2 = (6.)(-2.) = -12.0 < 0$, wat een zadelpunt aangeeft.

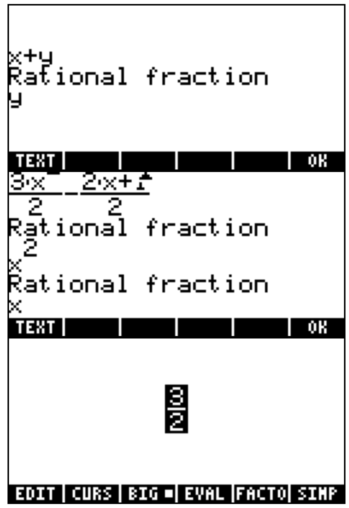
Meervoudige integralen

Een fysieke interpretatie van een gewone integraal , $\int_a^b f(x)dx$, is het deel onder de curve y = f(x) en abscis x = a en x = b. De generalisering naar drie dimensies van een gewone integraal is een dubbele integraal van een functie f(x,y) over een gebied R op het vlak x-y dat het volume van het massieve lichaam onder oppervlakte f(x,y) boven het gebied R weergeeft. Het gebied R kan worden beschreven als R = {a<x<b, f(x)<y<g(x)} of als R = {c<y<d, r(y)<x<s(y)}. De dubbele integraal kan dus worden geschreven als

$$\iint_R \phi(x,y)dA = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \phi(x,y)dydx = \int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} \phi(x,y)dydx$$

Een dubbele integraal berekenen in de rekenmachine is eenvoudig. Een dubbele integraal kan worden opgebouwd in de Vergelijkingenschrijver (zie het voorbeeld in hoofdstuk 2). Hier volgt een voorbeeld. Deze dubbele integraal wordt direct in de Vergelijkingenschrijver berekend door de hele uitdrukking te selecteren en vervolgens de functie EVAL te gebruiken. Het resultaat is 3/2. Als u de berekening stap voor stap wilt zien, kunt u de optie Step/Step in het scherm CAS MODES instellen.





Jacobi-matrix van coördinaattransformatie

Neem de coördinaattransformatie x = x(u,v), y = y(u,v). De Jacobi-matrix van deze transformatie wordt gedefinieerd als:

$$| J |= \det(J) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Als u een integraal berekent met zo'n transformatie, moet u de uitdrukking $\iint_R \phi(x,y)dydx = \iint_{R'} \phi[x(u,v),y(u,v)] \,|\, J \,|\, dudv$ worden gebruikt, waarbij R' het gebied R uitdrukt in de coördinaten in (u,v).

Dubbele integraal in polaire coördinaten

Voor de omzetting van polaire naar Cartesische coördinaten gebruiken we x(r,θ) = r cos θ en y(r, θ) = r sin θ. De Jacobi-matrix van de transformatie is

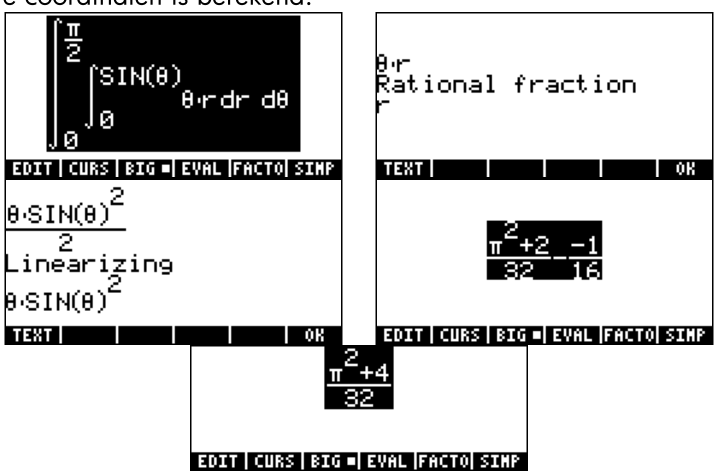
$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\cdot\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cdot\cos(\theta) \end{vmatrix} = r$$

Met dit resultaat worden de integralen in polaire coördinaten geschreven als

$$\iint_{R'} \phi(r,\theta)dA = \int_\alpha^\beta \int_{f(\theta)}^{g(\theta)} \phi(r,\theta)rdrd\theta$$

waarbij het gebied R′ in polaire coördinaten wordt geschreven als R′ = {$\alpha < \theta < \beta$, $f(\theta) < r < g(\theta)$}.

Dubbele integralen in polaire coördinaten kunnen in de rekenmachine worden ingevoerd, zodat de Jacobi-matrix |J| = r aan de integrant wordt toegevoegd. Hieronder staat stap voor stap een voorbeeld van een dubbele integraal die in polaire coördinaten is berekend:



Hoofdstuk 15
Toepassingen van vectoranalyse

In dit hoofdstuk laten we een aantal functies zien uit het menu CALC die van toepassing zijn op de analyse van scalaire en vectorvelden. Het menu CALC is uitvoerig behandeld in hoofdstuk 13. Met name in het menu DERIV&INTEG zijn een aantal functies geïdentificeerd die in vectoranalyses worden toegepast, namelijk CURL, DIV, HESS, LAPL. Wijzig voor de oefeningen in dit hoofdstuk de hoekmeting naar radialen.

Definities

Een functie die in een ruimte zoals $\phi(x,y,z)$ wordt gedefinieerd, noemen we een scalair veld. Voorbeelden zijn temperatuur, dichtheid en spanning bij een lading. Als de functie wordt gedefinieerd door een vector, dus **F**(x,y,z) = f(x,y,z)**i**+g(x,y,z)**j**+h(x,y,z)**k**, dan wordt dit een vectorveld genoemd.

De volgende operator, de 'del'- of 'nabla'-operator genoemd, is een vectoroperator die kan worden toegepast op een scalaire of een vectorfunctie:

$$\nabla[\ ] = i \cdot \frac{\partial}{\partial x}[\ ] + j \cdot \frac{\partial}{\partial y}[\ ] + k \cdot \frac{\partial}{\partial z}[\ ]$$

Als deze operator wordt toegepast op een scalaire functie, krijgen we de gradiënt van de functie en als deze wordt toegepast op een vectorfunctie, krijgen we de divergentie en de rotatie van die functie. Een combinatie van gradiënt en divergentie geeft een andere operator, de laplace-operator van een scalaire functie. Deze bewerkingen worden hierna behandeld.

Gradiënt en directionele afgeleide

De gradiënt van een scalaire functie $\phi(x,y,z)$ is een vectorfunctie die wordt gedefinieerd als

$$grad\phi = \nabla\phi = i \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x} + j \cdot \frac{\partial\phi}{\partial y} + k \cdot \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

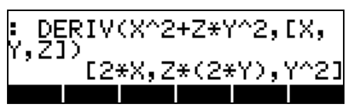
Het scalaire product van de gradiënt van een functie met een bepaalde eenheidvector geeft de veranderingssnelheid van de functie weer van die bepaalde vector. Deze veranderingssnelheid noemt men de directionele afgeleide van de functie, $D_u\phi(x,y,z) = \mathbf{u}\bullet\nabla\phi$.

Op elk moment doet de maximale veranderingssnelheid van de functie zich voor in de richting van de gradiënt, dus via een eenheidvector $\mathbf{u} = \nabla\phi/|\nabla\phi|$.

De waarde van die directionele afgeleide is gelijk aan de grootte van de gradiënt op elk punt $D_{max}\phi(x,y,z) = \nabla\phi \bullet\nabla\phi/|\nabla\phi| = |\nabla\phi|$

De vergelijking $\phi(x,y,z) = 0$ geeft een oppervlak in de ruimte aan. Nu blijkt dat de gradiënt van de functie op elk punt op dit oppervlak normaal is voor het oppervlak. De vergelijking van een vlaktangens op de curve op dat punt kan worden gevonden door een techniek te gebruiken die we in hoofdstuk 9 hebben laten zien.

De eenvoudigste manier om de gradiënt te verkrijgen is met de functie DERIV in het menu CALC, bijvoorbeeld

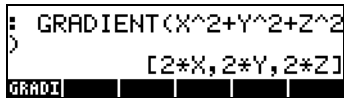


Een programma om de gradiënt te berekenen

Het volgende programma, dat u in de variabele GRADIENT kunt opslaan, gebruikt de functie DERIV om de gradiënt van een scalaire functie van X,Y,Z te berekenen. Berekeningen voor andere basisvariabelen werken niet. Als u echter vaak in het (X,Y,Z)-systeem werkt, zal deze functie de berekeningen vereenvoudigen:

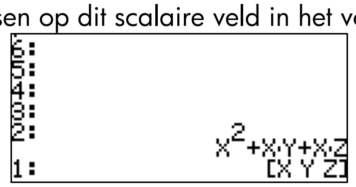
```
<<  X  Y  Z  3 →ARRY DERIV >>
```

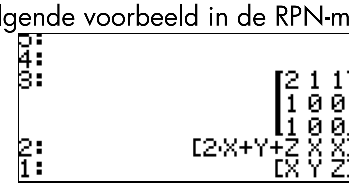
Voer het programma in terwijl de rekenmachine in de RPN-modus staat. Als u heeft overgeschakeld naar de ALG-modus, kunt u de functie GRADIENT oproepen, zoals in het volgende voorbeeld:



De functie HESS gebruiken om de gradiënt te krijgen

De functie HESS kan worden gebruikt om als volgt de gradiënt van een functie te verkrijgen. Zoals we al in hoofdstuk 14 lieten zien, neemt de functie HESS als invoer een functie van n onafhankelijke variabelen $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en een vector van de functies ['x_1' 'x_2'…'x_n']. De functie HESS geeft de <u>Hessian-matrix</u> van de functie ϕ, gedefinieerd als de matrix **H** = $[h_{ij}] = [\partial\phi/\partial x_i \partial x_j]$, de gradiënt van de functie met betrekking tot de n-variabelen, **grad** f = $[\ \partial\phi/\partial x_1, \partial\phi/\partial x_2\ , \ldots\ \partial\phi/\partial x_n]$, en de lijst met variabelen ['x_1' 'x_2'…'x_n']. Gebruik als voorbeeld de functie $\phi(X,Y,Z) = X^2 + XY + XZ$. We zullen de functie HESS toepassen op dit scalaire veld in het volgende voorbeeld in de RPN-modus:



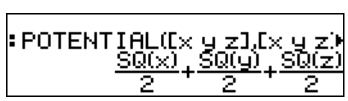


De gradiënt is dus [2X+Y+Z, X, X]. Uitwijkmogelijkheid , men annuleerteken toepassing verrichting DERIV als volgt : DERIV(X^2+X*Y+X*Z,[X,Y,Z]), te halen idem voortvloeisel.

Potentiaal van een gradiënt

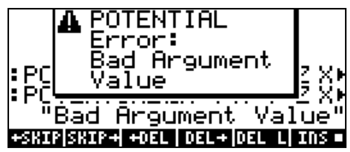
Als we het vectorveld **F**(x,y,z) = f(x,y,z)**i**+g(x,y,z)**j**+h(x,y,z)**k** nemen, als de functie $\phi(x,y,z)$ bestaat, zodat $f = \partial\phi/\partial x$, $g = \partial\phi/\partial y$ en $h = \partial\phi/\partial z$, dan wordt er naar $\phi(x,y,z)$ verwezen als de <u>potentiaalfunctie</u> voor het vectorveld **F**. Daaruit volgt als **F** = grad $\phi = \nabla\phi$.

De rekenmachine bevat de functie POTENTIAL, via de commandocatalogus (↱ CAT), om de potentiaalfunctie van een vectorveld te berekenen, als deze bestaat. Als bijvoorbeeld **F**(x,y,z) = **xi** + y**j** + z**k**, dan krijgen we als we de functie POTENTIAL toepassen:



Omdat functie SQ(x) de waarde x^2 geeft, betekent dit resultaat dat de potentiaalfunctie voor het vectorveld **F**(x,y,z) = x**i** + y**j** + z**k**, ϕ(x,y,z) = $(x^2+y^2+z^2)/2$ is.

U ziet dat de voorwaarden voor het bestaan van ϕ(x,y,z), namelijk $f = \partial\phi/\partial x$, $g = \partial\phi/\partial y$ en $h = \partial\phi/\partial z$, gelijk zijn aan de volgende voorwaarden: $\partial f/\partial y = \partial g/\partial x$, $\partial f/\partial z = \partial h/\partial x$ en $\partial g/\partial z = \partial h/\partial y$. Deze voorwaarden bieden een snelle manier om te bepalen of het vectorveld een bijbehorende potentiaalfunctie heeft. Als een van de voorwaarden $\partial f/\partial y = \partial g/\partial x$, $\partial f/\partial z = \partial h/\partial x$, $\partial g/\partial z = \partial h/\partial y$, mislukt, bestaat de potentiaalfunctie ϕ(x,y,z) niet. In dat geval levert de functie POTENTIAL een foutmelding op. Het vectorveld **F**(x,y,z) = (x+y)**i** + (x-y+z)**j** + xz**k** heeft geen potentiaalfunctie, omdat $\partial f/\partial z \neq \partial h/\partial x$. De reactie van de rekenmachine in dat bepaalde geval wordt hieronder weergegeven:

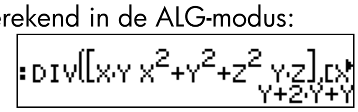


Divergentie

De divergentie van een vectorfunctie, **F**(x,y,z) = f(x,y,z)**i**+g(x,y,z)**j**+h(x,y,z)**k**, wordt gedefinieerd door een 'scalair product' van de del-operator met de functie te nemen, dus

$$divF = \nabla \bullet F = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

De functie DIV kan worden gebruikt om de divergentie van een vectorveld te berekenen. Voor bijvoorbeeld **F**(X,Y,Z) = $[XY,X^2+Y^2+Z^2,YZ]$ wordt de divergentie als volgt berekend in de ALG-modus:

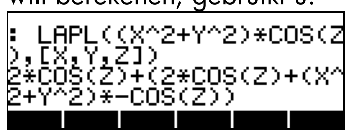


Laplace-operator

De divergentie van de gradiënt van een scalaire functie geeft een operator, de laplace-operator. De laplace-operator van een scalaire functie $\phi(x,y,z)$ wordt weergegeven als

$$\nabla^2\phi = \nabla \bullet \nabla\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

De partiële-differentieelvergelijking $\nabla^2\phi = 0$ staat bekend als de laplace-vergelijking.
De functie LAPL kan worden gebruikt om de laplace-operator van een scalaire functie te berekenen. Als u bijvoorbeeld de laplace-operator van de functie $\phi(X,Y,Z) = (X^2+Y^2)\cos(Z)$ wilt berekenen, gebruikt u:



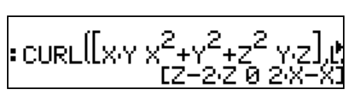
Rotatie

De rotatie van een vectorveld **F**(x,y,z) = f(x,y,z)**i**+g(x,y,z)**j**+h(x,y,z)**k** wordt gedefinieerd als een "vectorieel product" van de del-operator met het vectorveld, dus

$$curl\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x}[\ ] & \frac{\partial}{\partial y}[\ ] & \frac{\partial}{\partial z}[\ ] \\ f(x,y,z) & g(x,y,z) & h(x,y,z) \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)$$

De rotatie van een vectorveld kan worden berekend met de functie CURL Voor de functie **F**(X,Y,Z) = [XY,$X^2+Y^2+Z^2$,YZ] wordt de rotatie bijvoorbeeld als volgt berekend:



Rotatievrije velden en potentiaalfunctie

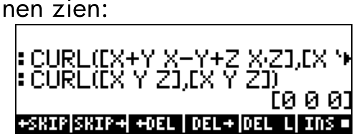
Eerder in dit hoofdstuk hebben we de functie POTENTIAL geïntroduceerd voor het berekenen van de potentiaalfunctie $\phi(x,y,z)$ voor een vectorveld, $\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i}+ g(x,y,z)\mathbf{j}+ h(x,y,z)\mathbf{k}$, zodat $\mathbf{F}$ = grad $\phi = \nabla\phi$. We hebben ook aangegeven dat de voorwaarden voor het bestaan van ϕ de volgende waren: $\partial f/\partial y = \partial g/\partial x$, $\partial f/\partial z = \partial h/\partial x$ en $\partial g/\partial z = \partial h/\partial y$. Deze voorwaarden zijn gelijk aan de vectoruitdrukking.

$$\text{rotatie } \mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = 0.$$

Een vectorveld $\mathbf{F}(x,y,z)$, met nul rotatie, noemen we een rotatievrij veld. We kunnen dus concluderen dat er altijd een potentiaalfunctie $\phi(x,y,z)$ bestaat voor een rotatievrij veld $\mathbf{F}(x,y,z)$.

In een eerder voorbeeld hebben we geprobeerd een potentiaalfunctie te vinden voor het vectorveld $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y)\mathbf{i} + (x-y+z)\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$. We kregen toen een foutmelding van de functie POTENTIAL. Om te controleren dat dit een rotatieveld is (dus $\nabla\times\mathbf{F} \neq 0$), gebruiken we de functie CURL op dit veld:

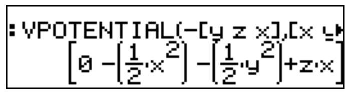
Aan de andere kant is het vectorveld $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ wel rotatievrij, zoals we hieronder kunnen zien:



Vectorpotentiaal

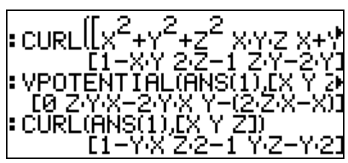
Met een vectorveld $\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$, als de vectorfunctie $\Phi(x,y,z) = \phi(x,y,z)\mathbf{i}+\psi(x,y,z)\mathbf{j}+\eta(x,y,z)\mathbf{k}$ bestaat, zodat $\mathbf{F}$ = curl $\Phi = \nabla\times \Phi$, wordt er naar functie $\Phi(x,y,z)$ verwijzen als een vectorpotentiaal van $\mathbf{F}(x,y,z)$.

De rekenmachine bevat de functie VPOTENTIAL, via de commandocatalogus (CAT), voor de berekening van de vectorpotentiaal, Φ(x,y,z), met het vectorveld, **F**(x,y,z) = f(x,y,z)**i**+g(x,y,z)**j**+h(x,y,z)**k**. Met het vectorveld **F**(x,y,z) = -(y**i**+z**j**+x**k**) geeft de functie VPOTENTIAL bijvoorbeeld het volgende:



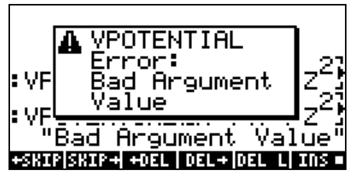
dus $\Phi(x,y,z) = -x^2/2$**j** + $(-y^2/2+zx)$**k**.

We merken daarbij op dat er meerdere vectorpotentiaalfuncties Φ kunnen zijn voor een gegeven vectorveld **F**. Het volgende beelldscherm toont bijvoorbeeld dat de rotatie van de vectorfunctie $\Phi_1 = [X^2+Y^2+Z^2,XYZ,X+Y+Z]$ de vector **F** = $\nabla\times\ \Phi_2$ = [1-XY,2Z-1,ZY-2Y] is. Toepassing van de functie VPOTENTIAL geeft de vectorpotentiaalfunctie Φ_2 = [0, ZYX-2YX, Y-(2ZX-X)], die anders is dan Φ_1. Het laatste commando in het scherm laat ook zien dat **F** = $\nabla\times\ \Phi_2$. Een vectorpotentiaalfunctie wordt dus niet uniek bepaald.

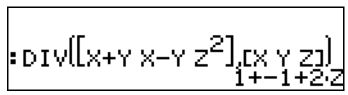


De onderdelen van het gegeven vectorveld, **F**(x,y,z) = f(x,y,z)**i**+g(x,y,z)**j** +h(x,y,z)**k** en die van de vectorpotentiaalfunctie, Φ(x,y,z) = φ(x,y,z)**i**+ψ(x,y,z)**j**+η(x,y,z)**k** zijn gekoppeld door $f = \partial\eta/\partial y - \partial\psi/\partial x$, $g = \partial\phi/\partial z - \partial\eta/\partial x$ en $h = \partial\psi/\partial x - \partial\phi/\partial y$.

Een voorwaarde voor het bestaan van functie Φ(x,y,z) is dat div **F** = ∇•**F** = 0, dus $\partial f/\partial x + \partial g/\partial y + \partial f/\partial z = 0$. Als er niet aan deze voorwaarde wordt voldaan, bestaat de vectorpotentiaalfunctie Φ(x,y,z) dus niet. Bij bijvoorbeeld **F** = [X+Y,X-Y,Z^2] geeft de functie VPOTENTIAL een foutmelding, omdat functie F niet voldoet aan de voorwaarde ∇•**F** = 0:



De voorwaarde ∇•**F** ≠ 0 staat weergegeven in het volgende beeldscherm:



Hoofdstuk 16
Differentiaalvergelijkingen

In dit hoofdstuk laten we voorbeelden zien van oplossingen voor gewone differentiaalvergelijkingen (ODE) met de functies van de rekenmachine. Een differentiaalvergelijking is een vergelijking die betrekking heeft op afgeleiden van de onafhankelijke variabele. In de meeste gevallen zoeken we de afhankelijke functie die aan de differentiaalvergelijking voldoet.

Basisbewerkingen met differentiaalvergelijkingen

In dit deel laten we enkele functies van de rekenmachine zien om de oplossing voor ODE's in te voeren, te controleren en zichtbaar te maken.

Differentiaalvergelijkingen invoeren

De sleutel tot het gebruik van differentiaalvergelijkingen in de rekenmachine is de afgeleiden in de vergelijking intypen. De gemakkelijkste manier om een differentiaalvergelijking in te voeren is om deze in de vergelijkingenschrijver in te voeren. Gebruik om bijvoorbeeld de volgende ODE in te voeren:
(x-1)·(dy(x)/dx)^2 + 2·x·y(x) = e^x sin x:

[↱] EQW [↰] () [ALPHA] [↰] [X] [−] [1] [▶] [▶] [▶] [×] [↱] ∂ [ALPHA] [↰] [X]
[▶] [ALPHA] [↰] [Y] [↰] () [ALPHA] [↰] [X] [▶] [▶] [Y^x] [2] [▶] [▶] [+] [2] [×]
[ALPHA] [↰] [X] [×] [ALPHA] [↰] [Y] [↰] () [ALPHA] [↰] [X] [▶] [▶] [▶] [▶]
[↱] = [↰] e^x [ALPHA] [↰] [X] [▶] [×] [SIN] [ALPHA] [↰] [X] [ENTER]

De afgeleide dy/dx wordt weergegeven als `∂x(y(x))` of `d1y(x)`. Voor oplossings- of berekeningsdoeleinden dient u y (x) in de uitdrukking te specificeren, d.w.z. de afhankelijke variabele moet de onafhankelijke variabele(s) bevatten in elke afgeleide in de vergelijking.

U kunt een vergelijking ook direct in het stapelgeheugen invoeren met het symbool ∂ in de afgeleiden. Gebruik om bijvoorbeeld de volgende ODE met tweede-orde afgeleiden d^{2}u(x)/dx^2 + 3u(x)·(du(x)/dx) + u(x)^2 = 1/x, direct in het scherm in te voeren:

['] [↱] ∂ [ALPHA] [↰] [X] [↰] () [↱] ∂ [ALPHA] [↰] [X] [↰] () [ALPHA] [↰] [U]
[↰] () [ALPHA] [↰] [X] [▶] [▶] [▶] [+] [3] [×] [ALPHA] [↰] [U] [↰] ()

[ALPHA] [←] [X] [▶] [×] [→] ∂ [ALPHA] [←] [X] [←] () [ALPHA] [←] [U] [←] ()
[ALPHA] [←] [X] [▶] [▶] [+] [ALPHA] [←] [U] [←] () [ALPHA] [←] [X] [▶] [Y^x] [2]
[→] = [/] [÷] [ALPHA] [←] [X] [ENTER]

De uitkomst is ‘`∂x(∂x(u(x)))+3*u(x)*∂x(u(x))+u^2=1/x`’. Deze vorm verschijnt in het scherm wanneer de optie _Textbolk in de beeldscherminstellingen ([MODE] [DISP]) niet is geselecteerd. Druk op [▼] om de vergelijking te zien in de vergelijkingenschrijver.

Een alternatieve notatie om afgeleiden direct in het stapelgeheugen in te voeren is ‘d1’ te gebruiken voor de afgeleide die betrekking heeft op de eerste onafhankelijke variabele, ‘d2’ voor de afgeleide die betrekking heeft op de tweede onafhankelijke variabele, enz. Een tweede orde afgeleide, bijv. d^2x/dt^2, waarbij x = x(t), zou worden geschreven als ‘d1d1x(t)’, terwijl $(dx/dt)^2$ zou worden geschreven als ‘d1x(t)^2’. Dus de PDV $\partial^2 y/\partial t^2 - g(x,y)\cdot(\partial^2 y/\partial x^2)^2 = r(x,y)$ zou met deze notatie worden geschreven als ‘d2d2y(x,t)-g(x,y)*d1d1y(x,t)^2=r(x,y)’.

De notatie met ‘d’ en de volgorde van de onafhankelijke variabele is de beste notatie voor de rekenmachine wanneer er afgeleiden betrokken zijn in een berekening. Met de functie DERIV in de ALG-modus zoals hieronder bijvoorbeeld geeft DERIV(‘x*f(x,t)+g(t,y) = h(x,y,t)’,t) de volgende uitdrukking: ‘`x*d2f(x,t)+d1g(t,y)=d3h(x,y,t)`’. Op papier geeft deze uitdrukking de partiële differentiaalvergelijking $x\cdot(\partial f/\partial t) + \partial g/\partial t = \partial h/\partial t$ weer.

Omdat de orde van de variabele t verschillend is in f(x,t), g(t,y) en h(x,y,t) hebben afgeleiden met Betrekking tot t verschillende cijfers, d.w.z. d2f(x,t), d1g(t,y) en d3h(x,y,t). Deze vertegenwoordigen echter allemaal afgeleiden m.b.t. dezelfde variabele.

Uitdrukkingen voor afgeleiden met de indexnotatie volgorde-van-variabele worden niet vertaald in een afgeleidennotatie in de vergelijkingenschrijver, zoals u kunt controleren door op [▼] te drukken terwijl de laatste uitkomst in stapelgeheugenniveau 1 staat. De rekenmachine begrijpt echter beide notaties en handelt in overeenstemming van de gebruikte notatie.

Oplossingen in de rekenmachine controleren

Om met de rekenmachine te controleren of een functie voldoet aan een bepaalde vergelijking, gebruikt u de functie SUBST (zie hoofdstuk 5) om de oplossing in de vorm 'y = f(x)' of 'y = f(x,t)', enz. in de differentiaalvergelijking te vervangen. Het kan nodig zijn de uitkomst te vereenvoudigen met de functie EVAL om de oplossing te controleren. Om bijvoorbeeld te controleren dat u = A sin $\omega_o t$ een oplossing is voor de vergelijking $d^2u/dt^2 + \omega_o^2 \cdot u = 0$ gebruikt u het volgende:

In de ALG-modus:

SUBST('∂t(∂t(u(t)))+ ω0^2*u(t) = 0','u(t)=A*SIN (ω0*t)') ENTER
EVAL(ANS(1)) ENTER

In de RPN-modus:

'∂t(∂t(u(t)))+ ω0^2*u(t) = 0' ENTER 'u(t)=A*SIN (ω0*t)' ENTER
SUBST EVAL

De uitkomst is '0=0'.

Voor dit voorbeeld kunt u ook '∂t(∂t(u(t))))+ ω0^2*u(t) = 0' gebruiken om de differentiaalvergelijking in te voeren.

Visualisatie van oplossingen door richtingscoëffientvelden

Richtingscoëfficiëntvelden, geïntroduceerd in hoofdstuk 12, worden gebruikt om de oplossingen van een differentiaalvergelijking in de vorm dy/dx = f(x,y) zichtbaar te maken. Een richtingscoëffientvelddiagram laat een aantal segmenten zien de oplossingscurven y = f(x) raken. De richtingscoëfficiënt van de segmenten op elk punt (x,y) wordt gegeven door dy/dx = f(x,y), geëvalueerd op elk punt (x,y) geeft de richtingscoëfficiënt van de raaklijn op punt (x,y).

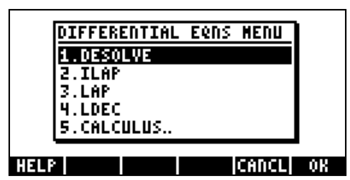
Voorbeeld 1 – Traceer de oplossing voor de differentiaalvergelijking y' = f(x,y) = sin x cos y met een richtingscoëfficiëntvelddiagram. Volg de instructies in hoofdstuk 12 voor *richtingscoëfficiëntveld*diagrammen om dit probleem op te lossen.

Als u de diagram van de richtingscoëffientvelden op papier zou kunnen maken, kunt u met de hand lijnen traceren die de lijnsegmenten in het diagram raken. Deze lijnen bestaan uit lijnen van y(x,y) = constant, voor de oplossing van y' = f(x,y). De richtingscoëffientvelden zijn dus handig voor het in beeld brengen van moeilijk op te lossen vergelijkingen.

Samengevat zijn richtingscoëffientvelden een grafische hulp om de curven y = g(x) te schetsen die corresponderen met de oplossingen voor de differentiaalvergelijking dy/dx = f(x,y).

Het menu CALC/DIFF

Het submenu DIFFERENTIAL EQNS in het menu CALC (CALC) geeft functies voor de oplossing van differentiaalvergelijkingen. Het menu ziet u hieronder met systeemvlag 117 ingesteld op CHOOSE boxes :



Deze functies worden hieronder kort beschreven. Ze worden verderop in dit hoofdstuk uitvoeriger behandeld.

DESOLVE: Differentiaalvergelijking SOLVer, geeft indien mogelijk een oplossing
ILAP: Inverse LAPlace transformatie, $L^{-1}[F(s)] = f(t)$
LAP: LAPlace transformatie, L[f(t)]=F(s)
LDEC: lost Lineaire Differentiaalvergelijking op met Constante coëfficiënten, inclusief stelsels van differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten.

Oplossing voor lineaire en niet-lineaire vergelijkingen

Een vergelijking waarin de afhankelijke variabele en alle bijbehorende afgeleiden van de eerste rangorde zijn, wordt een lineaire differentiaalvergelijking genoemd. In andere gevallen is de vergelijking niet-lineair. Voorbeelden van lineaire differentiaalvergelijkingen zijn: $d^2x/dt^2 + \beta\cdot(dx/dt) + \omega_o\cdot x = A \sin \omega_f t$ en $\partial C/\partial t + u\cdot(\partial C/\partial x) = D\cdot(\partial^2 C/\partial x^2)$.

Een vergelijking waaronder rechterkant (zonder de functie of de afgeleiden) gelijk is aan nul wordt een homogene vergelijking genoemd. Anders wordt de vergelijking niet-homogeen genoemd. De oplossing voor een homogene vergelijking wordt een algemene oplossing genoemd. Een speciale oplossing is een oplossing voor een niet-homogene vergelijking.

De functie LDEC

De rekenmachine geeft de functie LDEC (Lineair Differentiaalvergelijking Commando) om de algemene oplossing te vinden voor een lineaire ODE in welke orde dan ook met constante coëfficiënten en homogeen of niet. Deze functie vraagt twee invoergegevens van u:

- de rechterkant van de ODE
- de karakteristieke vergelijking van de ODE

Deze beide invoergegevens dienen gegeven te worden met betrekking tot de standaard onafhankelijke variabele voor het CAS van de rekenmachine (gewoonlijk X) De uitvoer van de functie is de algemene oplossing van de ODE. De functie LDEC is beschikbaar in het menu CALC/DIFF. De voorbeelden zijn weergegeven in de RPN-modus. Het omzetten naar de ALG-modus is echter eenvoudig.

Voorbeeld 1 – De homogene ODE oplossen: $d^3y/dx^3-4\cdot(d^2y/dx^2)-11\cdot(dy/dx)+30\cdot y = 0$, voer in: `0` ENTER `'X^3-4*X^2-11*X+30'` ENTER `LDEC`. De oplossing is:

$$-\frac{6\cdot cC0-(cC1+cC2)}{24}\cdot e^{5\cdot X}+\frac{10\cdot cC0-(7\cdot cC1-cC2)}{40}\cdot e^{-(3\cdot X)}+\frac{15\cdot cC0+2\cdot cC1-cC2}{15}\cdot e^{2\cdot X}$$

waarbij cC0, cC1 en cC2 integratieconstanten zijn. Ook al lijkt deze uitkomst zeer ingewikkeld, kan deze vereenvoudigd worden als we het volgende nemen:

K1 = (10*cC0-(7+cC1-cC2))/40, K2 = -(6*cC0-(cC1+cC2))/24, en

K3 = (15*cC0+(2*cC1-cC2))/15.

Dan is de oplossing

$$y = K_1 \cdot e^{-3x} + K_2 \cdot e^{5x} + K_3 \cdot e^{2x}.$$

De reden waarom de uitkomst van LDEC een dermate ingewikkelde combinatie van constanten is, is dat LDEC om de oplossing te produceren interne Laplace-transformaties gebruikt (die later in dit hoofdstuk behandeld zullen worden) die de oplossing van een ODE in een algebraïsche oplossing transformeren. De combinatie van constanten komt voort uit het factoriseren van de exponentiële termen nadat de Laplace-transformatie is verkregen.

Voorbeeld 2 – Los met de functie LDEC de niet-homogene NDV op:

$$d^3y/dx^3 - 4\cdot(d^2y/dx^2) - 11\cdot(dy/dx) + 30\cdot y = x^2.$$

Voer in:

'X^2' ENTER 'X^3-4*X^2-11*X+30' ENTER LDEC

De oplossing is:

$$-\frac{750\cdot cC0-(125\cdot cC1+125\cdot cC2+2)}{3000}\cdot e^{5\cdot X}+\frac{270\cdot cC0-(189\cdot cC1-(27\cdot cC2-2))}{1080}\cdot e^{-(3\cdot X)}+\frac{450\cdot X^2+330\cdot X+241}{13500}\cdot e^{(}$$

Als we de combinatie van constanten die de exponentiele termen vergezellen vervangen door eenvoudige waarden, dan wordt K_3 = -(750*C0-(125*C1+125*C2+2))/3000 de volgende uitdrukking $y = K_1 \cdot e^{-3x} + K_2 \cdot e^{5x} + K_3 \cdot e^{2x} + (450\cdot x^2+330\cdot x+241)/13500$

We herkennen de eerste drie termen als de algemene oplossing van de homogene vergelijking (zie bovenstaande voorbeeld 1) Als y_h de oplossing voor de homogene vergelijking weergeeft, d.w.z., $y_h = K_1 \cdot e^{-3x} + K_2 \cdot e^{5x} + K_3 \cdot e^{2x}$. U kunt bewijzen dat de resterende termen in de bovenstaande oplossing, d.w.z. $y_p = (450\cdot x^2+330\cdot x+241)/13500$ een speciale oplossing vormen voor de ODE.

Opmerking: eze uitkomst is algemeen voor alle niet-homogene lineaire ODE's, d.w.z. met de gegeven oplossing van de homogene vergelijking $y_h(x)$, kan de oplossing voor de corresponderende niet-homogene vergelijking y(x) geschreven worden als

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

waarbij $y_p(x)$ een speciale oplossing is voor de ODE.

Om te controleren dat $y_p = (450\cdot x^2+330\cdot x+241)/13500$ inderdaad een speciale oplossing is voor de ODE, gebruikt u het volgende:

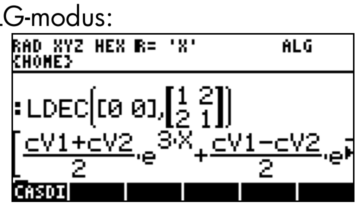
```
'd1d1d1Y(X)-4*d1d1Y(X)-11*d1Y(X)+30*Y(X) = X^2' ENTER
'Y(X)=(450*X^2+330*X+241)/13500' ENTER
SUBST EVAL
```

Geef de rekenmachine ongeveer tien seconden om de uitkomst te produceren. 'X^2 = X^2'.

<u>Voorbeeld 3</u> – Een stelsel van lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten oplossen
Bekijk het stelsel van lineaire differentiaalvergelijkingen:

$$x_1'(t) + 2x_2'(t) = 0,$$
$$2x_1'(t) + x_2'(t) = 0.$$

In algebraïsche vorm wordt dit geschreven als: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}'(t) = 0$, waarbij $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Het stelsel kan worden opgelost door de functie LDEC te gebruiken met argumenten [0,0] en matrix A zoals in het volgende scherm wordt getoond in de ALG-modus:



De oplossing wordt gegeven als een vector die de functies $[x_1(t), x_2(t)]$ bevat. Door op ▼ te drukken, zal de Matrixschrijver geactiveerd worden waardoor de gebruiker de twee componenten van de vector kan zien. Druk op de softmenutoets EDIT om alle details van iedere component te zien. Controleer dat de componenten de volgende zijn:

De functie DESOLVE

De rekenmachine geeft de functie DESOLVE (Differentiaalvergelijking SOLVer) om bepaalde soorten differentiaalvergelijkingen op te lossen. De functie vereist als invoer de differentiaalvergelijking en de onbekende functie en geeft indien beschikbaar de oplossing voor de vergelijking. U kunt ook een vector met daarin de differentiaalvergelijking en de beginvoorwaarden als invoer voor DESOLVE geven in plaats van alleen een differentiaalvergelijking. De functie DESOLVE is beschikbaar in het menu CALC/DIFF. Voorbeelden van DESOLVE-toepassingen vindt u hieronder in de RPN-modus.

Voorbeeld 1 – Los de volgende eerste orde ODE op:

$$dy/dx + x^2 \cdot y(x) = 5.$$

Gebruik in de rekenmachine:

'd1y(x)+x^2*y(x)=5' ENTER 'y(x)' ENTER DESOLVE

De gegeven oplossing is

{'y = (INT(5*EXP(xt^3/3),xt,x)+cC0)*1/EXP(x^3/3)' }, d.w.z.

$$y(x) = \exp(-x^3/3) \cdot \left(\int 5 \cdot \exp(x^3/3) \cdot dx + cC_0 \right)$$

De variabele ODETYPE

In de toetslabels van het sofmenu zult u een nieuw variabele genaamd ODETY (ODETYPE) zien staan. Deze variabele is aangemaakt bij het oproepen van de functie DESOL en bevat een string die het soort ODE toont dat gebruikt wordt als invoer voor DESOLVE. Druk op ODETY om de volgende string te krijgen: "`1st order linear`".

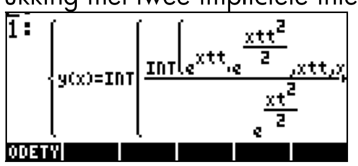
<u>Voorbeeld 2</u> – Los de tweede orde ODE op:

$$d^2y/dx^2 + x\,(dy/dx) = \exp(x).$$

Gebruik in de rekenmachine:

`'d1d1y(x)+x*d1y(x) = EXP(x)'` ENTER `'y(x)'` ENTER `DESOLVE`

Het resultaat is een uitdrukking met twee impliciete integraties, namelijk



Voor deze vergelijking echter zorgen we dat de linkerkant van de vergelijking wordt weergegeven als d/dx(x dy/dx). De ODE wordt nu dus geschreven als:

$$d/dx(x\, dy/dx) = \exp x,$$

en

$$x\, dy/dx = \exp x + C.$$

Vervolgens kunnen we schrijven:

$$dy/dx = (C + \exp x)/x = C/x + e^x/x.$$

U kunt in de rekenmachine proberen het volgende te integreren:

`'d1y(x) = (C + EXP(x))/x'` ENTER `'y(x)'` ENTER `DESOLVE`

De uitkomst is { 'y(x) = INT((EXP(xt)+C)/xt,xt,x)+C0' } d.w.z.

$$y(x) = \int \cdot \frac{e^x + C}{x} dx + C_0$$

Als we de integratie met de hand uitvoeren, komen we niet verder dan:

$$y(x) = \int \cdot \frac{e^x}{x} dx + C \cdot \ln x + C_0$$

omdat de integraal van exp(x)/x niet in gesloten vorm beschikbaar is.

<u>Voorbeeld 3</u> – Een vergelijking met beginvoorwaarden oplossen. Los op

$$d^2y/dt^2 + 5y = 2 \cos(t/2)$$

met de beginvoorwaarden

$$y(0) = 1.2,\ y'(0) = -0.5.$$

Gebruik in de rekenmachine:

['d1d1y(t)+5*y(t) = 2*COS(t/2)' 'y(0) = 6/5' 'd1y(0) = -1/2'] ENTER
'y(t)' ENTER
DESOLVE

Let op: de beginvoorwaarden zijn veranderd in Exacte uitdrukkingen: 'y(0) = 6/5' i.p.v. 'y(0)=1.2', en 'd1y(0) = -1/2' i.p.v. 'd1y(0) = -0.5' Het omzetten naar deze Exacte uitdrukkingen vergemakkelijkt de oplossing.

Opmerking: gebruik de functie →Q (Zie hoofdstuk 5) om breukuitdrukkingen te krijgen voor decimale waarden.

De oplossing is:

Druk op EVAL EVAL om het resultaat te vereenvoudigen naar

‘y(t) = -((19*5*SIN(√5*t)-(148*COS(√5*t)+80*COS(t/2)))/190)’.

Druk op VAR ODETY om de string “`Linear w/ cst coeff`” te krijgen voor het ODE-type van dit geval.

Laplace-transformaties

De Laplace-transformatie van een functie f(t) geeft een functie F(s) in het imagedomein die gebruikt kan worden om de oplossing te vinden van een lineaire differentiaalvergelijking met betrekking tot f(t) middels algebraïsche methodes. Deze toepassing omvat drie stappen:

1. Gebruik van Laplace-transformatie converteert de lineaire ODE m.b.t. f(t) in een algebraïsche vergelijking.
2. De onbekende F(s) wordt opgelost in het imagedomein d.m.v. algebraïsche manipulatie.
3. Een inverse Laplace-transformatie wordt gebruikt om de imagefunctie die werd gevonden in stap 2 te converteren in de oplossing voor de differentiaalvergelijking f(t).

Definities

De Laplace-transformatie voor functie f(t) is de functie F(s) gedefinieerd als

$$\mathrm{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}dt.$$

De beeldvariabele s kan een complex getal zijn en is dat ook meestal.

Veel praktische toepassingen van Laplace-transformaties gebruiken een originele functie f(t) waarbij t staat voor tijd, bijv. besturingssystemen in elektrische of hydraulische circuits. Meestal is men geïnteresseerd in de systeemrespons na tijd t>0, dus de definitie van Laplacetransformatie zoals hierboven gegeven, gebruikt een integratie voor waarden van t die groter zijn dan nul.

De <u>inverse Laplace-transformatie</u> zet de functie F(s) uit tegen de originele functie f(t) in het tijddomein, d.w.z. $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.

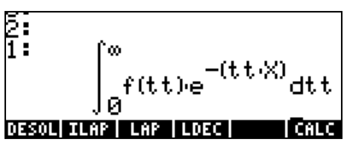
De <u>convolutieintegraal</u> of het <u>convolutieproduct</u> van twee functies f(t) en g(t), waarbij g wordt verplaatst in tijd wordt gedefinieerd als

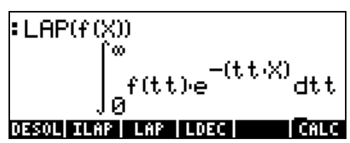
$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u) \cdot g(t-u) \cdot du\ .$$

Laplace-transformaties en inversies in de rekenmachine

De rekenmachine geeft de functies LAP en ILAP om respectievelijk de Laplace-transformatie en de inverse Laplace-transformatie te berekenen voor een functie f(VX) waarin VX de standaard onafhankelijke CAS-variabele is, die u op X in zou moeten stellen. De rekenmachine geeft dus de transformatie of de inverse transformatie als een functie van X. De functies LAP en ILAP zijn beschikbaar in het menu CALC/DIFF. De voorbeelden zijn in de RPN-modus uitgewerkt. Het omzetten naar de ALG-modus is eenvoudig. Stel de CAS-modus op Real en Exact in voor deze voorbeelden.

<u>Voorbeeld 1</u> – U kunt als volgt de definitie van de Laplace-transformatie verkrijgen: 'f(X)' ENTER LAP in de RPN-modus of LAP(F(X))in de ALG-modus. De rekenmachine geeft als resultaat (RPN links, ALG rechts):





Vergelijk deze uitdrukkingen met de uitdrukking die eerder is gegeven in de definitie van de Laplace-transformatie:

$$\mathrm{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt,$$

en u ziet dat de standaard CAS-variabele X in het scherm van de vergelijkingenschrijver de variabele s vervangt in deze definitie. Wanneer u dus de functie LAP gebruikt, verkrijgt u een functie van X die de Laplace-transformatie is van f(X).

Voorbeeld 2 – Bepaal de Laplace-transformatie van f(t) = $e^{2t}\cdot$sin(t). Gebruik: 'EXP(2*X)*SIN(X)' `ENTER` LAP. De rekenmachine geeft de volgende uitkomst: 1/(SQ(X-2)+1). Druk op `EVAL` voor, 1/(X^2-4X+5).

Als u dit resultaat op papier zet, zou dat er als volgt uitzien

$$F(s) = \mathrm{L}\{e^{2t}\cdot\sin t\} = \frac{1}{s^2 - 4\cdot s + 5}$$

Voorbeeld 3 – Bepaal de inverse Laplace-transformatie van F(s) = sin(s). Gebruik: 'SIN(X)' `ENTER` ILAP. De rekenmachine geeft het volgende resultaat: 'ILAP(SIN(X))', hetgeen betekent dat er geen 'closed form' uitdrukking f(t) is, zo dat f(t) = L^{-1}\{sin(s)\}.

Voorbeeld 4 – Bepaal de inverse Laplace-transformatie van F(s) = $1/s^3$. Gebruik: '1/X^3' `ENTER` ILAP `EVAL`. De rekenmachine geeft het volgende resultaat: 'X^2/2', hetgeen geïnterpreteerd wordt als $L^{-1}\{1/s^3\} = t^2/2$.

Voorbeeld 5 – Bepaal de Laplace-transformatie van de functie f(t) = cos (a·t+b). Gebruik: 'COS(a*X+b)' `ENTER` LAP . De rekenmachine geeft het volgende resultaat:

$$\frac{X}{SQ(X)+SQ(a)}\cdot COS(b)-SIN(b)\cdot\frac{a}{SQ(X)+SQ(a)}$$

Druk op `EVAL` voor –(a sin(b) – X cos(b))/(X^2+a^2). De verandering wordt als volgt geïnterpreteerd: L \{cos(a·t+b)\} = (s·cos b – a·sin b)/(s^2+a^2).

Stelling van de Laplace-transformatie

Om u te helpen bij het bepalen van de Laplace-transformatie van functies kunt u een aantal stellingen gebruiken waarvan enkele hieronder worden genoemd. U vindt ook een aantal voorbeelden van stellingtoepassingen.

- Differentiatiestelling voor de eerste afgeleide. Laat f_o de beginvoorwaarde zijn voor f(t), d.w.z. $f(0) = f_o$, dan

$$L\{df/dt\} = s\cdot F(s) - f_o.$$

Voorbeeld 1 – De snelheid van een bewegend deeltje v(t) wordt gedefinieerd als v(t) = dr/dt, waarbij r = r(t) de positie is van het deeltje. Bij $r_o = r(0)$ en R(s) =L{r(t)}, dan kan de transformatie van de snelheid geschreven worden als $V(s) = L\{v(t)\}=L\{dr/dt\}= s\cdot R(s)-r_o$.

- Differentiatiestelling voor de tweede afgeleide. Bij $f_o = f(0)$ en $(df/dt)_o = df/dt|_{t=0}$, dan $L\{d^2f/dt^2\} = s^2\cdot F(s) - s\cdot f_o - (df/dt)_o$.

Voorbeeld 2 – Als een vervolg op Voorbeeld 1, wordt de versnelling a(t) gedefinieerd als $a(t) = d^2r/dt^2$. Als de beginsnelheid $v_o = v(0) = dr/dt|_{t=0}$ is dan kan de Laplacetransformatie van de versnelling geschreven worden als:

$$A(s) = L\{a(t)\} = L\{d^2r/dt^2\}= s^2\cdot R(s) - s\cdot r_o - v_o.$$

- Differentiatiestelling voor de n-de afgeleide.
Bij $f^{(k)}{}_o = d^kf/dx^k|_{t=0}$ en $f_o = f(0)$, dan

$$L\{d^nf/dt^n\} = s^n\cdot F(s) - s^{n-1}\cdot f_o -\ldots- s\cdot f^{(n-2)}{}_o - f^{(n-1)}{}_o.$$

- Lineairiteitsstelling. $L\{af(t)+bg(t)\} = a\cdot L\{f(t)\} + b\cdot L\{g(t)\}$.

- Differentiatiestelling voor de beeldfunctie. Laat F(s) = L{f(t)}, dan $d^nF/ds^n = L\{(-t)^n\cdot f(t)\}$.

Voorbeeld 3 – Bij $f(t) = e^{-at}$, op de rekenmachine met 'EXP(-a*X)' ENTER LAP, krijgt u '1/(X+a)', of F(s) = 1/(s+a). De derde afgeleide van deze uitdrukking kan worden berekend met:

'X' ENTER ↱ ∂ 'X' ENTER ↱ ∂ 'X' ENTER ↱ ∂ EVAL

Het resultaat is

'-6/(X^4+4*a*X^3+6*a^2*X^2+4*a^3*X+a^4)', of

$d^3F/ds^3 = -6/(s^4+4\cdot a\cdot s^3+6\cdot a^2\cdot s^2+4\cdot a^3\cdot s+a^4)$.

Gebruik nu '(-X)^3*EXP(-a*X)' ENTER LAP EVAL. De uitkomst is precies hetzelfde.

- Integratiestelling. Bij F(s) = L{f(t)}, dan

$$\mathrm{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}\cdot F(s).$$

- Convolutiestelling. Bij F(s) = L{f(t)} en G(s) = L{g(t)}, dan

$$\mathrm{L}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\} = \mathrm{L}\{(f*g)(t)\} =$$

$$\mathrm{L}\{f(t)\}\cdot\mathrm{L}\{g(t)\} = F(s)\cdot G(s)$$

Voorbeeld 4 – Zoek met de convolutiestelling de Laplace-transformatie van (f*g)(t), als f(t) = sin(t), en g(t) = exp(t). Om F(s) = L{f(t)} te vinden en G(s) = L{g(t)}, gebruik: 'SIN(X)' ENTER LAP EVAL. Uitkomst '1/(X^2+1)', d.w.z. F(s) = $1/(s^2+1)$.
Ook 'EXP(X)' ENTER LAP. Uitkomst '1/(X-1)', d.w.z. G(s) = 1/(s-1). Dus L{(f*g)(t)} = F(s)·G(s) = $1/(s^2+1)\cdot 1/(s-1) = 1/((s-1)(s^2+1)) = 1/(s^3-s^2+s-1)$.

- Verschuivingsstelling voor een verschuiving naar rechts. Bij F(s) = L{f(t)}, dan $L\{f(t-a)\}=e^{-as}\cdot L\{f(t)\} = e^{-as}\cdot F(s)$.

- Verschuivingsstelling voor een verschuiving naar links. Bij F(s) = L{f(t)} en a >0, dan

$$\mathrm{L}\{f(t+a)\} = e^{as}\cdot\left(F(s)-\int_0^a f(t)\cdot e^{-st}\cdot dt\right).$$

- Gelijkvormigheidstelling. Bij F(s) = L{f(t)} en a>0, dan L{f(a·t)} = (1/a)·F(s/a).

- Dempingstelling. Bij F(s) = L{f(t)}, dan L{e^{-bt}·f(t)} = F(s+b).
- Delingsstelling. Bij F(s) = L{f(t)}, dan

$$\mathrm{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(u)du.$$

- Laplace-transformatie van een periodieke functie van periode T:

$$\mathrm{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \cdot \int_0^T f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt.$$

- Limietstelling voor de beginwaarde: Bij F(s) = L{f(t)}, dan

$$f_0 = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty}[s \cdot F(s)].$$

- Limietstelling voor de eindwaarde: Bij F(s) = L{f(t)}, dan

$$f_{\infty} = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0}[s \cdot F(s)].$$

Dirac's delta functie en Heaviside's stapfunctie

In de analyse van besturingssystemen is het gebruikelijk een soort functies te gebruiken dat bepaalde fysieke gebeurtenissen weergeeft zoals de plotselinge activering van een schakelaar (Heaviside's stapfunctie) of een plotselinge momentpiek bij de invoer van het systeem (Dirac's delta functie δ(t)). Deze behoren tot een functieklasses die bekend staan als gegeneraliseerde of symbolische functies [zie bijv. Friedman, B., 1956, Principles and Techniques of Applied Mathematics, Dover Publications Inc., New York (1990 herdruk)].

De formele definitie van Dirac's delta functie δ(x), is δ(x) = 0, voor x ≠0 en

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1.0.$$

En als f(x) een continue functie is, dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0).$$

Een interpretatie voor de integraal hierboven, citaat van Friedman (1990) is dat de δ-functie de waarde van de functie f(x) at x = x_0 "eruit pikt". Dirac's deltafunctie wordt meestal weergegeven als een naar boven gerichte pijl bij het punt x = x0, hetgeen aangeeft dat de functie alleen bij die waarde van x_0 een waarde heeft die ongelijk is aan nul.

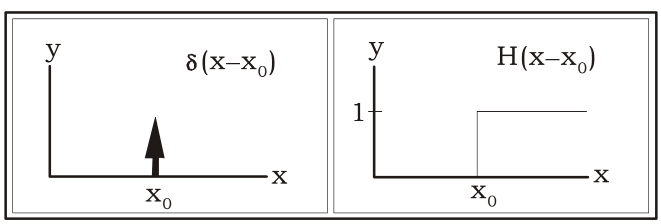
Heaviside's stap functie, H(x), wordt gedefinieerd als

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

En voor een continue functie f(x),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)H(x-x_0)dx = \int_{x_0}^{\infty} f(x)dx.$$

Dirac's delta functie en Heaviside's stapfunctie zijn met elkaar verbonden door dH/dx = δ(x). De twee functies worden geïllustreerd in de afbeelding hieronder.



U kunt bewijzen dat L{H(t)} = 1/s,
waaruit volgt dat L{U_o·H(t)} = U_o/s,
waarbij U_o een constante is. Ook L^{-1}\{1/s\}=H(t),
en L^{-1}\{ U_o /s\}= U_o·H(t).

En ook met gebruik van de verschuivingstelling voor een verschuiving naar rechts L{f(t-a)}=e^{-as}·L{f(t)} = e^{-as}·F(s), kunnen we schrijven L{H(t-k)}=e^{-ks}·L{H(t)} = e^{-ks}·(1/s) = (1/s)·e^{-ks}.

Een andere belangrijke uitkomst, bekend als de <u>tweede verschuivingstelling voor een verschuiving naar rechts</u> is dat L^{-1}\{e^{-as} ·F(s)}=f(t-a)·H(t-a) met F(s) = L{f(t)}.

In de rekenmachine wordt naar de Heaviside stapfunctie H(t) eenvoudigweg verwezen als '1'. Om de transformatie in de rekenmachine te controleren gebruikt u: 1 ENTER LAP. De uitkomst is '1/X', d.w.z. L{1} = 1/s. Vergelijkbaar is: 'U0' ENTER LAP , geeft de uitkomst 'U0/X', d.w.z. L{U_0} = U_0/s.

U kunt Dirac's delta functie in de rekenmachine verkrijgen door: 1 ENTER ILAP De uitkomst is '`Delta(X)`'.

Deze uitkomst is gewoon symbolisch, d.w.z. u kunt geen numerieke waarde vinden voor bijv. '`Delta(5)`'.

Deze uitkomst kan worden gedefinieerd als de Laplace-transformatie voor Dirac's deltafunctie, want uit L^{-1}\{1.0}= δ(t), volgt dat L{δ(t)} = 1.0

En als we de verschuivingstelling gebruiken voor een verschuiving naar rechts, L{f(t-a)}=e^{-as}·L{f(t)} = e^{-as}·F(s), kunnen we L{δ(t-k)}=e^{-ks}·L{δ(t)} = e^{-ks}·1.0 = e^{-ks} schrijven.

Toepassingen van Laplace-transformatie voor de oplossing van lineaire ODE's

Aan het begin van dit gedeelte over Laplace-transformaties gaven we aan dat u deze transformaties kunt gebruiken om een lineaire ODE in het tijddomein te converteren naar een algebraïsche vergelijking in het beelddomein. De daaruit voortvloeiende vergelijking is dan opgelost voor een functie F(s) met algebraïsche methodes en de oplossing voor de ODE wordt gevonden met de inverse Laplace-transformatie op F(s).

De stellingen over de afgeleiden van een functie, d.w.z.:

$$L\{df/dt\} = s\cdot F(s) - f_o,$$

$$L\{d^2f/dt^2\} = s^2\cdot F(s) - s\cdot f_o - (df/dt)_o,$$

en in het algemeen

$$L\{d^nf/dt^n\} = s^n\cdot F(s) - s^{n-1}\cdot f_o - \ldots - s\cdot f^{(n-2)}{}_o - f^{(n-1)}{}_o,$$

zijn bijzonder handig bij het transformeren van een ODE in een algebraïsche vergelijking.

<u>Voorbeeld 1</u> – Om de volgende eerste orde vergelijking op te lossen:

$$dh/dt + k\cdot h(t) = a\cdot e^{-t},$$

kunnen we met Laplace-transformatie het volgende schrijven:

$$L\{dh/dt + k\cdot h(t)\} = L\{a\cdot e^{-t}\},$$

$$L\{dh/dt\} + k\cdot L\{h(t)\} = a\cdot L\{e^{-t}\}.$$

Opmerking: 'EXP(-X)' ENTER LAP geeft '1/(X+1)', d.w.z. $L\{e^{-t}\}=1/(s+1)$.

Met $H(s) = L\{h(t)\}$ en $L\{dh/dt\} = s\cdot H(s) - h_o$, waarbij $h_o = h(0)$ is de getransformeerde vergelijking

$$s\cdot H(s)-h_o+k\cdot H(s) = a/(s+1).$$

Gebruik de rekenmachine om H(s) op te lossen door het volgende te schrijven:

'X*H-h0+k*H=a/(X+1)' ENTER 'H' ISOL

De uitkomst is 'H=((X+1)*h0+a)/(X^2+(k+1)*X+k)'.

We moeten als volgt de inverse Laplacetransformatie gebruiken om de oplossing te vinden voor de ODE h(t):

OBJ→ ◄ ◄ EVAL	Isoleert de rechterzijde van de laatste uitdrukking
ILAP	Verkrijgt de inverse Laplace-transformatie

Het resultaat is $\frac{a\cdot e^{k\cdot X}+((k-1)\cdot ho-a)\cdot e^{X}}{(k-1)\cdot e^{X}\cdot e^{k\cdot X}}$. Als u X vervangt door t in deze uitdrukking en deze vereenvoudigt, krijgt u $h(t) = a/(k-1)\cdot e^{-t} +((k-1)\cdot h_o-a)/(k-1)\cdot e^{-kt}$.

Controleer wat de oplossing voor de ODE zou zijn met de functie LDEC:

‘a*EXP(-X)’ ENTER ‘X+k’ ENTER LDEC EVAL

Het resultaat is: $\frac{a\cdot e^{k\cdot X}+((k-1)\cdot cC0-a)\cdot e^{X}}{(k-1)\cdot e^{X}\cdot e^{k\cdot X}}$ dus

$$h(t) = a/(k-1)\cdot e^{-t} +((k-1)\cdot cC_o-a)/(k-1)\cdot e^{-kt}.$$

Dus geeft cC0 in de uitkomsten van LDEC de beginvoorwaarde h(0) weer.

Opmerking: bij het gebruik van de functie LDEC om een lineaire ODE van de orde n in f(X) op te lossen, wordt de uitkomst gegeven in de vorm van n constanten cC0, cC1, cC2, ..., cC(n-1), die de beginvoorwaarden f(0), f’(0), f”(0), …, $f^{(n-1)}$ (0) weergeven.

Voorbeeld 2 – Gebruik Laplace-transformaties om de tweede orde lineaire vergelijking op te lossen,

$$d^2y/dt^2+2y = \sin 3t.$$

Met Laplace-transformatie kunnen we schrijven:

$$L\{d^2y/dt^2+2y\} = L\{\sin 3t\},$$

$$L\{d^2y/dt^2\} + 2\cdot L\{y(t)\} = L\{\sin 3t\}.$$

Opmerking: 'SIN(3*X)' `ENTER` LAP `EVAL` geeft '3/(X^2+9)', d.w.z. $L\{\sin 3t\}=3/(s^2+9)$.

Met $Y(s) = L\{y(t)\}$ en $L\{d^2y/dt^2\} = s^2\cdot Y(s) - s\cdot y_o - y_1$, waarbij $y_o = h(0)$ en $y_1 = h'(0)$, is de getransformeerde vergelijking

$$s^2\cdot Y(s) - s\cdot y_o - y_1 + 2\cdot Y(s) = 3/(s^2+9).$$

Gebruik de rekenmachine om Y(s) op te lossen door te schrijven:

'X^2*Y-X*y0-y1+2*Y=3/(X^2+9)' `ENTER` 'Y' ISOL

Het resultaat is

'Y=((X^2+9)*y1+(y0*X^3+9*y0*X+3))/(X^4+11*X^2+18)'.

We moeten als volgt de inverse Laplace-transformatie gebruiken om de oplossing te vinden voor de ODE y(t):

OBJ→ `◄` `◄`	Isoleert de rechterzijde van de laatste uitdrukking
ILAP`EVAL`	Geeft de inverse Laplace-transformatie

Het resultaat is

$$\frac{(7\cdot\sqrt{2}\cdot y1+3\cdot\sqrt{2})\cdot SIN(\sqrt{2}\cdot X)+14\cdot y0\cdot COS(\sqrt{2}\cdot X)-2\cdot SIN(3\cdot X)}{14}$$

d.w.z.

$$y(t) = -(1/7)\sin 3x + y_o \cos \sqrt{2}x + (\sqrt{2}\,(7y_1+3)/14)\sin \sqrt{2}x.$$

Controleer wat de oplossing voor de ODE zou zijn met de functie LDEC:

'SIN(3*X)' `ENTER` 'X^2+2' `ENTER` LDEC `EVAL`

Het resultaat is:

$$\frac{(7\cdot\sqrt{2}\cdot cC1+3\cdot\sqrt{2})\cdot SIN(\sqrt{2}\cdot X)+14\cdot cC0\cdot COS(\sqrt{2}\cdot X)-2\cdot SIN(3\cdot X)}{14}$$

d.w.z. hetzelfde als voorheen met C0 = y0 en C1 = y1.

> **Opmerking:** met de twee voorbeelden die u hier ziet, kunnen we bevestigen wat eerder is aangegeven, nl. dat de functie ILAP Laplace-transformaties en inverse transformaties gebruikt om lineaire ODE's op te lossen waarvan de rechterzijde van de vergelijking en de karakteristieke vergelijking van de corresponderende homogene ODE zijn gegeven.

Voorbeeld 3 – Bekijk de vergelijking

$$d^2y/dt^2+y = \delta(t\text{-}3),$$

waarbij $\delta(t)$ Dirac's delta functie is.

Met Laplacetransformatie kunnen we schrijven:

$$L\{d^2y/dt^2+y\} = L\{\delta(t\text{-}3)\},$$

$$L\{d^2y/dt^2\} + L\{y(t)\} = L\{\delta(t\text{-}3)\}.$$

Met 'Delta(X-3)' ENTER LAP geeft de rekenmachine EXP(-3*X), dus L{?(t-3)} = e^{-3s}. Met Y(s) = L{y(t)} en $L\{d^2y/dt^2\} = s^2\cdot Y(s) - s\cdot y_o - y_1$, waarbij y_o = h(0) en y_1 = h'(0), is de getransformeerde vergelijking $s^2\cdot Y(s) - s\cdot y_o - y_1 + Y(s) = e^{-3s}$. Gebruik de rekenmachine om Y(s) op te lossen door te schrijven:

'X^2*Y-X*y0-y1+Y=EXP(-3*X)' ENTER 'Y' ISOL

De uitkomst is 'Y=(X*y0+(y1+EXP(-(3*X))))/(X^2+1)'.

We moeten als volgt de inverse Laplace-transformatie gebruiken om de oplossing te vinden voor de ODE y(t):

OBJ→ ◄ ◄	Isoleert de rechterzijde van de laatste uitdrukking
ILAP EVAL	Geeft de inverse Laplace-transformatie

De uitkomst is 'y1*SIN(X)+y0*COS(X)+SIN(X-3)*Heaviside(X-3)'.

Opmerking:

[1]. Dit betekent dat de rekenmachine het heeft opgegeven en besloten dat het geen inverse Laplace-transformatie kan vinden voor de uitdrukking '(X*y0+(y1+EXP(-(3*X))))/(X^2+1)'. Laten we kijken of we de rekenmachine kunnen helpen door de uitdrukking in partiële breuken te verdelen, d.w.z.

'y0*X/(X^2+1) + y1/(X^2+1) + EXP(-3*X)/(X^2+1)',

en de lineariteitsstelling kunnen gebruiken van de inverse Laplace-transformatie

$$L^{-1}\{a\cdot F(s)+b\cdot G(s)\} = a\cdot L^{-1}\{F(s)\} + b\cdot L^{-1}\{G(s)\},$$

om te schrijven

$$L^{-1}\{y_o\cdot s/(s^2+1)+y_1/(s^2+1)) + e^{-3s}/(s^2+1)) \} =$$

$$y_o\cdot L^{-1}\{s/(s^2+1)\}+ y_1\cdot L^{-1}\{1/(s^2+1)\}+ L^{-1}\{e^{-3s}/(s^2+1))\},$$

Dan gebruiken we de rekenmachine om het volgende te verkrijgen:

'X/(X^2+1)' ENTER ILAP Uitkomst 'COS(X)', d.w.z. $L^{-1}\{s/(s^2+1)\}$= cos t.
'1/(X^2+1)' ENTER ILAP Uitkomst 'SIN(X)', d.w.z. $L^{-1}\{1/(s^2+1)\}$= sin t.
'EXP(-3*X)/(X^2+1)' ENTER ILAP Uitkomst 'SIN(X-3)*Heaviside(X-3)'.

[2]. De laatste uitkomst is '(EXP(-3*X)/(X^2+1))', d.w.z. dat de rekenmachine de inverse Laplace-transformatie van deze term niet kan vinden. In dit geval kunnen we echter de symbolische uitkomst gebruiken tweede verschuivingstelling voor een verschuiving naar rechts

$$L^{-1}\{e^{-as}\cdot F(s)\}=f(t-a)\cdot H(t-a),$$

als we een inverse Laplace-transformatie kunnen vinden voor $1/(s^2+1)$. Probeer met de rekenmachine '1/(X^2+1)' ENTER ILAP. Het resultaat is 'SIN(X)'. Dus, $L^{-1}\{e^{-3s}/(s^2+1)\} = \sin(t-3)\cdot H(t-3)$, Controleer wat de oplossing voor de ODE zou zijn met de functie LDEC:

'Delta(t-3)' ENTER 'X^2+1' ENTER LDEC EVAL

Het resultaat is:

'SIN(X-3)*Heaviside(X-3) + cC1*SIN(X) + cC0*COS(X)+'.

U ziet dat de variabele X in deze uitdrukking eigenlijk de variabele t in de originele ODE weergeeft en dat de variabele t in deze uitdrukking een dummyvariabele is. Dus kan de vertaling van de oplossing op papier worden geschreven als:

$$y(t) = Co \cdot \cos t + C_1 \cdot \sin t + \sin(t-3) \cdot H(t-3)$$

Als we deze uitkomst vergelijken met de vorige uitkomst voor y(t), kunnen we concluderen dat $cC_o = y_o$, $C_1 = y_1$

Heaviside's stap-functie in de rekenmachine definiëren en gebruiken

Het vorige voorbeeld heeft ons wat ervaring gegeven in het gebruik van Dirac's deltafunctie als invoer in een stelsel (d.w.z. in de rechterzijde van de ODE die het stelsel beschrijft). In dit voorbeeld willen we Heaviside's stap-functie H(t) gebruiken. In de rekenmachine kunnen we deze functie definiëren als:

'H(X) = IFTE(X>0, 1, 0)' ENTER ← DEF

Deze definitie zal de variabele H aanmaken in de softmenutoets van de rekenmachine.

Voorbeeld 1 -- Om een diagram te zien van H(t-2) bijvoorbeeld, gebruikt u het diagramtype FUNCTION (zie hoofdstuk 12):

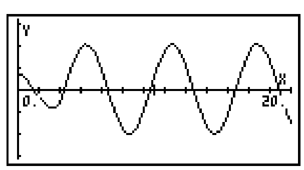
- Druk op ⓵ 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het scherm PLOT SETUP te gaan.
➢ Verander `TYPE` zo nodig in `Function`.
➢ Wijzig EQ in 'H(X-2)'.
➢ Zorg ervoor dat `Indep` is ingesteld op 'X'.
➢ Druk op NXT OK om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.
- Druk op tegelijkertijd ⓵ WIN om naar het scherm PLOT te gaan.
➢ Verander het H-VIEW bereik in 0 tot 20 en het V-VIEW bereik in -2 tot 2.
➢ Druk op ERASE DRAW om de functie te plotten.

Gebruik van de functie H(X) met LDEC, LAP of ILAP is niet toegestaan in de rekenmachine. U dient de hoofdresultaten die eerder gegeven zijn te gebruiken wanneer u de Heaviside stap-functie gebruikt, d.w.z. $L\{H(t)\} = 1/s$, $L^{-1}\{1/s\}=H(t)$,
$L\{H(t-k)\}=e^{-ks}\cdot L\{H(t)\} = e^{-ks}\cdot(1/s) = \cdot(1/s)\cdot e^{-ks}$ en $L^{-1}\{e^{-as}\cdot F(s)\}=f(t-a)\cdot H(t-a)$.

<u>Voorbeeld 2</u> – De functie $H(t-t_o)$ wanneer vermenigvuldigd met een functie f(t), d.w.z. $H(t-t_o)f(t)$, zet de functie f(t) aan bij $t = t_o$. De oplossing die we kregen in Voorbeeld 1 hierboven bijvoorbeeld was $y(t) = y_o \cos t + y_1 \sin t + \sin(t-3)\cdot H(t-3)$. Stel dat we de volgende beginvoorwaarden gebruiken: $y_o = 0.5$ en $y_1 = -0.25$. Laten we deze functie plotten om te zien hoe het eruit ziet:

- Druk op ⓵ 2D/3D , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus, om naar het beeldscherm PLOT SETUP te gaan.
➢ Verander `TYPE` zo nodig in `Function`
➢ Verander EQ in '0.5*COS(X)-0.25*SIN(X)+SIN(X-3)*H(X-3)'.
➢ Zorg ervoor dat `Indep` is ingesteld op 'X'.
➢ Druk op ERASE DRAW om de functie te plotten.
➢ Druk op EDIT NXT LABEL om het diagram te bekijken.

De grafiek ziet er als volgt uit:



U ziet dat het signaal begint met een relatief kleine breedte maar dat het plotseling bij t=3 overgaat in een slingerend signaal met een grotere breedte. Het verschil tussen het gedrag van het signaal voor en na t = 3 is het 'aanzetten' van de speciale oplossing $y_p(t) = \sin(t\text{-}3)\cdot H(t\text{-}3)$. Het gedrag van het signaal voor t = 3 geeft de bijdrage van de homogene oplossing $y_h(t) = y_o \cos t + y_1 \sin t$ weer.

De oplossing voor een vergelijking met een doorgaand signaal gegeven door een Heaviside stap-functie wordt hieronder getoond.

<u>Voorbeeld 3</u> – Bepaal de oplossing voor de vergelijking $d^2y/dt^2+y = H(t\text{-}3)$, waarbij H(t) Heaviside's stap functie is. Met de Laplace-transformatie kunnen we $L\{d^2y/dt^2+y\} = L\{H(t\text{-}3)\}$, $L\{d^2y/dt^2\} + L\{y(t)\} = L\{H(t\text{-}3)\}$ schrijven. De laatste term in de uitdrukking is: $L\{H(t\text{-}3)\} = (1/s)\cdot e^{-3s}$. Met $Y(s) = L\{y(t)\}$ en $L\{d^2y/dt^2\} = s^2\cdot Y(s) - s\cdot y_o - y_1$, waarbij $y_o = h(0)$ en $y_1 = h'(0)$, is de getransformeerde vergelijking $s^2\cdot Y(s) - s\cdot y_o - y_1 + Y(s) = (1/s)\cdot e^{-3s}$. Wijzig indien nodig de CAS-modus in Exact. Gebruik de rekenmachine om Y(s) op te lossen door het volgende te schrijven:

'X^2*Y-X*y0-y1+Y=(1/X)*EXP(-3*X)' ENTER 'Y' ISOL

De uitkomst is 'Y=(X^2*y0+(X*y1+EXP(-3*X)))/(X^3+X)'.

We moeten de inverse Laplace-transformatie als volgt gebruiken om de oplossing te vinden voor de ODE y(t):

OBJ→ ◄ ◄	Isoleert de rechterzijde van de laatste uitdrukking
ILAP	Geeft de inverse Laplace-transformatie

De uitkomst is 'y1*SIN(X-1)+y0*COS(X-1)-(COS(X-3)-1)*Heaviside(X-3)'.

We schrijven dus als oplossing: $y(t) = y_o \cos t + y_1 \sin t + H(t\text{-}3)\cdot(1+\sin(t\text{-}3))$.

Controleer wat de oplossing voor de ODE zou zijn als we de functie LDEC hadden gebruikt:

'H(X-3)' `ENTER` [ENTER] 'X^2+1' `ENTER` LDEC

Het resultaat is:

$$\mathrm{SIN}(X)\cdot\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{IFTE}(ttt-3>0,1,0)}{e^{X\cdot ttt}}\,dttt\ +cC1\cdot \mathrm{SIN}(X)+cC0\cdot \mathrm{COS}(X)$$

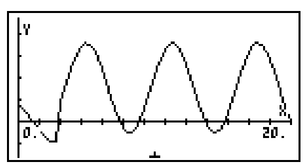
U ziet dat de variabele X in deze uitdrukking eigenlijk staat voor de variabele t in de originele ODE en dat de variabele *ttt* in deze uitdrukking een dummyvariabele is. We kunnen dat als volgt op papier zetten:

$$y(t) = Co\cdot\cos t + C_1\cdot\sin t + \sin t\cdot\int_0^\infty H(u-3)\cdot e^{-ut}\cdot du.$$

<u>Voorbeeld 4</u> – Plot de oplossing van Voorbeeld 3 met dezelfde waarden van y_o en y_1 die we hebben gebruikt in het diagram van Voorbeeld 1 hierboven. Nu plotten we de functie

y(t) = 0.5 cos t –0.25 sin t + (1+sin(t-3))·H(t-3).

In het bereik 0 < t < 20 en met het verticale bereik veranderd in (-1,3) zou de grafiek er als volgt uit moeten zien:



Er is weer een nieuwe component die de beweging bij t = 3 verandert, namelijk de speciale oplossing $y_p(t)$ = [1+sin(t-3)]·H(t-3) die de aard van de oplossing voor t>3 wijzigt.

De Heaviside stapfunctie kan worden gecombineerd met een constante functie en met lineaire functies om als volgt rechthoekige, driehoekige en eindige zaagtandtrillingen te genereren:

- Rechthoekige trilling van U_o grootte in het interval a < t < b:

$$f(t) = Uo[H(t\text{-}a)\text{-}H(t\text{-}b)].$$

- Driehoekige trilling met een maximumwaarde Uo, toenemend van a < t < b, afnemend van b < t < c:

$$f(t) = U_o\cdot ((t\text{-}a)/(b\text{-}a)\cdot[H(t\text{-}a)\text{-}H(t\text{-}b)]+(1\text{-}(t\text{-}b)/(b\text{-}c))[H(t\text{-}b)\text{-}H(t\text{-}c)]).$$

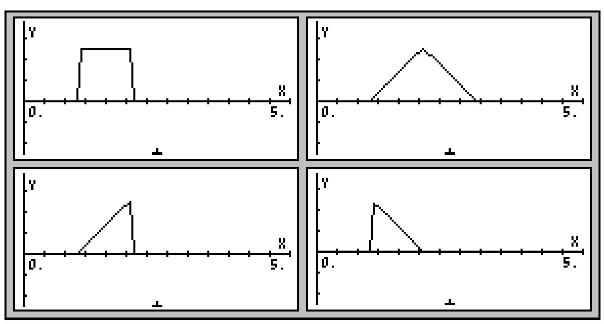
- Zaagtandtrilling toenemend tot een maximumwaarde Uo voor a < t < b en plotseling naar beneden vallend tot nul bij t = b:

$$f(t) = U_o\cdot (t\text{-}a)/(b\text{-}a)\cdot[H(t\text{-}a)\text{-}H(t\text{-}b)].$$

- Zaagtandtrilling plotseling toenemend tot een maximum van Uo bij t = a en dan lineair afnemend tot nul voor a < t < b:

$$f(t) = U_o\cdot[1\text{-}(t\text{-}a)/(b\text{-}1)]\cdot[H(t\text{-}a)\text{-}H(t\text{-}b)].$$

Voorbeelden van de diagrammen die gegenereerd worden door deze functies voor Uo = 1, a = 2, b = 3, c = 4, x-bereik = (0,5) en y-bereik = (-1, 1.5) worden getoond in de afbeeldingen hieronder:



Fourierreeksen

Fourrierreeksen zijn reeksen met sinus- en cosinusfuncties die meestal gebruikt worden om periodieke functies te ontwikkelen. Een functie f(x) wordt *periodiek* genoemd met periode T, als f(x+T) = f(t). Omdat bijvoorbeeld sin(x+2π) = sin x en cos(x+2π) = cos x zijn de functies *sin* en *cos* 2π-periodieke functies. Als twee functies f(x) en g(x) periodiek zijn met periode T, dan is hun lineaire combinatie h(x) = a·f(x) + b·g(x), ook periodiek met periode T. Een T-periodieke functie f(t) kan worden ontwikkeld in een reeks sinus- en cosinusfuncties bekend als een Fourierreeks gegeven door

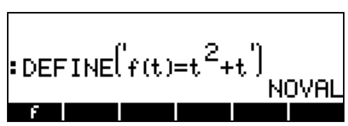
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \cos\frac{2n\pi}{T}t + b_n \cdot \sin\frac{2n\pi}{T}t\right)$$

waarbij de coëfficiënten a_n en b_n gegeven zijn door

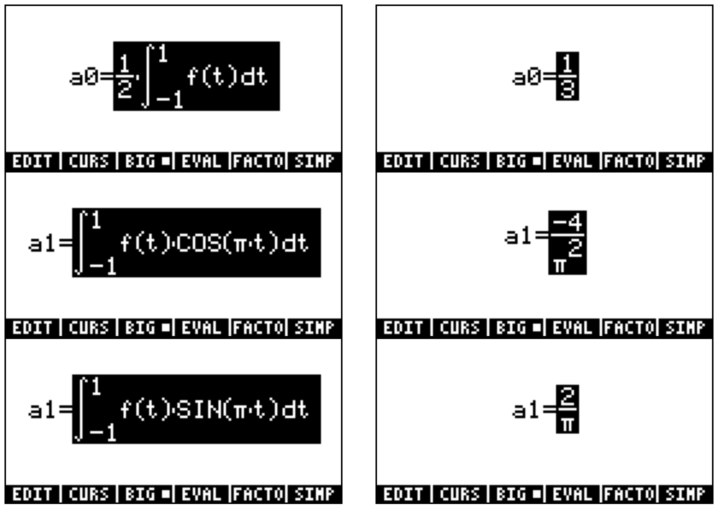
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot dt, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\cos\frac{2n\pi}{T}t\cdot dt,$$

$$b_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\sin\frac{2n\pi}{T}t\cdot dt.$$

De volgende oefeningen staan in de ALG-modus met de CAS-modus ingesteld op Exact. (Als u een grafiek maakt, wordt de CAS-modus weer ingesteld op Approx. Zorg dat deze na het produceren van de grafiek weer op Exact staat.) Stel bijvoorbeeld dat de functie f(t) = t^2+t periodiek is met periode T = 2. Om de coëfficiënten a_0, a_1, en b_1 te bepalen voor de corresponderende Fourierreeks gaan we als volgt te werk. Definieer eerst de functie f(t) = t^2+t :



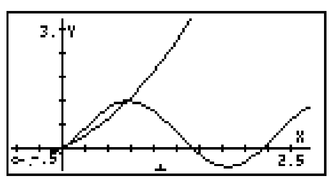
Vervolgens gebruiken we de Vergelijkingenschrijver om de coëfficiënten te berekenen:



Dus zijn de eerste drie termen van de functie:

$$f(t) \approx 1/3 - (4/\pi^2)\cdot\cos(\pi\cdot t)+(2/\pi)\cdot\sin(\pi\cdot t).$$

Een grafische vergelijking van de originele functie met de Fourieruitbreiding met deze drie termen laat zien dat de invulling acceptabel is voor t < 1of daaromtrent. Maar we hadden bepaald dat T/2 = 1. Daarom is de invulling alleen geldig tussen –1 < t < 1.



De functie FOURIER

Een alternatieve manier om een Fourierreeks te definiëren, is door complexe getallen als volgt te gebruiken:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \exp(\frac{2in\pi t}{T}),$$

waarbij

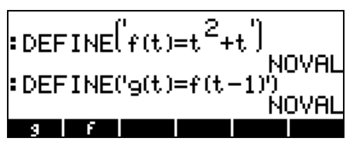
$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot \exp(-\frac{2\cdot i\cdot n\cdot \pi}{T}\cdot t)\cdot dt, \quad n = -\infty,...,-2,-1,0,1,2,..\infty.$$

De functie FOURIER geeft de coëfficiënt c_n van de complexe vorm van de Fourierreeks met de functie f(t) en de waarde van n gegeven. De functie FOURIER vereist dat u voordat u de functie oproept de waarde van de periode (T) van een T-periodieke functie opslaat in de CAS-variabele PERIOD. De functie FOURIER is beschikbaar in het submenu DERIV in het menu CALC (← CALC).

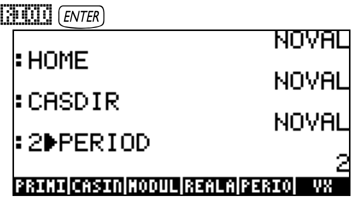
Fourierreeks voor een kwadratische vergelijking

Bepaal de coëfficiënten c_0, c_1 en c_2 voor de functie f(t) = t^2+t met periode T = 2. (Let op: omdat de integraal die is gebruikt door de functie FOURIER is berekend in het interval [0,T], terwijl de eerder gedefinieerde integraal was berekend in het interval [-T/2,T/2], moeten we de functie verschuiven op de t-as door T/2 af te trekken van t, d.w.z. dat we g(t) = f(t-1) = $(t-1)^2$+(t-1) gebruiken).

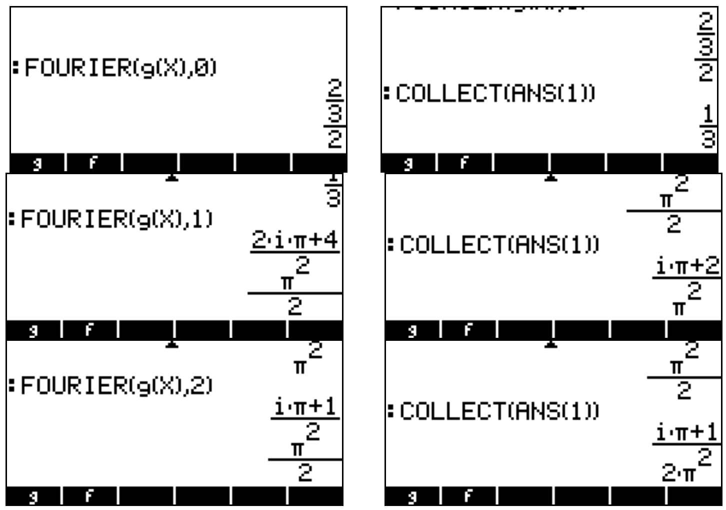
Met de rekenmachine in de ALG-modus definiëren we eerst de functies f(t) en g(t):



Vervolgens gaan we naar de subdirectory CASDIR in HOME om de waarde van de variabele PERIOD te veranderen, bijv. ← (vasthouden) UPDIR ENTER VAR CASDI ENTER 2 STO▸ PERIO ENTER



Ga terug naar de subdirectory waar u de functies f en g heeft gedefinieerd en bereken de coëfficiënten (Accepteer de wijziging naar de Complex-modus als hierom wordt gevraagd):

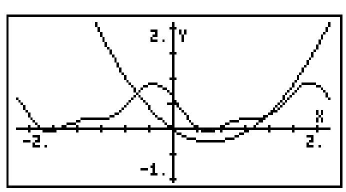


Dus $c_0 = 1/3$, $c_1 = (\pi\cdot i+2)/\pi^2$, $c_2 = (\pi\cdot i+1)/(2\pi^2)$.

De Fourierreeks met drie elementen wordt als volgt geschreven

$$g(t) \approx \mathrm{Re}[(1/3) + (\pi\cdot i+2)/\pi^2\cdot \exp(i\cdot\pi\cdot t)+ (\pi\cdot i+1)/(2\pi^2)\cdot \exp(2\cdot i\cdot\pi\cdot t)].$$

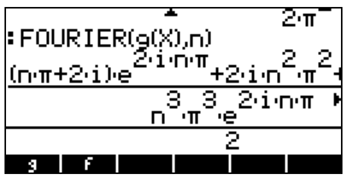
Een diagram van de verschoven functie g(t) en de invulling van de Fourierreeks volgt:

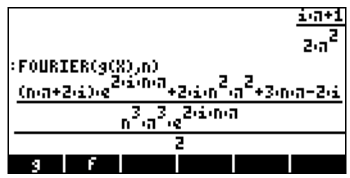


De invulling is redelijk acceptabel voor 0<t<2, maar niet zo goed als in het vorige voorbeeld.

Een algemene uitdrukking voor c_n

De functie FOURIER kan een algemene uitdrukking voor de coëfficiënt c_n van de complexe Fourierreeksuitbreiding geven. Als we bijvoorbeeld dezelfde functie g(t) als hiervoor gebruiken wordt de algemene term c_n gegeven door (de afbeeldingen zijn weergaven met een normaal lettergrootte en klein lettergrootte):



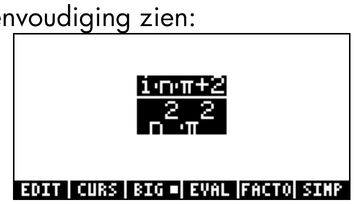


De algemene uitdrukking blijkt te zijn:

$$c_n = \frac{(n\pi + 2i)\cdot e^{2in\pi} + 2i^2 n^2 \pi^2 + 3n\pi - 2i}{2n^3\pi^3 \cdot e^{2in\pi}}$$

We kunnen deze uitdrukking zelfs nog verder vereenvoudigen door Euler's formule voor complexe getallen te gebruiken, namelijk $e^{2in\pi} = \cos(2n\pi) + i\cdot\sin(2n\pi) = 1 + i\cdot 0 = 1$, omdat $\cos(2n\pi) = 1$ en $\sin(2n\pi) = 0$, voor n als heel getal.

Met de rekenmachine kunt u de uitdrukking in de vergelijkingenschrijver (EQW) vereenvoudigen door $e^{2in\pi} = 1$ te vervangen. De afbeelding laat de uitdrukking na vereenvoudiging zien:

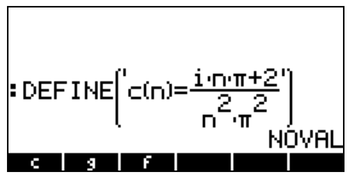


de uitkomst is $c_n = (i\cdot n\cdot\pi+2)/(n^2\cdot\pi^2)$.

De complexe Fourierreeks samenstellen

Als de algemene uitdrukking voor c_n eenmaal bepaald is, kunnen we als volgt een eindige complexe Fourierreeks samenstellen met de optelfunctie (Σ) van de rekenmachine:

- Definieer eerst een functie c(n) die de algemene term c_n weergeeft in de complexe Fourierreeks.



- Definieer vervolgens de eindige complexe Fourierreeks F(X,k) waarbij X de onafhankelijke variabele is en k het aantal te gebruiken termen bepaald. In het meest ideale geval zouden we deze eindige complexe Fourierreeks willen schrijven als

$$F(X,k) = \sum_{n=-k}^{k} c(n) \cdot \exp(\frac{2 \cdot i \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot X)$$

Omdat echter de functie c(n) niet is gedefinieerd voor n = 0 is het beter de uitdrukking te herschrijven als

$$F(X,k,c0) = c0 +$$

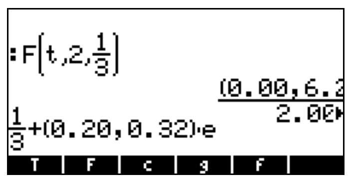
$$\sum_{n=1}^{k} [c(n) \cdot \exp(\frac{2 \cdot i \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot X) + c(-n) \cdot \exp(-\frac{2 \cdot i \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot X)],$$

Of in de invoerregel van de rekenmachine invoeren als:

DEFINE('F(X,k,c0) = c0+Σ(n=1,k,c(n)*EXP(2*i*π*n*X/T)+
c(-n)*EXP(-(2*i*π*n*X/T))'),

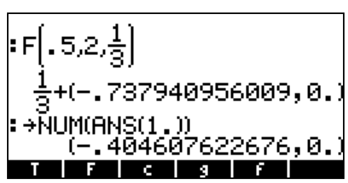
waarbij T de periode T = 2 is. De volgende beeldscherm laten de definitie van functie F zien en het opslaan van T = 2.

De functie F kan worden gebruikt om de uitdrukking te genereren voor de complexe Fourierreeks voor een eindige waarde van k. Bijvoorbeeld voor k = 2, c_0 = 1/3 en met t als de onafhankelijke variabele kunnen we F(t,2,1/3) evalueren en krijgen:



Deze uitkomst laat alleen de eerste term (c0) zien en een gedeelte van de eerste exponentiële term in de lijst. Het beeldscherm in decimaalopmaak is gewijzigd naar Fix met 2 decimalen om enkele van de coëfficiënten in de expansie en de exponent te kunnen laten zien. Zoals verwacht zijn de coëfficiënten complexe getallen.

De functie F, aldus gedefinieerd, is geschikt om waarden te verkrijgen voor de eindige Fourierreeks. Een enkele waarde van de lijst, bijv. F(0.5,2,1/3), kan worden verkregen met (CAS-modi ingesteld op Exact, step-by-step en Complex):

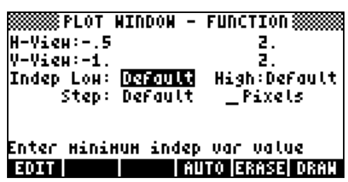


Accepteer indien gevraagd de verandering naar de `Approx` –modus. De uitkomst is de waarde
–0.40467…. De eigenlijke waarde van de functie g(0.5) is g(0.5) = -0.25. De volgende berekeningen laten zien hoe goed de Fourierreeks deze waarde benadert met het stijgen van het aantal componenten in de reeks, gegeven door k.

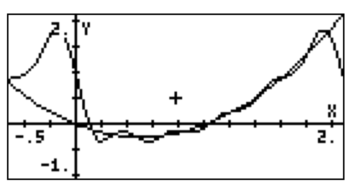
F (0.5, 1, 1/3) = (-0.303286439037,0.)
F (0.5, 2, 1/3) = (-0.404607622676,0.)
F (0.5, 3, 1/3) = (-0.192401031886,0.)
F (0.5, 4, 1/3) = (-0.167070735979,0.)
F (0.5, 5, 1/3) = (-0.294394690453,0.)
F (0.5, 6, 1/3) = (-0.305652599743,0.)

Om de uitkomsten van de reeks te vergelijken met die van de originele functie, dient u deze functies te laden in het invoerscherm PLOT – FUNCTION (← Y= , tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus):

Verander als volgt de randen van het beeldscherm Plot (← WIN) :



Druk op de softmenutoetsen ERASE DRAW om het diagram aan te maken:



U ziet dat de reeks, met 5 termen, de grafiek van de functie zeer dicht benadert in het interval 0 tot 2 (d.w.z. door de periode T = 2). U kunt ook een periodiciteit zien in de grafiek van de reeks. Deze periodiciteit is gemakkelijk te visualiseren door het x-bereik van het diagram uit te breiden naar (-0.5,4):

Fourierreeks voor een driehoekige golf

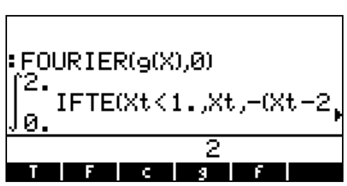
Bekijk de functie

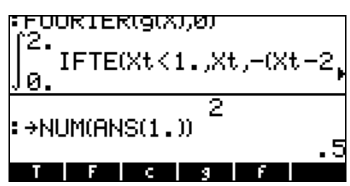
$$g(x) = \begin{cases} x, & if\ 0 < x < 1 \\ 2 - x, & if\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

waarvan we aannemen dat deze periodiek is met periode T = 2. Deze functie kan worden gedefinieerd in de rekenmachine in de ALG-modus met de uitdrukking

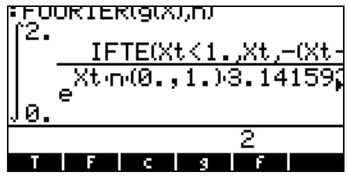
DEFINE('g(X) = IFTE(X<1,X,2-X)')

Als u met dit voorbeeld bent begonnen nadat u voorbeeld 1 heeft afgemaakt, heeft u al een waarde van 2 opgeslagen in de CAS-variabele PERIOD. Controleer, als u hier niet zeker van bent de waarde van deze variabele en sla zo nodig een 2 op. De coëfficiënt c_0 voor de Fourierreeks wordt als volgt berekend:





De rekenmachine zal om de Approx-modus vragen vanwege de integratie van de functie IFTE () in de integrand. Indien u accepteert geeft de verandering naar Approx c_0 = 0.5. Gebruik nu een generische uitdrukking om de coëfficiënt c_n te verkrijgen:



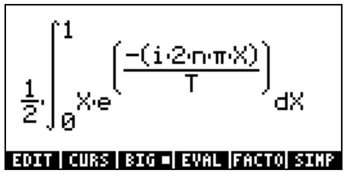
De rekenmachine geeft een integraal die niet numeriek kan worden geëvalueerd, omdat deze afhankelijk is van de parameter n. De coëfficiënt kan toch worden berekend door de definitie in de rekenmachine in te voeren, d.w.z.

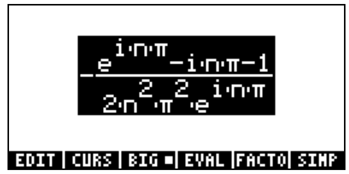
$$\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 X\cdot EXP\left(-\frac{i\cdot 2\cdot n\cdot\pi\cdot X}{T}\right)\cdot dX +$$

$$\frac{1}{2}\cdot\int_1^2 (2-X)\cdot EXP\left(-\frac{i\cdot 2\cdot n\cdot\pi\cdot X}{T}\right)\cdot dX$$

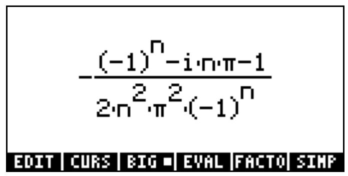
waarbij T = 2 de periode is. De waarde van T kan worden opgeslagen met:

Als we de eerste integraal hierboven in de vergelijkingenschrijver invoeren, wordt de hele uitdrukking geselecteerd. Met EVAL krijgen we dan het volgende:

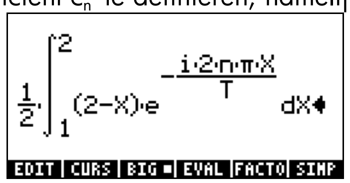


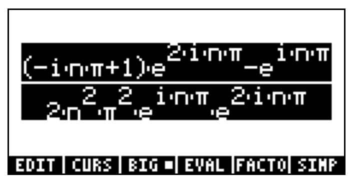


Haal de $e^{in\pi} = \cos(n\pi) + i \cdot \sin(n\pi) = (-1)^n$ terug. Als we deze vervanging uitvoeren in de uitkomst hierboven hebben we:

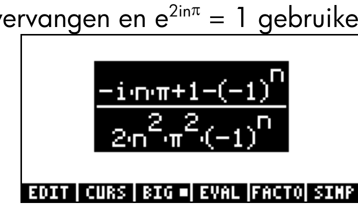


Druk op ENTER ENTER om deze uitkomst naar het scherm te kopiëren. Activeer dan de vergelijkingenschrijver opnieuw om de tweede integraal te berekenen door de coëfficiënt c_n te definiëren, namelijk

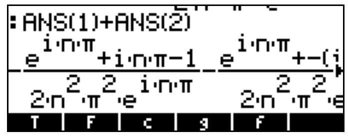




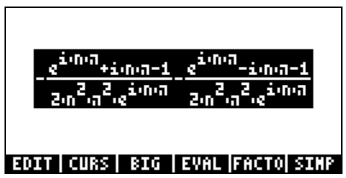
Nogmaals $e^{in\pi} = (-1)^n$ vervangen en $e^{2in\pi} = 1$ gebruiken en dan krijgen we:

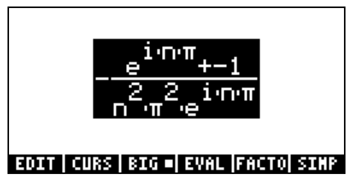


Druk op ENTER ENTER om deze tweede uitkomst naar het scherm te kopiëren. Voeg nu ANS(1) en ANS(2) toe om de volledige uitdrukking voor c_n te verkrijgen.



Door op ▼ te drukken, wordt deze uitkomst in de vergelijkingenschrijver geplaatst, waar het vereenvoudigd (SIMP) kan worden om het volgende te lezen:



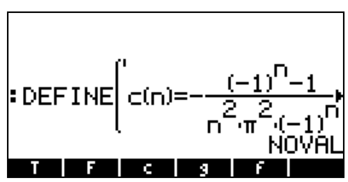


Nogmaals $e^{in\pi} = (-1)^n$ vervangen, geeft:

Deze uitkomst wordt gebruikt om de functie c(n) als volgt te definiëren:

DEFINE('c(n) = - (((-1)^n-1)/(n^2*π^2*(-1)^n)')

d.w.z.

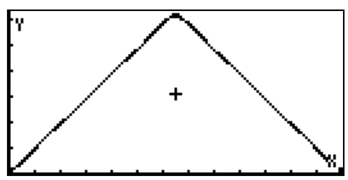


Vervolgens definiëren we de functie F(X,k,c0) om de Fourierreeks te berekenen (deze functie is al opgeslagen als u voorbeeld 1 heeft afgemaakt):

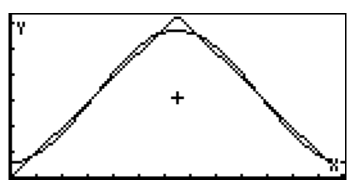
DEFINE('F(X,k,c0) = c0+Σ(n=1,k,c(n)*EXP(2*i*π*n*X/T)+
c(-n)*EXP(-(2*i*π*n*X/T))'),

Om de originele functie en de Fourierreeks te vergelijken, kunnen we een gecombineerd diagram van beide functies aanmaken. De details zijn vergelijkbaar met die van voorbeeld 1, behalve dat we hier voor x een bereik van 0 tot 2 gebruiken en voor y van 0 tot 1. We passen de vergelijkingen aan om te plotten zoals hieronder weergegeven:

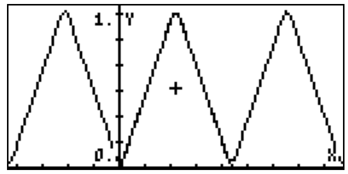
De resulterende grafiek ziet u hieronder voor k = 5 (het aantal elementen in de reeks is 2k+1, d.w.z. 11 in dit geval):



Het is moeilijk om bij het diagram de originele functie te onderscheiden van de Fourierreeksbenadering. K = 2, of 5 termen in de reeks, blijkt geen erg goede invulling te zijn.



De Fourierreeks kan worden gebruikt om een periodieke driehoeksgolf (of zaagtandgolf) te genereren door het x-asbereik bijvoorbeeld te veranderen van –2 in 4. De grafiek hieronder gebruikt k = 5:



Fourierreeks voor een rechthoekige golf

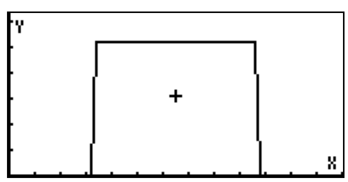
Een vierkante golf kan worden gegenereerd met de functie

$$g(x) = \begin{cases} 0, & if\ 0 < x < 1 \\ 1, & if\ 1 < x < 3 \\ 0, & if\ 3 < x < 4 \end{cases}$$

In dit geval is de periode T 4. Zorg ervoor dat de waarde van de variabele T in 4 (gebruik: 4 STO▶ T ENTER) wordt veranderd. Functie g(X) kan in de rekenmachine worden gedefinieerd met

DEFINE('g(X) = IFTE((X>1) AND (X<3),1,0)')

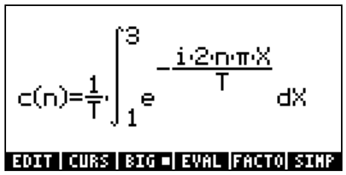
De functie ziet als volgt uit (horizontaal bereik: 0 to 4, verticaal bereik:0 to 1.2):

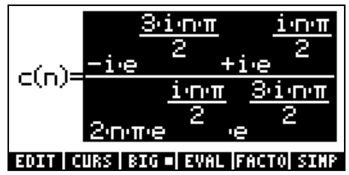


Met gebruik van een procedure die vergelijkbaar is met die van de driehoekige vorm in voorbeeld 2 hierboven, ziet u dat

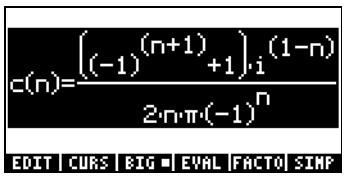
$$c_0 = \frac{1}{T}\cdot\left(\int_1^3 1\cdot dX\right) = 0.5\,,$$

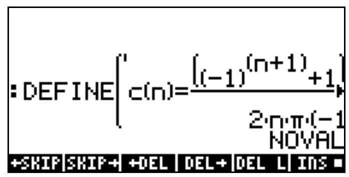
en



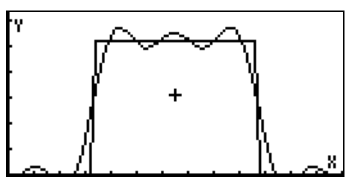


We kunnen deze uitdrukking vereenvoudigen met $e^{in\pi/2} = i^n$ en $e^{3in\pi/2} = (-i)^n$ om te krijgen:

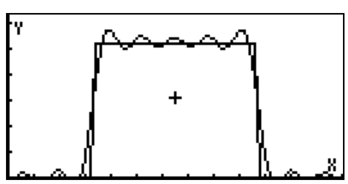




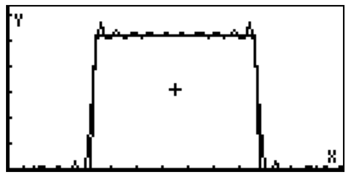
De vereenvoudiging van de rechterzijde van c(n) hierboven is makkelijker op papier (d.w.z. met de hand). Voer dan nogmaals de uitdrukking in voor c(n) zoals in de bovenstaande linkerafbeelding om de functie c(n) te definiëren. De Fourierreeks wordt berekend met F(X,k,c0) zoals in de bovenstaande voorbeelden 1 en 2 met c0 = 0.5. Voor k = 5, d.w.z. met 11 componenten, wordt bijvoorbeeld de benadering hieronder getoond:



Een betere benadering wordt verkregen met k = 10, d.w.z.



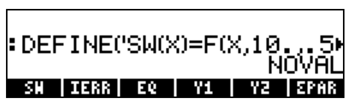
Voor k = 20 is de invulling nog beter, maar het duurt langer om de grafiek aan te maken:



Fourierreekstoepassingen in differentiaalvergelijkingen

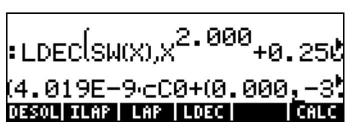
Stel dat we de periodieke vierkante golf die in het vorige voorbeeld is gedefinieerd willen gebruiken als de opwekking van een ongedempt massa-veer-systeem met als homogene vergelijking: $d^2y/dX^2 + 0.25y = 0$.

We kunnen de opwekkingskracht genereren door een benadering te verkrijgen met k = 10 uit de Fourierreeks met SW(X) = F(X,10,0.5):

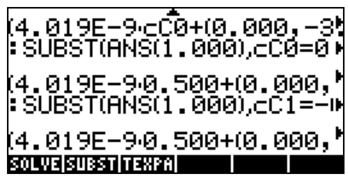


We kunnen deze uitkomst gebruiken als de eerste invoer in de functie LDEC wanneer deze wordt gebruikt om een oplossing te krijgen voor het stelsel $d^2y/dX^2 + 0.25y = SW(X)$, waarbij SW(X) staat voor de Vierkante Golffunctie van X. Het tweede invoeritem is de karakteristieke vergelijking die correspondeert met de homogene ODE hierboven, d.w.z. 'X^2+0.25'.

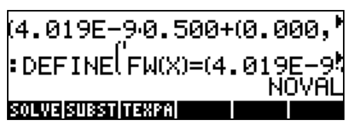
Met deze twee invoeritems geeft de functie LDEC de volgende uitkomst (decimale opmaak veranderd in Fix met 3 decimalen)



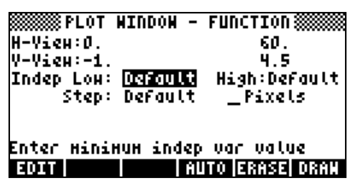
Druk op ▽ om de hele vergelijking te zien in de vergelijkingenschrijver. Als we de vergelijking in de vergelijkingenschrijver nauwkeurig bekijken, zien we twee integratieconstanten cC0 en cC1. Deze waarden zouden berekend zijn met het gebruik van beginvoorwaarden. Stel dat we de waarden cC0 = 0.5 en cC1 = -0.5 gebruiken, dan kunnen we de waarden in de oplossing hierboven vervangen met de functie SUBST (zie hoofdstuk 5). Gebruik in dit geval SUBST(ANS(1),cC0=0.5) `ENTER`, gevolgd door SUBST(ANS(1),cC1=-0.5) `ENTER`. Weer in het normale beeldscherm van de rekenmachine kunnen we het volgende gebruiken:



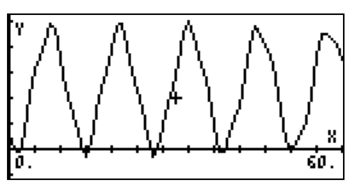
De laatste uitkomst kan als volgt worden gedefinieerd als een functie, FW(X) (de laatste uitkomst in het commando knippen en plakken):



Nu kunnen we het reële gedeelte van deze functie plotten. Wijzig de decimale modus in Standard en gebruik het volgende:



De oplossing wordt hieronder getoond:



Fouriertransformaties

Alvorens Fouriertransformaties te introduceren, zullen we een algemene definitie van een integrale transformatie geven. In het algemeen is een integrale transformatie een transformatie die een functie f(t) verbindt met een nieuwe functie F(s) door integratie van de vorm

$$F(s) = \int_a^b \kappa(s,t) \cdot f(t) \cdot dt.$$

De functie κ(s,t) noemen we de kern van de transformatie.

Het gebruik van een integrale transformatie maakt dat we een functie kunnen oplossen in een gegeven spectrum van componenten. Bekijk de volgende Fourierreeks om het concept van een spectrum te begrijpen

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \cos\omega_n x + b_n \cdot \sin\omega_n x\right),$$

Deze geeft een periodieke functie weer met een periode T. Deze Fourierreeks kan worden herschreven als $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(\varpi_n x + \phi_n),$

waarbij

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right),$$

voor n =1,2, …

Naar de amplitude A_n zal worden verwezen als het spectrum van de functie en het zal een maat zijn voor de grootte van de component van f(x) met frequentie $f_n = n/T$. De basis- of fundamentele frequentie in de Fourierreeks is $f_0 = 1/T$, dus zijn alle andere frequenties veelvouden van deze basisfrequentie, d.w.z. $f_n = n \cdot f_0$. Ook kunnen we een hoekfrequentie definiëren $\omega_n = 2n\pi/T = 2\pi \cdot f_n = 2\pi \cdot n \cdot f_0 = n \cdot \omega_0$, waarbij ω_0 de basis- of fundamentele hoekfrequentie is van de Fourierreeks.

Met de hoekfrequentienotatie wordt de Fourierreeksutibreiding geschreven als

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(\omega_n x + \phi_n).$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \omega_n x + b_n \cdot \sin \omega_n x\right)$$

Een diagram van de waarden A_n vs. ω_n is de typische weergave van een discreet spectrum voor een functie. Het discrete spectrum laat zien dat de functie componenten heeft op hoekfrequenties ω_n die hele veelvouden zijn van de fundamentele hoekfrequentie ω_0.

Stel dat het een keer nodig is een niet-periodieke functie te ontwikkelen in sinus- en cosinuscomponenten. Een niet-periodieke functie kan worden gezien als een functie die een oneindig lange periode heeft. Dus wordt voor een hele grote waarde van T de fundamentele hoekfrequentie $\omega_0 = 2\pi/T$ een hele kleine hoeveelheid, stel $\Delta\omega$. Ook nemen de hoekfrequenties die corresponderen met $\omega_n = n\cdot\omega_0 = n\cdot\Delta\omega$, $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ waarden aan die steeds dichter bij elkaar liggen en suggereren zo de behoefte aan een continu spectrum van waarden.

De niet-periodieke functie kan dus worden geschreven als

$$f(x) = \int_0^{\infty} [C(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot x) + S(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot x)] d\omega,$$

waarbij

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \cos(\omega \cdot x) \cdot dx,$$

en

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \sin(\omega \cdot x) \cdot dx.$$

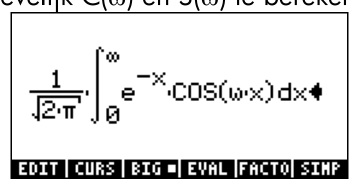
Het continue spectrum wordt gegeven door

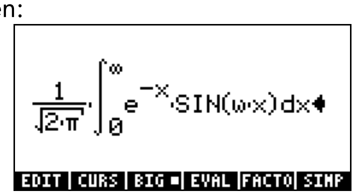
$$A(\omega) = \sqrt{[C(\omega)]^2 + [S(\omega)]^2}$$

De functies C(ω), S(ω) en A(ω) zijn continue functies van een variabele ω, die de transformatievariabele wordt voor de hieronder gedefinieerde Fouriertransformaties.

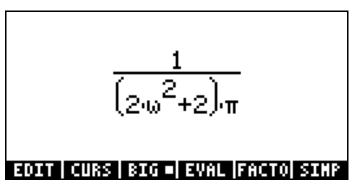
<u>Voorbeeld 1</u> – Bepaal de coëfficiënten C(ω), S(ω) en het continue spectrum A(ω) voor de functie f(x) = exp(-x) voor x > 0 en f(x) = 0, x < 0.

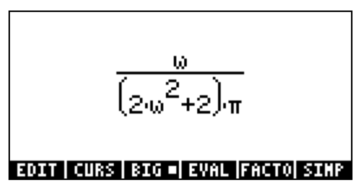
Stel de volgende integralen in in de rekenmachine en evalueer ze om respectievelijk C(ω) en S(ω) te berekenen:



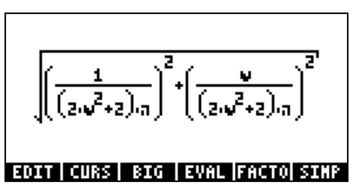


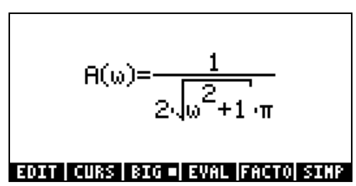
De uitkomsten zijn respectievelijk:



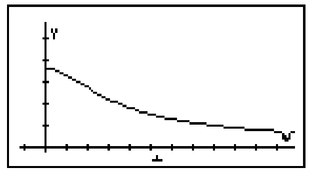


Het continue spectrum A(ω) wordt berekend als:





Definieer deze uitdrukking als een functie met de functie DEFINE (← DEF).
Plot dan, binnen het bereik 0 < ω < 10 het continue spectrum als:



Definitie van Fouriertransformaties

Er kunnen verschillende soorten Fouriertransformaties worden gedefinieerd. De volgende zijn de definities van de sinus, cosinus en volledige Fouriertransformaties en hun inverses:

Fouriersinustransformatie

$$\mathrm{F}s\{f(t)\} = F(\omega) = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\infty f(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)\cdot dt$$

Inverse sinustransformatie

$$\mathrm{F}_s^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \int_0^\infty F(\omega)\cdot\sin(\omega\cdot t)\cdot dt$$

Fouriercosinustransformatie

$$\mathrm{F}c\{f(t)\} = F(\omega) = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\infty f(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot dt$$

Inverse cosinustransformatie

$$\mathrm{F}_c^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \int_0^\infty F(\omega)\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot dt$$

Fouriertransformatie (echte)

$$\mathrm{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^\infty f(t)\cdot e^{-i\omega t}\cdot dt$$

Inverse Fouriertransformatie (echte).

$$\mathsf{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot e^{-i\omega t}\cdot dt$$

<u>Voorbeeld 1</u> – Bepaal de Fouriertransformatie van de functie f(t) = exp(-t), voor t >0 en f(t) = 0 voor t<0.

Het continue spectrum F(ω) wordt berekend met de integraal:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-(1+i\omega)t}dt = \lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\varepsilon} e^{-(1+i\omega)t}dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1-\exp(-(1+i\omega)t)}{1+i\omega}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{1+i\omega}.$$

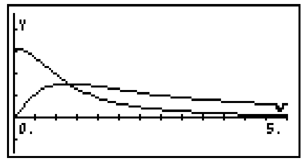
Deze uitkomst kan worden gerationaliseerd door de teller en de noemer te vermenigvuldigen met de geconjugeerde grootheid van de noemer, namelijk 1-iω. De uitkomst is nu:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{1+i\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(\frac{1}{1+i\omega}\right)\cdot\left(\frac{1-i\omega}{1-i\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1+\omega^2} - i\cdot\frac{\omega}{1+\omega^2}\right)$$

en dat is een complexe functie.

De reële en denkbeeldige delen van de functie kunnen worden geplot, zoals hieronder wordt getoond:



Opmerkingen:
De absolute waarde van de Fouriertransformatie $|F(\omega)|$ is het frequentiespectrum van de originele functie f(t). Voor het voorbeeld hierboven $|F(\omega)| = 1/[2\pi(1+\omega^2)]^{1/2}$. Het diagram van $|F(\omega)|$ vs. ω werd eerder afgebeeld.

Sommige functies, zoals constante waarden, sin x, exp(x), x2, enz. hebben geen Fouriertransformatie. Functies die snel genoeg nul benaderen wanneer x de oneindigheid benadert, hebben Fouriertransformaties.

Eigenschappen van de Fouriertransformatie

Lineariteit: Als a en b constanten zijn en f en g functies dan $F\{a \cdot f + b \cdot g\} = a\ F\{f\} + b\ F\{g\}$.

Transformatie van partiële afgeleiden. Stel u = u(x,t). Als de Fouriertransformatie de variabele x transformeert dan

$$F\{\partial u/\partial x\} = i\omega\ F\{u\},\quad F\{\partial^2 u/\partial x^2\} = -\omega^2\ F\{u\},$$
$$F\{\partial u/\partial t\} = \partial F\{u\}/\partial t,\quad F\{\partial^2 u/\partial t^2\} = \partial^2 F\{u\}/\partial t^2$$

convolutie: voor Fouriertransformatietoepassingen wordt de convolutiebewerking als volgt gedefinieerd

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int f(x-\xi) \cdot g(\xi) \cdot d\xi.$$

De volgende eigenschap geldt voor convolutie:

$$F\{f*g\} = F\{f\} \cdot F\{g\}.$$

Snelle Fouriertransformatie (FFT)

De snelle Fouriertransformatie is een computeralgoritme waarmee men op zeer efficiënte wijze een discrete Fouriertransformatie (DFT) kan berekenen. Dit algoritme heeft toepassingen in de analyse van verschillende soorten tijdsafhankelijke signalen variërend van turbulentiemetingen tot communicatiesignalen.

De discrete Fouriertransformatie van een reeks gegevenswaarden $\{x_j\}$, j = 0, 1, 2, …, n-1 is een nieuwe eindige reeks $\{X_k\}$, die wordt gedefinieerd als

$$X_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_j \cdot \exp(-i \cdot 2\pi kj / n), \qquad k = 0,1,2,...,n-1$$

De directe berekening van de reeks X_k impliceert n^2 producten die enorm veel computer-(of rekenmachine-) tijd zou kosten, in het bijzonder voor de grote waarden van n. De Snelle Fouriertransformatie reduceert het aantal bewerkingen tot de orde van $n \cdot \log_2 n$. Voor n = 100 bijvoorbeeld vereist de FFT ongeveer 664 bewerkingen, terwijl de directe berekening ongeveer 10.000 bewerkingen nodig heeft. Dus wordt het aantal bewerkingen met FFT teruggebracht met een factor 10000/664 $\approx$ 15.

De FFT werkt met de reeks $\{x_j\}$ door het te verdelen in een aantal kortere reeksen. De DFT's van de kortere reeksen worden berekend en later gecombineerd op een zeer efficiënte manier. Voor uitvoerige informatie over het algoritme zie bijvoorbeeld Newland, D.E., 1993, "An Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis – Third Edition," Longman Scientific and Technical, New York (hoofdstuk 12).

De enige vereiste voor de toepassing van FFT is dat het aantal n een macht is van 2, d.w.z. selecteer uw gegevens zodanig dat ze de punten 2, 4, 8, 16, 32, 62, enz. bevatten.

Voorbeelden van FFT-toepassingen

FFT wordt meestal toegepast op gegevens die zijn gediscretiseerd uit een tijdafhankelijk signaal. Die gegevens kunnen uit bijvoorbeeld een computer of een gegevenslogger in de rekenmachine ingevoerd worden om verwerkt te worden. U kunt ook uw eigen gegevens genereren door een functie te programmeren en er een aantal willekeurige getallen aan toe te voegen.

Voorbeeld 1 – Definieer de functie f(x) = 2 sin (3x) + 5 cos(5x) + 0.5*RAND, waarbij RAND de uniforme willekeurige getallengenerator van de rekenmachine is. Genereer 128 gegevenspunten met de waarden van x in het interval (0,12.8). Sla deze waarden op in een reeks en voer een FFT uit op de reeks.

Eerst definiëren we de functie f(x) als een RPN-programma:

```
<< →x '2*SIN(3*x) + 5*COS(5*x)' EVAL RAND 5 * + →NUM >>
```

en slaan dit programma op in variabele f. Voer vervolgens het volgende programma in om 2^m gegevenswaarden te genereren tussen a en b. Het programma neemt de waarden van m, a en b:

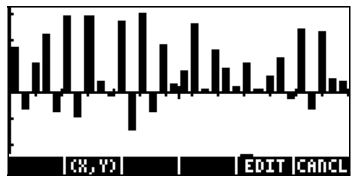
```
<< → m a b << '2^m' EVAL → n << '(b-a)/(n+1)' EVAL → Dx << 1 n FOR j
'a+(j-1)*Dx' EVAL f  NEXT  n →ARRY >>  >>  >>  >>
```

Sla dit programma op onder de naam GDATA (Genereer DATA). Voer dan het programma uit voor de waarden m = 5, a = 0, b = 100. Gebruik in de RPN-modus:

5 SPC 0 SPC 1 0 0 GDATA

De onderstaande afbeelding is een vakdiagram van de geproduceerde gegevens. Kopieer voor de grafiek eerst de zojuist aangemaakte verzameling en zet deze om in een kolomvector met: OBJ→ 1 + →ARRY (Functies OBJ→ en →ARRY staan in de commandocatalogus, ↱ CAT). Sla de verzameling op in variabele ΣDAT met de functie STOΣ (ook beschikbaar via ↱ CAT). Selecteer Bar in TYPE voor de grafieken, wijzig het beeldvenster in

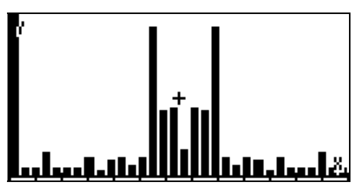
H-VIEW: 0 32, V-VIEW: -10 10 en BarWidth in 1. Druk op CANCL (ON) om terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine.



Om de FFT uit te voeren op de verzameling in stapelgeheugeniveau 1 gebruiken we de functie FFT via het menu MTH/FFT op verzameling ΣDAT: ΣDAT FFT. DE FFT geeft een verzameling van complexe getallen die verzamelingen van coëfficiënten X_k van de DFT zijn. De grootte van de coëfficiënten X_k staan voor een frequentiespectrum van de originele gegevens. Om de grootte van de coëfficiënten te verkrijgen, kunt u de verzameling omzetten in een lijst en daarna de functie ABS toepassen op de lijst. Dit doet u met: OBJ→ (EVAL) (◄) →LIST (↰) ABS

U kunt de lijst daarna weer omzetten in een kolomvector die als volgt in ΣDAT wordt opgeslagen: OBJ→ (1) (ENTER) (2) →LIST →ARRY STOΣ

Volg voor een diagram van het spectrum de eerder gegeven instructies op voor het maken van een staafdiagram. Het verticale bereik moet worden gewijzigd in –1 tot 80. Het spectrum van frequenties is het volgende:



Het spectrum toont twee grote onderdelen voor twee frequenties (deze zijn de sinusoïde onderdelen sin (3x) en cos(5x)) en een aantal kleinere onderdelen voor andere frequenties.

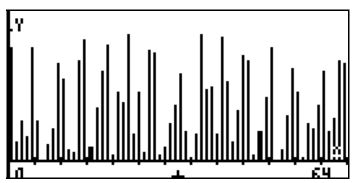
Voorbeeld 2 – Om met het gegeven spectrum het signaal te produceren veranderen we het programma GDATA zodanig dat het een absolute waarde bevat en dan wordt het als volgt:

<< → m a b << '2^m' EVAL → n << '(b-a)/(n+1)' EVAL → Dx << 1 n FOR j 'a+(j-1)*Dx' EVAL f ABS NEXT n →ARRY >> >> >> >>

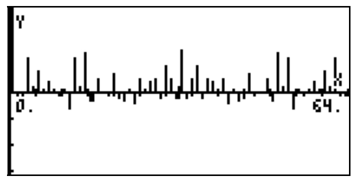
Sla deze versie van het programma op onder de naam GSPEC (Genereer SPECtrum). Voer het programma uit met m = 6, a = 0, b = 100. Gebruik in de RPN-modus:

6 SPC 0 SPC 1 0 0 GSPEC

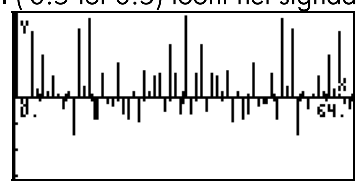
Druk op ENTER als u klaar bent voor een extra kopie van de spectrumverzameling. Zet deze rijvector om in een kolomvector en sla deze op in ΣDAT. Na de procedure voor het genereren van een staafdiagram ziet het gegenereerde spectrum er voor dit voorbeeld zoals hieronder uit. Het horizontale bereik is in dit geval 0 tot 64, terwijl het verticale –1 tot 10 is:



Gebruik de functie IFFT voor het reproduceren van het signaal waarvan het spectrum wordt getoond. Omdat we een kopie van het spectrum in het stapelgeheugen (een rijvector) hebben laten staan, hoeft u alleen maar de functie IFFT in het menu MTH/FFT of via de commandocatalogus, ↱ CAT te zoeken. Als alternatief kunt u de functienaam invoeren, dus ALPHA ALPHA I F F T ENTER. Het signaal wordt getoond als een verzameling (rijvector) met complexe getallen. We zijn alleen geïnteresseerd in het reële deel van de elementen. Om het reële deel van de complexe getallen eruit te halen kunt u de functie RE uit het menu CMPLX (zie hoofdstuk 4) gebruiken, dus voer bijvoorbeeld ALPHA ALPHA R E ENTER in. Het resultaat is een andere rijvector. Zet deze om in een kolom, sla op in ΣDAT en maak een staafdiagram voor het signaal. Het signaal uit dit voorbeeld wordt hieronder getoond met een horizontaal bereik van 0 tot 64 en een verticaal bereik van –1 tot 1:



Behalve een grote piek bij t = 0 bestaat het signaal vooral uit ruis. Een kleinere verticale schaal (-0.5 tot 0.5) toont het signaal als volgt:



Oplossing voor specifieke tweede-orde differentiaalvergelijkingen

In dit gedeelte behandelen we en lossen we specifieke soorten gewone differentiaalvergelijkingen op. De oplossingen van deze differentiaalvergelijkingen worden gedefinieerd met enkele klassieke functies zoals Bessel's functies, Hermite polynomen, enz. De voorbeelden staan in de RPN-modus.

De Cauchy- of Eulervergelijking

Een vergelijking in de vorm $x^2 \cdot (d^2y/dx^2) + a \cdot x \cdot (dy/dx) + b \cdot y = 0$, waarbij a en b reële constanten zijn noemen we de Cauchy- of Eulervergelijking. Een oplossing voor de Cauchyvergelijking kan worden gevonden als we aannemen dat $y(x) = x^n$.

Voer de vergelijking in als: 'x^2*d1d1y(x)+a*x*d1y(x)+b*y(x)=0' ENTER

Voer dan het volgende in en vervang de voorgestelde oplossing: 'y(x) = x^n' ENTER SUBST

Het resultaat is: 'x^2*(n*(x^(n-1-1)*(n-1)))+a*x*(n*x^(n-1))+b*x^n =0, vereenvoudigd: 'n*(n-1)*x^n+a*n*x^n+b*x^n = 0'. Gedeeld door x^n, geeft een algebraïsche hulpvergelijking: 'n*(n-1)+a*n+b = 0' of

$$n^2 + (a-1)\cdot n + b = 0 .$$

- Als de vergelijking twee verschillende wortels heeft, bijv. n_1 en n_2, dan is de algemene oplossing voor deze vergelijking $y(x) = K_1 \cdot x^{n_1} + K_2 \cdot x^{n_2}$.

- Als $b = (1-a)^2/4$ dan heeft de vergelijking een dubbele wortel $n_1 = n_2 = n = (1-a)/2$ en de oplossing blijkt $y(x) = (K_1 + K_2 \cdot \ln x)x^n$ te zijn.

Legendre's vergelijking

Een vergelijking in de vorm $(1-x^2)\cdot(d^2y/dx^2)-2\cdot x\cdot (dy/dx)+n\cdot (n+1) \cdot y = 0$, waarbij n een reëel getal is, noemen we Legendre's differentiaalvergelijking. Elke oplossing voor deze vergelijking noemen we een Legendre's functie. Wanneer n een niet-negatief heel getal is, noemen we de oplossingen Legendre's polynomen. Legendre's polynoom van de orde n wordt gegeven door

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \cdot \frac{(2n-2m)!}{2^n \cdot m! \cdot (n-m)! \cdot (n-2m)!} \cdot x^{n-2m}$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2} \cdot x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n \cdot 1! \cdot (n-1)!(n-2)!} \cdot x^{n-2} + \ldots - ..$$

waarbij M = n/2 of (n-1)/2, afhankelijk welke een heel getal is.

Legendre's polynomen zijn voorgeprogrammeerd in de rekenmachine en kunnen worden opgeroepen met de functie LEGENDRE met de orde van de polynoom n. De functie LEGENDRE kan verkregen worden uit de commandocatalogus (→ _CAT) of via het menu ARITHMETIC/POLYNOMIAL (zie hoofdstuk 5). De eerste zes Legendre-polynomen worden als volgt verkregen:

0 LEGENDRE, uitkomst: 1,	d.w.z. $P_0(x) = 1.0$.
1 LEGENDRE, uitkomst: 'X',	d.w.z. $P_1(x) = x$.
2 LEGENDRE, uitkomst: '(3*X^2-1)/2',	d.w.z. $P_2(x) = (3x^2-1)/2$.

3 LEGENDRE, uitkomst: '(5*X^3-3*X)/2', d.w.z. $P_3(x) = (5x^3-3x)/2$.
4 LEGENDRE, uitkomst: '(35*X^4-30*X^2+3)/8', d.w.z.
$P_4(x) = (35x^4-30x^2+3)/8$.
5 LEGENDRE, uitkomst: '(63*X^5-70*X^3+15*X)/8',
d.w.z. $P_5(x) = (63x^5-70x^3+15x)/8$.

De ODE $(1-x^2)\cdot(d^2y/dx^2)-2\cdot x\cdot (dy/dx)+[n\cdot (n+1)-m^2/(1-x^2)] \cdot y = 0$, heeft als oplossing de functie $y(x) = P_n^m(x)= (1-x^2)^{m/2}\cdot(d^mPn/dx^m)$. Deze functie is een <u>geassocieerde Legendre functie</u>.

Bessel's vergelijking

De gewone differentiaalvergelijking $x^2\cdot(d^2y/dx^2) + x\cdot (dy/dx)+ (x^2-\nu^2) \cdot y = 0$, waarbij de parameter ν een niet-negatief reëel getal is, noemen we een Bessel's differentiaalvergelijking. Oplossingen voor Bessel's vergelijkingen worden gegeven in de termen van <u>Besselfuncties van de eerste soort van orde ν:</u>

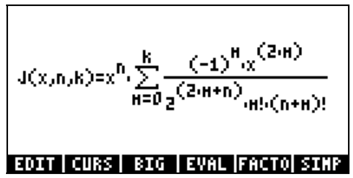
$$J_\nu(x) = x^\nu \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot x^{2m}}{2^{2m+\nu} \cdot m! \cdot \Gamma(\nu+m+1)},$$

waarbij ν geen heel getal is en de Gamma Γ(α)-functie die gedefinieerd wordt in hoofdstuk 3.

Als ν = n, een heel getal, worden de <u>Besselfuncties van de eerste soort voor n = heel getal</u> gedefinieerd door

$$J_n(x) = x^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot x^{2m}}{2^{2m+n} \cdot m! \cdot (n+m)!}.$$

Ongeacht of we n (geen heel getal) of n (heel getal) in de rekenmachine gebruiken, kunnen we de Besselfuncties van het eerste soort definiëren met de volgende eindige reeks:



Zo hebben we controle over de volgorde n van de functie en het aantal elementen in de reeks k. Wanneer u deze functie heeft ingevoerd, kunt u de functie DEFINE gebruiken om de functie J(x,n,k) te definiëren. Hiermee wordt de variabele J aangemaakt in de softmenutoetsen. Bereken J(0.1,3,5) om bijvoorbeeld $J_3(0.1)$ te evalueren met 5 termen in de reeks. Dus in de RPN-modus: [.] [1] [SPC] [3] [SPC] [5] J. De uitkomst is 2.08203157E-5.

Als u een uitdrukking wilt verkrijgen voor $J_0(x)$ met bijv. 5 termen in de reeks, gebruikt u J(x,0,5). De uitkomst is

'1-0.25*x^3+0.015625*x^4-4.3403777E-4*x^6+6.782168E-6*x^8-6.78168*x^10'.

Voor waarden van niet-hele getallen ν , wordt de oplossing voor de Besselvergelijking gegeven door

$$y(x) = K_1 \cdot J_\nu(x)+K_2 \cdot J_{-\nu}(x).$$

Voor waarden van hele getallen zijn de functies Jn(x) en J-n(x) lineair afhankelijk omdat

$$J_n(x) = (-1)^n \cdot J_{-n}(x),$$

daarom kunnen we deze niet gebruiken om een algemene functie voor de vergelijking te krijgen. In plaats daarvan introduceren we Besselfuncties van de tweede soort die worden gedefinieerd als

$$Y_\nu(x) = [J_\nu(x) \cos \nu\pi – J_{-\nu}(x)]/\sin \nu\pi,$$

voor niet-hele getallen ν en voor n heel getal met n > 0 door

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}\cdot J_n(x)\cdot(\ln\frac{x}{2}+\gamma) + \frac{x^n}{\pi}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}\cdot(h_m + h_{m+n})}{2^{2m+n}\cdot m!\cdot(m+n)!}\cdot x^{2m}$$
$$-\frac{x^{-n}}{\pi}\cdot\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{2^{2m-n}\cdot m!}\cdot x^{2m}$$

waarbij γ de Euler-constante is die wordt gedefinieerd door

$$\gamma = \lim_{r\to\infty}[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{r}-\ln r] \approx 0.57721566490\ldots,$$

en waar h_m de harmonische reeks weergeeft

$$h_m = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}$$

Voor het geval n = 0 wordt de Besselfunctie van de tweede soort gedefinieerd als

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\cdot\left[J_0(x)\cdot(\ln\frac{x}{2}+\gamma)+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}\cdot h_m}{2^{2m}\cdot(m!)^2}\cdot x^{2m}\right].$$

Met deze definities wordt een algemene oplossing voor Bessel's vergelijking voor alle waarden van ν gegeven door

$$y(x) = K_1\cdot J_\nu(x)+K_2\cdot Y_\nu(x).$$

In sommige gevallen is het noodzakelijk om complexe oplossingen te geven voor Bessel's vergelijkingen door de Besselfuncties van de derde soort van ν orde te definiëren als

$$H_n^{(1)}(x) = J_\nu(x)+i\cdot Y_\nu(x) \text{ en } H_n^{(2)}(x) = J_\nu(x)-i\cdot Y_\nu(x),$$

Deze functies noemen we ook de eerste en tweede Hankelfuncties van orde ν .

Bij sommige toepassingen kan het voorkomen dat u ook de zogenaamde gemodificeerde Besselfuncties van de eerste soort van orde ν moet gebruiken die gedefinieerd worden als $I_\nu(x)= i^{-\nu}\cdot J_\nu(i\cdot x)$, waarbij i het imaginaire eenheidsgetal is. Deze functies zijn oplossingen voor de differentiaalvergelijking $x^2\cdot(d^2y/dx^2) + x\cdot (dy/dx)- (x^2+\nu^2) \cdot y = 0$.

De gemodificeerde Besselfuncties van de tweede soort,

$$K_\nu(x) = (\pi/2)\cdot[I_{-\nu} (x)–I_\nu (x)]/\sin \nu\pi,$$

zijn ook oplossingen voor deze ODE.

U kunt functies die Bessel's functies weergeven in de rekenmachine uitvoeren op een manier die te vergelijken is met de manier die gebruikt is om de Bessel's functies van de eerste soort te definiëren, maar vergeet niet dat de oneindige reeksen in de rekenmachine dienen te worden omgezet in eindige reeksen.

Chebyshev of Tchebycheff polynomen

De functies $T_n(x) = \cos(n\cdot\cos^{-1} x)$ en $U_n(x) = \sin[(n+1) \cos^{-1} x]/(1-x^2)^{1/2}$, n = 0, 1, … noemen we respectievelijk Chebyshev of Tchebycheff polynomen van de eerste en tweede soort. De polynomen Tn(x) zijn oplossingen voor de differentiaalvergelijking $(1-x^2)\cdot(d^2y/dx^2) – x\cdot (dy/dx) + n^2\cdot y = 0$.

De functie TCHEBYCHEFF in de rekenmachine genereert de Chebyshev of Tchebycheff polynoom van de eerste soort van orde n, met een waarde van n > 0 gegeven. Als het hele getal n negatief is (n < 0), dan genereert de functie TCHEBYCHEFF een Tchebycheff polynoom van de tweede soort van orde n met als definitie

$$U_n(x) = \sin(n\cdot\arccos(x))/\sin(\arccos(x)).$$

De functie TCHEBYCHEFF is toegankelijk via de commandocatalogus (⮣ _CAT).

De eerste vier Chebyshev of Tchebycheff polynomen van de eerste en tweede soort worden als volgt verkregen:

0 TCHEBYCHEFF, uitkomst: 1,	d.w.z.	$T_0(x) = 1.0.$
-0 TCHEBYCHEFF, uitkomst: 1,	d.w.z.	$U_0(x) = 1.0.$
1 TCHEBYCHEFF, uitkomst: 'X',	d.w.z.	$T_1(x) = x.$
-1 TCHEBYCHEFF, uitkomst: 1,	d.w.z.	$U_1(x) =1.0.$
2 TCHEBYCHEFF, uitkomst: '2*X^2-1,	d.w.z.	$T_2(x) =2x^2-1.$
-2 TCHEBYCHEFF, uitkomst: '2*X',	d.w.z.	$U_2(x) =2x.$
3 TCHEBYCHEFF, uitkomst: '4*X^3-3*X',	d.w.z.	$T_3(x) = 4x^3-3x.$
-3 TCHEBYCHEFF, uitkomst: '4*X^2-1',	d.w.z.	$U_3(x) =24x^2-1.$

Laguerre-vergelijking

Laguerre-vergelijking is de lineaire ODE van de tweede orde in de vorm $x\cdot(d^2y/dx^2) +(1-x)\cdot (dy/dx) + n\cdot y = 0$. Laguerre polynomen, gedefinieerd als

$$L_0(x) = 1, \quad L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\cdot\frac{d^n(x^n \cdot e^{-x})}{dx^n}, n = 1,2,...$$

zijn oplossingen voor Laguerre-vergelijking. Laguerre-polynomen kunnen ook worden berekend met:

$$L_n(x) = \sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}\cdot\binom{n}{m}\cdot x^m.$$

$$= 1 - n\cdot x + \frac{n(n-1)}{4}\cdot x^2 - ... + ... + \frac{(-1)^n}{n!}\cdot x^n$$

De term

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C(n,m)$$

is de m-ste coëfficiënt van de binominale ontwikkeling $(x+y)^n$. Het geeft ook het aantal combinaties van n elementen genomen m per keer weer. Deze functie is in de rekenmachine beschikbaar als functie COMB in het menu MTH/PROB. (zie hoofdstuk 17).

U kunt de volgende functie definiëren om Laguerre-polynomen te berekenen:

$$L(x,n)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}\cdot COMB(n,m)\cdot x^m$$

Wanneer u klaar bent met het invoeren in de vergelijkingenschrijver, drukt u op de functie DEFINE om de functie L(x,n) aan te maken in variabele L.

Om de eerste vier Laguerre-polynomen te genereren, gebruikt u L(x,0), L(x,1), L(x,2), L(x,3). Het resultaat is:

$L_0(x) =$.
$L_1(x) = 1-x.$
$L_2(x) = 1-2x+ 0.5x^2$
$L_3(x) = 1-3x+1.5x^2-0.16666…x^3.$

Weber-vergelijking en Hermite polynomen

De Weber-vergelijking wordt gedefinieerd als $d^2y/dx^2+(n+1/2-x^2/4)y = 0$ voor n = 0, 1, 2, … Een speciale oplossing voor deze vergelijking wordt gegeven door de functie

$$y(x) = \exp(-x^2/4)H^*(x/\sqrt{2}),$$

waarbij de functie $H^*(x)$ de Hermite polynoom is:

$$H_0^* = 1, \quad H_n^*(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}), \quad n = 1,2,..$$

In de rekenmachine is de functie HERMITE beschikbaar via het menu ARITHMETIC/POLYNOMIAL. De functie HERMITE neemt als argument een heel getal n en geeft de Hermite polynoom van de n-de orde. De eerste vier Hermite polynomen bijvoorbeeld worden verkregen door:

0 HERMITE, uitkomst: 1, d.w.z. $H_0^* = 1$.
1 HERMITE, uitkomst: '2*X', d.w.z. $H_1^* = 2x$.
2 HERMITE, uitkomst: '4*X^2-2', d.w.z. $H_2^* = 4x^2-2$.
3 HERMITE, uitkomst: '8*X^3-12*X', d.w.z. $H_3^* = 8x^3-12x$.

Numerieke en grafische oplossingen voor ODE's

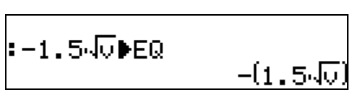
Differentiaalvergelijkingen die niet analytisch opgelost kunnen worden numeriek of grafisch opgelost worden, zoals hieronder worden weergegeven.

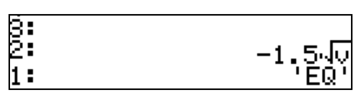
Numerieke oplossing van ODE van de eerste orde

Met de numerieke solver (NUM.SLV) kunt u naar een invoerscherm gaan waarmee u lineaire gewone differentiaalvergelijkingen van de eersteorde laat oplossen. Het gebruik van deze functie wordt behandeld aan de hand van het volgende voorbeeld. De in de oplossing gebruikte methode is een Runge-Kutta-algoritme van de vierde orde.

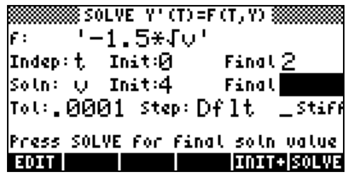
Voorbeeld 1 – Stel dat we de volgende differentiaalvergelijking willen oplossen $dv/dt = -1.5\ v^{1/2}$ met v = 4 bij t = 0. We moeten v vinden voor t = 2.

Maak eerste de uitdrukking aan door de afgeleide te definiëren en sla het op in de variabele EQ. De linkerafbeelding laat het ALG-moduscommando zien en de rechterafbeelding laat het RPN-stapelgeheugen zien alvorens op STO▶ te drukken.





Ga vervolgens naar de NUMERIEKE SOLVER-omgeving en selecteer de differentiaalvergelijkingsolver NUM.SLV ▼ OK. Bij het invoeren van de volgende parameters:



Om op te lossen druk op: SOLVE (wacht) EDIT. De uitkomst is 0.2499 ≈ 0.25. Druk op OK.

De oplossing wordt weergegeven als een waardetabel

Stel dat we een waardetabel willen produceren van v, voor t = 0.00, 0.25, …, 2.00, dan gaan we als volgt te werk:

Maak eerst een tabel aan om de uitkomsten in op te schrijven. Schrijf in uw tabel de stapsgewijze uitkomsten:

t	v
0.00	0.00
0.25	
…	…
2.00	

Vervolgens verandert u in de SOLVE-omgeving de uiteindelijke waarde van de onafhankelijke variabele in 0.25. Gebruik:

▲ .25 OK ► ► SOLVE (wacht) EDIT

(Lost v op bij t = 0.25, v = 3.285.)

OK INIT+ ▲ . 5 OK ► ► SOLVE (vasthouden) EDIT

(Verander de beginwaarde van t in 0.25 en de eindwaarde van t in 0.5, los deze opnieuw op v(0.5) = 2.640)

OK INIT+ ▲ .75 OK ► ► SOLVE (vasthouden) EDIT

(Verander de beginwaarde van t in 0.5 en de eindwaarde van t in 0.75, los deze opnieuw op v(0.75) = 2.066)

OK INIT+ ▲ 1 OK ► ► SOLVE (vasthouden) EDIT

(Verander de beginwaarde van t in 0.75 en de eindwaarde van t in 1, los deze opnieuw op v(1) = 1.562)
Herhalen voor t = 1,25, 1,50, 1,75, 2,00. Druk op OK nadat u het laatste resultaat in EDIT heeft bekeken. Druk op ON of NXT OK om terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine. De verschillende oplossingen worden in het stapelgeheugen weergegeven, met het laatste resultaat op niveau 1.

De eindresultaten zien er als volgt uit (afgerond op drie decimalen):

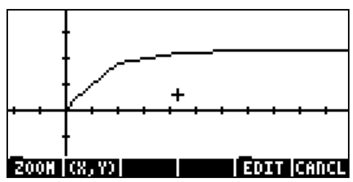
t	v
0.00	4.000
0.25	3.285
0.50	2.640
0.75	2.066
1.00	1.562
1.25	1.129
1.50	0.766
1.75	0.473
2.00	0.250

Grafische oplossing van ODE van de eerste orde

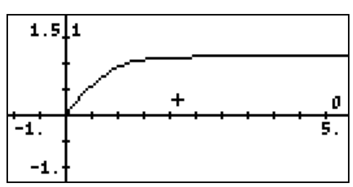
Wanneer we geen 'closed-form'-oplossing kunnen krijgen voor de integraal, kunnen we de integraal altijd plotten door `Diff Eq` als volgt te selecteren in het veld `TYPE` van de PLOT-omgeving: stel dat we de positie x(t) willen plotten voor een snelheidsfunctie v(t) = exp($-t^2$) met x = 0 bij t = 0. We weten dat er geen 'closed-form'-uitdrukking voor de integraal is, maar we weten dat de definitie van v(t) is dx/dt = exp($-t^2$).

De rekenmachine biedt de mogelijkheid de oplossing voor differentiaalvergelijkingen in de vorm Y'(T) = F(T,Y) te plotten. Voor ons geval hebben we Y = x en T = t, en dus F(T,Y) = f(t, x) = exp($-t^2$). Laten we de oplossing x(t), voor t = 0 tot 5 plotten met de volgende toetsencombinaties:

- ⬅ 2D/3D (tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus) om naar de PLOT-omgeving te gaan
- Markeer het veld voor TYPE, met de pijltoetsen ▲▼. Druk dan op CHOOS en markeer `Diff Eq` met de pijltoetsen ▲▼. Druk op OK.
- Voer de functie f(t,x) in op de juiste locatie in het invoerscherm.
- Zorg ervoor dat de volgende parameters ingesteld zijn op: `H-VAR: 0`, `V-VAR: 1`
- Verander de onafhankelijke variabele in t .
- Accepteer de veranderingen naar PLOT SETUP: NXT OK
- ⬅ WIN (tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus). Om naar de PLOT WINDOW-omgeving te gaan
- Verander in het horizontale en verticale opmaakscherm de volgende instellingen: `H-VIEW: -1    5;  V-VIEW: -1        1.5`
- Gebruik ook de volgende waarden voor de overgebleven parameters: Init: 0, Final: 5, Step: Default, Tol: 0,0001, Init-Soln: 0
- Zo maakt u de grafiek: ERASE DRAW



Terwijl de grafiek wordt geplot, zien we dat de grafiek niet echt mooi loopt. Dat komt omdat de plotter een te grote tijdstap heeft genomen. Om de grafiek te verfijnen en mooier te laten verlopen, gebruiken we een stap van 0.1. Druk op CANCL en verander de *Step*: waarde in 0.1, gebruik dan nogmaals ERASE DRAW om de grafiek te herhalen. Het duurt nu langer voordat het diagram klaar is, maar de vorm is een stuk beter geworden. Probeer het volgende: EDIT NXT LABEL MENU om de labels van de assen en het bereik te zien.



U ziet dat de labels voor de assen worden weergegeven als 0 (horizontaal) en 1 (verticaal). Dit zijn de definities voor de assen die in het venster PLOT SETUP (⬅ 2D/3D) worden gegeven, d.w.z. H-VAR (t): 0 en V-VAR(x): 1.

NXT NXT PICT Activeert het menu en keert terug naar de PICT-omgeving.
(X,Y) Bepaalt de coördinaten van een punt in de grafiek .

Gebruik de pijltoetsen ◀ ▶ om de cursor in het diagramgebied te bewegen. Onder in het scherm ziet u de coördinaten van de cursor als (X,Y), d.w.z. dat de rekenmachine respectievelijk X en Y gebruikt als de standaardnamen voor de horizontale en verticale assen. Druk op NXT CANCL om het menu te activeren en terug te keren naar de PLOT WINDOW-omgeving. Druk tenslotte op ON om naar het stapelgeheugen terug te keren.

Numerieke oplossing van ODE van de tweede orde

Integratie van ODE's van de tweede orde kan wordt bereikt door de oplossing als een vector te definiëren. Stel dat een massa-veer-systeem onderhevig is aan een dempende kracht die in proportie staat tot de snelheid. De resulterende differentiaalvergelijking is:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -18.75 \cdot x - 1.962 \cdot \frac{dx}{dt}$$

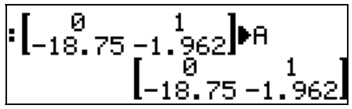
of x" = - 18.75 x - 1.962 x',

afhankelijk van de beginvoorwaarden v = x' = 6, x = 0, at t = 0. We willen x x' vinden bij t = 2.

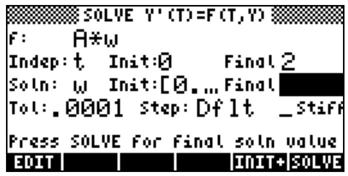
Herschrijf de ODE als: **w'** = **Aw**, waarbij w = [x x']^T en **A** de hierboven getoonde 2 x 2 matrix is.

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -18.75 & -1.962 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}$$

De beginvoorwaarden worden nu geschreven als w = [0 6]^T voor t = 0. (Opmerking : Het symbool [ ]^T betekent de getransponeerde van de vector of matrix). Om dit probleem op te lossen, moet u eerst de matrix A aanmaken en op te slaan.



Activeer dan de numerieke differentiaalvergelijkingsolver met: → NUM.SLV ▼ OK. Om de differentiaalvergelijking met starttijd t = 0 en eindtijd t = 2 op te lossen, moet het invoerscherm voor de differentiaalvergelijkingsolver er als volgt uitzien (u ziet dat de Init-waarde voor de Soln een vector [0, 6] is):



Druk op SOLVE (vasthouden) EDIT om w(t=2) op te lossen. De oplossing luidt [.16716… -.6271…], d.w.z. x(2) = 0.16716 en x'(2) = v(2) = -0.6271. Druk op CANCL om terug te keren naar de SOLVE-omgeving.

De oplossing wordt weergegeven als een waardetabel

In het vorige voorbeeld waren we enkel geïnteresseerd in het vinden van de waarden van de positie en snelheid op een gegeven tijd t. Als we een tabel zouden willen produceren van waarden van x en x', voor t = 0.00, 0.25, …, 2.00, gaan we als volgt te werk. Maak eerst een tabel aan om de uitkomsten in op te schrijven:

t	x	x'
0.00	0.00	6.00
0.25		
…	…	…
2.00		

Vervolgens verandert u in de SOLVE-omgeving de uiteindelijke waarde van de onafhankelijke variabele in 0.25. Gebruik:

▲ .25 OK ► ► SOLVE (vasthouden) EDIT

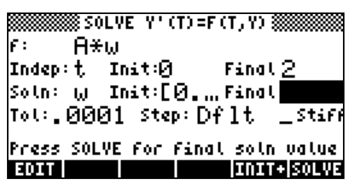
(Lost w op bij t = 0.25, w = [0.968 1.368].)

OK INIT+ ▲ . 5 OK ► ► SOLVE (vasthouden) EDIT
(Verander de beginwaarde van t in 0.25 en de eindwaarde van t in 0.5, los deze opnieuw op w(0.5) = [0.748 -2.616])
OK INIT+ ▲ .75 OK ► ► SOLVE (vasthouden) EDIT
(Verander de beginwaarde van t in 0.5 en de eindwaarde van t in 0.75, los deze opnieuw op w(0.75) = [0.0147 -2.859])
OK INIT+ ▲ 1 OK ► ► SOLVE (vasthouden) EDIT
(Verander de beginwaarde van t in 0.75 en de eindwaarde van t in 1, los deze opnieuw op w(1) = [-0.469 -0.607])
Herhaal voor t = 1,25, 1,50, 1,75, 2,00. Druk op OK nadat u het laatste resultaat in EDIT heeft bekeken. Druk op ON of NXT OK om terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine. De verschillende oplossingen worden in het stapelgeheugen weergegeven, met het laatste resultaat op niveau 1.
De eindresultaten ziet u hieronder:

t	x	x'		t	x	x'
0.00	0.000	6.000		1.25	-0.354	1.281
0.25	0.968	1.368		1.50	0.141	1.362
0.50	0.748	-2.616		1.75	0.227	0.268
0.75	-0.015	-2.859		2.00	0.167	-0.627
1.00	-0.469	-0.607				

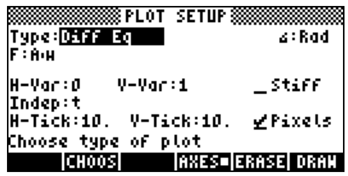
Grafische oplossing van een ODE van de tweede orde

Activeer eerst de numerieke differentiaalvergelijkingsolver ↱ NUM.SLV ▼ OK. Het SOLVE-scherm dient er als volgt uit te zien;



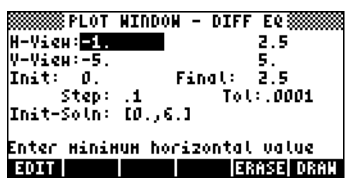
Merk op dat de beginvoorwaarde voor de oplossing (Soln: w Init:[0., …) de vector [0, 6] bevat. Druk op NXT OK.

Druk vervolgens op 2D/3D (tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus) om naar de PLOT-omgeving te gaan. Markeer het veld voor TYPE, met de pijltoetsen. Druk dan op CHOOS en markeer `Diff Eq` met de pijltoetsen. Druk op OK. Pas de rest van het beeldscherm PLOT SETUP zodanig aan dat het er als volgt uit ziet:

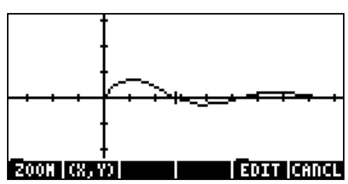


Accepteer de veranderingen voor de PLOT SETUP door op NXT OK te drukken. U ziet dat de optie V-Var is ingesteld op 1, hetgeen aangeeft dat het eerste element in de vectoroplossing, namelijk x', tegen de onafhankelijke variabele t moet worden geplot.

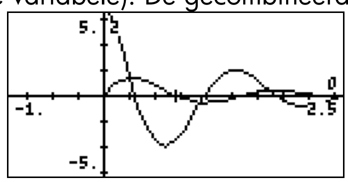
Druk op WIN (tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus) om naar de PLOT WINDOW-omgeving te gaan. Verander het invoerscherm zodanig dat het er als volgt uitziet:



Zo maakt u de grafiek x' vs. t: ERASE DRAW. De grafiek van x' vs. t ziet er als volgt uit:



Om de tweede curve te plotten, moeten we nogmaals het invoerscherm van de PLOT SETUP te gebruiken. Voer het volgende uit om naar dit scherm te gaan vanuit de grafiek hierboven: CANCL NXT OK ← 2D/3D (tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus) . Verander de waarde van het V-Var-veld in 2 en druk op DRAW (druk niet op ERASE, want dan verliest u de hierboven geproduceerde grafiek). Gebruik: EXIT NXT LABEL MENU om de labels van de assen en het bereik te zien. U ziet dat het x-aslabel het getal 0 (de onafhankelijke variabele) is en het y-aslabel het getal 2 (de tweede variabele, d.w.z. de laatst geplotte variabele). De gecombineerde grafiek ziet er zo uit:



Druk op NXT NXT PICT CANCL ON om naar het normale beeldscherm van de rekenmachine terug te keren.

Numerieke oplossing van stijve ODE van de eerste orde

Bekijk de ODE: dy/dt = -100y+100t+101 met beginvoorwaarde y(0) = 1.

Exacte oplossing

Deze vergelijking kan worden geschreven als dy/dt + 100 y = 100 t + 101, en als volgt worden opgelost met een integratiefactor IF(t) = exp(100t):

‘(100*t+101)*EXP(100*t)’ ENTER ‘t’ ENTER RISCH

De uitkomst is ‘(t+1)*EXP(100*t)’.

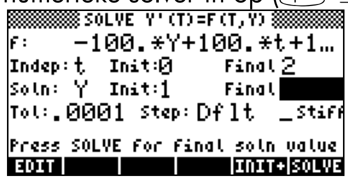
Vervolgens kunnen we een integratieconstante toevoegen met ‘C’ ENTER +

Dan delen we de uitkomst door FI(x) met: ‘EXP(100*t)’ ENTER ÷ .

De uitkomst is: ‘((t+1)*EXP(100*t)+C)/EXP(100*t)’, d.w.z. $y(t) = 1+ t +C\cdot e^{100t}$. Het gebruik van de beginvoorwaarde y(0) = 1 leidt tot $1 = 1 + 0 + C\cdot e^0$ of C = 0, met de speciale oplossing y(t) = 1+t.

Numerieke oplossing

Als we een directe numerieke oplossing voor de originele vergelijking dy/dt = -100y+100t+101 proberen met de eigen numerieke solver van de rekenmachine zien we dat de solver een buitensporige hoeveelheid tijd lijkt te gebruiken om de vergelijking op te lossen. Om dit te controleren, stelt u uw differentiaalvergelijking numerieke solver in op (→ NUM.SLV ▼ OK):

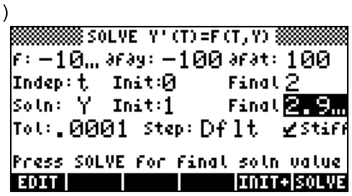


Hier proberen we de waarde te krijgen voor y(2) gegeven y(0) = 1. Met het `Soln: Final`-veld gemarkeerd, drukt u op SOLVE. U ziet dat er na 2 minuten geen oplossing is. Druk op ON om de berekening te onderbreken.

Dit is een voorbeeld van een stijve gewone differentiaalvergelijking. Een stijve ODE heeft een algemene oplossing die componenten bevat die variëren op heel verschillende snelheden onder dezelfde toename in de onafhankelijke variabele. In dit speciale geval bevat de algemene oplossing y(t) = 1+ t +C·e^{100t}, de componenten 't' en 'C·e^{100t}', die variëren op heel verschillende snelheden behalve voor de gevallen C=0 of C≈0 (bijv. voor C = 1, t =0.1, C·e^{100t} =22026).

De numerieke ODE solver van de rekenmachine kan stijve ODE's oplossen met de optie `_Stiff` in het beeldscherm `SOLVE Y'(T) = F(T,Y)`. Met deze optie geselecteerd, moet u de waarden van ∂f/∂y en ∂f/∂t geven. In dit geval is dat ∂f/∂y =-100 en ∂f/∂t = 100.

Voer deze waarden in in de corresponderende velden van het beeldscherm `SOLVE Y'(T) = F(T,Y)`



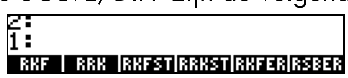
Beweeghierna met de cursor naar het veld `Final` en drukt op SOLVE. Druk op EDIT om de oplossing te bekijken: 2.9999999999, d.w.z. 3.0

Opmerking: de optie `Stiff` is ook beschikbaar voor grafische oplossingen van differentiaalvergelijkingen.

Numerieke oplossing van ODE's met het menu SOLVE/DIFF

Het softmenu SOLVE wordt geactiveerd met 74 MENU in de RPN-modus. Dit menu wordt behandeld in hoofdstuk 6. Een van de submenu's, DIFF, bevat functies voor de numerieke oplossing van gewone differentiaalvergelijkingen die bij het programmeren worden gebruikt. Deze functies worden nu beschreven in de RPN-modus en systeemvlag 117 is ingesteld op SOFT-menu's.

De functies van het menu SOLVE/DIFF zijn de volgende:



De functie RKF

Deze functie wordt gebruikt om de oplossing van een beginwaardeprobleem voor een differentiaalvergelijking van de eerste orde te berekenen met het Runge-Kutta-Fehlbert 4^e -5^e orde oplossingsschema. Stel dat de op te lossen differentiaalvergelijking wordt gegeven door dy/dx = f(x,y), met y = 0 bij x = 0 en dat u een convergentiecriterium e toestaat voor de oplossing. U kunt ook een toename specificeren voor de onafhankelijke variabele Δx die de functie moet gebruiken. Om deze functie uit te voeren, bereidt u uw stapelgeheugen als volgt voor:

3: {'x', 'y', 'f(x,y)'}
2: { ε Δx }
1: x_{final}

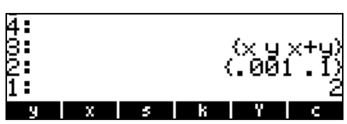
De waarde in stapelgeheugenniveau 1 is de waarde van de onafhankelijke variabele waar u uw oplossing wilt vinden, d.w.z. u wilt $y_{final} = f_s(x_{final})$ vinden, waarbij $f_s(x)$ de oplossing weergeeft voor de differentiaalvergelijking. Het tweede stapelgeheugenniveau kan alleen de waarde van ε bevatten en de stap Δx zal worden genomen als een kleine standaardwaarde. Na het uitvoeren van de functie RKF geeft het stapelgeheugen de regels:

2: {'x', 'y', 'f(x,y)'}
1: ε

De waarde van de oplossing , y_{final} is beschikbaar in variabele y. Deze functie is geschikt voor programmeren omdat het de specificaties van de differentiaalvergelijking en de tolerantie in het stapelgeheugen klaar staan voor een nieuwe oplossing. U ziet dat de oplossing de beginvoorwaarden x = 0 bij y = 0 gebruikt. Als uw eigenlijke beginoplossingen $x = x_{init}$ bij $y = y_{init}$ zijn, kunt u deze waarden altijd toevoegen aan de oplossing van RKF met de volgende relatie in uw hoofd:

RKF oplossing		Eigenlijke oplossing	
x	y	x	y
0	0	x_{init}	y_{init}
x_{final}	y_{final}	$x_{init} + x_{final}$	$y_{init} + y_{final}$

De volgende schermen tonen het RPN-stapelgeheugen voor en na het toepassen van de functie RKF voor de differentiaalvergelijking dy/dx = xy, ε = 0.001, Δx = 0.1.



Na het toepassen van de functie RKF bevat de variabele y de waarde 4.3880...

De functie RRK

Deze functie lijkt op de functie RKF, behalve dat RRK (Rosenbrock en Runge-Kutta methodes) als de invoerlijst in stapelgeheugenniveau 3 niet alleen de namen van de onafhankelijke en afhankelijke variabelen en de functie die de differentiaalvergelijking vereist, maar ook de uitdrukkingen voor de eerste en tweede afgeleiden van de uitdrukking. Dus ziet de stapelgeheugeninvoer er voor deze functie als volgt uit:

3: {'x', 'y', 'f(x,y)' '∂f/∂x' '∂f/vy' }
2: { ε Δx }
1: x_{final}

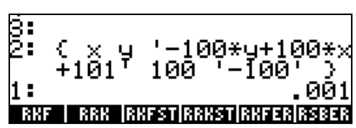
De waarde in stapelgeheugenniveau 1 is de waarde van de onafhankelijke variabele waar u uw oplossing wilt vinden, d.w.z. u wilt $y_{final} = f_s(x_{final})$ vinden, waarbij $f_s(x)$ de oplossing weergeeft voor de differentiaalvergelijking. Het tweede stapelgeheugenniveau kan alleen de waarde van ε bevatten en de stap Δx zal worden genomen als een kleine standaardwaarde. Na het uitvoeren van de functie RKF geeft het stapelgeheugen de regels:

2: {'x', 'y', 'f(x,y)' '∂f/∂x' '∂f/vy' }
1: { ε Δx }

De waarde van de oplossing , y_{final} is beschikbaar in variabele y.

Deze functie kan worden gebruikt om zogenaamde "stijve" differentiaalvergelijkingen op te lossen.

De volgende schermweergaven tonen het RPN-stapelgeheugen voor en na toepassing van de RRK-functie.



De waarde die in variabele y is opgeslagen, is 3.00000000004.

De functie RKFSTEP

Deze functie gebruikt een invoerlijst die lijkt op die van de functie RKF, net als de tolerantie voor de oplossing en een mogelijke stap Δx en geeft dezelfde invoerlijst, gevolgd door de tolerantie en een schatting van de volgende stap in de onafhankelijke variabele. De functie geeft de invoerlijst, de tolerantie en de volgende stap in de onafhankelijke variabele die voldoet aan die tolerantie. Dus ziet de stapelgeheugeninvoer er als volgt uit:

3: {'x', 'y', 'f(x,y)'}
2: ε
1: Δx

Na het uitvoeren van deze functie geeft het stapelgeheugen de regels:

3: {'x', 'y', 'f(x,y)'}
2: ε
1: $(\Delta x)_{next}$

Dus wordt deze functie gebruikt om de juiste grootte van een tijdstap te bepalen die voldoet aan de vereiste tolerantie.

Naar de volgend zeef stoot uiterlijk vertoon naar de RPN stapelgeheugen vooraleer en over verzoekschrift van verrichting RKFSTEP :

Dit hier resultaten omschrijven welk $(\Delta x)_{next}$ volgende = 0.34049…

Functie RRKSTEP

Deze functie gebruikt een invoerlijst gelijkaardig aan die van de functie RRK, en de tolerantie voor de oplossing, een mogelijke stap ?x en een getal (LAST) waarmee de laatste methode die in de oplossing werd gebruikt wordt gespecificeerd (1, als RKF werd gebruikt, of 2, als RRK werd gebruikt). De functie RRKSTEP geeft dezelfde invoerlijst, gevolgd door de tolerantie, een schatting van de volgende stap in de onafhankelijke variabele en de huidige methode (CURRENT) die wordt gebruik om bij de volgende stap te komen. Het invoerstapelgeheugen ziet er nu als volgt uit:

4: {'x', 'y', 'f(x,y)'}

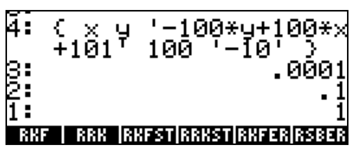
3: ε
2: Δx
1: LAST

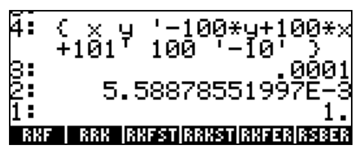
Na deze functie laat het stapelgeheugen de volgende regels zien:

4: {'x', 'y', 'f(x,y)'}
3: ε
2: $(\Delta x)_{next}$
1: CURRENT

Deze functie werd dus gebruikt om de juiste grootte van een tijdstap ($(\Delta x)_{next}$) te bepalen om te voldoen aan de gewenste tolerantie, en de methode die werd gebruikt om bij dat resultaat te komen (CURRENT).

De volgende schermweergaven tonen het RPN-stapelgeheugen voor en na toepassing van de RRKSTEP-functie:





Deze resultaten geven aan dat $(\Delta x)_{next}$ = 0.00558… en de RKF-methode (CURRENT = 1) moeten worden gebruikt.

De functie RKFERR

Deze functie geeft de absolute foutschatting voor een gegeven stap bij het oplossen van een probleem zoals beschreven voor de functie RKF. De stapelgeheugeninvoer ziet er als volgt uit:

2: {'x', 'y', 'f(x,y)'}
1: Δx

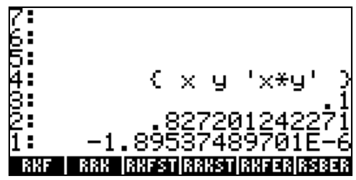
Na het uitvoeren van deze functie geeft het stapelgeheugen de regels:

4: {'x', 'y', 'f(x,y)'}
3: ε

2: ∆y
1: error

Dus wordt deze functie gebruikt om de toename ∆y in de oplossing en de absolute fout (error) te bepalen.

De volgende schermweergaven tonen het RPN-stapelgeheugen voor en na toepassing van de RKFERR-functie.



Dit resultaat toont dat ∆y = 0.827… en fout = $-1.89\ldots\times10^{-6}$.

De functie RSBERR

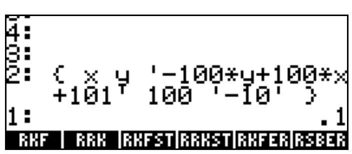
Deze functie is gelijk aan RKERR, maar met de invoerelementen voor de functie RRK. Dus ziet de stapelgeheugeninvoer er voor deze functie als volgt uit:

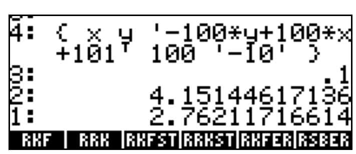
2: {'x', 'y', 'f(x,y)' '∂f/∂x' '∂f/vy' }
g20
∆x

Na het uitvoeren van de functie geeft het stapelgeheugen de regels:

4: {'x', 'y', 'f(x,y)' '∂f/∂x' '∂f/vy' }:
3: ε
2: ∆y
1: error

De volgende schermweergaven tonen het RPN-stapelgeheugen voor en na toepassing van de RSBERR-functie.





Dit resultaat geeft aan dat Δy = 4.1514… en fout = 2.762..., voor Dx = 0.1. Controleer of, als Dx wordt verminderd tot 0,01, Δy = -0.00307… en fout = 0.000547.

Opmerking: wanneer u de commando's in het menu DIFF uitvoert, krijgt u de waarden van x en y en zullen deze als variabelen in uw rekenmachine worden opgeslagen. De resultaten die worden gegeven door de functies in deze paragraaf zijn afhankelijk van de huidige waarden van x en y. Sommige resultaten die hierboven worden weergegeven kunnen verschillen van de resultaten die uw rekenmachine geeft.

Hoofdstuk 17

Waarschijnlijkheidstoepassingen

In dit hoofdstuk laten we voorbeelden van toepassingen zien van de functies van de rekenmachine voor kansverdelingen.

Het submenu MTH/PROBABILITY..– deel 1

Het submenu MTH/PROBABILITY.. is toegankelijk via de toetsencombinatie MTH . Met systeemvlag 117 ingesteld op de CHOOSE boxes (keuzevensters) wordt de volgende lijst met opties MTH gegeven (zie de onderstaande linkerafbeelding). We hebben de optie PROBABILITY.. (optie 7) geselecteerd om de volgende functies te laten zien (zie de onderstaande rechterafbeelding):

In deze paragraaf behandelen we de functies COMB, PERM, ! (faculteiten), RAND en RDZ.

Faculteiten, combinaties en permutaties

De faculteit van een heel getal n wordt gedefinieerd als: n! = n· (n-1) · (n-2)…3·2·1. Per definitie geldt 0! = 1. Faculteiten worden gebruikt in de berekening van het aantal permutaties en combinaties van objecten. Het aantal permutaties van r objecten van een verzameling van n onderscheiden objecten is bijvoorbeeld

$$ {}_nP_r = n(n-1)(n-1)...(n-r+1) = n!/(n-r)! $$

Daarnaast geldt dat het aantal combinaties van n objecten dat r heeft aangenomen het volgende is

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Om de notatie te vereenvoudigen gebruiken we P(n,r) voor permutaties en C(n,r) voor combinaties. We kunnen combinaties, permutaties en faculteiten berekenen met de functies COMB, PERM en ! van het submenu MTH/PROBABILITY... De werking van deze functies wordt hieronder beschreven:

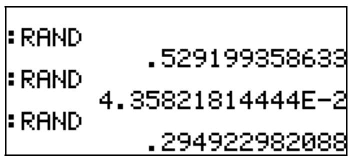
- COMB(n,r): Combinaties van n items die r hebben aangenomen op een bepaald moment
- PERM(n,r): Permutaties van n items die r hebben aangenomen op een bepaald moment
- n!: Faculteit van een positief heel getal. Voor niet-hele getallen geeft x! Γ(x+1) waarbij Γ(x) de Gamma-functie is (zie hoofdstuk 3). Het faculteitsymbool (!) kan tevens worden ingevoerd met de volgende toetsencombinatie ALPHA ↱ 2.

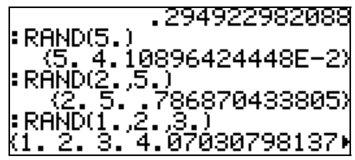
Een voorbeeld van toepassingen van deze functies ziet u hieronder:

```
:COMB(10.,6.)
                210.
:PERM(10.,6.)
             151200.
:12.!
          479001600.
```

Willekeurige getallen

De rekenmachine heeft een generator voor willekeurige getallen die een uniform verspreid willekeurig getal tussen 0 en 1 geeft. De generator kan ook reeksen willekeurige getallen produceren. Na een aantal malen (in feite een groot aantal malen) heeft de reeks de neiging zichzelf te herhalen. Daarom is het beter om naar de generator voor willekeurige getallen te verwijzen als een generator voor pseudo-willekeurige getallen. U kunt een willekeurig getal met uw rekenmachine genereren met de functie RAND van het submenu MTH/PROBABILITY. Het volgende scherm toont een aantal willekeurige getallen die zijn aangemaakt met behulp van de functie RAND. De getallen in de linkerafbeelding worden geproduceerd met de oproepfunctie RAND zonder een argument. Als u een argumentenlijst in de functie RAND plaatst, krijgt u een lijst met getallen waaraan een extra willekeurig getal is gekoppeld, zoals u in de rechterafbeelding kunt zien.





Generatoren voor willekeurige getallen werken meestal door een waarde te nemen, het zogenaamde "zaadgetal" van de generator, en op dat "zaadgetal" een wiskundige algoritme uit te voeren, zodat er een nieuw (pseudo-)willekeurig getal ontstaat. Als u een reeks getallen wilt genereren en deze reeks later wilt kunnen herhalen, dan kunt u het zaadgetal van de generatrice wijzigen met de functie RDZ(n), waarbij n het "zaadgetal" is, voordat de reeks wordt gegenereerd. Generatoren voor willekeurige getallen werken door met een "zaadgetal" te beginnen die wordt omgezet in het eerste willekeurige getal van de reeks. Het huidige getal fungeert dan als het "zaadgetal" voor het volgende getal en zo verder. Als u de reeks opnieuw hetzelfde "zaadgetal" geeft, kunt u dezelfde reeks meerdere malen reproduceren. robeer bijvoorbeeld het volgende eens:

RDZ(0.25) `ENTER`	Gebruikt 0.25 als het "zaadgetal."
RAND() `ENTER`	Eerste willekeurige getal = 0.75285…
RAND() `ENTER`	Tweede willekeurige getal = 0.51109…
RAND() `ENTER`	Derde willekeurige getal = 0.085429…

Start de reeks opnieuw:

RDZ(0.25) `ENTER`	Gebruikt 0.25 als het "zaadgetal."
RAND() `ENTER`	Eerste willekeurige getal = 0.75285…
RAND() `ENTER`	Tweede willekeurige getal = 0.51109…
RAND() `ENTER`	Derde willekeurige getal = 0.085429…

Gebruik de functie SEQ om een reeks willekeurig getallen te genereren. Zo maakt u bijvoorbeeld een lijst met 5 willekeurig getallen in de ALG-modus: `SEQ(RAND(),j,1,5,1)`. Gebruik in de RPN-modus de volgende toetsencombinatie:

« → n « 1 n FOR j RND NEXT n →LIST » »

Zaak op te wisselend RLST (Random LiST), en toepassing VAR 5 RLST voor voedingsmiddelen te tochtband van 5 willekeurige getallen.

De functie RNDM(n,m) kan worden gebruikt om een matrix van n rijen en m kolommen te genereren waarvan de elementen willekeurige hele getallen tussen -1 en 1 zijn (zie hoofdstuk 10).

Discrete kansverdelingen

Een willekeurige variabele is discreet als hij alleen een eindig aantal waarden aan kan nemen. Het aantal regenachtige dagen op een bepaalde locatie kan bijvoorbeeld worden beschouwd als een discrete willekeurige variabele omdat we ze alleen als gehele getallen rekenen. Als X staat voor een discrete willekeurige variabele, dan wordt de waarschijnlijkheidsmassafunctie (pmf) weergegeven door f(x) = P[X=x], dus de waarschijnlijkheid dat de willekeurige variabele X de waarde x aanneemt.

De waarschijnlijkheidsmassafunctie moet voldoen aan de voorwaarden dat

f(x) >0, voor alle x,

en

$$\sum_{all\ x} f(x) = 1.0$$

Een cumulatieve verdelingsfunctie (cdf) wordt gedefinieerd als

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{k \leq x} f(k)$$

We zullen nu een aantal functies definiëren voor het berekenen van discrete waarschijnlijkheidsverdelingen. We raden aan een subdirectory aan te maken, bijvoorbeeld HOME\STATS\DFUN (Discrete FUNcties) waarbij we de willekeurige steekproef en de cumulatieve verdelingsfuncties voor de binomische en Poisson-verdelingen definiëren.

Binomische verdeling

De waarschijnlijkheidsmassafunctie van de binomische verdeling wordt gegeven als

$$f(n,p,x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}, \quad x = 0,1,2,\ldots,n$$

waarbij $\binom{n}{x}$ = C(n,x) de combinatie is van n elementen die x op een moment aannemen. De waarden n en p zijn de parameters van de verdeling. De waarde n staat voor het aantal herhalingen van een experiment of observatie die een van de twee uitkomsten kan hebben, dus succes en mislukking. Als de willekeurige variabele X voor het aantal successen in de n herhalingen staat, dan staat p voor de waarschijnlijke kans op een succes bij een herhaling. De willekeurige verdelingsfunctie voor de binomische verdeling wordt gegeven als

$$F(n,p,x) = \sum_{k=0}^{x} f(n,p,x), \quad x = 0,1,2,\ldots,n$$

Poisson-verdeling

De waarschijnlijkheidsmassafunctie van de Poisson-verdeling wordt gegeven als

$$f(\lambda,x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots,\infty\,.$$

In deze uitdrukking, als de willekeurige variabele X staat voor het aantal voorvallen van een gebeurtenis of observatie per eenheid tijd, lengte, oppervlakte, volume, enz., dan staat parameter l voor het gemiddelde aantal voorvallen per eenheid tijd, lengte, oppervlakte, volume, enz. De cumulatieve verdelingsfuncties voor de Poisson-verdeling wordt gegeven als

$$F(\lambda, x) = \sum_{k=0}^{x} f(\lambda, x), \quad x = 0,1,2,...,\infty$$

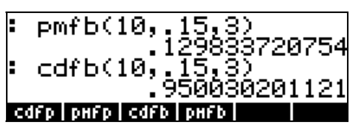
Gebruik daarna de functie DEFINE (← DEF) om de volgende waarschijnlijkheidsmassafuncties (pmf) en cumulatieve verdelingsfuncties (cdf) te definiëren:

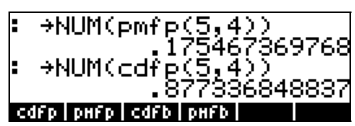
```
DEFINE(pmfb(n,p,x) = COMB(n,x)*p^x*(1-p)^(n-x))
DEFINE(cdfb(n,p,x) = Σ(k=0,x,pmfb(n,p,k)))
DEFINE(pmfp(λ,x) = EXP(-λ)*λ^x/x!)
DEFINE(cdfp(λ,x) = Σ(k=0,x,pmfp(λ,x)))
```

De functienamen staan voor:

- pmfb: (probability mass function) waarschijnlijkheidsmassafunctie voor de binomische verdeling
- cdfb: (cumulative distribution function) cumulatieve verdelingsfunctie voor de binomische verdeling
- pmfp: (probability mass function) waarschijnlijkheidsmassafunctie voor de Poisson-verdeling
- cdfp: (cumulative distribution function) cumulatieve verdelingsfunctie voor de Poisson-verdeling

Voorbeelden van berekeningen met deze functies ziet u hieronder:





Continue kansverdelingen

De kansverdeling voor een continue willekeurige variabele , X, wordt gekenmerkt door een functie f(x), de kansdichtheidsfunctie (pdf). De pdf heeft de volgende eigenschappen: f(x) >0, voor alle x, en

$$P[X < x] = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Kansen worden berekend met behulp van de cumulatieve verdelingsfunctie (cdf), F(x), gedefinieerd door $P[X < x] = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi$, waarbij P[X<x] staat voor "de kans dat de willekeurige variabele X minder is dan de waarde x".

In deze paragraaf beschrijven we diverse continue kansverdelingen, inclusief de gamma-, exponentiële, bèta- en Weibull-verdelingen. Deze verdelingen worden in elk handboek voor de statistiek beschreven. Sommige verdelingen gebruiken de Gamma-functie die we eerder hebben gedefinieerd en die wordt berekend in de rekenmachine door de faculteitsfunctie als $\Gamma(x) = (x-1)!$ voor elk reële getal x.

De gammaverdeling

De kansverdelingsfunctie (pdf) voor de gammaverdeling wordt gegeven als

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot \exp(-\frac{x}{\beta}), for \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0;$$

De bijbehorende (cumulatieve) verdelingsfunctie (cdf) zou worden gegeven door een integraal die geen 'closed-form' oplossing heeft.

De exponentiële verdeling

De exponentiële verdeling is de gammaverdeling met a = 1. De pdf wordt gegeven als

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \cdot \exp(-\frac{x}{\beta}), for \quad x > 0, \beta > 0,$$

terwijl de cdf wordt gegeven als $F(x) = 1 - \exp(-x/\beta)$, voor $x>0$, $\beta >0$.

De bètaverdeling

De pdf voor de gammaverdeling wordt gegeven als

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1}, for \quad 0 < x < 1, \alpha > 0, \beta > 0$$

Net als bij de gammaverdeling wordt de bijbehorende cdf voor de bètaverdeling ook gegeven als een integraal zonder 'closed-form' oplossing.

De Weibull-verdeling

De pdf voor de Weibull-verdeling wordt gegeven als

$$f(x) = \alpha \cdot \beta \cdot x^{\beta-1} \cdot \exp(-\alpha \cdot x^{\beta}), \quad for\ x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

Waarbij de bijbehorende cdf wordt gegeven als

$$F(x) = 1 - \exp(-\alpha \cdot x^{\beta}), \quad for\ x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

Functies voor continue verdelingen

Als we een verzameling functies willen definiëren die overeenkomt met de gamma-, de exponentiële, bèta- en Weibull-verdelingen, moeten we eerst een subdirectory met de naam CFUN (Continue FUNcties) aanmaken en de volgende functies definiëren (wijzig naar Approx-modus):

Gamma pdf : `'gpfd (x) = x^(α-1)*EXP(-x/β)/(β^α*GAMMA(α))'`
Gamma cdf: `'gcdf(x) = ∫(0,x,gpdf(t),t)'`
Bèta pdf :
`' βpdf(x)= GAMMA(α+β)*x^(α-1)*(1-x)^(β-1)/(GAMMA(α)*GAMMA(β))'`
Bèta cdf: `' βcdf(x) = ∫(0,x, βpd(t),t)'`
Exponentiële pfd: `'epdf(x) = EXP(-x/β)/β'`
Exponentiële cdf: `'ecdf(x) = 1 - EXP(-x/β)'`
Weibull pdf: `'Wpdf(x) = α*β*x^(β-1)*EXP(-α*x^β)'`
Weibull cdf: `'Wcdf(x) = 1 - EXP(-α*x^β)'`

Gebruik de functie DEFINE om al deze functies te definiëren. Voer daarna de waarden α en β in , bijvoorbeeld 1 STO▶ ALPHA ↱ A ENTER 2 STO▶ ALPHA ↱ B ENTER

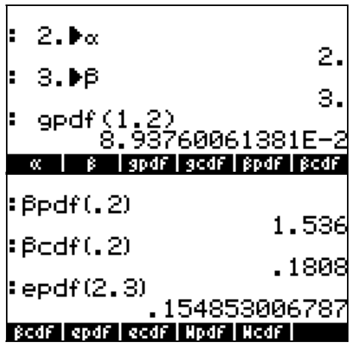
Tenslotte moet u voor de cdf voor Gamma en de cdf's voor Bèta de programmadefinities bewerken om →NUM toe te voegen aan de programma's die door de functie DEFINE worden geproduceerd. De Gamma-cdf, dus de functie gcdf, moet bijvoorbeeld worden aangepast zodat hij er als volgt uitziet: « → x '→NUM(∫ (0,x,gpdf(t),t))' » en weer opgeslagen in gcdf. Herhaal de procedure voor β–cdf.

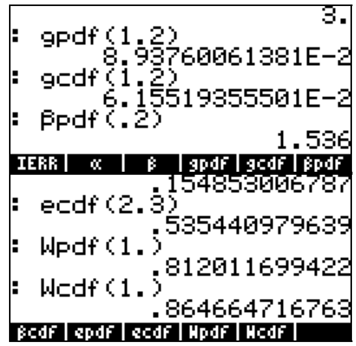
In tegenstelling tot de discrete functies die we eerder hebben gedefinieerd, worden bij de continue functies die in deze paragraaf worden gedefinieerd de parameters (α en/of β) niet in de definities opgenomen. U hoeft ze dus niet op het beeldscherm in te voeren om de functies te berekenen. De parameters moeten echter wel eerder worden gedefinieerd door de bijbehorende waarden op te slaan in de variabelen α en β. Als alle functies en de waarden α en β zijn opgeslagen, kunt u de menulabels bestellen met de functie ORDER. U roept de functie als volgt op:

ORDER({'α','β','gpdf','gcdf','βpdf','βcdf','epdf','ecdf','Wpdf','Wcdf'})

Na dit commando worden de menulabels als volgt weergegeven (Druk op NXT om naar de tweede lijst te gaan. Druk nogmaals op NXT om weer naar de eerste lijst te gaan):

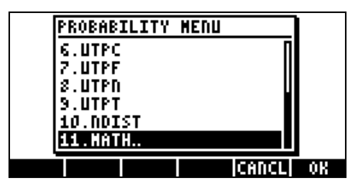
Sommige voorbeelden van de toepassing van deze functies voor de waarden van $\alpha = 2$, $\beta = 3$, ziet u hieronder. U ziet de variabele IERR die in de tweede schermweergave verschijnt. Dit is het resultaat van een numerieke integratie voor de functie gcdf.





Continue verdelingen voor statistische inferentie

In dit deel behandelen we vier continue kansverdelingen die veel worden gebruikt voor problemen met betrekking tot statistische inferentie. Deze verdelingen zijn de normale verdeling, de Student-t-verdeling, de chi-kwadraatverdeling (χ^2) en de F-verdeling. De functies in de rekenmachine om kansen te evalueren voor deze verdelingen staan in het menu MTH/PROBABILITY dat we eerder in dit hoofdstuk hebben besproken. De functie zijn NDIST, UTPN, UTPT, UTPC en UTPF. De toepassingen van deze functies worden hierna behandeld. Activeer het menu MTH voor deze functies met ← MTH en selecteer de optie PROBABILITY:



Pdf normale verdeling

De uitdrukking voor de pdf van de normale verdeling wordt gegeven als:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}],$$

waarbij μ het gemiddelde en σ^2 de variantie van de verdeling is. Gebruik voor het berekenen van de waarde van $f(\mu,\sigma^2,x)$ voor de normale verdeling de functie NDIST met de volgende argumenten. het gemiddelde, μ, de variantie, σ^2, en de waarde x , dus NDIST(μ,σ^2,x). Controleer bijvoorbeeld dat voor een normale verdeling, f(1.0,0.5,2.0) = 0.20755374.

Cdf normale verdeling

De rekenmachine heeft ook de functie UTPN die het bovenste deel van de normale verdeling berekent, dus UTPN(x) = P(X>x) = 1 - P(X<x). Als we de waarde van het bovenste deel van de UTPN van de normale verdeling willen berekenen, voeren we de volgende waarden in: het gemiddelde, μ, de variantie, σ^2, en de waarde x , bijvoorbeeld UTPN((μ,σ^2,x)

Controleer bijvoorbeeld dat voor een normale verdeling, met μ = 1.0, σ^2 = 0.5, UTPN(0.75) = 0.638163. Gebruik UTPN(1.0,0.5,0.75) = 0.638163.

Er kunnen verschillende kansberekeningen voor normale verdelingen [X is N(μ,σ^2)] worden gedefinieerd met de functie UTPN, dat ziet er als volgt uit:

- P(X<a) = 1 - UTPN(μ, σ^2,a)
- P(a<X<b) = P(X<b) - P(X<a) = 1 - UTPN(μ, σ^2,b) - (1 - UTPN(μ, σ^2,a)) = UTPN(μ, σ^2,a) - UTPN(μ, σ^2,b)
- P(X>c) = UTPN(μ, σ^2,c)

Voorbeelden: Bij μ = 1.5, en σ^2 = 0.5, vinden:

P(X<1.0) = 1 - P(X>1.0) = 1 - UTPN(1.5, 0.5, 1.0) = 0.239750.
P(X>2.0) = UTPN(1.5, 0.5, 2.0) = 0.239750.
P(1.0<X<2.0) = F(1.0) - F(2.0) = UTPN(1.5,0.5,1.0) - UTPN(1.5,0.5,2.0) = 0.7602499 - 0.2397500 = 0.524998.

De Student-t-verdeling

De student–t-verdeling, of simpelweg de t-verdeling, heeft een parameter ν, bekend als de vrijheidsgraden van de verdeling. De kansverdelingsfunctie (pdf) wordt gegeven als

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2}) \cdot \sqrt{\pi\nu}} \cdot (1+\frac{t^2}{\nu})^{-\frac{\nu+1}{2}}, -\infty < t < \infty$$

waarbij $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$ de GAMMA-functie is die we in hoofdstuk 3 hebben gedefinieerd.

De rekenmachine geeft waarden van de bovenste (cumulatieve) verdelingsfunctie voor de t-verdeling, functie UTPT, met de parameter ν en de waarde van t gegeven, dus UTPT(ν,t). De definitie voor deze functie is daarom

$$UTPT(\nu,t) = \int_t^{\infty} f(t)dt = 1 - \int_{-\infty}^{t} f(t)dt = 1 - P(T \le t)$$

Voorbeeld: UTPT(5,2.5) = 2.7245…E-2. Andere kansberekeningen voor de t-verdeling kunnen worden gedefinieerd met de functie UTPT, zoals:

- P(T<a) = 1 - UTPT(ν,a)
- P(a<T<b) = P(T<b) - P(T<a) = 1 - UTPT(ν,b) - (1 - UTPT(ν,a)) = UTPT(ν,a) - UTPT(ν,b)
- P(T>c) = UTPT(ν,c)

Voorbeelden: bepaal de volgende waarden met ν = 12 als gegeven:

P(T<0.5) = 1-UTPT(12,0.5) = 0.68694..
P(-0.5<T<0.5) = UTPT(12,-0.5)-UTPT(12,0.5) = 0.3738…
P(T> -1.2) = UTPT(12,-1.2) = 0.8733…

De Chi-kwadraatverdeling

De Chi-kwadraatverdeling (χ^2) heeft een parameter ν, bekend als de vrijheidsgraden. De kansverdelingsfunctie (pdf) wordt gegeven als

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \cdot \Gamma(\frac{\nu}{2})} \cdot x^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}, \nu > 0, x > 0$$

De rekenmachine geeft waarden voor de bovenste (cumulatieve) verdelingsfunctie voor de χ^2-verdeling met [UTPC] met de waarde x en de parameter ν. De definitie van deze functie is dan

$$UTPC(\nu, x) = \int_t^\infty f(x)dx = 1 - \int_{-\infty}^t f(x)dx = 1 - P(X \le x)$$

Om deze functie te gebruiken, hebben we de vrijheidsgraden, ν, en de waarden van de chi-kwadraatvariabele, x, dus UTPC(ν,x). Bijvoorbeeld UTPC(5, 2.5) = 0.776495…

Er kunnen verschillende kansberekeningen voor de Chi-kwadraatverdeling met de functie UTPC worden gedefinieerd, dat ziet er als volgt uit:

- P(X<a) = 1 - UTPC(ν,a)
- P(a<X<b) = P(X<b) - P(X<a) = 1 - UTPC(ν,b) - (1 - UTPC(ν,a)) = UTPC(ν,a) - UTPC(ν,b)
- P(X>c) = UTPC(ν,c)

Voorbeelden: bepaal de volgende waarden met ν = 6:

P(X<5.32) = 1-UTPC(6,5.32) = 0.4965..
P(1.2<X<10.5) = UTPC(6,1.2)-UTPC(6,10.5) = 0.8717…
P(X> 20) = UTPC(6,20) = 2.769..E-3

De F-verdeling

De F-verdeling heeft twee parameters νN = vrijheidsgraad van de teller en νD = vrijheidsgraad van de noemer. De kansverdelingsfunctie (pdf) wordt gegeven als

$$f(x)=\frac{\Gamma(\frac{\nu N+\nu D}{2})\cdot(\frac{\nu N}{\nu D})^{\frac{\nu N}{2}}\cdot F^{\frac{\nu N}{2}-1}}{\Gamma(\frac{\nu N}{2})\cdot\Gamma(\frac{\nu D}{2})\cdot(1-\frac{\nu N\cdot F}{\nu D})^{(\frac{\nu N+\nu D}{2})}}$$

De rekenmachine geeft voor waarden van de bovenste (cumulatieve) verdelingsfunctie voor de F-verdeling, functie UTPF, met de parameters νN en νD en de waarde F. De definitie van deze functie is dan

$$UTPF(\nu N,\nu D,F)=\int_t^{\infty}f(F)dF=1-\int_{-\infty}^{t}f(F)dF=1-P(\Im\leq F)$$

Bereken bijvoorbeeld UTPF(10,5, 2.5) = 0.161834…

Er kunnen verschillende kansberekeningen voor de F-verdeling worden gedefinieerd met de functie UTPF, dat ziet er als volgt uit:

- P(F<a) = 1 - UTPF(νN, νD,a)
- P(a<F<b) = P(F<b) - P(F<a) = 1 -UTPF(νN, νD,b)- (1 - UTPF(νN, νD,a))
  = UTPF(νN, νD,a) - UTPF(νN, νD,b)
- P(F>c) = UTPF(νN, νD,a)

Voorbeeld: bepaal met het gegeven νN = 10, νD = 5:

P(F<2) = 1-UTPF(10,5,2) = 0.7700…
P(5<F<10) = UTPF(10,5,5) – UTPF(10,5,10) = 3.4693..E-2
P(F>5) = UTPF(10,5,5) = 4.4808..E-2

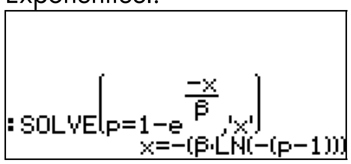
Inverse cumulatieve verdelingsfuncties

Voor een continu willekeurig getal X met cumulatieve dichtheidsfunctie (cdf) F(x) = P(X<x) = p, moeten we om de inverse cumulatieve verdelingsfunctie te berekenen de waarde x zoeken, zodat x = F^{-1}(p). Deze waarde is vrij eenvoudig te vinden bij de exponentiële en Weibull-verdelingen, omdat de cdf's van deze functie een 'closed-form' uitdrukking hebben:

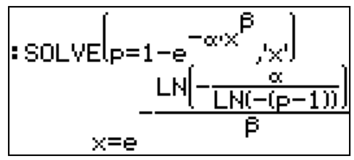
- Exponentieel, F(x) = 1 - exp(-x/β)
- Weibull, F(x) = 1-exp(-αx$^{\beta}$)

(Verwijder variabelen α en β alvorens verder te gaan). Als we de inverse cdf's voor deze twee verdelingen willen bepalen, moeten we alleen x voor deze uitdrukkingen oplossen, dus

Exponentieel:



Weibull:



Voor de Gamma- en Bèta-verdelingen zijn de uitdrukkingen die moeten worden opgelost ingewikkelder door de aanwezigheid van integralen zijn, dus

- Gamma, $p = \int_0^x \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \cdot z^{\alpha-1} \cdot \exp(-\frac{z}{\beta}) dz$
- Beta, $p = \int_0^x \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot z^{\alpha-1} \cdot (1-z)^{\beta-1} dz$

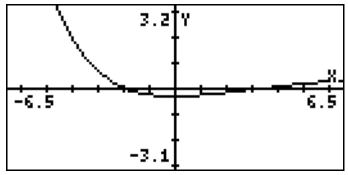
Een numerieke oplossing met de numerieke solver is niet haalbaar vanwege het integraalteken in de uitdrukking. Er is echter wel een grafische oplossing mogelijk. Raadpleeg hoofdstuk 12 voor meer informatie over hoe u de wortel van een grafiek vindt. Als u numerieke resultaten wilt hebben, moet u het CAS wijzigen naar Approx. De te plotten functie voor de Gamma-verdeling is

Y(X) = ∫(0,X,z^(α-1)*exp(-z/β)/(β^α*GAMMA(α)),z)-p

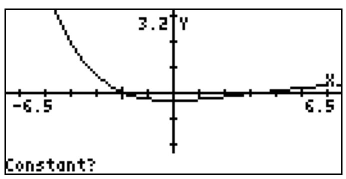
Voor de Bèta-verdeling is de te plotten functie

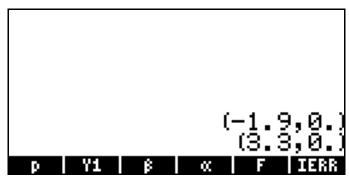
Y(X) =
∫(0,X,z^(α-1)*(1-z)^(β-1)*GAMMA(α+β)/(GAMMA(α)*GAMMA(β)),z)-p

Om het plot te produceren, moeten de waarden α, β en p worden opgeslagen, voordat er wordt geprobeerd te plotten. Voor α = 2, β = 3 en p = 0.3 is het plot van Y(X) voor de Gamma-verdeling het volgende: (U ziet dat, door de complexe aard van de functie Y(X), het enige tijd duurt voordat de grafiek wordt geproduceerd. Wees geduldig.)

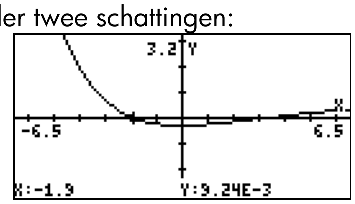


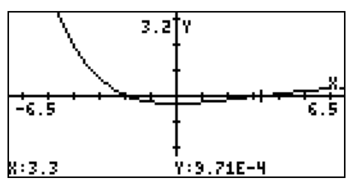
Er zijn twee wortels van deze functie die u kunt vinden met behulp van de functie ROOT binnen de plotomgeving. Door de integraal in de vergelijking wordt de wortel geschat en is deze dus niet te zien in het plotscherm. U krijgt alleen de melding Constant? weergegeven in het scherm Als u nu echter op ENTER drukt, wordt de benaderde wortel vermeld in het beeldscherm. De twee wortels worden in de rechterafbeelding weergegeven.



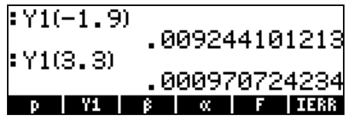


U kunt de functie TRACE (X,Y) ook gebruiken om de wortels te benaderen door de curve bij de afgesneden stukken met de x-as te volgen. U ziet hieronder twee schattingen:





Deze schattingen geven oplossingen x = -1.9 en x = 3.3. U kunt deze oplossingen verifiëren door de functie Y1(X) voor X = -1.9 en X = 3.3 te evalueren, dus

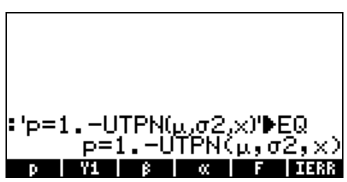


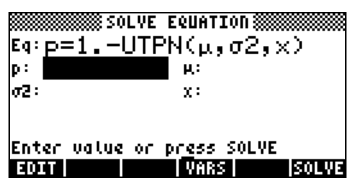
Voor de <u>normale, Student-t-, Chi-kwadraat- (χ^2) en F-verdelingen</u>, die worden weergegeven door de functies UTPN, UTPT, UPTC en UTPF in de rekenmachine, kan de inverse cuff worden gevonden door een van de volgende vergelijkingen op te lossen:

- Normaal, p = 1 – UTPN(μ,σ2,x)
- Student-t, p = 1 – UTPT(ν,t)
- Chi-kwadraat, p = 1 – UTPC(ν,x)
- F-verdeling: p = 1 – UTPF(νN,νD,F)

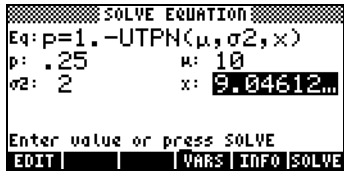
U ziet dat de tweede parameter in de UTPN-functie σ2 en niet σ^2 is, wat de variantie van de verdeling aangeeft. Het symbool ν (de kleine Griekse letter no) is ook niet beschikbaar in de rekenmachine. U kunt bijvoorbeeld γ (gamma) in plaats van ν gebruiken. De letter γ is beschikbaar via de toetsencombinatie (→ CHARS).

Als u bijvoorbeeld de waarde van x voor een normale verdeling wilt krijgen, met μ = 10, σ^2 = 2 en p = 0.25, slaat u de vergelijking 'p=1-UTPN(μ,σ2,x)' op de in variabele EQ (linkerafbeelding). Start daarna de numerieke solver om het invoervenster in de rechterafbeelding te krijgen:



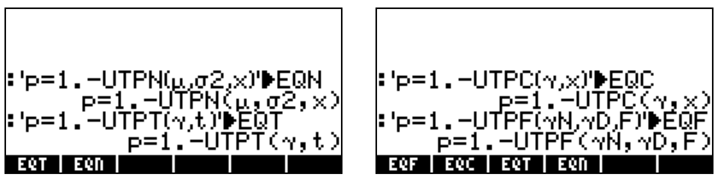


De volgende stap is het invoeren van de waarden μ, σ^2 en p en het oplossen van x:

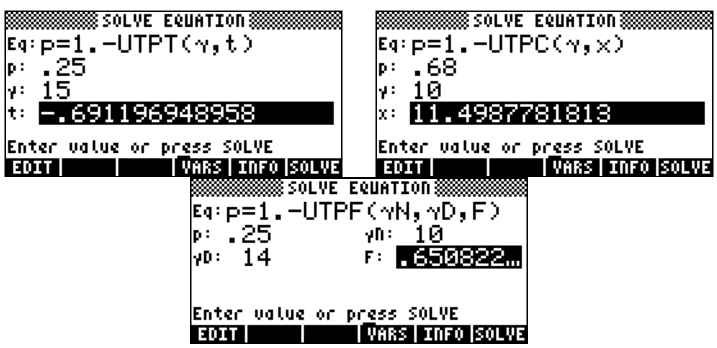


Dit invoervenster kan worden gebruikt om een van de vier variabelen uit deze vergelijking voor de normale verdeling op te lossen.

Om de oplossing van vergelijkingen met de functies UTPN, UTPT, UTPC en UTPF te vereenvoudigen, kunt u een subdirectory UTPEQ aanmaken, als u de hierboven gegeven vergelijkingen wilt opslaan:

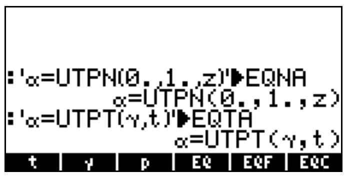


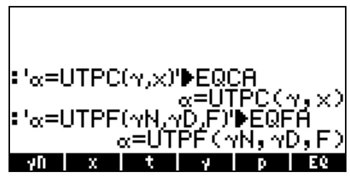
Op dit punt heeft u dus vier vergelijkingen op te lossen. U hoeft maar een vergelijking in het EQ-veld in de numerieke solver in te voeren en u kunt verder gaan met het oplossen van een van de variabelen. Voorbeelden van de UTPT, UTPC en UPTF vindt u hieronder:



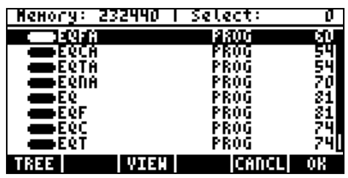
U ziet dat we in alle bovenstaande voorbeelden werken met p = P(X<x). In veel problemen met statistische inferentie proberen we de waarde x te vinden

voor P(X>x) = α. Daarnaast werken we meestal bij de normale deling met de <u>standaard normale</u> verdeling waarbij μ =0 en σ^2 = 1. De normale standaardvariabele wordt meestal Z genoemd, dus het probleem dat we moeten oplossen is dus P(Z>z) = α. Bij deze gevallen van statistische inferentie kunnen we de volgende vergelijkingen opslaan:

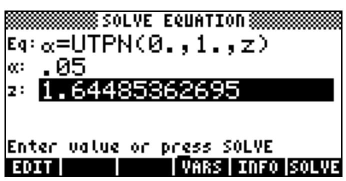


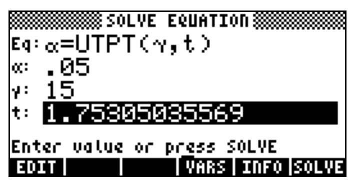


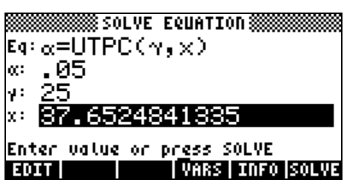
Bij deze vier vergelijkingen krijgt u bij het starten van de numerieke solver de volgende keuzes:

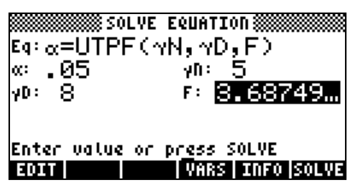


Voorbeelden van de oplossing van de vergelijkingen EQNA, EQTA, EQCA en EQFA staan hieronder vermeld:







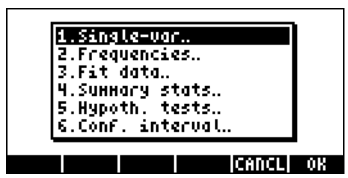


Hoofdstuk 18
Statistische Toepassingen

In dit hoofdstuk laten we statistische toepassingen zien van de rekenmachine, waaronder statistieken van een steekproef, frequentieverdeling van gegevens, eenvoudige regressie, betrouwbaarheidsintervallen en het toetsen van hypothesen.

Voorgeprogrammeerde statistische functies

De rekenmachine geeft de vooraf geprogrammeerde functies die u via de toetsencombinatie ↱ STAT (dezelfde toets als de toets 5) krijgt. De statistische toepassingen van de rekenmachine zijn:



Deze toepassingen worden later in dit hoofdstuk uitvoerig behandeld. We laten eerst zien hoe u gegevens voor statistische analyse invoert.

Gegevens invoeren

Voor de analyse van een enkele verzameling gegevens (een steekproef) kunnen we toepassingen 1, 2 en 4 uit de bovenstaande lijst gebruiken. Voor al deze toepassingen geldt dat de gegevens als kolommen in de matrix ΣDAT moeten staan. Dat doet u door de gegevens in kolommen in te voeren met de matrixschrijver, ↰ MTRW .

Deze bewerking kan voor grote hoeveelheden gegevenspunten vervelend zijn. U kunt de gegevens ook als een lijst invoeren (zie hoofdstuk 8) en de lijst omzetten in een kolom met het programma CRMC (zie hoofdstuk 10). U kunt ook het volgende programma invoeren om de lijst in een kolomvector om te zetten. Voer het programma in terwijl de rekenmachine in de RPN-modus staat:

« OBJ→ 1 2 →LIST →ARRY »

Sla het programma op in de variabele LXC. Als u dit programma in de RPN-modus heeft opgeslagen, kunt u het ook in de ALG-modus gebruiken.

Als u een kolomvector in variabele ΣDAT wilt opslaan, gebruikt u de functie STOΣ, via de catalogus (→ _CAT), bijvoorbeeld STOΣ (ANS(1)) in de ALG-modus.

Voorbeeld 1 – Maak met het programma LXC, zie hierboven, een kolomvector met de volgende gegevens: 2.1 1.2 3.1 4.5 2.3 1.1 2.3 1.5 1.6 2.2 1.2 2.5.

Zet de gegevens in de RPG-modus in een lijst:

{2.1 1.2 3.1 4.5 2.3 1.1 2.3 1.5 1.6 2.2 1.2 2.5 } ENTER LXC

Gebruik de functie STOΣ om de gegevens in ΣDAT op te slaan.

Statistieken met één variabele berekenen

We gaan er vanuit dat de enkele gegevensverzameling werd opgeslagen als een kolomvector in variabele ΣDAT. Druk op → _STAT om in de verschillende STAT-programma's te activeren. Druk op OK om **1. Single-var..** te selecteren. Er verschijnt een invoervenster **SINGLE-VARIABLE STATISTICS**, met de gegevens die in de variabele ΣDAT in het venster als een vector wordt vermeld. Omdat u maar een kolom heeft, moet het veld **Col:** de waarde 1 ervoor hebben. Het veld **Type** bepaalt of u met een steekproef of een populatie werkt, de standaardinstelling is Sample. Zet de cursor op de horizontale lijn voor de velden **Mean**, **Std Dev**, **Variance**, **Total**, **Maximum**, **Minimum** en druk op de softmenutoets ✓CHK om de maatregelen te selecteren die u als uitkomst van dit programma wilt. Druk op OK als u klaar bent . De geselecteerde waarden worden met labels in het scherm van uw rekenmachine vermeld.

Voorbeeld 1 – Voor de gegevens die in het vorige voorbeeld werden opgeslagen, zijn de statistische resultaten met enkele variabele als volgt:

Gemiddelde: 2.133,	Std Afw: 0.964,	Variantie: 0.929
Totaal: 25.6,	Maximum: 4.5,	Minimum: 1.1

Definities
De gebruikte definities voor deze hoeveelheden zijn de volgende:

Stel dat u de gegevenspunten s x_1, x_2, x_3, … heeft, die staan voor de verschillende metingen van dezelfde discrete of continue variabele x. De verzameling van alle mogelijke waarden van de hoeveelheid x wordt de populatie van x genoemd. Een eindige populatie heeft slechts een vast aantal elementen x_i. Als de hoeveelheid x staat voor de meting van een continue hoeveelheid en omdat een dergelijke hoeveelheid in theorie een oneindig getal kan aannemen, is de populatie van x in dit geval oneindig. Als u een subverzameling van een populatie selecteert en deze wordt weergegeven door de n gegevenswaarde $\{x_1, x_2, …, x_n\}$, dan zeggen we dat u een steekproef van waarden van x heeft geselecteerd.

Steekproeven worden gekenmerkt door een aantal metingen of statistieken. Er zijn metingen van centrale tendens, zoals het gemiddelde, mediaan en modus, en metingen van spreiding, zoals het bereik, variantie en de standaardafwijking.

Metingen van centrale tendens
Het gemiddelde (of rekenkundig gemiddelde) van de steekproef, $\bar{x}$, wordt gedefinieerd als de gemiddelde waarde van de elementen van de steekproef,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

De waarde `Total` die we hierboven kregen, geeft de som van de waarden van x of $\Sigma x_i = n\cdot \bar{x}$. Dit is de waarde die de rekenmachine geeft onder het kopje `Mean`. Andere gemiddelde waarden die in bepaalde toepassingen worden gebruikt, zijn het geometrisch gemiddelde, x_g, of het harmonische gemiddelde, x_h, gedefinieerd als:

$$x_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}, \qquad \frac{1}{x_h} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}.$$

Voorbeelden van berekeningen van deze metingen, met behulp van lijsten, staan in hoofdstuk 8.

De mediaan is de waarde die de gegevensverzameling in het midden opsplitst als de elementen in oplopende volgorde zijn gerangschikt. Als u een oneven getal, n, van geordende elementen heeft, dan is de mediaan van deze steekproef de waarde in de positie (n+1)/2. Als u een even getal, n, van elementen heeft, dan is de mediaan het gemiddelde van elementen in de posities n/2 en (n+1)/2. Hoewel de berekening van de mediaan niet tot de vooraf geprogrammeerde statistische kenmerken van de rekenmachine behoort, is het heel eenvoudig een programma te schrijven voor het berekenen van deze waarde door met lijsten te werken. Als u bijvoorbeeld de gegevens in ΣDAT wilt gebruiken om de mediaan te vinden, zet u het volgende programma in de RPN-modus in (zie hoofdstuk 21 voor meer informatie over het programmeren in User RPL-taal).:

« → nC « RCLΣ DUP SIZE 2 GET IF 1 > THEN nC COL– SWAP DROP OBJ→ 1 + →ARRY END OBJ→ OBJ→ DROP DROP DUP → n « →LIST SORT IF 'n MOD 2 == 0' THEN DUP 'n/2' EVAL GET SWAP '(n+1)/2' EVAL GET + 2 / ELSE '(n+1)/2' EVAL GET END "Median" →TAG » » »

Sla dit programma op onder de naam MED. U ziet hieronder een voorbeeld van de toepassing van dit programma.

Voorbeeld 2 – Om het programma uit te voeren moet u eerst uw ΣDAT-matrix voorbereiden. Voer daarna het getal van de kolom in ΣDAT in waarvan u de mediaan wilt zoeken. Druk daarna op MED. Voor de gegevens die nu in ΣDAT staan (ingevoerd in een eerder voorbeeld) gebruiken we het programma MED om te laten zien dat `Median: 2.15`.

De modus van een steekproef wordt beter bepaald door kolomdiagrammen en daarom zullen we die later behandelen.

Metingen van spreiding

De variantie (Var) van de steekproef wordt gedefinieerd als

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \ .$$

De standaardafwijking (St Dev) van de steekproef is slechts de vierkantswortel van de variantie, dus s_x.

Het bereik van de steekproef is het verschil tussen de maximum- en minimumwaarden van de steekproef. Omdat de rekenmachine via de vooraf geprogrammeerde statistische functies de maximum- en minimumwaarden van de steekproef geeft, kunt u het bereik eenvoudig berekenen.

Variatiecoëfficiënt

De variatiecoëfficiënt van een steekproef combineert het gemiddelde, een meting van centrale tendens, met de standaardafwijking, een meting van spreiding en wordt als een percentage gedefinieerd als: $V_x = (s_x/\ \bar{x})100$.

Steekproef vs. populatie

De hierboven gebruikte voorgeprogrammeerde statistische functies met een enkele variabele kunnen worden toegepast op een beperkte populatie door `Type: Population` te selecteren in het `SINGLE-VARIABLE STATISTICS` scherm voor . Het belangrijkste verschil zit in de waarden van de variantie en de standaardafwijking die berekend worden met gebruik van n in de noemer van de variantie i.p.v. (n-1).

Voorbeeld 3 -- Als u de oefening in voorbeeld 1 van dit deel zou herhalen, met `Population` in plaats van `Sample` als het `Type`, krijgt u dezelfde waarden voor het gemiddelde, totale, maximum- en minimumwaarde. De variantie en de standaardafwijking worden echter gegeven door: Variantie: 0.852, Std Afw: 0.923.

Frequentieverdelingen verkrijgen

De toepassing **2. Frequencies..** in het menu STAT kan worden gebruikt om frequentieverdelingen te krijgen voor een verzameling gegevens. De gegevens moeten weer in de vorm van een kolomvector zijn opgeslagen in de variabele ΣDAT. Druk op ↱ STAT ▼ OK om te beginnen. Het invoerscherm dat u krijgt, bevat de volgende velden:

Σ**DAT**:	de matrix met de betreffende gegevens.
Col:	de kolom van ΣDAT die wordt onderzocht.
X-Min:	de minimale klassengrenzen (standaard = 6.5).
Bin Count:	het aantal klassen (standaard = 13).
Bin Width:	de uniforme breedte van iedere klasse (standaard = 1).

Definities

Om de betekenis van deze parameters te begrijpen geven we de volgende definities: Met een gegeven verzameling van n gegevenswaarden: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ die niet in een bepaalde volgorde staan, moeten deze gegevens vaak in een reeks klassen worden gegroepeerd door de frequentie of het aantal waarden voor elke klasse te tellen. (Opmerking: in de rekenmachine worden klassen benoemd met bins).

Stel dat de klassen of bins worden geselecteerd door het interval (x_{bot}, x_{top}) op te delen in k = Bin Count-klassen door een aantal klassengrenzen te selecteren, dus $\{xB_1, xB_2, \ldots, xB_{k+1}\}$, zodat klassenummer 1 wordt beperkt door xB_1-xB_2, klassenummer 2 door xB_2- xB_3, enz. De laatste klasse, klassenummer k, wordt beperkt door xB_k - xB_{k+1}.

De waarde van x die overeenkomt met de middelste van elke klasse wordt klassenmidden genoemd en wordt gedefinieerd als $xM_i = (xB_i + xB_{i+1})/2$, voor i = 1, 2, …, k.

Als de klassen zodanig worden gekozen dat de klassengrootte hetzelfde is, dan kunnen we de klassengrootte definiëren als de waarde Bin Width = $\Delta x = (x_{max} - x_{min}) / k$,

en de klassengrenzen kunnen worden berekend als $xB_i = x_{bot} + (i - 1) * \Delta x$.

Elk gegevenspunt, x_j, j = 1, 2, …, n, behoort tot de i-ste klasse, als $xB_i \leq x_j <$ xB_{i+1}

De toepassing **2. Frequencies..** in het menu STAT voert deze frequentietellingen uit en volgt de waarden die onder de minimum- en boven de maximale klassengrenzen vallen (d.w.z. de uitbijters).

Voorbeeld 1 -- Voor een betere weergave van het verkrijgen van frequentiedelingen maken we een vrij grote gegevensverzameling, bijvoorbeeld van 200 punten, met de volgende gegevens:

- Stel eerst de generatrice voor willekeurige getallen in met: `RDZ(25)` in de ALG-modus of `25` ENTER `RDZ` in de RPN-modus (zie hoofdstuk 17).
- Voer het programma in terwijl de rekenmachine in de RPN-modus staat:
  « → n « 1 n FOR j RAND 100 * 2 RND NEXT n →LIST » »
  en sla deze op onder de naam RDLIST (RanDom number LIST generator, generatrice voor willekeurige getallen).
- Genereer de lijst met 200 getallen met RDLIST(200) in de ALG-modus of `200` ENTER `RDLIST` in de RPN-modus.
- Gebruik het programma LXC (zie hierboven) om de gegenereerde lijst om te zetten in een kolomvector.
- Sla de kolomvector op in ΣDAT met de functie STOΣ.
- Haal vervolgens informatie over de enkele variabele op met: ↱ STAT `OK`. Gebruik Sample als het Type van gegevensverzameling en selecteer alle opties als resultaten. Het resultaat is:

Gemiddelde: 51.0406, Std Afw: 29.5893…, Variantie: 875.529…
Totaal: 10208.12, Maximum: 99.35, Minimum: 0.13

Deze informatie geeft aan dat onze gegevens variëren van waarden van bijna nul tot waarden van tegen de 100. Omdat we met hele getallen werken, kunnen we het bereik van de variantie van de gegevens selecteren als (0,100). Om een frequentieverdeling te maken, gebruiken we het interval (10,90) dat we verdelen in 8 bins van ieder 10 breed.

- Selecteer het programma **2. Frequencies..** met ⟨→⟩ STAT ⟨▼⟩ OK. De gegevens zijn al geladen in ΣDAT en de optie Col zou de waarde 1 moeten bevatten aangezien er maar een kolom staat in ΣDAT.
- Verander X-Min in 10, Bin Count in 8 en Bin Width in 10. Druk dan op OK.

In de RPN-modus worden de resultaten in het stapelgeheugen getoond als een kolomvector op niveau 2 in het stapelgeheugen en een rijvector van twee componenten op niveau 1 in het stapelgeheugen. De vector op niveau 1 in het stapelgeheugen is het aantal uitbijters buiten het bereik van de frequentietelling. Voor dit geval krijgen we de waarden [25. 22.], wat betekent dat er in de ΣDAT-vector 22 waarden kleiner zijn dan 10 en 22 groter dan 90.

- Druk op ⟨◄⟩ om de vector van uitbijters te verwijderen uit het stapelgeheugen. Het resterende resultaat is de frequentietelling van de gegevens. Dit kan worden omgezet in een tabel, zoals u hieronder ziet.

Deze tabel werd voorbereid uit de informatie die we gaven voor het genereren van de frequentiedeling, hoewel de rekenmachine als enige kolom de frequentiekolom (f_i) geeft. De klassennummers en klassengrenzen zijn eenvoudig te berekenen voor klassen (of bins) van één grootte en de klassenmidden is alleen maar het gemiddelde van de klassengrenzen voor elke klasse. Tenslotte krijgen we de <u>cumulatieve frequentie</u> door aan elke waarde in de laatste kolom, behalve de eerste, de frequentie van de volgende rij toe te voegen en het resultaat in de laatste kolom van de volgende rij te vervangen. Voor de tweede klasse is de cumulatieve frequentie 18+15 = 33, terwijl voor klassenummer 3 de cumulatieve frequentie 33 + 16 = 49 is, enz. De cumulatieve frequentie staat voor de frequentie van de getallen die kleiner of gelijk zijn aan de bovenste grens van een klasse.

Klassen nr. i	Klasse grens XB_i	XB_{i+1}	Klassenmidden. Xm_i	Frequentie f_i	Cumulatief frequentie
< XB_1	uitbijter	onder bereik		25	
1	10	20	15	18	18
2	20	30	25	14	32
3	30	40	35	17	49
4	40	50	45	17	66
5	50	60	55	22	88
6	60	70	65	22	110
7	70	80	75	24	134
k = 8	80	90	85	19	153
>XB_k	uitbijters	boven bereik		22	

Met de (kolom) vector van de frequenties die de rekenmachine heeft gegenereerd, kunt u een cumulatieve frequentievector krijgen door het volgende programma in de RPN-modus te gebruiken:

« DUP SIZE 1 GET → freq k « {k 1} 0 CON → cfreq « 'freq(1,1)' EVAL 'cfreq(1,1)' STO 2 k FOR j 'cfreq(j-1,1) +freq(j,1)' EVAL 'cfreq (j,1)' STO NEXT cfreq » » »

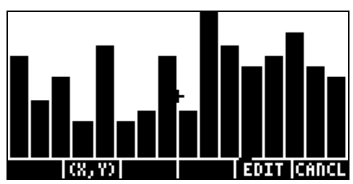
Sla deze op onder de naam CFREQ. Gebruik dit programma om een lijst aan te maken van cumulatieve frequenties (drukpers CFREQ met het oogmerk zuil vector van veelvuldigheid ter naar de stapelgeheugen). Het resultaat voor dit voorbeeld is een kolomvector die de laatste kolom uit de bovenstaande tabel weergeeft.

Kolomdiagrammen

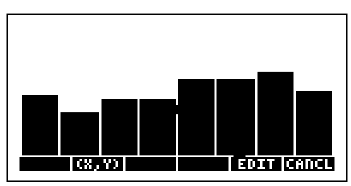
Een kolomdiagram is een staafdiagram met de frequentietelling als de hoogte van de staven terwijl de klassengrenzen aan de voet van de staven staan. Als uw ruwe gegevens (dus de originele gegevens voor de frequentietelling) in de variabele ΣDAT staan, kunt u `Histogram` selecteren als grafiektype en informatie geven over de beginwaarde van x, het aantal bins en de binbreedte, om het kolomdiagram te genereren. U kunt de kolomvector ook genereren met de frequentietelling, zoals we dat in het bovenstaande voorbeeld hebben gedaan, deze vector in ΣDAT opslaan en `Barplot` selecteren als grafiektype. In hetzelfde voorbeeld tonen we u hoe u de eerste methode kunt gebruiken om een kolomdiagram te genereren.

<u>Voorbeeld 1</u> – Met de 200 gegevenspunten die in het bovenstaande voorbeeld werden gegenereerd (opgeslagen als kolomvector in ΣDAT), genereert u een kolomdiagram met de gegevens van X-Min = 10, Bin Count = 16 en Bin Width = 5.

- Druk eerst op ← 2D/3D (tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus) voor het scherm PLOT SETUP. Wijzig in dit scherm het Type: in Histogram en controleer of de optie Col: 1 is geselecteerd. Druk daarna op NXT OK.
- Druk daarna op ← WIN (tegelijkertijd indrukken in de RPN-modus) om in het scherm PLOT WINDOW – HISTOGRAM te komen. Wijzig in dat scherm de informatie in H-View: 10 90, V-View: 0 15, Bar Width: 5.
- Druk op ERASE DRAW om het volgende kolomdiagram te genereren:



- Druk op CANCL om terug te keren naar het vorige scherm. Wijzig de V-view en Bar Width nog een keer, zodat er nu het volgende staat V-View: 0 30, Bar Width: 10. Het nieuwe kolomdiagram ziet er op basis van dezelfde gegevensverzameling nu als volgt uit:



Een diagram van frequentietelling, f_i, vs. klassenmiddens, xM_i, noemen we een frequentiepolygoon. Een diagram van de cumulatieve frequentie vs. de bovenste grenzen noemen we een cumulatieve frequentieogief. U kunt puntgrafieken produceren die deze twee diagrammen simuleren door de juiste gegevens in de kolommen 1 en 2 van een nieuwe ΣDAT-matrix in te voeren en het `Type`: te wijzigen in `SCATTER` in het scherm PLOT SETUP.

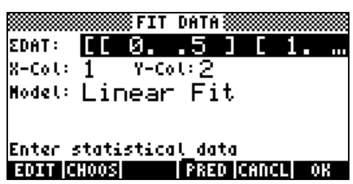
Gegevens in een functie y = f(x) plaatsen

Het programma **3. Fit data..**, als optie 3 beschikbaar in het menu STAT, kan gebruikt worden om lineaire, logaritmische, exponentiële en machtfuncties in gegevensverzamelingen te plaatsen (x,y) die worden opgeslagen in de kolommen van de ΣDAT-matrix. Dit programma is alleen effectief als er tenminste twee kolommen in uw ΣDAT-variabele staan.

Voorbeeld 1 – Geef een lineaire relatie aan de gegevens uit de onderstaande tabel:

x	0	1	2	3	4	5
y	0.5	2.3	3.6	6.7	7.2	11

- Voer eerst de twee kolommen met gegevens in de ΣDAT-variabele in met de matrixschrijver.
- Gebruik de volgende toetsencombinatie om het programma **3. Fit data..** te activeren: → STAT ▼ ▼ OK. Het invoerscherm toont de huidige ΣDAT die al geladen is. Verander indien nodig het instellingenscherm in de volgende parameters voor een lineaire aanpassing:



- Druk op OK om de gegevens aan te passen. De uitvoer van dit programma, dat hieronder voor onze gegevensverzameling wordt getoond, bestaat in de RPN-modus uit de volgende drie lijnen:

3: '0.195238095238 + 2.00857242857*X'
2: Correlation: 0.983781424465
1: Covariance: 7.03

Niveau 3 toont de vorm van de vergelijking. In dit geval y = 0.06924 + 0.00383 x. Niveau 2 toont de coëfficiënt van de steekproefcorrelatie en niveau 1 toont de covariantie van x-y.

Definities

Voor een steekproef van de gegevenspunten (x,y) definiëren we de covariantie van de steekproef als

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

De coëfficiënt van de steekproefcorrelatie voor x,y wordt gedefinieerd als

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}.$$

Waarbij s_x, s_y de standaardafwijkingen zijn van respectievelijk x en y dus

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \qquad s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2$$

De waarden s_{xy} en r_{xy} zijn respectievelijk de "Covariantie" en "Correlatie", verkregen door het gebruik van de functie "Fit data" van de rekenmachine.

Gelineariseerde relaties

Veel kromlijnige relaties worden ‘rechter’ en krijgen een lineaire vorm. De verschillende modellen voor bijvoorbeeld gegevensaanpassing in de rekenmachine, kunnen worden gelineariseerd zoals in de onderstaande tabel wordt beschreven.

Type aanpassing	Werkelijk Model	Gelineariseerd Model	Onafh. variabele ξ	Afh. Variabele η	Covar. $s_{\xi\eta}$
Lineair	y = a + bx	[zelfde]	x	y	s_{xy}
Log.	y = a + b ln(x)	[zelfde]	ln(x)	y	$s_{ln(x),y}$
Exp.	y = a e^{bx}	ln(y) = ln(a) + bx	x	ln(y)	$s_{x,ln(y)}$
Macht	y = a x^b	ln(y) = ln(a) + b ln(x)	ln(x)	ln(y)	$s_{ln(x),ln(y)}$

De covariantie van de steekproef van ξ,η wordt gegeven door

$$s_{\xi\eta} = \frac{1}{n-1}\sum(\xi_i - \overline{\xi})(\eta_i - \overline{\eta})$$

We definiëren de steekproefvarianties van respectievelijk ξ en η als

$$s_{\xi}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2 \qquad s_{\eta}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\eta_i - \overline{\eta})^2$$

De coëfficiënt van de steekproefcorrelatie $r_{\xi\eta}$ is $r_{\xi\eta} = \frac{s_{\xi\eta}}{s_{\xi} \cdot s_{\eta}}$

De algemene vorm voor de regressievergelijking is η = A + Bξ.

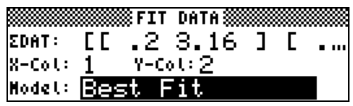
Beste gegevensaanpassing

De rekenmachine kan bepalen welke lineaire of gelineariseerde relaties de beste aanpassing bieden voor een verzameling van gegevenspunten van (x,y). We illustreren het gebruik van deze functie met een voorbeeld. Stel dat u wilt weten welke functies voor gegevensaanpassing de beste aanpassing voor de volgende gegevens geeft:

x	0.2	0.5	1	1.5	2	4	5	10
y	3.16	2.73	2.12	1.65	1.29	0.47	0.29	0.01

Voer de gegevens eerst in als een matrix, via de matrixeditor en het invoeren van de gegevens, of door twee lijsten met gegevens die overeenkomen met x en y in te voeren en het programma CRMC te gebruiken (zie hoofdstuk 10). Sla deze matrix daarna op in de statistische matrix ΣDAT met de functie STOΣ.

Start daarna de toepassing voor de gegevensaanpassing met: ↱ STAT ▼ ▼ OK. Het beeldscherm toont de huidige ΣDAT, die al geladen is. Verander indien nodig het instellingenscherm in de volgende parameters:



Druk op OK voor:

1: '3.99504833324*EXP(-.579206831203*X)'
2: Correlation: -0.996624999526
3: Covariance: -6.23350666124

De beste aanpassing voor de gegevens is dus y = 3.995 $e^{-0.58 \cdot x}$.

Aanvullende samenvattende statistieken verkrijgen

De toepassing **4. Summary stats..** in het menu STAT kan handig zijn bij sommige berekeningen voor steekproefstatistieken. Druk nogmaals op ↱ STAT om te beginnen, ga naar de vierde optie met de pijltoets omlaag ▼ en druk op OK. Het invoerscherm dat verschijnt, bevat de volgende velden:

ΣDAT: de matrix met de betreffende gegevens.

X-Col, Y-Col: deze opties zijn alleen van toepassing wanneer er meer dan twee kolommen in de ΣDAT-matrix staan. Standaard is de kolom x de kolom 1 en de kolom y de kolom 2.

_Σ**X** _ Σ**Y…**: samenvattende statistieken die u kunt kiezen als resultaat van dit programma door het betreffende veld te kiezen met [✓CHK] wanneer dat veld is geselecteerd.

Veel van deze samenvattende statistieken worden gebruikt om statistieken van twee variabelen (x,y) te berekenen die gerelateerd kunnen zijn aan een functie y = f(x). Daarom kan dit programma opgevat worden als een compagnon voor het programma **3. Fit data..**

Voorbeeld 1 – Haal alle samenvattende statistieken voor de huidige x-y-gegevens in ΣDAT op.

- Gebruik om de optie **summary stats...** te activeren:
  ↱ STAT ▼ ▼ ▼ OK
- Selecteer de kolomnummers behorende bij de x- en y-gegevens, dus X-Col: 1 en Y-Col: 2.
- Selecteer alle opties voor de uitvoer (_ΣX, _ΣY, enz.) met de toets ✓CHK
- Druk op OK om de volgende resultaten te verkrijgen:

  ΣX: 24.2, ΣY: 11.72, ΣX2: 148.54, ΣY2: 26.6246, ΣXY: 12.602, NΣ:8

Opmerking: het menu STAT bevat nog twee toepassingen, namelijk **5. Hypth. tests..** en **6. Conf. Interval..** Deze twee toepassingen worden later in dit hoofdstuk behandeld.

Berekening van percentielen

Percentielen zijn metingen die een gegevensverzameling in 100 delen opdelen. De basisprocedure voor het berekenen van de 100·p-de percentiel (0 < p < 1) in een steekproef met grootte n is als volgt:

1. Sorteer de n observaties van klein naar groot.
2. Bepaal het product n·p
   A. Als n·p geen geheel getal is, rondt u de waarde omhoog af tot het volgende gehele getal en zoekt u de bijbehorende gesorteerde waarde.
   B. Als n·p een geheel getal is, bijvoorbeeld k, bereken dan het gemiddelde van de gesorteerde observaties k-de en (k-1)-de.

Opmerking: afrondregel tot gehele getallen, voor een niet-geheel getal x.yz…, als y ≥ 5, omhoog afronden tot x+1; als y < 5, omhoog afronden tot x.

Dit algoritme kan worden ingevoerd in het volgende programma dat in de RPN-modus wordt ingevoerd (zie hoofdstuk 21 voor informatie over programmeren):

« SORT DUP SIZE → p X n « n p * → k « IF k CEIL k FLOOR - NOT THEN X k GET X k 1 + GET + 2 / ELSE k 0 RND X SWAP GET END » » »

die we opslaan in variabele % TILE (percent-tile: percentiel). Voor dit programma moet als invoer een waarde p binnen 0 en 1 hebben, die het percentiel 100p en een lijst met waarden weergeven. Het programma geeft het percentiel 100p van de lijst.

Voorbeeld 1 – Bepaal het percentiel 37% van de lijst { 2 1 0 1 3 5 1 2 3 6 7 9}. Voer in de RPN-modus in: 0.27 ENTER { 2 1 0 1 3 5 1 2 3 6 7 9} ENTER %TILE. Voer in de ALG-modus in: %TILE(0.27,{2,1,0,1,3,5,1,2,3,6,7,9}. Het resultaat is 1.

Het softmenu STAT

Alle vooraf geprogrammeerde statistische functies die hierboven worden beschreven, zijn toegankelijk via een softmenu,STAT. Het softmenu STAT is in de RPN-modus toegankelijk via het commando: 96 MENU

U kunt uw eigen programma maken, bijvoorbeeld STATm, om het softmenu STAT direct te activeren. De inhoud van dit programma is eenvoudig: « 96 MENU ».

Het softmenu STAT bevat de volgende functies:

Als u op de toets drukt die bij een van deze menu's hoort, verschijnen verschillende functies, zie hieronder.

Het submenu DATA

Het submenu DATA bevat functies voor het bewerken van de statistiekmatrix ΣDATA:

De bewerking van deze functies is als volgt:

Σ+ : voegt eenrij toe op niveau 1 aan de onderzijde van de ΣDATA-matrix.
Σ- : verwijdert de laatste rij in de ΣDATA-matrix en plaats deze op niveau 1 van het stapelgeheugen.
De aangepaste ΣDATA-matrix blijft in het geheugen.
CLΣ : wist de huidige ΣDATA-matrix.
ΣDAT : plaatst inhoud van de huidige ΣDATA-matrix op niveau 1 van het stapelgeheugen.
[↰] ΣDAT : slaat de matrix op op niveau 1 van het stapelgeheugen in de ΣDATA-matrix.

Het submenu ΣPAR

Het submenu ΣPAR bevat functies voor het aanpassen van statistische parameters:

De volgende parameters worden weergegeven:

Xcol: geeft kolom van ΣDATA voor x weer (Standaard: 1)
Ycol: geeft kolom van ΣDATA voor y weer (Standaard: 2)

Intercept: toont snijpunt van de meest recente gegevensaanpassing (Standaard: 0)
Slope: toont richtingscoëffiënt van de meest recente gegevensaanpassing (Standaard: 0)
Model: toont huidige model gegevensaanpassing (Standaard: LINFIT)

De functies van de softmenutoetsen werken als volgt:
XCOL : ingevoerd als n XCOL, wijzigt Xcol in n.
YCOL : ingevoerd als n YCOL, wijzigt Ycol in n.
ΣPAR : toont statistische parameters.
RESET : reset parameters naar standaardwaarden
INFO : toont statistische parameters

Het submenu MODL in ΣPAR
Dit submenu bevat functies waarmee u het model van de gegevensaanpassing kunt wijzigen in LINFIT, LOGFIT, EXPFIT, PWRFIT of BESTFIT door op de bijbehorende toets te drukken.

Het submenu 1VAR
Het submenu 1VAR bevat functies voor het berekenen van de statistieken voor kolommen in de ΣDATA-matrix.

Dit zijn de beschikbare functies:

TOT : toont de som van elke kolom in de ΣDATA-matrix.
MEAN : toont het gemiddelde van elke kolom in de ΣDATA-matrix.
SDEV : toont de standaardafwijking van elke kolom in de ΣDATA-matrix.
MAXΣ : toont de maximumwaarde van elke kolom in de ΣDATA-matrix.
MINΣ : toont het gemiddelde van elke kolom in de ΣDATA-matrix.
BINS : wordt gebruikt als x_s, Δx, n [BINS], geeft frequentiedeling voor gegevens in Xcol-kolom in de ΣDATA-matrix met de frequentiebins gedefinieerd als $[x_s,x_s+\Delta x]$, $[x_s,x_s+2\Delta x]$,…, $[x_s,x_s+n\Delta x]$.
VAR : toont de variantie van elke kolom in de ΣDATA-matrix.
PSDEV : toont standaardafwijking voor populatie (op basis van n en niet (n-1))

van elke kolom in de ΣDATA-matrix.
PVAR : toont de populatievariantie van elke kolom in de ΣDATA-matrix.
MINΣ : toont het gemiddelde van elke kolom in de ΣDATA-matrix.

Het submenu PLOT

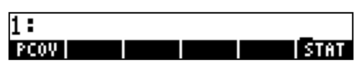
Het submenu PLOT bevat functies voor het produceren van diagrammen met de gegevens in de ΣDATA-matrix.

Dit zijn de functies:

BARPL: produceert een staafdiagram met gegevens in de Xcol-kolom van de ΣDATA-matrix.
HISTP: produceert een kolomdiagram van de gegevens in de Xcol-kolom in de ΣDATA-matrix, met de standaardbreedte die overeenkomt met 13 bins tenzij de bingrootte is aangepast met de functies BINS in het submenu 1VAR (zie hierboven).
SCATR: produceert een puntgrafiek met de gegevens in de Ycol-kolom in de ΣDATA-matrix vs. de gegevens in de Xcol-kolom van de ΣDATA-matrix. De geplaatste vergelijking wordt opgeslagen in de variabele EQ.

Het submenu FIT

Het submenu FIT bevat functies voor het plaatsen van vergelijkingen in de kolommen Xcol en Ycol van de ΣDATA-matrix.



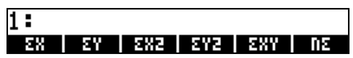
De functies in dit submenu zijn:

ΣLINE : geeft de vergelijking die overeenkomt met de meest recentte aanpassing.
LR : geeft het snijpunt en de richtingscoëffiënt van de meest recentte aanpassing.

PREDX : wordt gebruikt als y PREDX, zoekt x met y gegeven voor de aanpassing y = f(x).
PREDY : wordt gebruikt als x PREDY, zoekt y met x gegeven voor de aanpassing y = f(x).
CORR : geeft de correlatiecoëfficiënt voor de meest recentte aanpassing.
COV : geeft de steekproefcovariantie voor de meest recentte aanpassing.
PCOV : geeft de populatiecovariantie voor de meest recentte aanpassing.

Het submenu SUMS

Het submenu SUMS bevat functies voor het ophalen van samenvattende statistieken van de gegevens in de kolommen Xcol en Ycol van de ΣDATA-matrix.



ΣX : geeft de som van de waarden in de Xcol-kolom.
ΣY : geeft de som van de waarden in de Ycol-kolom.
ΣX^2 : geeft de som van de kwadraten van de waarden in de Xcol-kolom.
ΣY^2 : geeft de som van de kwadraten van de waarden in de Ycol-kolom.
ΣX*Y : geeft de som van x·y, dus de producten van de gegevens in de kolommen Xcol en Ycol.
NΣ : geeft het aantal kolommen in de ΣDATA-matrix.

Voorbeeld van handelingen in het menu STAT

ΣDATA is de matrix die op de volgende pagina wordt getoond.

- Voer de matrix in op niveau 1 van het stapelgeheugen met de matrixeditor.
- Zo slaat u de matrix op in ΣDATA: DATA ← ΣDAT
- Bereken de statistieken van elke kolom: STAT 1VAR:

TOT	geeft [38.5 87.5 82799.8]
MEAN	geeft [5.5. 12.5 11828.54…]
SDEV	geeft [3.39… 6.78… 21097.01…]
MAXΣ	geeft [10 21.5 55066]
MINΣ	geeft [1.1 3.7 7.8]

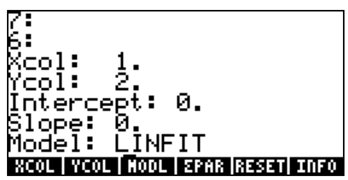
NXT VAR geeft [11.52 46.08 445084146.33]
PSDEV geeft [3.142… 6.284… 19532.04…]
PVAR geeft [9.87… 39.49… 381500696.85…]

- Gegevens:

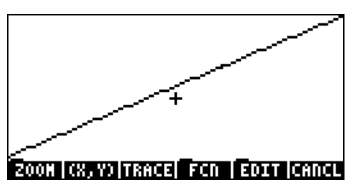
$$\begin{bmatrix} 1.1 & 3.7 & 7.8 \\ 3.7 & 8.9 & 101 \\ 2.2 & 5.9 & 25 \\ 5.5 & 12.5 & 612 \\ 6.8 & 15.1 & 2245 \\ 9.2 & 19.9 & 24743 \\ 10.0 & 21.5 & 55066 \end{bmatrix}$$

- Genereer een puntgrafiek van de gegevens in kolommen 1 en 2 en plaats er een rechte lijn in:

STAT ΣPAR RESET reset statistische parameters



NXT STAT PLOT SCATR produceert de puntgrafiek
STATL tekent de gegevens in als een rechte lijn



CANCL keert terug naar de hoofdweergave

- Bepaal de aanpassingsvergelijking en enkele statistieken ervan:

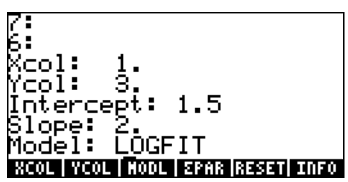
STAT FIT ΣLINE	geeft `'1.5+2*X'`
LR	geeft `Intercept: 1.5, Slope: 2`
3 PREDX	geeft 0.75
1 PREDX	geeft 3.50
CORR	geeft 1.0
COV	geeft 23.04
NXT PCOV	geeft 19.74...

- Haal samenvattende statistieken op voor gegevens in de kolommen 1 en 2: STAT SUMS:

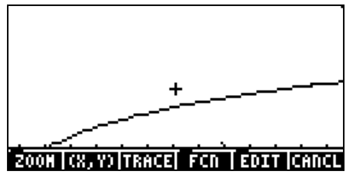
ΣX	geeft 38.5
ΣY	geeft 87.5
ΣX2	geeft 280.87
ΣY2	geeft 1370.23
ΣXY	geeft 619.49
NΣ	geeft 7

- Pas de gegevens aan met kolommen 1 (x) en 3 (y) met behulp van een logaritmische aanpassing:

NXT STAT ΣPAR 3 YCOL	selecteert Ycol = 3
MODL LOGFI	selecteert Model = Logfit



NXT STAT PLOT SCATR	produceert de puntgrafiek van y vs. x
STATL	toont lijn voor log-aanpassing

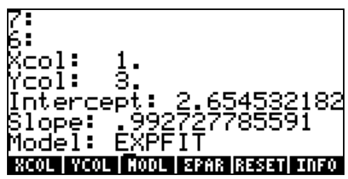


De log-aanpassing is duidelijk geen goede keuze.

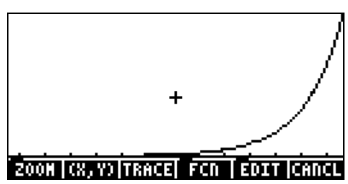
CANCL	keert terug naar het normale beeldscherm.

- Selecteer de beste aanpassing met:

STAT ΣPAR MODL BESTF	toont EXPFIT als de beste aanpassing voor deze gegevens



NXT STAT FIT ΣLINE	geeft '2.6545*EXP(0.9927*X)'
CORR	geeft 0.99995… (goede correlatie)
2300 PREDX	geeft 6.8139
5.2 PREDY	geeft 463.37
NXT STAT PLOT SCATR	produceert de puntgrafiek van y vs. x
STATL	toont de lijn voor log-aanpassing



- Keer als volgt terug naar het menu STAT: NXT STAT
- Keer als volgt terug naar het variabelenmenu: VAR.

Betrouwbaarheidsintervallen

Statistische inferentie is het proces van het maken van conclusies over een populatie op basis van de informatie van de steekproefgegevens. De steekproefgegevens hebben alleen maar betekenis als de steekproef willekeurig is, dus de selectie van een bepaalde steekproef moet dezelfde waarschijnlijkheid hebben als die van andere mogelijke steekproeven van een bepaalde populatie. Nu volgen enkele begrippen die relevant zijn voor het concept van de willekeurige steekproef:

- Populatie: verzameling van alle denkbare observaties van een proces of attribuut van een onderdeel.
- Steekproef: subverzameling van een populatie.
- Willekeurige steekproef: een steekproef die representatief is voor de populatie.
- Willekeurige variabele: echt-gewaardeerde functie gedefinieerd op een steekproefruimte. Kan discreet of continu zijn.

  Als de populatie een bepaalde waarschijnlijkheidsverdeling volgt die afhankelijk is van een parameter θ, dan kan er een willekeurige steekproef van observaties ($X_1,X_2,X_3,\ldots , X_n$), van grootte n, worden gebruikt om θ te schatten.

- Verdeling van de steekproef: de gekoppelde kansverdeling van $X_1,X_2,X_3,\ldots , X_n$.
- Een statistiek: elke functie van de observaties die meetbaar is en geen onbekende parameters bevat. Een statistiek is een willekeurige variabele die een middel voor schatting biedt.
- Puntschatting: als een enkele waarde van de parameter θ wordt geleverd.
- Betrouwbaarheidsinterval: een numeriek interval met de parameter θ op een bepaald waarschijnlijkheidsniveau.
- Schattingsfunctie: regel of methode voor het schatten van parameter θ.
- Schatting: waarde die de schattingsfunctie geeft in een bepaalde toepassing.

Voorbeeld 1 – X staat voor de tijd (uren) die nodig is voor de voltooiing van een bepaald productieproces. Gegeven wordt de volgende steekproef met waarden van X: 2.2 2.5 2.1 2.3 2.2. De populatie waaruit deze steekproef is genomen, is de verzameling van alle mogelijke waarden van de verwerkingstijd en daarom is het een oneindige populatie. Stel dat de populatieparameter die we proberen te schatten de gemiddelde waarde, μ, is. We gebruiken als schattingsfunctie de gemiddelde waarde van de steekproef, $\bar{X}$, gedefinieerd door (een regel): $\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Voor de betreffende steekproef is de geschatte μ de steekproefstatistiek $\bar{x}$ = (2.2+2.5+2.1+2.3+2.2)/5 = 2.36. Deze enkele waarde van $\bar{X}$, namelijk $\bar{x}$ = 2.36, vormt een puntschatting van de populatieparameter μ.

Schatting van betrouwbaarheidsintervallen

Het volgende niveau van inferentie van puntschatting is de intervalschatting, dus in plaats van een enkele waarde van een schattingsfunctie, geven we twee statistieken, a en b, die een interval met de parameter θ definiëren met een bepaald waarschijnlijkheidsniveau. De eindpunten van het interval noemen we betrouwbaarheidsgrenzen en het interval (a,b) noemen we het betrouwbaarheidsinterval.

Definities

Stel dat (C_l,C_u) een betrouwbaarheidsinterval is met een onbekende parameter θ.

- Het betrouwbaarheidsniveau of de betrouwbaarheidscoëfficiënt is de hoeveelheid (1-α), waarbij 0 < α < 1, zodat P[C_l < θ < C_u] = 1 - α, waarbij P[ ] staat voor een kans (zie hoofdstuk 17). De vorige uitdrukking definieert de zogenaamde tweezijdige betrouwbaarheidsgrens.
- Een lager eenzijdig betrouwbaarheidsinterval wordt gedefinieerd als Pr[C_l < θ] = 1 - α.
- Een hoger eenzijdig betrouwbaarheidsinterval wordt gedefinieerd als Pr[θ < C_u] = 1 - α.
- De parameter α staat bekend als het significantieniveau. Typische waarden van α zijn 0.01, 0.05, 0.1, behorende bij de betrouwbaarheidsniveaus van respectievelijk 0.99, 0.95 en 0.90.

Betrouwbaarheidsintervallen voor het populatiegemiddelde als de populatievariantie bekend is

Stel dat $\bar{X}$ het gemiddelde is van een willekeurige steekproef met de grootte n, opgemaakt uit een oneindige populatie met bekende standaardafwijking σ. Het centrale, tweezijdige betrouwbaarheidsinterval 100(1-α) % [dus 99%, 95%, 90%, enz.] voor het populatiegemiddelde μ is ($\bar{X}-z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n}$, $\bar{X}+z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n}$), waarbij $z_{\alpha/2}$ een standaard normale variabele is die wordt overschreden met een waarschijnlijkheid van α /2. De standaardfout van het steekproefgemiddelde, $\bar{X}$, is $\cdot\sigma/\sqrt{n}$.

De eenzijdige bovenste en onderste 100(1-α) % betrouwbaarheidsgrenzen voor het populatiegemiddelde μ zijn respectievelijk $X+z_{\alpha}\cdot\sigma/\sqrt{n}$ en $\bar{X}-z_{\alpha}\cdot\sigma/\sqrt{n}$. Een onderste, eenzijdige betrouwbaarheidsinterval wordt gedefinieerd als ($-\infty$, $X+z_{\alpha}\cdot\sigma/\sqrt{n}$) en een bovenste, eenzijdige betrouwbaarheidsinterval als ($X-z_{\alpha}\cdot\sigma/\sqrt{n},+\infty$). U ziet dat we in de laatste twee intervallen de waarde z_{α}, en niet $z_{\alpha/2}$ hebben gebruikt.

Over het algemeen wordt de waarde z_k in de standaard normale verdeling gedefinieerd als de waarde van z waarvan de kans op overschrijding k is, dus $\Pr[Z>z_k] = k$ of $\Pr[Z<z_k] = 1 - k$. De normale verdeling werd beschreven in hoofdstuk 17.

Betrouwbaarheidsintervallen voor het populatiegemiddelde als de populatievariantie onbekend is

Stel dat $\bar{X}$ en S respectievelijk het gemiddelde en de standaardafwijking zijn van een willekeurige steekproef met de grootte n, opgemaakt uit een oneindige populatie die de normale verdeling met onbekende standaardafwijking σ. Het centrale, tweezijdige betrouwbaarheidsinterval van 100·(1–α) % [dus 99%, 95%, 90%, enz.] voor het populatiegemiddelde μ is ($\bar{X}-t_{n-1,\,\alpha/2}\cdot S/\sqrt{n}$, $\bar{X}+t_{n-1,\,\alpha/2}\cdot S/\sqrt{n}$), waarbij $t_{n-1,\,\alpha/2}$ de student-t-variabele is met ν = n-1 vrijheidsgraden en waarschijnlijkheid $\alpha/2$ van overschrijding.

De eenzijdige bovenste en onderste betrouwbaarheidsgrenzen van 100· (1-α) % voor het populatiegemiddelde μ zijn respectievelijk

$$\bar{X} + t_{n-1,\,\alpha/2}\cdot S/\sqrt{n} \text{ en } \bar{X} - t_{n-1,\,\alpha/2}\cdot S/\sqrt{n}.$$

Kleine steekproeven en grote steekproeven

Het gedrag van de Student-t-verdeling is zodanig dat voor n>30 de verdeling niet te onderscheiden is van de standaard normale verdeling. Voor steekproeven die groter zijn dan 30 elementen waarvan de populatievariantie onbekend is, kunt u hetzelfde betrouwbaarheidsinterval gebruiken als wanneer de populatievariantie bekend is, maar vervangt u σ door S. Steekproeven waarvoor geldt n>30 worden meestal grote steekproeven genoemd, anders zijn het kleine steekproeven.

Betrouwbaarheidsinterval voor een proportie

Een discrete willekeurige variabele X volgt een Bernoulli-verdeling als X slechts twee waarden kan aannemen, X = 0 (mislukking) en X = 1 (succes). Als X ~ Bernoulli(p) is, waarbij p de kans op succes is, dan is de gemiddelde waarde of verwachting van X E[X] = p en is de variantie Var[X] = p(1-p).

Als een experiment met X n wordt herhaald en er worden k succesvolle uitkomsten gemeld, dan wordt een schatting van p gegeven door p'= k/n, terwijl de standaardfout van p' $\sigma_{p'} = \sqrt{(p\cdot(1-p)/n)}$ is. In de praktijk vervangt de steekproefschatting voor p, dus p', p in de formule voor standaardfouten.

Voor grotere steekproeven, n>30 en $n\cdot p > 5$ en $n\cdot(1-p)>5$ is de steekproefverdeling bijna normaal. Daarom is het centrale, tweezijdige betrouwbaarheidsinterval van 100(1-α) % voor het populatiegemiddelde p ($p'+z_{\alpha/2}\cdot\sigma_{p'}$, $p'+z_{\alpha/2}\cdot\sigma_{p'}$). Voor een kleine steekproef (n<30) kan het interval worden geschat als ($p'-t_{n-1,\alpha/2}\cdot\sigma_{p'}$,$p'+t_{n-1,\alpha/2}\cdot\sigma_{p'}$).

Steekproefverdeling van verschillen en statistieksommen

Stel dat S_1 en S_2 onafhankelijke statistieken zijn van twee populaties op basis van steekproeven van de respectievelijke grootten n_1 en n_2. En stel daarbij dat de respectievelijke gemiddelden en standaardfouten van de steekproefverdeling van die statistieken respectievelijk μ_{S1} en μ_{S2} en σ_{S1} en σ_{S2} zijn. De verschillen tussen de statistieken van de twee populaties, S_1-S_2, hebben een steekproefverdeling met gemiddelde $\mu_{S1-S2} = \mu_{S1} - \mu_{S2}$ en standaardfout $\sigma_{S1-S2} = (\sigma_{S1}{}^2 + \sigma_{S2}{}^2)^{1/2}$. Daarnaast heeft de som van de statistieken T_1+T_2 een gemiddelde $\mu_{S1+S2} = \mu_{S1} + \mu_{S2}$, en standaardfout $\sigma_{S1+S2} = (\sigma_{S1}{}^2 + \sigma_{S2}{}^2)^{1/2}$.

Schattingsfuncties voor het gemiddelde en de standaardafwijking van het verschil en de som van de statistieken S_1 en S_2 worden gegeven als:

$$\hat{\mu}_{S_1 \pm S_2} = \overline{X}_1 \pm \overline{X}_2, \qquad \hat{\sigma}_{S_1 \pm S_2} = \sqrt{\frac{\sigma_{S1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{S2}^2}{n_2}}$$

In deze uitdrukkingen zijn $\overline{X}_1$ en $\overline{X}_2$ de waarden van de statistieken S_1 en S_2 van steekproeven die zijn genomen van de twee populaties, en zijn $\sigma_{S1}{}^2$ en $\sigma_{S2}{}^2$ de varianties van de populaties van de statistieken S_1 en S_2 waaruit de steekproeven zijn genomen.

Betrouwbaarheidsintervallen voor sommen en verschillen in gemiddelde waarden

Als de populatievarianties $\sigma_1{}^2$ en $\sigma_2{}^2$ bekend zijn, dan worden de betrouwbaarheidsintervallen voor het verschil en de som van de gemiddelde waarden van de populatie, dus $\mu_1 \pm \mu_2$, gegeven als:

$$\left((\overline{X}_1 \pm X_2) - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\overline{X}_1 \pm X_2) + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$$

Voor grotere steekproeven, dus $n_1 > 30$ en $n_2 > 30$ en onbekende maar gelijke populatievarianties $\sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2$, worden de betrouwbaarheidsintervallen voor het verschil en de som van de gemiddelde waarden van de populaties, dus $\mu_1 \pm \mu_2$, gegeven door:

$$\left((\overline{X}_1 \pm X_2) - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}, (\overline{X}_1 \pm X_2) + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right).$$

Als een van de steekproeven klein is, dus $n_1 < 30$ of $n_2 < 30$ en met de onbekende, maar gelijke populatievarianties $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, kunnen we een "gepoolde" schatting krijgen van de variantie van $\mu_1 \pm \mu_2$, want $s_p^2 = [(n_1-1)\cdot s_1^2+(n_2-1)\cdot s_2^2]/(n_1+n_2-2)$.

In dit geval worden de gecentreerde betrouwbaarheidsintervallen voor de som en het verschil van de gemiddelde waarde van de populaties, dus $\mu_1 \pm \mu_2$, gegeven als:

$$\left((\overline{X}_1 \pm X_2) - t_{\nu,\alpha/2} \cdot s_p^2,\ (\overline{X}_1 \pm X_2) + t_{\nu,\alpha/2} \cdot s_p^2\right)$$

waarbij $\nu = n_1+n_2-2$ het aantal vrijheidsgraden in de Student-t-verdeling is.

In de laatste twee opties hebben we gespecificeerd dat de populatievarianties, hoewel ze onbekend zijn, gelijk moeten zijn. Dat is het geval waarin de twee steekproeven worden genomen uit de dezelfde populatie of uit twee populaties waarvan we vermoeden dat ze dezelfde populatievariantie hebben. Als we echter vermoeden dat de twee onbekende populatievarianties anders zijn, dan kunnen we het volgende betrouwbaarheidsinterval gebruiken

$$\left((\overline{X}_1 \pm X_2) - t_{\nu,\alpha/2} \cdot s^2_{\overline{X}_1 \pm \overline{X}_2},\ (\overline{X}_1 \pm X_2) + t_{\nu,\alpha/2} \cdot s^2_{\overline{X}_1 \pm \overline{X}_2}\right)$$

waarbij de geschatte standaardafwijking voor de som of het verschil het volgende is

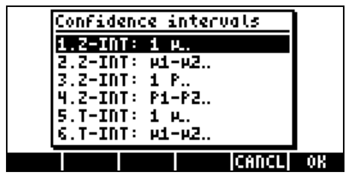
$$s_{\overline{X}_1 \pm \overline{X}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

en n, de vrijheidsgraden van de t-variabele, worden berekend met de gehele waarde die het dichtst bij ligt bij

$$\nu = \frac{[(S_1^2/n_1)+(S_2^2/n_2)]^2}{[(S_1^2/n_1)/(n_1-1)]+[(S_2^2/n_2)/(n_2-1)]}$$

Betrouwbaarheidsintervallen bepalen

De toepassing **6. Conf Interval** is toegankelijk via ↱ STAT ▲ OK. De toepassing biedt de volgende opties:

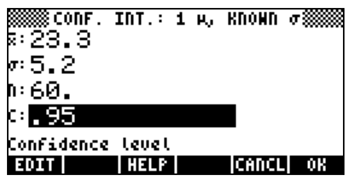


Deze opties dienen als volgt geïnterpreteerd te worden:

1. Z-INT: 1 μ. : Betrouwbaarheidsinterval van een enkelvoudige steekproef voor het populatiegemiddelde μ met bekende populatievariantie of voor grote steekproeven met een onbekende populatievariantie.
2. Z-INT: μ1–μ2. : Betrouwbaarheidsinterval voor het verschil van het populatiegemiddelde μ_1- μ_2 met bekende populatievarianties of voor grote steekproeven met onbekende populatievarianties.
3. Z-INT: 1 p. : Betrouwbaarheidsinterval van een steekproef voor de proportie p voor grote steekproeven met een onbekende populatievariantie.
4. Z-INT: p1– p2. : Betrouwbaarheidsinterval voor het verschil van twee proporties p_1-p_2 voor grote steekproeven met onbekende populatievarianties.
5. T-INT: 1 μ. : Betrouwbaarheidsinterval van een steekproef voor het populatiegemiddelde μ voor kleine steekproeven met een onbekende variantie.
6. T-INT: μ1–μ2. : Betrouwbaarheidsinterval voor het verschil van het populatiegemiddelde μ_1- μ_2 voor kleine steekproeven met onbekende populatievarianties.

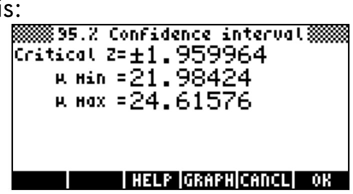
Voorbeeld 1 – Bepaal het gecentreerde betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde van een populatie als een steekproef van 60 elementen aangeeft dat de gemiddelde waarde van de steekproef $\bar{x}$ = 23.2 is en de standaarddeviatie s = 5.2 is. Gebruik α = 0.05. Het betrouwbaarheidsniveau is C = 1-α = 0.95.

Selecteer geval 1 uit het hierboven afgebeelde menu door op OK te drukken. Voer de vereiste waarden in in het invoerscherm, zoals hieronder:



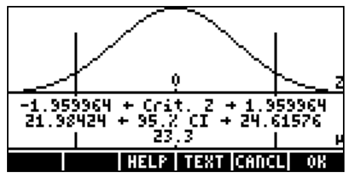
Druk op HELP om een scherm te krijgen waarop de betekenis van het betrouwbaarheidsinterval uitgelegd wordt aan de hand van willekeurige door een rekenmachine gegenereerde getallen. Gebruik het pijltoets omlaag ▽ om op het resulterende scherm naar beneden te bladeren. Druk op OK wanneer u klaar bent met het helpvenster. U keert terug naar het scherm dat hierboven staat afgebeeld.

Druk op OK om het betrouwbaarheidsinterval te berekenen. Het weergegeven resultaat is:



Het resultaat geeft aan dat er een betrouwbaarheidsinterval van 95% is berekend. De waarde Critical z die in het bovenstaande scherm wordt getoond, komt overeen met de waarden $\pm z_{\alpha/2}$ in de formule van het betrouwbaarheidsinterval ($\bar{X}-z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n}$, $\bar{X}+z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n}$). De waarden μ Min en μ Max zijn de onderste en bovenste grenzen van dit interval, dus μ Min = $\bar{X}-z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n}$ en μ Max = $\bar{X}+z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n}$.

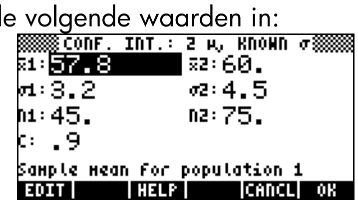
Druk op GRAPH om een grafische weergave te zien van de informatie van het betrouwbaarheidsinterval:



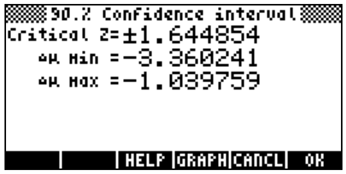
De grafiek toont de kansdichtheidsfunctie (pdf: standaard normale verdeling), de locatie van de kritieke punten $\pm z_{\alpha/2}$, de gemiddelde waarde (23.2) en de corresponderende intervalgrenzen (21.88424 en 24.51576). Druk op TEXT om terug te keren naar de vorige resultatenschermen en/of druk op OK om de betrouwbaarheidsintervalomgeving te verlaten. De resultaten zullen in het beeldscherm van de rekenmachine worden geplaatst.

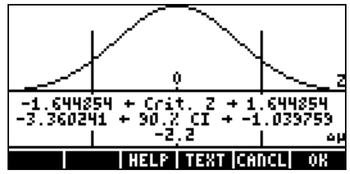
<u>Voorbeeld 2</u> – Gegevens van twee steekproeven (steekproeven 1 en 2) geven aan dat $\bar{x}_1$ = 57.8 en $\bar{x}_2$ = 60.0. De grootten van de steekproeven zijn n_1 = 45 en n_2 = 75. Als bekend is dat de standaardafwijkingen van de populatie σ_1 = 3.2 en σ_2 = 4.5 is, bepalen we een betrouwbaarheidsinterval van 90% voor het verschil van het populatiegemiddelde, dus μ_1- μ_2.

Druk op ↱ STAT ▲ OK om de functie betrouwbaarheidsinterval in de rekenmachine te activeren. Druk op ▼ OK voor selectie van de optie 2. Z-INT : μ 1 – μ2.. Voer de volgende waarden in:



Druk op OK als u klaar bent . De resultaten worden als tekst en grafiek worden hieronder getoond:

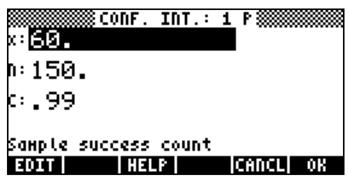




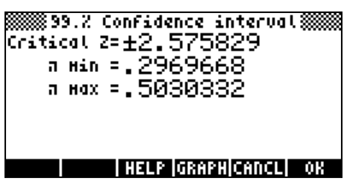
De variabele Δμ staat voor μ 1 – μ2.

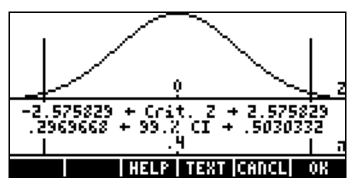
Voorbeeld 3 – Een onderzoek van de publieke opinie geeft aan dat in een steekproef van 150 mensen er 60 mensen zijn die voor verhoging van de grondbelasting voor het financieren van enkele openbare projecten zijn. Bereken het betrouwbaarheidsinterval van 99% voor de populatieproportie dat voor de belastingverhoging is.

Druk op STAT OK om de functie betrouwbaarheidsinterval in de rekenmachine te activeren. Druk op OK voor selectie van de optie 3. Z-INT: μ 1 – μ2. Voer de volgende waarden in:



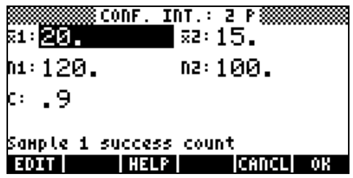
Druk op OK als u klaar bent. De resultaten worden als tekst en grafiek worden hieronder getoond:



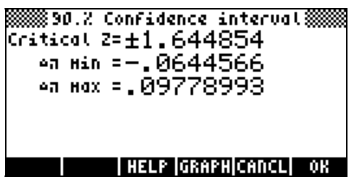


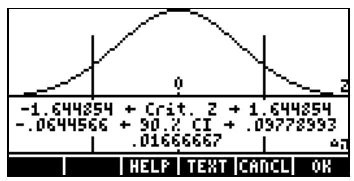
Voorbeeld 4 – Bereken een betrouwbaarheidsinterval van 90% voor het verschil tussen twee proporties als steekproef 1 20 successen van de 120 pogingen aangeeft en steekproef 2 15 successen van de 100 pogingen aangeeft.

Druk op ↱ STAT ▲ OK om de functie betrouwbaarheidsinterval in de rekenmachine te activeren. Druk op ▼ ▼ ▼ OK voor selectie van optie 4. Z-INT: p1 – p2. Voer de volgende waarden in:



Druk op OK als u klaar bent. e resultaten worden als tekst en grafiek worden hieronder getoond:

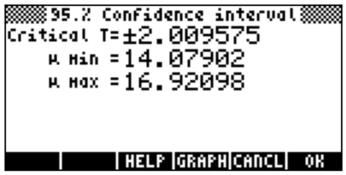


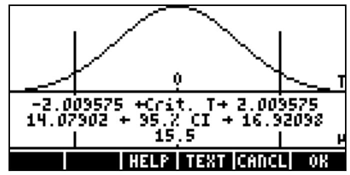


Voorbeeld 5 – Bereken een betrouwbaarheidsinterval van 95% voor het gemiddelde van de populatie als een steekproef van 50 elementen een gemiddelde van 15.5 en een standaardafwijking van 5 heeft. De standaardafwijking van de populatie is onbekend.

Druk op ↱ STAT ▲ OK om de functie betrouwbaarheidsinterval in de rekenmachine te activeren. Druk op ▲ ▲ OK voor de selectie van optie 5. T-INT: μ. Voer de volgende waarden in:

Druk op OK als u klaar bent. De resultaten worden als tekst en grafiek worden hieronder getoond:

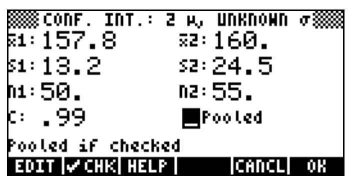




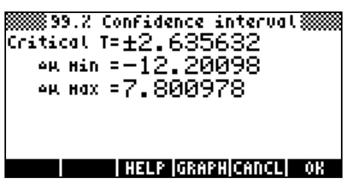
De afbeelding toont de pdf van de Student-t voor ν = 50 – 1 = 49 vrijheidsgraden.

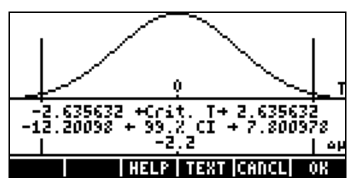
Voorbeeld 6 -- Bereken het betrouwbaarheidsinterval van 99% voor het verschil in gemiddelde van twee populaties met de steekproefgegevens: $\bar{x}_1$ = 157.8 , $\bar{x}_2$ = 160.0, n_1 = 50, n_2 = 55. De standaardafwijkingen van de populatie zijn s_1 = 13.2, s_2 = 24.5.

Druk op ↱ STAT ▲ OK om de functie betrouwbaarheidsinterval in de rekenmachine te activeren. Druk op ▲ OK voor selectie van optie 6. T-INT: μ1−μ2.. Voer de volgende waarden in:

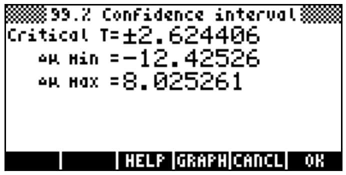


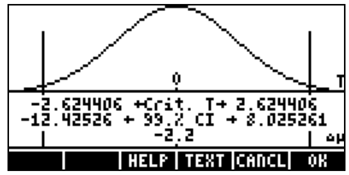
Druk daarna op OK. De resultaten worden als tekst en grafiek hieronder getoond:





Deze resultaten gaan er vanuit uit dat de waarden $s_1$en s_2 de standaardafwijkingen van de populatie zijn. Als deze waarden daadwerkelijk de standaardafwijkingen van de steekproef weergeven, dan moet u dezelfde waarden net als voorheen invoeren, maar dan met de optie `_pooled` geselecteerd. De resultaten zijn dan:





Betrouwbaarheidsintervallen voor de variantie

Om een formule te ontwikkelen voor het betrouwbaarheidsinterval voor de variantie, introduceren we eerst de steekproefverdeling van de variantie: Neem een willekeurige steekproef X_1, X_2 ..., X_n van onafhankelijke normaal verdeelde variabelen met gemiddelde μ, variantie σ^2 en steekproefgemiddelde $\overline{X}$. De statistiek

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2,$$

is een zuivere schatter van de variantie σ^2.

De hoeveelheid $(n-1) \cdot \frac{\hat{S}^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2,$ heeft een (chi-kwadraat)verdeling χ_{n-1}^2 met ν = n-1 vrijheidsgraden. Het tweezijdige betrouwbaarheidsinterval van $(1-\alpha)\cdot 100$ % wordt gevonden uit

$$\Pr[\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} < (n-1)\cdot S^2/\sigma^2 < \chi^2_{n-1,\alpha/2}] = 1-\alpha.$$

Het betrouwbaarheidsinterval voor de variantie van de populatie σ^2 is daarom

$$[(n-1)\cdot S^2/\ \chi^2_{n-1,\alpha/2}\ ;\ (n-1)\cdot S^2/\ \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}].$$

waarbij $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ en $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ de waarden zijn die een variabele χ^2 met ν = n-1 vrijheidsgraden overschrijdt met respectievelijk de kansen $\alpha/2$ en $1-\alpha/2$.

De eenzijdige bovenste betrouwbaarheidsgrens voor σ^2 wordt gedefinieerd als $(n-1)\cdot S^2/\ \chi^2_{n-1,1-\alpha}$.

Voorbeeld 1 – Bereken het betrouwbaarheidsinterval van 95% voor de populatievariantie σ^2 op basis van de resultaten van een steekproef van grootte n = 25 die aangeeft dat de steekproefvariantie s^2 = 12.5 is.

In hoofdstuk 17 gebruiken we de numerieke oplosser om de vergelijking α = UTPC(γ,x) op te lossen. In dit programma staat γ voor de vrijheidsgraden (n-1) en staat α voor de kans op overschrijding van een bepaalde waarde van x (χ^2), dus $\Pr[\chi^2 > \chi_\alpha^2] = \alpha$.

Voor ons huidige voorbeeld geldt α = 0.05, γ = 24 en α = 0.025. Als we de bovenstaande vergelijking oplossen, krijgen we $\chi^2_{n-1,\alpha/2} = \chi^2_{24,0.025}$ = 39.3640770266.

Aan de andere kant wordt de waarde $\chi^2_{n-1,\alpha/2} = \chi^2_{24,0.975}$ berekend door de waarden γ = 24 en α = 0.975 te gebruiken. Het resultaat is $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} = \chi^2_{24,0.975}$ = 12.4011502175.

De ondergrens en bovengrens van het interval zijn (Gebruik de ALG-modus voor deze berekeningen):

$$(n-1)\cdot S^2/\ \chi^2_{n-1,\alpha/2} = (25-1)\cdot 12.5/39.3640770266 = 7.62116179676$$

$$(n-1)\cdot S^2/\ \chi^2_{n-1,1-\alpha/2} = (25-1)\cdot 12.5/12.4011502175 = 24.1913044144$$

Het betrouwbaarheidsinterval van 95% voor dit voorbeeld is dan:

$$7.62116179676 < \sigma^2 < 24.1913044144.$$

Hypotheses testen

Een hypothese is een verklaring omtrent een populatie (bijvoorbeeld met betrekking tot het gemiddelde). Acceptatie van de hypothese is gebaseerd op een statistische test op een steekproef van de populatie. De daaruit voortkomende actie en de beslissingen die hierover worden genomen worden hypothesetesten genoemd.

Bij een hypothesetest nemen we een willekeurige steekproef uit de populatie en maken we een statistische hypothese over de populatie. Als de observaties het gestelde model of theorie niet ondersteunen, wordt de hypothese verworpen. Als de observaties de hypothese ondersteunen, dan wordt de hypothese niet verworpen, maar ook niet meteen geaccepteerd. Bij de beslissing hoort een significantieniveau α.

Procedure voor hypothesetesten

De procedure voor het toetsen van hypotheses omvat de volgende zes stappen:

1. Stel een nulhypothese, H_0. Dit is de hypothese die we moeten testen. Bijvoorbeeld, H_0: μ_1-μ_2 = 0, dus we stellen dat de gemiddelde waarde van populatie 1 en de gemiddelde waarde van populatie 2 hetzelfde zijn. Als H_0 waar is, ligt een eventueel geobserveerd verschil in gemiddelde aan fouten in de willekeurige steekproef.
2. Stel een alternatieve hypothese, H_1. Voor onze hypothese kan dat zijn H_1: μ_1-$\mu_2 \neq 0$ [dit is wat we eigenlijk willen toetsen.]
3. Bepaal of specificeer een teststatistiek, T. In ons voorbeeld wordt T gebaseerd op het verschil van het geobserveerde gemiddelde, $\bar{X}_1$- $\bar{X}_2$.
4. Gebruik de bekende (of aangenomen) verdeling van de teststatistiek, T.
5. Definieer een verwerpingsgebied (het kritieke gebied, R) voor de teststatistiek op basis van een vooraf toegewezen significatieniveau α.
6. Gebruik de geobserveerde gegevens om te bepalen of de berekende waarde van de teststatistiek binnen of buiten het kritieke gebied valt. Als de teststatistiek binnen het kritieke gebied valt, dan zeggen we dat de hoeveelheid die we toetsen significant is bij op het 100α procentniveau.

Opmerking:

1. Voor ons voorbeeld geeft de alternatieve hypothese H_1: μ_1-$\mu_2 \neq 0$ een zogenaamde tweezijdige toets. Als de alternatieve hypothese H_1: μ_1-$\mu_2 > 0$ is of H_1: μ_1-$\mu_2 < 0$, dan hebben we een eenzijdige test.

2. De kans op verwerping van de nulhypothese is gelijk aan het significantieniveau, dus $\Pr[T \in R | H_0] = \alpha$. De notatie $\Pr[A|B]$ staat voor de voorwaardelijke kans op gebeurtenis A als gebeurtenis B zich voordoet.

Fouten bij hypothesetesten

Bij het testen van hypothesen gebruiken we de begrippen fouten van Type I en Type II om de gevallen te definiëren waarin een ware hypothese wordt verworpen of een foute hypothese wordt geaccepteerd (niet verworpen). Stel T = waarde van teststatistiek, R = verwerpingsgebied, A = acceptatiegebied, dus $R \cap A = \varnothing$ en $R \cup A = \Omega$, waarbij jΩ = de parameterruimte voor T en $\varnothing$ = de lege verzameling. De kans dat er een fout van Type I of Type II wordt gemaakt, is de volgende:

Een ware hypothese verwerpen, Pr[Type I error] = $\Pr[T \in R | H_0] = \alpha$
Een foute hypothese niet verwerpen, Pr[Type II error] = $\Pr[T \in A | H_1] = \beta$

We nemen nu alleen de gevallen waarin we de juiste beslissing maken:

Een ware hypothese niet verwerpen, Pr[Not(Type I error)] = $\Pr[T \in A | H_0] = 1 - \alpha$

Een foute hypothese verwerpen, Pr[Not(Type II error)] = $\Pr [T \in R | H_1] = 1 - \beta$

Het complement van β noemen we de macht van de toets van de nulhypothese H_0 vs. de alternatieve H_1. De macht van een toets wordt bijvoorbeeld gebruikt om een minimale steekproefgrootte te bepalen om zo fouten te beperken.

Waarden α en β selecteren

Een typische waarden voor het significantieniveau (of kans op een fout van Type I) is $\alpha = 0.05$, (dus gemiddeld één onjuiste verwerping op 20). Als de gevolgen van een fout van Type I ernstiger zijn, kunt u beter kleinere waarden van α kiezen, dus 0.01 of zelfs 0.001.

De waarde van β, dus de kans op een fout van Type II, is afhankelijk van α, de steekproefgrootte n en van de werkelijke waarde van de getoetste parameter. De waarde van β wordt bepaald nadat de hypothese is getests.

Meestal maken we een grafiek waarin β of de kracht van de toets (1- β) wordt weergegeven als een functie van de werkelijke waarde van de getestte parameter. Deze grafieken noemen we respectievelijk de curven van de keuringskarakteristiek of de machtsfunctiecurven.

Inferenties voor een gemiddelde

<u>Tweezijdige hypothese</u>

Het probleem is het toetsen van de nulhypothese H_o: $\mu = \mu_o$, tegen de alternatieve hypothese H_1: $\mu \neq \mu_o$ op een betrouwbaarheidsniveau $(1-\alpha)100\%$ of significatieniveau α, met een steekproef van grootte n met een gemiddelde $\bar{x}$ en een standaardafwijking s. Deze toets noemen we een tweezijdige toets. De procedure van deze toets is als volgt:

We berekenen eerst de juiste statistiek voor de toets (t_o of z_o), dat doen we als volgt:

- Als n < 30 en de standaardafwijking van de populatie, σ, is bekend, dan gebruiken we
$$z_o = \frac{\bar{x} - \mu_o}{\sigma / \sqrt{n}}$$
- Als n > 30 en σ is bekend, dan gebruiken we z_o zoals hierboven. Als σ niet bekend is, vervangen we s door σ in z_o, dus gebruiken we
$$z_o = \frac{\bar{x} - \mu_o}{s / \sqrt{n}}$$
- Als n < 30 en s is onbekend, gebruiken we de t-statistiek $t_o = \dfrac{\bar{x} - \mu_o}{s / \sqrt{n}}$, met ν = n - 1 vrijheidsgraden.

Bereken daarna de P-waarde (een kans) voor z_o of t_o en vergelijk deze met α om te beslissen of de nulhypothese wordt verworpen of niet. De P-waarde voor een tweezijdige toets worden gedefinieerd als

$$\text{P-waarde} = P(|z|>|z_o|) \text{ of P-waarde} = P(|t|>|t_o|).$$

De criteria voor het toetsen van de hypothese zijn:

- Verwerp H_o als P-waarde < α
- Verwerp H_o niet als P-waarde > α.

De P-waarde voor een tweezijdige toets kan als volgt worden berekend met de kansfuncties in de rekenmachine:

- Met z, P-waarde = $2\cdot$UTPN(0,1,$|z_o|$)
- Met t, P-waarde = $2\cdot$UTPT(ν,$|t_o|$)

<u>Voorbeeld 1</u> -- Toets de nulhypothese H_o: μ = 22.5 (= μ_o) tegen de alternatieve hypothese, H_1: $\mu \neq 22.5$, op een betrouwbaarheidsniveau van 95%, dus α = 0.05, met een steekproef van grootte n = 25 met een gemiddelde $\bar{x}$ = 22.0 en een standaardafwijking s = 3.5. We gaan er hierbij vanuit dat we de waarde van de standaardafwijking van de populatie niet kennen en dus berekenen we een t-statistiek als volgt:

$$t_o = \frac{\bar{x}-\mu_o}{s/\sqrt{n}} = \frac{22.0-22.5}{3.5/\sqrt{25}} = -0.7142$$

De bijbehorende P-waarde voor n = 25 - 1 = 24 vrijheidsgraden is

$$\text{P-waarde} = 2\cdot\text{UTPT}(24,-0.7142) = 2\cdot 0.7590 = 1.5169,$$

omdat 1.5169 > 0.05, dus P-waarde > α, kunnen we nulhypothese H_o niet verwerpen: μ = 22.0.

<u>Eenzijdige hypothese</u>

Het probleem is het toetsen van de nulhypothese H_o: $\mu = \mu_o$, tegen de alternatieve hypothese, H_1: $\mu > \mu_o$ of H_1: $\mu < \mu_o$ op een betrouwbaarheidsniveau (1-α)100% of significantieniveau α, met een steekproef van grootte n met een gemiddelde x en een standaardafwijking s. Deze toets noemen we een eenzijdige toets. De procedure voor het uitvoeren van een eenzijdige toets begint net als de tweezijdige toets met het berekenen van de juiste statistiek voor de toets (t_o of z_o), zoals hierboven wordt aangegeven.

Daarna gebruiken we de P-waarde met z_o of t_o en vergelijken we deze met α om te beslissen of de nulhypothese wordt verworpen of niet. De P-waarde voor een tweezijdige toets worden gedefinieerd als

$$\text{P-waarde} = P(z > |z_o|) \text{ of P-waarde} = P(t > |t_o|).$$

De criteria voor het toetsen van de hypothese zijn:

- Verwerp H_o als P-waarde < α
- Verwerp H_o niet als P-waarde > α.

U ziet dat de criteria precies hetzelfde zijn als voor de tweezijdige toets. Het grootste verschil is de manier waarop de P-waarde wordt berekend. De P-waarde voor een eenzijdige toets kan als volgt worden berekend met de kansfuncties in de rekenmachine:

- Met z, P-waarde = UTPN(0,1,z_o)
- Met t, P-waarde = UTPT(ν,t_o)

Voorbeeld 2 – Toets de nulhypothese H_o: μ = 22.0 (= μ_o) tegen de alternatieve hypothese, H_1: μ >22.5, op een betrouwbaarheidsniveau van 95%, dus α = 0.05, met een steekproef van grootte n = 25 met een gemiddelde $\bar{x}$ = 22.0 en een standaardafwijking s = 3.5. We gaan er weer vanuit dat we de waarde van de standaardafwijking van de populatie niet weten. Daarom is de waarde van de t-statistiek hetzelfde als bij de tweezijdige toets (hierboven), dus t_o = -0.7142 en de P-waarde voor ν = 25 - 1 = 24 vrijheidsgraden is

$$\text{P-waarde= UTPT(24, |-0.7142|) = UTPT(24, 0.7124) = 0.2409},$$

omdat 0.2409 > 0.05, dus P-waarde > α, kunnen we nulhypothese H_o niet verwerpen: μ = 22.0.

Inferenties met twee gemiddelden

De nulhypothese die moet worden getest is H_o: μ_1-μ_2 = δ, met een betrouwbaarheidsniveau (1-α)100% of significantieniveau α, met twee steekproeven van grootte, n_1 en n_2, gemiddelde waarden $\bar{x}_1$ en $\bar{x}_2$, en standaardafwijkingen s_1 en s_2. Als de standaardafwijkingen van de populatie voor de steekproeven, σ_1 en σ_2, bekend zijn of als $n_1 > 30$ en $n_2 > 30$ (grote steekproeven), dan moet de volgende teststatistiek gebruikt worden:

$$z_o = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Als $n_1 < 30$ of $n_2 < 30$ (bij tenminste één kleine steekproef), gebruiken we de volgende teststatistiek:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta}{\sqrt{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

<u>Tweezijdige hypothese</u>

Als de alternatieve hypothese een tweezijdige hypothese is, dus H_1: μ_1-$\mu_2 \neq \delta$, dan wordt de P-waarde voor deze toets berekend als

- Met z, P-waarde = 2·UTPN(0,1,|z_o|)
- Met t, P-waarde = 2·UTPT(ν,|t_o|)

waarbij de vrijheidsgraden voor de t-verdeling worden gegeven als $\nu = n_1 + n_2 - 2$. De toetscriteria zijn

- Verwerp H_o als P-waarde < α
- Verwerp H_o niet als P-waarde > α.

<u>Eenzijdige hypothese</u>

Als de alternatieve hypothese een tweezijdige hypothese is, dus H_1: μ_1-$\mu_2 > \delta$ of H_1: μ_1-$\mu_2 < \delta$, dan wordt de P-waarde voor deze toets berekend als:

- Met z, P-waarde = UTPN(0,1, $|z_o|$)
- Met t, P-waarde = UTPT(ν, $|t_o|$)

De criteria voor het toetsen van de hypothese zijn:

- Verwerp H_o als P-waarde < α
- Verwerp H_o niet als P-waarde > α.

Toetsen van gepaarde steekproeven

Als we werken met twee steekproeven van grootte n met gepaarde gegevenspunten, toetsen we niet de nulhypothese, H_o: μ_1-μ_2 = δ, met de gemiddelde waarden en de standaardafwijkingen van de twee steekproeven, maar moeten we het probleem benaderen als een enkele steekproef van de verschillen van de gepaarde waarden. We moeten dus een nieuwe willekeurige variabele genereren, $X = X_1\text{-}X_2$ en H_o: $\mu = \delta$, waarbij μ staat voor het gemiddelde van de populatie voor X. We moeten daarom $\bar{x}$ en s krijgen voor de steekproef van waarden van x. De toets moet daarna worden verwerkt als een toets met een steekproef met de methoden die we eerder hebben behandeld.

Inferenties met een proportie

Stel dat we de nulhypothese, H_0: $p = p_0$ willen toetsen, waarbij p staat voor de kans dat we een succesvolle uitkomst in een herhaling van een Bernoulli-proef halen. Als we de hypothese willen toetsen, voeren we n herhalingen uit van het experiment en vinden we dat er k succesvolle uitkomsten worden geleverd. Een schatting van p wordt dus gegeven als $p' = k/n$.
De variantie voor de steekproef wordt geschat als $s_p^2 = p'(1\text{-}p')/n = k\cdot(n\text{-}k)/n^3$.

Stel dat de Z-score, $Z = (p\text{-}p_0)/s_p$, de standaard normale verdeling volgt, dus $Z \sim N(0,1)$. De specifieke waarde van de statistiek die wordt getoetst, is $z_0 = (p'\text{-}p_0)/s_p$.

We gebruiken de P-waarde nu niet als een criterium voor het accepteren of niet accepteren van de hypothese, maar we gebruiken de vergelijking tussen de kritieke waarde van z0 en de waarde van z die overeenkomt met α of $\alpha/2$.

Tweezijdige toets

Als we een tweezijdige toets gebruiken, vinden we de waarde van $z_{\alpha/2}$ uit

$$\Pr[Z> z_{\alpha/2}] = 1\text{-}\Phi(z_{\alpha/2}) = \alpha/2 \text{ of } \Phi(z_{\alpha/2}) = 1\text{-} \alpha/2,$$

waarbij $\Phi(z)$ de cumulatieve verdelingsfunctie (CDF) van de standaard normale verdeling is (zie hoofdstuk 17).

Verwerp de nulhypothese, H_0, als $z_0 > z_{\alpha/2}$ of als $z_0 < - z_{\alpha/2}$.

Het verwerpingsgebied is dus $R = \{ |z_0| > z_{\alpha/2} \}$, terwijl het acceptatiegebied $A = \{|z_0| < z_{\alpha/2} \}$ is.

Eenzijdige toets

Als we een eenzijdige toets gebruiken, vinden we de waarde van S uit

$$\Pr[Z> z_{\alpha}] = 1\text{-}\Phi(z_{\alpha}) = \alpha \text{ of } \Phi(z_{\alpha}) = 1\text{-} \alpha,$$

Verwerp de nulhypothese, H_0, als $z_0 > z_\alpha$ en H_1: $p>p_0$ of als $z_0 < - z_\alpha$ en H_1: $p<p_0$.

Het verschil tussen twee proporties toetsen

Stel dat we de nulhypothese, H_0: $p_1\text{-}p_2 = p_0$ willen toetsen, waarbij de p's staat voor de kans op een succesvolle uitkomst in een herhaling van een Bernoulli-proef voor twee populaties 1 en 2. Om de hypothese te toetsen voeren we n_1 herhalingen van het experiment uit van populatie 1 en merken we dat er k_1 succesvolle uitkomsten worden behaald. We vinden ook k_2 succesvolle uitkomsten van n_2-proeven in steekproef 2. Er worden dus schattingen van p_1 en p_2 gegeven door respectievelijk $p_1' = k_1/n_1$ en $p_2' = k_2/n_2$.

De varianties voor de steekproeven worden respectievelijk geschat als

$$s_1^2 = p_1'(1\text{-}p_1')/n_1 = k_1\cdot(n_1\text{-}k_1)/n_1^3 \text{ en } s_2^2 = p_2'(1\text{-}p_2')/n_2 = k_2\cdot(n_2\text{-}k_2)/n_2^3.$$

En de variantie van het verschil tussen de proporties wordt geschat uit: $s_p^2 = s_1^2 + s_2^2$.

Stel dat de Z-score, $Z = (p_1-p_2-p_0)/s_p$, de standaard normale verdeling volgt, dus $Z \sim N(0,1)$. De specifieke waarde van de statistiek die wordt getoetst, is $z_0 = (p_1'-p_2'-p_0)/s_p$.

Tweezijdige toets

Als we een tweezijdige toets gebruiken, vinden we de waarde van $z_{\alpha/2}$ uit

$$\Pr[Z> z_{\alpha/2}] = 1-\Phi(z_{\alpha/2}) = \alpha/2 \text{ of } \Phi(z_{\alpha/2}) = 1- \alpha/2,$$

waarbij $\Phi(z)$ de cumulatieve verdelingsfunctie (CDF) van de standaard normale verdeling is.

Verwerp de nulhypothese, H_0, als $z_0 >z_{\alpha/2}$ of als $z_0 < - z_{\alpha/2}$.

Het verwerpingsgebied is dus $R = \{ |z_0| > z_{\alpha/2}\}$, terwijl het acceptatiegebied $A = \{|z_0| < z_{\alpha/2} \}$ is.

Eenzijdige toets

Als we een eenzijdige toets gebruiken, vinden we de waarde van z_α uit

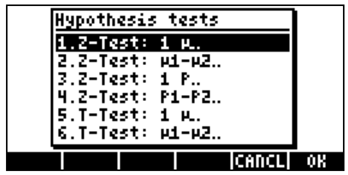
$$\Pr[Z> z_\alpha] = 1-\Phi(z_\alpha) = \alpha \text{ of } \Phi(z_\alpha) = 1- \alpha,$$

Verwerp de nulhypothesen, H_0, als $z_0 >z_\alpha$ en H_1: $p_1-p_2 > p_0$ of als $z_0 < - z_\alpha$, en H_1: $p_1-p_2 <p_0$.

Hypothesetoetsing met vooraf geprogrammeerde functies

In de rekenmachine staan de procedures voor hypothesetoetsingen onder toepassing *5. Hypoth. tests..*, toegankelijk met ⓡ STAT ▲ ▲ OK.

Net als met de eerder besproken berekening van betrouwbaarheidsintervallen biedt dit programma de volgende 6 opties:



Deze opties hebben dezelfde betekenis als bij de toepassingen voor betrouwbaarheidsintervallen:

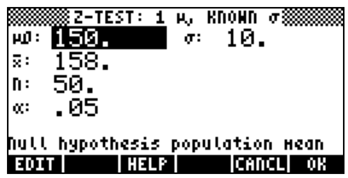
1. Z-Test: 1 μ. : Hypothesetesten van een steekproef voor het populatiegemiddelde μ met bekende populatievariantie of voor grote steekproeven met een onbekende populatievariantie.
2. Z-Test: $\mu 1 - \mu 2$. : Hypothesetesten voor het verschil van het populatiegemiddelden μ_1- μ_2 met bekende populatievarianties of voor grote steekproeven met onbekende populatievarianties.
3. Z-Test: 1 p. : Hypothesetesten van een steekproef voor de proportie p voor grote steekproeven met een onbekende populatievariantie.
4. Z-Test: p1– p2. : Hypothesetesten voor het verschil van twee proporties p_1-p_2 voor grote steekproeven met onbekende populatievarianties.
5. T-Test: 1 μ. : Hypothesetesten van een steekproef voor het populatiegemiddelde μ voor kleine steekproeven met een onbekende variantie.
6. T-Test: $\mu 1 - \mu 2$. : Hypothesetesten voor het verschil van het populatiegemiddelde μ_1- μ_2 voor kleine steekproeven met onbekende populatievarianties.

Probeer de volgende oefeningen:

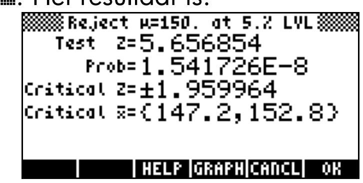
<u>Voorbeeld 1</u> – Voor μ_0 = 150, σ = 10, $\bar{x}$ = 158, n = 50 en voor α = 0.05 toets de hypothese H_0: $\mu = \mu_0$, tegen de alternatieve hypothese H_1: $\mu \neq \mu_0$.

Druk op ↱ STAT ▲ ▲ OK voor toegang tot de functie betrouwbaarheidsinterval in de rekenmachine. Druk op OK om optie 1 te selecteren. Z-Test: 1 μ.

Voer de volgende gegevens in en druk op OK:

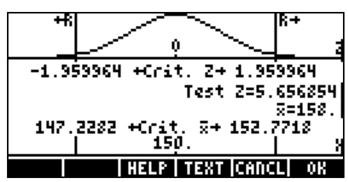


Dan wordt u gevraagd de alternatieve hypothese te selecteren. Selecteer μ ≠ 150. Druk dan op OK. Het resultaat is:



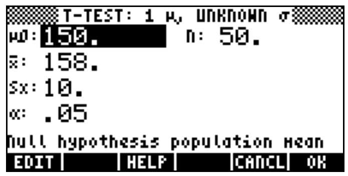
Dan verwerpen we H_0: $\mu = 150$ tegen H_1: $\mu \neq 150$. De test z-waarde is z_0 = 5.656854. De P-waarde is 1.54×10^{-8}. De kritieke waarden van $\pm z_{\alpha/2}$ = ±1.959964 wat overeenkomt met het kritieke x-bereik van {147.2 152.8}.

Deze informatie kan grafisch worden bekeken door op de softmenutoets GRAPH te drukken:

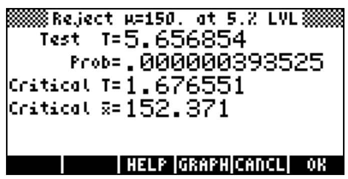


Voorbeeld 2 – Voor μ_0 = 150, $\bar{x}$ = 158, s = 10, n = 50, voor α = 0.05, toets de hypothese H_0: $\mu = \mu_0$, tegen de alternatieve hypothese H_1: $\mu > \mu_0$. De standaardafwijking van de populatie, σ, is niet bekend.

Druk op ↱ STAT ▲ ▲ OK om de functie betrouwbaarheidsinterval te activeren in de rekenmachine. Druk op ▲ ▲ OK voor selectie van optie 5. T-Test: 1 μ.:
Voer de volgende gegevens in en druk op OK:

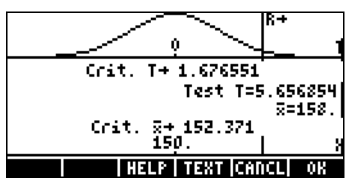


Selecteer de alternatieve hypothese, H_1: μ > 150 en druk op OK. Het resultaat is:



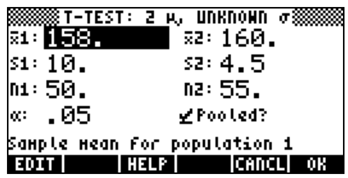
We verwerpen de nulhypothese, H_0: μ_0 = 150, tegen de alternatieve hypothese, H_1: μ > 150. De t-waarde van de toets is t_0 = 5.656854, met een P-waarde = 0.000000393525. De kritieke waarde van t is t_α = 1.676551, overeenkomstig de kritieke $\bar{x}$ = 152.371.

Druk op GRAPH om de resultaten als volgt in een grafiek te zien:

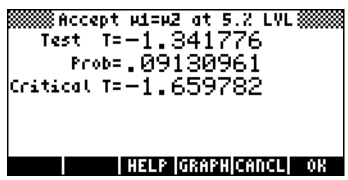


Voorbeeld 3 – Gegevens van twee steekproeven toont dat $\bar{x}_1$ = 158, $\bar{x}_1$ = 160, s_1 = 10, s_2 = 4.5, n1 = 50 en n_2 = 55. Voor α = 0.05 en een "gepoolde" variantie, toetsen we de hypothese H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$, tegen de alternatieve hypothese, H_1: $\mu_1 - \mu_2 < 0$.

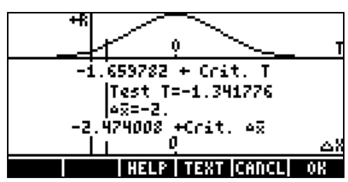
Druk op → STAT ▲ ▲ OK voor toegang tot de functie betrouwbaarheidsinterval in de rekenmachine. Druk op ▲ OK voor selectie van optie 6. T-Test: μ1–μ2.: Voer de volgende gegevens in en druk op OK:



Selecteer de alternatieve hypothese μ1< μ2 en druk op OK. Het resultaat is



We accepteren (of beter, we de hypothese verwerpen niet) de hypothese: H_0: $\mu_1-\mu_2 = 0$ of H_0: $\mu_1=\mu_2$, tegen de alternatieve hypothese H_1: $\mu_1-\mu_2 < 0$ of H_1: $\mu_1=\mu_2$. De t-waarde van de toets is t_0 = -1.341776, met een P-waarde = 0.09130961 en kritieke t is $-t_\alpha$ = -1.659782. De grafische resultaten zijn:



Deze drie voorbeelden moeten voldoende zijn om de handeling van de vooraf geprogrammeerde functie voor hypothesetoetsing in de rekenmachine te begrijpen.

Inferenties met een variantie

De nulhypothese die moet worden getoetst is H_o: $\sigma^2 = \sigma_o^2$, met een betrouwbaarheidsniveau $(1-\alpha)100\%$ of een significantieniveau α, met een steekproef van grootte n en variantie s^2. We gebruiken als toetsstatistiek een chi-kwadraat toetsstatistiek die wordt gedefinieerd als

$$\chi_o^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

Afhankelijk van de gekozen alternatieve hypothese wordt de P-waarde als volgt berekend:

- H_1: $\sigma^2 < \sigma_o^2$, P-waarde = $P(\chi^2<\chi_o^2)$ = 1-UTPC(ν,χ_o^2)
- H_1: $\sigma^2 > \sigma_o^2$, P-waarde = $P(\chi^2>\chi_o^2)$ = UTPC(ν,χ_o^2)
- H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_o^2$, P-waarde =2·min[$P(\chi^2<\chi_o^2)$, $P(\chi^2>\chi_o^2)$] = 2·min[1-UTPC(ν,χ_o^2), UTPC(ν,χ_o^2)]

waarbij de functie min[x,y] de minimumwaarde geeft van x of y (hetzelfde geldt voor max[x,y], die de maximumwaarde van x of y geeft). UTPC(ν,x) staat voor de bovenste kansen voor ν = n - 1 vrijheidsgraden.

De toetscriteria zijn dezelfde als bij de hypothesetoetsing van de gemiddelden, namelijk

- Verwerp H_o als P-waarde < α
- Verwerp H_o niet als P-waarde > α.

Let op: deze procedure is alleen geldig als de populatie waaruit de steekproef werd genomen een Normale populatie is.

<u>Voorbeeld 1</u> – Neem het geval waarbij $\sigma_o^2 = 25$, α=0.05, n = 25 en $s^2 = 20$, en de steekproef werd uit een normale populatie genomen. Voor het toetsen van de hypothese, H_o: $\sigma^2 = \sigma_o^2$ tegen H_1: $\sigma^2 < \sigma_o^2$, berekenen we eerst

$$\chi_o^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(25-1)\cdot 20}{25} = 189.2$$

Met ν = n - 1 = 25 - 1 = 24 vrijheidsgraden berekenen we de P-waarde als

$$\text{P-waarde} = P(\chi^2<19.2) = 1\text{-UTPC}(24,19.2) = 0.2587\ldots$$

Omdat 0.2587… > 0.05, dus P-waarde > α, kunnen we nulhypothese H_o niet verwerpen: H_o: $\sigma^2 = 25 (= \sigma_o^2)$.

Inferenties met twee varianties

De nulhypothese die moet worden getest, is H_o: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, op een betrouwbaarheidsniveau $(1-\alpha)100\%$ of significantieniveau α, met twee steekproeven van grootten, n_1 en n_2, en varianties s_1^2 en s_2^2. We gebruiken als toetsstatistiek een F-teststatistiek die wordt gedefinieerd als

$$F_o = \frac{s_N^2}{s_D^2}$$

waarbij s_N^2 en s_D^2 staan voor respectievelijk de teller en noemer van de F-statistiek. De selectie van de teller en noemer is afhankelijk van de alternatieve hypothese die wordt getoetst, zie hieronder. De bijbehorende F-verdeling heeft vrijheidsgraden, $\nu_N = n_N-1$ en $\nu_D = n_D-1$, waarbij n_N en n_D de steekproefgrootten zijn die overeenkomen met respectievelijk de varianties s_N^2 en s_D^2.

De volgende tabel toont hoe de teller en de noemer voor F_o worden geselecteerd, afhankelijk van de gekozen alternatieve hypothese:

Alternatieve hypothese	*Test statistiek*	*Vrijheids graden*
H_1: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ (eenzijdig)	$F_o = s_2^2/s_1^2$	$\nu_N = n_2-1$, $\nu_D = n_1-1$
H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ (eenzijdig)	$F_o = s_1^2/s_2^2$	$\nu_N = n_1-1$, $\nu_D = n_2-1$
H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (tweezijdig)	$F_o = s_M^2/s_m^2$ $s_M^2=\max(s_1^2,s_2^2)$, $s_m^2=\min(s_1^2,s_2^2)$	$\nu_N = n_M-1$, $\nu_D = n_m-1$

(*) n_M is de waarde van n die overeenkomt met de s_M, en n_m is de waarde van n die overeenkomt met s_m.

De P-waarde wordt in alle gevallen berekend als: P-waarde = $P(F>F_o)$ = $UTPF(\nu_N, \nu_D, F_o)$

De toetscriteria zijn:

- Verwerp H_o als P-waarde < α
- Verwerp H_o niet als P-waarde > α.

Voorbeeld – Neem bijvoorbeeld twee steekproeven die uit normale populaties worden gehaald, zodat $n_1 = 21$, $n_2 = 31$, $s_1^2 = 0.36$ en $s_2^2 = 0.25$. We toetsen de nulhypothese, H_o: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ op een significantieniveau $\alpha = 0.05$, tegen de alternatieve hypothese, H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Voor een tweezijdige hypothese moeten we s_M en s_m als volgt identificeren:

$$s_M^2=\max(s_1^2,s_2^2) = \max(0.36,0.25) = 0.36 = s_1^2$$
$$s_m^2=\min(s_1^2,s_2^2) = \min(0.36, 0.25) = 0.25 = s_2^2$$

Ook

$$n_M = n_1 = 21,$$
$$n_m = n_2 = 31,$$
$$\nu_N = n_M - 1= 21-1=20,$$
$$\nu_D = n_m -1 = 31-1 =30.$$

Daarom is de F-teststatistiek $F_o = s_M^2/s_m^2=0.36/0.25=1.44$

De P-waarde is P-waarde = $P(F>F_o)$ = $P(F>1.44)$ = $UTPF(\nu_N, \nu_D,F_o)$ = $UTPF(20,30,1.44) = 0.1788…$

Omdat 0,1788… > 0,05, dus P-waarde > α, kunnen we de nulhypothese H_o: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ dus niet verwerpen.

Extra opmerkingen over lineaire regressie

In dit deel gaan we verder met lineaire regressie, dat we eerder in dit hoofdstuk hebben gezien, en geven we een procedure voor hypothesetoetsing van regressieparameters.

De methode van kleinste kwadraat

Stel dat x = onafhankelijke, niet-willekeurige variabele en Y = afhankelijke, willekeurige variabele. De regressiecurve van Y op x wordt gedefinieerd als de relatie tussen x en het gemiddelde van de bijbehorende verdeling van de Y's.

Stel dat de regressiecurve van Y op x lineair is, dus de gemiddelde verdeling van Y's wordt gegeven als A + Bx. Y verschilt van het gemiddelde (A + B·x) door een waarde ε, dus Y = A + B·x + ε, waarbij ε een willekeurige variabele is.

Teken een puntdiagram of een puntgrafiek om te controleren of de gegevens een lineaire trend volgen.

Stel dat we n gepaarde observaties (x_i, y_i) hebben; dan voorspellen we y met ^y = a + b·x, waarbij a en b constant zijn.

Definieer de <u>voorspellingsfout</u> als $e_i = y_i - \hat{}y_i = y_i - (a + b\cdot x_i)$.

Voor de methode van kleinste kwadraat moeten we a, b kiezen om de SSE-fouten (Sum of Squared Errors) te minimaliseren

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2$$

de voorwaarden

$$\frac{\partial}{\partial a}(SSE) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial b}(SSE) = 0$$

We krijgen de zogenaamde normale vergelijkingen:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a \cdot n + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Dit is een stelsel van lineaire vergelijkingen met a en b als de onbekenden, die kunnen worden opgelost met de functie lineaire vergelijking van de rekenmachine. We hoeven deze berekeningen echter niet te maken omdat we de optie **3. Fit Data …** in het menu ↱ STAT kunnen gebruiken zoals we eerder konden zien.

Opmerking:

- a,b zijn zuivere schatters van A, B.
- De theorie van Gauss-Markov van kans geeft aan dat er van alle zuivere schatters voor A en B de kleinste-kwadraatschatters (a,b) het meest efficiënt zijn.

Extra vergelijkingen voor lineaire regressie

De samenvattende statistieken zoals Σx, Σx^2, enz. kunnen worden gebruikt om de volgende hoeveelheden te definiëren:

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = (n-1)\cdot s_x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = (n-1)\cdot s_y^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i{}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})^2 = (n-1)\cdot s_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

Hieruit volgt dat de standaardafwijkingen van x en y, en de covariantie van x,y worden gegeven door respectievelijk

$$s_x = \sqrt{\frac{S_{xx}}{n-1}}\ ,\ s_y = \sqrt{\frac{S_{yy}}{n-1}}\ \text{en}\ s_{xy} = \frac{S_{yx}}{n-1}$$

Daarnaast is de coëfficiënt van de steekproefcorrelatie $r_{xy} = \dfrac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}\cdot S_{yy}}}$.

Met betrekking tot $\overline{x}$, $\overline{y}$, S_{xx}, S_{yy} en S_{xy} is de oplossing voor de normale vergelijkingen:

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \ , \quad b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

Voorspellingsfout

De regressiecurve van Y op x wordt gedefinieerd als Y = $A + B \cdot x + \varepsilon$. Als we een verzameling van n gegevenspunten (x_i, y_i) hebben, dan kunnen we schrijven $Y_i = A + B \cdot x_i + \varepsilon_I$, (i = 1,2,…,n), waarbij Y_i = onafhankelijke, normale willekeurige variabelen met gemiddelde ($A + B \cdot x_i$) en de gemeenschappelijke variantie σ^2; ε_i = onafhankelijke, normaal verdeelde willekeurige variabelen met gemiddelde nul en de gemeenschappelijke variantie σ^2.

Stel dat y_i = werkelijke gegevenswaarde, $\hat{y}_i = a + b \cdot x_i$ = kleinste-kwadraatvoorspelling van de gegevens. Dan is de voorspellingsfout: $e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (a + b \cdot x_i)$.

Een schatting van σ^2 is de zogenaamde standaard schattingsfout

$$s_e^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}[y_i - (a + bx_i)]^2 = \frac{S_{yy} - (S_{xy})^2 / S_{xx}}{n-2} = \frac{n-1}{n-2} \cdot s_y^2 \cdot (1 - r_{xy}^2)$$

Betrouwbaarheidsintervallen en hypothesetoetsing in lineaire regressie

Hier volgen enkele concepten en vergelijkingen met betrekking tot statistische inferentie voor lineaire regressie:

- Betrouwbaarheidsgrenzen voor regressiecoëfficiënten:
  Voor de richtingscoëffiënt (B): $b - (t_{n-2,\alpha/2}) \cdot s_e / \sqrt{S_{xx}} < B < b + (t_{n-2,\alpha/2}) \cdot s_e / \sqrt{S_{xx}}$,
  Voor het snijpunt (A):
  $a - (t_{n-2,\alpha/2}) \cdot s_e \cdot [(1/n) + \bar{x}^2/S_{xx}]^{1/2} < A < a + (t_{n-2,\alpha/2}) \cdot s_e \cdot [(1/n) + \bar{x}^2/S_{xx}]^{1/2}$,
  waarbij t de Student-t-verdeling volgt met $\nu = n - 2$, vrijheidsgraden, en n staat voor het aantal punten in de steekproef.

- Hypothesetoetsing op de richtingscoëffiënt, B:
  Nulhypothese, H_0: $B = B_0$, getoetst tegen de alternatieve hypothese, H_1: $B \neq B_0$. De teststatistiek is $t_0 = (b - B_0)/(s_e/\sqrt{S_{xx}})$, waarbij t de Student-t-verdeling volgt met $\nu = n - 2$, vrijheidsgraden, en n staat voor het aantal punten in de steekproef. De toets wordt uitgevoerd als die van een hypothesetoetsing voor een gemiddelde waarde, dus met het significantieniveau α, bepalen we de kritieke waarden van t, $t_{\alpha/2}$, daarna verwerpen we H_0 als $t_0 > t_{\alpha/2}$ of als $t_0 < - t_{\alpha/2}$.

  Als u toetst voor de waarde B_0= 0 en nu blijkt dat de toets voorstelt dat u de nulhypothese, H_0: $B = 0$ niet verwerpt, dan wordt de geldigheid van een lineaire regressie in twijfel getrokken. De steekproefgegevens ondersteunen de veronderstelling $B \neq 0$ dus niet. Daarom is dit een toets van de significantie van het regressiemodel.

- Hypothesetoetsing op het snijpunt, A:
  Nulhypothese, H_0: $A = A_0$, getoetst tegen de alternatieve hypothese, H_1: $A \neq A_0$. De teststatistiek is $t_0 = (a-A_0)/[(1/n)+ \bar{x}^2/S_{xx}]^{1/2}$, waarbij t de student-t-verdeling volgt met $\nu = n - 2$, vrijheidsgraden, en n staat voor het aantal punten in de steekproef. De toets wordt uitgevoerd als die van een hypothesetoetsing voor een gemiddelde waarde, dus met het significantieniveau α bepalen we de kritieke waarden van t, $t_{\alpha/2}$, daarna verwerpen we H_0 als $t_0 > t_{\alpha/2}$ of als $t_0 < - t_{\alpha/2}$.

- Het betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde waarde van Y bij x = x_0, dus $\alpha+\beta x_0$:
  $$a+b\cdot x-(t_{n-2,\alpha/2})\cdot s_e\cdot[(1/n)+(x_0- \bar{x})^2/S_{xx}]^{1/2} < \alpha+\beta x_0 <$$
  $$a+b\cdot x+(t_{n-2, \alpha/2})\cdot s_e\cdot[(1/n)+(x_0- \bar{x})^2/S_{xx}]^{1/2}.$$

- Voorspellingsgrenzen: betrouwbaarheidsinterval voor de voorspelde waarde $Y_0=Y(x_0)$:
  $$a+b\cdot x-(t_{n-2,\alpha/2})\cdot s_e\cdot[1+(1/n)+(x_0- \bar{x})^2/S_{xx}]^{1/2} < Y_0 <$$
  $$a+b\cdot x+(t_{n-2, \alpha/2})\cdot s_e\cdot[1+(1/n)+(x_0- \bar{x})^2/S_{xx}]^{1/2}.$$

Procedure voor inferentiestatistieken van lineaire regressie met de rekenmachine

1) Voer (x,y) in als kolommen gegevens in de statistische matrix ΣDAT.
2) Maak een puntgrafiek voor de juiste kolommen van ΣDAT en gebruik de juiste H- en V-VIEWS om de lineaire trend te controleren.
3) Gebruik ⬏ STAT ▼ ▼ OK om de rechte lijn aan te passen en a, b, s_{xy} (Covariantie) en r_{xy} (Correlatie) te krijgen.
4) Gebruik ⬏ STAT ▼ OK om $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_x, s_y te krijgen. In kolom 1 staan de statistieken voor x, terwijl in kolom 2 de statistieken voor y staan.
5) Bereken

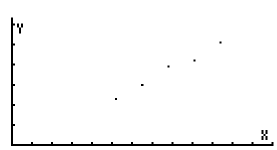
$$S_{xx} = (n-1)\cdot s_x^2, \quad s_e^2 = \frac{n-1}{n-2}\cdot s_y^2 \cdot (1-r_{xy}^2)$$

6) Voor zowel betrouwbaarheidsintervallen als tweezijdige toetsen krijgt u $t_{\alpha/2}$, met een betrouwbaarheid (1- α)100%, uit de t-verdeling met ν = n -2.
7) Zoek voor een- of tweezijdige toetsen de waarde van t met de juiste vergelijking voor A of B. Verwerp de nulhypothese als `P-value` < α.
8) Gebruik voor betrouwbaarheidsintervallen de juiste formules (zie hierboven).

Voorbeeld 1 -- Bepaal voor de volgende (x,y)-gegevens het betrouwbaarheidsinterval van 95% voor de richtingscoëffiënt B en het snijpunt A

x	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
y	5.5	7.2	9.4	10.0	12.2

Voer de (x,y)-gegevens in respectievelijk kolommen 1 en 2 van ΣDAT in. Een puntgrafiek van de gegevens toont een goede lineaire trend:



Gebruik de optie `Fit Data..` in het menu ⤴ STAT voor het volgende:

```
3: '-.86 + 3.24*X'
2: Correlation: 0.989720229749
1: Covariance: 2.025
```

Deze resultaten worden geïnterpreteerd als a = -0.86, b = 3.24, r_{xy} = 0.989720229749 en s_{xy} = 2.025. De correlatiecoëfficiënt ligt dicht genoeg bij 1,0 om de lineaire trend uit de grafiek te bevestigen.

Via de optie `Single-var…` van het menu ⤴ STAT menu vinden we: $\bar{x}$ = 3, s_x = 0.790569415042, $\bar{y}$ = 8.86, s_y = 2.58804945857.

Bereken daarna met n = 5

$$S_{xx} = (n-1)\cdot s_x^2 = (5-1)\cdot 0.790569415042^2 = 2.5$$

$$s_e^2 = \frac{n-1}{n-2}\cdot s_y^2 \cdot (1-r_{xy}^2) =$$

$$\frac{5-1}{5-2}\cdot 2.5880...^2 \cdot (1-0.9897...^2) = 0.1826...$$

Betrouwbaarheidsintervallen voor de richtingscoëffiënt (B) en het snijpunt (A):

- We krijgen eerst $t_{n-2,\alpha/2} = t_{3,0.025}$ = 3.18244630528 (zie hoofdstuk 17 voor een programma om $t_{\nu,\alpha}$ op te lossen):
- Daarna berekenen we de termen

  $(t_{n-2,\alpha/2})\cdot s_e/\sqrt{S_{xx}}$ = 3.182…·(0.1826…/2.5)$^{1/2}$ = 0.8602…

  $(t_{n-2,\alpha/2})\cdot s_e\cdot[(1/n)+ \bar{x}^2/S_{xx}]^{1/2}$ =
  3.1824…·√0.1826…·[(1/5)+3^2/2.5]$^{1/2}$ = 2.65

- Uiteindelijk is het betrouwbaarheidsinterval van 95% voor de richtingscoëffiënt B het volgende:

  (-0.86-0.860242, -0.86+0.860242) = (-1.72, -0.00024217)

Voor het snijpunt A is het betrouwbaarheidsinterval van 95% (3.24-2.6514, 3.24+2.6514) = (0.58855,5.8914).

Voorbeeld 2 – Stel dat de y-gegevens uit voorbeeld 1 staan voor de verlenging (in honderdsten van een inch) van een metalen draad die dan wordt onderworpen aan een kracht x (in tienden van ponden). Het fysieke fenomeen is zodanig dat we verwachten dat het snijpunt, A, nul is. Om te controleren of dit waar is, toetsen we de nulhypothese, H_0: $A = 0$, tegen de alternatieve hypothese, H_1: $A \neq 0$, op het significantieniveau $\alpha = 0.05$.

De teststatistiek is $t_0 = (a\text{-}0)/[(1/n)+ \bar{x}^2/S_{xx}]^{1/2} = (-0.86)/ [(1/5)+3^2/2.5]^{½} = -0.44117$. De kritieke waarde van t, voor $\nu = n - 2 = 3$, en $\alpha/2 = 0.025$, kan worden berekend met de numerieke oplosser voor de vergelijking α = UTPT(γ,t) die we in hoofdstuk 17 hebben ontwikkeld. In dit programma staat γ voor de vrijheidsgraden (n-2) en staat α voor de kans op overschrijding van een bepaalde waarden van t, dus Pr[$t>t_\alpha$] = $1 - \alpha$. Voor het huidige voorbeeld is de waarde van het significantieniveau $\alpha = 0.05$, g = 3 en $t_{n-2,\alpha/2} = t_{3,0.025}$. Ook voor $\gamma = 3$ en $\alpha = 0.025$, $t_{n-2,\alpha/2} = t_{3,0.025} = 3.18244630528$. Omdat $t_0 > - t_{n-2,\alpha/2}$ kunnen we de nulhypothese, H_0: $A = 0$ niet verwerpen, tegen de alternatieve hypothese, H_1: $A \neq 0$, op het significantieniveau $\alpha = 0.05$.
Dit resultaat stelt dat A = 0 voor de lineaire regressie acceptabel moet zijn. De waarde die we uiteindelijk voor a hadden gevonden, was –0.86, wat bijna nul is.

Voorbeeld 3 – Significantietoets voor de lineaire regressie. Toets de nulhypothese voor de richtingscoëffiënt H_0: $B = 0$, tegen de alternatieve hypothese, H_1: $B \neq 0$, op het significantieniveau $\alpha = 0.05$, voor de lineaire aanpassing van voorbeeld 1.

De teststatistiek $t_0 = (b - B_0)/(s_e/\sqrt{S_{xx}}) = (3.24\text{-}0)/(\sqrt{0.18266666667/2.5}) = 18.95$. De kritieke waarde van t, voor $\nu = n - 2 = 3$ en $\alpha/2 = 0.025$, kregen we in voorbeeld 2 als $t_{n-2,\alpha/2} = t_{3,0.025} = 3.18244630528$. Omdat $t_0 > t_{\alpha/2}$ moeten we de nulhypothese H_1: $B \neq 0$, op het significantieniveau $\alpha = 0.05$, verwerpen voor de lineaire aanpassing van voorbeeld 1.

Meervoudige lineaire aanpassing

Stel dat u een gegevensverzameling in de volgende vorm heeft

x_1	x_2	x_3	…	x_n	y
x_{11}	x_{21}	x_{31}	…	x_{n1}	y_1
x_{12}	x_{22}	x_{32}	…	x_{n2}	y_2
x_{13}	x_{32}	x_{33}	…	x_{n3}	y_3
.	.	.		.	.
.	.	.	.	.	.
$x_{1,m-1}$	$x_{2,m-1}$	$x_{3,m-1}$	…	$x_{n,m-1}$	y_{m-1}
$x_{1,m}$	$x_{2,m}$	$x_{3,m}$	…	$x_{n,m}$	y_m

Stel dat we een gegevensaanpassing in de vorm $y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + \ldots + b_n \cdot x_n$ zoeken. U krijgt de benadering van het kleinste kwadraat voor de waarden van de coëfficiënten $\mathbf{b} = [b_0 \;\; b_1 \;\; b_2 \;\; b_3 \ldots b_n]$ door samenstelling van de matrix **X:**

$$
\begin{bmatrix}
1 & x_{11} & x_{21} & x_{31} & \ldots & x_{n1} \\
1 & x_{12} & x_{22} & x_{32} & \ldots & x_{n2} \\
1 & x_{13} & x_{32} & x_{33} & \ldots & x_{n3} \\
. & . & . & . & & . \\
. & . & . & . & . & . \\
1 & x_{1,m} & x_{2,m} & x_{3,m} & \ldots & x_{n,m}
\end{bmatrix}
$$

Daarna krijgt u de vector van de coëfficiënten uit $\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{y}$, waarbij **y** vector $\mathbf{y} = [y_1 \, y_2 \ldots y_m]^T$ is.

Gebruik *bijvoorbeeld* de volgende gegevens voor een meervoudige lineaire aanpassing

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_{3,}$$

x_1	x_2	x_3	y
1.20	3.10	2.00	5.70

2.50	3.10	2.50	8.20
3.50	4.50	2.50	5.00
4.00	4.50	3.00	8.20
6.00	5.00	3.50	9.50

Met de rekenmachine kunt u in de RPN-modus als volgt te werk gaan:

Maak eerst in de HOME-directory een subdirectory MPFIT (Multiple linear and Polynomial data FITting; meervoudige lineaire en polynomiale gegevensaanpassing) en ga naar de MPFIT-subdirectory. Voer het volgende programma in de subdirectory in:

```
« → X y « X TRAN X * INV X TRAN * y * » »
```

en sla het op in de variabele MTREG (MulTiple REGression; meervoudige regressie).

Voer vervolgens de matrices **X** en **b** in het stapelgeheugen in:

[[1,1.2,3.1,2][1,2.5,3.1,2.5][1,3.5,4.5,2.5][1,4,4.5,3][1,6,5,3.5]]

`ENTER` `ENTER` (bewaar een extra kopie)

[5.7,8.2,5.0,8.2,9.5] `ENTER`

Druk op `VAR` `MTREG`. Het resultaat is: [-2.1649…,–0.7144…,-1.7850…,7.0941…], dus

$$y = -2.1649–0.7144\cdot x_1 -1.7850\times10^{-2}\cdot x_2 + 7.0941\cdot x_3 .$$

In het stapelgeheugen van de rekenmachine moet de waarde van de matrix X en de vector b staan, de aangepaste waarden van y krijgt u uit **y** = **X**·**b**, dus druk gewoon op `×` om ze te krijgen: [5.63.., 8.25.., 5.03.., 8.23.., 9.45..].

Vergelijk deze aangepaste waarden met de originele gegevens uit de onderstaande tabel:

x_1	x_2	x_3	y	y-aangepast
1.20	3.10	2.00	5.70	5.63
2.50	3.10	2.50	8.20	8.25
3.50	4.50	2.50	5.00	5.03
4.00	4.50	3.00	8.20	8.23
6.00	5.00	3.50	9.50	9.45

Polynomiale aanpassing

We nemen de gegevensverzameling x-y $\{(x_1,y_1), (x_2,y_2), \ldots, (x_n,y_n)\}$. Stel dat we een polynoom willen aanpassen of p willen sorteren in deze gegevensverzameling. We zoeken dus een aanpassing van de vorm $y = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + b_3 \cdot x^3 + \ldots + b_p \cdot x^p$. U krijgt de benadering van het kleinste kwadraat voor de waarden van de coëfficiënten $\mathbf{b} = [b_0 \ \ b_1 \ \ b_2 \ \ b_3 \ldots b_p]$ door samenstelling van de matrix **X**

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots & x_1^{p-1} & y_1^{\,p} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \ldots & x_2^{\,p-1} & y_2^{\,p} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \ldots & x_3^{\,p-1} & y_3^{\,p} \\ . & . & . & . & & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \ldots & x_n^{\,p-1} & y_n^{\,p} \end{bmatrix}$$

Daarna krijgt u de vector van de coëfficiënten uit $\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{y}$, waarbij **y** vector $\mathbf{y} = [y_1\, y_2 \ldots y_n]^T$ is.

In hoofdstuk 10 hebben de Vandermonde-matrix die overeenkomt met een vector $\mathbf{x} = [x_1\ x_2 \ldots x_m]$ gedefinieerd. De Vandermonde-matrix lijkt op de matrix **X** die interessant is voor de polynomiale aanpassing, maar heeft alleen *n* in plaats van *(p+1)* kolommen.

We kunnen de functie VANDERMONDE gebruiken om de matrix **X** te maken als we ons aan de volgende regels houden:

Als $p = n\text{-}1$, $\mathbf{X} = \mathbf{V}_n$.
Als $p < n\text{-}1$, verwijder dan kolommen $p+2, \ldots, n\text{-}1, n$ uit $\mathbf{V}_n$ zodat $\mathbf{X}$ wordt gevormd.
Als $p > n\text{-}1$, voeg dan kolommen $n+1, \ldots, p\text{-}1, p+1$, toe aan $\mathbf{V}_n$ zodat de matrix $\mathbf{X}$ wordt gevormd.

In stap 3 uit deze lijst moeten we erop letten dat de kolom *i* (*i*= $n+1, n+2, \ldots, p+1$) de vector $[x_1^i\ x_2^i \ldots x_n^i]$ is. Als we een lijst met gegevenswaarden voor x in plaats van een vector gebruiken, dus $\mathbf{x} = \{ x_1\ x_2 \ldots x_n \}$, dan kunnen we de volgorde eenvoudig berekenen $\{ x_1^i\ x_2^i \ldots x_n^i \}$. We kunnen deze lijst dan omzetten in een vector en het menu COL gebruiken om deze kolommen aan de matrix $\mathbf{V}_n$ toe te voegen totdat $\mathbf{X}$ voltooid is.

Als $\mathbf{X}$ klaar is en als de vector $\mathbf{y}$ beschikbaar is, dan is de berekening van de coëfficiëntvector **b** hetzelfde als de meervoudige lineaire aanpassing (de vorige matrixtoepassing). We kunnen dus een programma schrijven voor het berekenen van de polynomiale aanpassing die voordeel heeft van het programma dat al voor de meervoudige lineaire aanpassing was ontwikkeld. We moeten de hierboven vermelde stappen 1 tot en met 3 aan het programma toevoegen.

Het *algoritme* voor het programma kan dus als volgt worden geschreven:

Voer de vectoren **x** en **y,** met dezelfde afmeting, in als lijsten. (Opmerking: omdat de functie VANDERMONDE een lijst als invoer gebruikt, is het handiger de gegevens van (x,y) als een lijst in te voeren.) Voer ook de waarde van p in.

- Bepaal n = grootte vector **x**.
- Gebruik de functie VANDERMONDE om de Vandermonde-matrix $\mathbf{V}_n$ te genereren voor de ingevoerde lijst **x**.
- Als $p = n\text{-}1$, dan
  $\mathbf{X} = \mathbf{V}_n$,
  Anders, als $p < n\text{-}1$
    Verwijder de kolommen $p+2, \ldots, n$ uit $\mathbf{V}_n$ om $\mathbf{X}$ te vormen
    (Gebruik een FOR-lus en COL-)

Of

Voeg de kolommen *n+1, …, p+1* toe aan $\mathbf{V}_n$ om **X** te vormen
(FOR-lus, bereken x^i, zet om naar vector, gebruik COL+)

- Zet **y** om in vector
- Bereken **b** met het programma MTREG (zie het voorbeeld voor meervoudige lineaire aanpassing hierboven)

Hier staat de <u>*vertaling van het algoritme*</u> naar een programma in User RPL-taal. (Zie hoofdstuk 21 voor meer informatie over programmeren.):

```
«                              Activeert het programma
 → x y p                       Voert de lijsten x en y en p in (niveaus 3,2,1)
 «                             Achtiveert het subprogramma 1
 x SIZE → n                    Bepaalt de grootte van x-lijst
 «                             Activeert het subprogramma 2
   x VANDERMONDE               Plaatst x in stapelgeheugen, krijgt Vn
   IF 'p<n-1' THEN             Deze IF voert stap 3 in algoritme in
     n                         Plaatst n in stapelgeheugen
     p 2 +                     Berekent p+1
     FOR j                     Startlus j = n-1, n-2, …, p+1, stap = -1
         j  COL– DROP          Verwijdert kolom en haalt deze uit
                               stapelgeheugen
    -1 STEP                    Sluit FOR-STEP-lus
   ELSE
     IF 'p>n-1' THEN
       n 1 +                   Berekent n+1
       p 1 +                   Berekent p+1
       FOR j                   Begint een lus met j = n, n+1, …, p+1.
         x  j  ^               Berekent xj als een lijst
         OBJ→ →ARRY            Zet lijst om in verzameling
         j COL+                Voegt kolom toe aan matrix
       NEXT                    Sluit FOR-NEXT-lus
     END                       Eindigt tweede IF-clausule
 END                           Eindigt eerste IF-clausule  Het resultaat is X
 y  OBJ→ →ARRY                 Zet lijst y om in een verzameling
```

MTREG	**X** en **y** gebruikt door programma MTREG
→NUM	Zet om in decimale opmaak
»	Sluit subprogramma 2
»	Sluit subprogramma 1
»	Sluit hoofdprogramma

Sla deze op in de variabele POLY (POLYnomial fitting; polynomiale aanpassing).

Gebruik als een *voorbeeld* de volgende gegevens voor een polynomiale aanpassing p = 2, 3, 4, 5, 6.

x	y
2.30	179.72
3.20	562.30
4.50	1969.11
1.65	65.87
9.32	31220.89
1.18	32.81
6.24	6731.48
3.45	737.41
9.89	39248.46
1.22	33.45

Omdat we dezelfde x-y-gegevens zullen gebruiken voor het aanpassen van polynomialen van verschillende orders, raden we u aan de lijsten met gegevenswaarden x en y in respectievelijk de variabelen xx en yy op te slaan. Nu hoeven we ze dus niet telkens opnieuw in te voeren in elke toepassing van het programma POLY. Ga dan als volgt te werk:

{ 2.3 3.2 4.5 1.65 9.32 1.18 6.24 3.45 9.89 1.22 } ENTER 'xx' STO▸
{179.72 562.30 1969.11 65.87 31220.89 32.81 6731.48 737.41 39248.46 33.45} ENTER 'yy' STO▸

Als u de gegevens wilt aanpassen aan de polynomialen, doet u het volgende:
xx yy 2 POLY, Resultaat: [4527.73 -3958.52 742.23]
dus $y = 4527.73\text{-}39.58x+742.23x^2$

xx yy 3 POLY, Resultaat: [–998.05 1303.21 -505.27 79.23]
dus $y = -998.05+1303.21x-505.27x^2+79.23x^3$

xx yy 4 POLY, Resultaat: [20.92 –2.61 –1.52 6.05 3.51]
dus $y = 20.97-2.61x-1.52x^2+6.05x^3+3.51x^4$

xx yy 5 POLY, Resultaat: [19.08 0.18 –2.94 6.36 3.48 0.00]
dus $y = 19.08+0.18x-2.94x^2+6.36x^3+3.48x^4+0.0011x^5$

xx yy 6 POLY, Resultaat: [-16.73 67.17 –48.69 21.11 1.07 0.19 0.00]
dus $y = -16.73+67.17x-48.69x^2+21.11x^3+1.07x^4+0.19x^5+0.0058x^6$

De beste aanpassing selecteren

Zoals u ziet aan de bovenstaande resultaten, kunt u elke polynoom aanpassen aan een verzameling gegevens. De vraag is dan, welke aanpassing is het beste voor de gegevens? Er zijn een paar criteria voor het bepalen van de beste aanpassing:

- De correlatiecoëfficiënt, r. Deze waarde wordt beperkt door het bereik $-1 < r < 1$. Hoe dichter *r* bij +1 of –1 ligt, hoe beter de gegevensaanpassing.
- De SSE-fouten. Dit is de hoeveelheid die moet worden geminimaliseerd door de benadering voor het kleinste kwadraat.
- Een diagram van resttermen. Dit is een diagram van de fouten van alle originele gegevenspunten. Als deze fouten volledig willekeurig zijn, moeten de restdiagrammen geen bepaalde trend laten zien.

Voordat u gaat proberen deze criteria te programmeren, geven we u enkele <u>definities</u>:

Met de vectoren **x** en **y** van de gegevens die moeten worden aangepast aan de polynomiale vergelijking, vormen we de matrix **X** en gebruiken we deze om een vector van polynomiale coëfficiënten **b** te berekenen. We kunnen een *vector van aangepaste gegevens*, **y**' berekenen met $\mathbf{y}' = \mathbf{X}\cdot\mathbf{b}$.

Een *foutvector* wordt berekend met $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{y}'$.

De SS-fouten (SSE) zijn gelijk aan het kwadraat van de grootte van de foutvector, dus $SSE = |\mathbf{e}|^2 = \mathbf{e}\bullet\mathbf{e} = \Sigma\, e_i^2 = \Sigma\, (y_i-y'_i)^2$.

Om de correlatiecoëfficiënt te berekenen, moeten we eerst berekenen wat we de *som van kwadraattotalen* (SST- Sum of Squared Totals) noemen, gedefinieerd als SST = $\Sigma\ (y_i- \bar{y})^2$, waarbij $\bar{y}$ de *gemiddelde waarde* van de originele y-waarden is,dus $\bar{y} = (\Sigma y_i)/n$.

Met betrekking tot SSE en SST wordt de correlatiecoëfficiënt gedefinieerd als

$$r = [1\text{-}(SSE/SST)]^{1/2} .$$

Hier is het nieuwe programma, inclusief de berekening van SSE en r (zie op de laatste pagina van dit hoofdstuk hoe u de namen van de variabelen en commando's in het programma krijgt):

«	Activeert het programma
→ x y p	Voert de lijsten x en y en getal p in
«	Activeert het subprogramma 1
x SIZE → n	Bepaalt de grootte van x-lijst
«	Activeert het subprogramma 2
x VANDERMONDE	Plaatst x in stapelgeheugen, verkrijgt $\mathbf{V}_n$
IF 'p<n-1' THEN	Deze IF is stap 3 in algoritme
n	Plaatst n in stapelgeheugen
p 2 +	Berekent p+1
FOR j	Startlus, j = n-1 to p+1, stap = -1
j COL– DROP	Verwijdert kolom, haalt uit stapelgeheugen
-1 STEP	Sluit FOR-STEP-lus
ELSE	
IF 'p>n-1' THEN	
n 1 +	Berekent n+1
p 1 +	Berekent p+1
FOR j	Start lus met j = n, n+1, …, p+1.
x j ^	Berekent $\mathbf{x}^j$ als een lijst
OBJ→ →ARRY	Zet lijst om in verzameling
j COL+	Voegt kolom toe aan matrix
NEXT	Sluit FOR-NEXT-lus

END	Eindigt tweede IF-clausule
END	Eindigt eerste IF-clausule Geeft **X**
y OBJ→ →ARRY	Zet lijst **y** om in een verzameling
→ X yv	Voert matrix en verzameling in als X en y
«	Activeert het subprogramma 3
X yv MTREG	**X** en **y** gebruikt door programma MTREG
→NUM	Zet zonodig om in zwevende komma
→ b	Vector gaat door als b
«	Activeert het subprogramma 4
b yv	Plaats **b** en yv in stapelgeheugen
X b *	Berekent **X**·**b**
-	Berekent **e** = **y** - **X**·**b**
ABS SQ DUP	Berekent SSE, maak kopie
y ΣLIST n /	Berekent $\bar{y}$
n 1 →LIST SWAP CON	Maakt vector van *n* waarden van $\bar{y}$
yv – ABS SQ	Berekent SST
/	Berekent SSE/SST
NEG 1 + √	Berekent r = $[1–SSE/SST]^{1/2}$
"r" →TAG	Benoemt resultaat "r"
SWAP	Wisselt stapelgeheugenniveaus 1 en 2
"SSE" →TAG	Benoemt resultaat SSE
»	Sluit subprogramma 4
»	Sluit subprogramma 3
»	Sluit subprogramma 2
»	Sluit subprogramma 1
»	Sluit hoofdprogramma

Sla dit programma op onder de naam POLYR om de berekening van de correlatiecoëfficiënt r te benadrukken.

Maak met het POLYR-programma voor waarden van p tussen 2 en 6 de volgende tabel aan met waarden van de correlatiecoëfficiënt, r, en de SS-fouten, SSE:

p	*r*	*SSE*
2	0.9971908	10731140.01

3	0.9999768	88619.36
4	0.9999999	7.48
5	0.9999999	8.92
6	0.9999998	432.61

Hoewel de correlatiecoëfficiënt dicht bij 1.0 ligt voor alle waarden van p, kunnen de waarden van SSE erg variëren. De kleinste waarde van SSE komt overeen met p = 4. U kunt de gewenste gegevensaanpassing voor de originele x-y-gegevens als volgt selecteren:

$$y = 20.97-2.61x-1.52x^2+6.05x^3+3.51x^4.$$

Hoofdstuk 19
Getallen met verschillende grondtallen

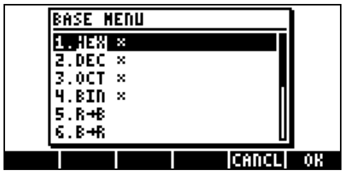
In dit hoofdstuk laten we voorbeelden zien van berekeningen met getallen die een ander grondtal dan een decimaal hebben.

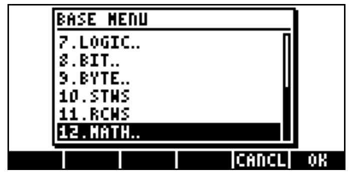
Definities

Het talstelsel dat voor gewone rekenkunde wordt gebruikt, noemen we het *decimaalstelsel* omdat het 10 (Latijns, deca) cijfers gebruikt, namelijk 0-9, om elk reëel getal uit te schrijven. Computers gebruiken daarentegen een systeem dat is gebaseerd op twee mogelijke standen, het *binaire* systeem. Deze twee standen worden weergegeven door 0 en 1, AAN en UIT of hoogspanning en laagspanning. Computers gebruiken ook talstelsels op basis van acht cijfers (0-7) ofwel het *achttallige* systeem en zestien cijfers (0-9, A-F) of *hexadecimaal*. Net als bij het decimaalstelsel bepaalt de relatieve positie van de cijfers de waarde. Over het algemeen kan een getal n met als grondtal b worden geschreven als een reeks cijfers van $n = (a_1a_2 \ldots a_n.c_1c_2 \ldots c_m)_b$. De "punt" scheidt *n* "hele" cijfers van m "decimale" cijfers. De waarde van het getal, omgezet naar ons decimaalstelsel, wordt berekend door $n = a_1 \cdot bn^{-1} + a_2 \cdot b^{n-2} + \ldots + a_n b^0 + c_1 \cdot b^{-1} + c_2 \cdot b^{-2} + \ldots + c_m \cdot b^{-m}$. Voorbeeld: $(15.234)_{10} = 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3}$ en $(101.111)_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}$

Het menu BASE

Hoewel de rekenmachine meestal werkt met het decimaalstelsel, kunt u ook berekeningen maken met het binaire, achttallige of hexadecimale stelsel. Veel functies waarmee andere talstelsels dan het decimaalstelsel kunnen worden bewerkt, zijn toegankelijk via het menu BASE , via ⮣ BASE (de toets 3). Met systeemvlag 117 ingesteld op de CHOOSE boxes (keuzevensters) biedt het menu BASE de volgende ingangen:





Met systeemvlag 117 ingesteld op SOFTmenus laat het menu BASE het volgende zien:

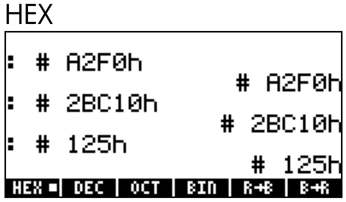
Bij deze opmaak is het duidelijk dat de ingangen LOGIC, BIT en BYTE in het menu BASE zelf submenu's zijn. Deze menu's worden later in dit hoofdstuk behandeld.

De functies HEX, DEC, OCT en BIN

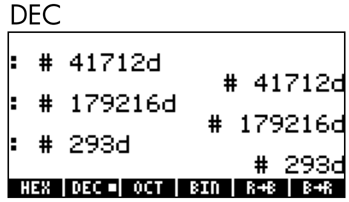
Getallen in niet-decimale stelsels worden voorafgegaan door het #-symbool in de rekenmachine. Het #-symbool is toegankelijk via ← # (de toets 3). Als u wilt selecteren welk talstelsel (huidige grondtal) wordt gebruikt voor getallen die vooraf worden gegaan door #, selecteert u een van de volgende functies in het eerste BASE-menu, dus HEX (hexadecimaal), DEC (decimaal), OCT (achttallig) of BIN (binair). Als bijvoorbeeld HEX■ is geselecteerd, zal elk getal dat met een # begint een hexadecimaal getal worden. U kunt dus getallen als #53, #A5B, enz. in dit systeem schrijven. Als er een ander stelsel wordt geselecteerd, worden de getallen automatisch omgezet naar het nieuwe ingestelde grondtal.

In de volgende voorbeelden ziet u dezelfde drie getallen met het #-symbool voor de verschillende huidige grondtallen:

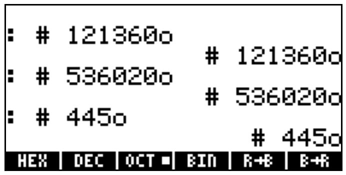
HEX



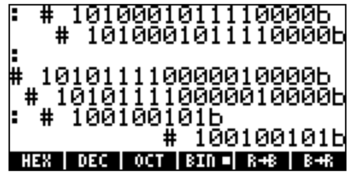
DEC



OCT



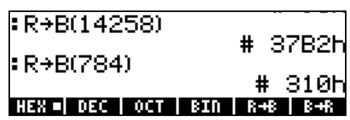
BIN



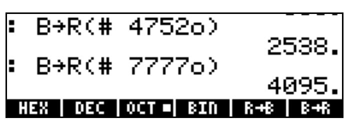
Het decimale stelsel (DEC) heeft 10 cijfers (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9), het hexadecimale stelsel (HEX) heeft 16 cijfers (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F), het achttallige stelsel (OCT) heeft 8 cijfers (0,1,2,3,4,5,6,7) en het binaire stelsel (BIN) heeft slechts 2 cijfers (0,1).

Conversie tussen talstelsels

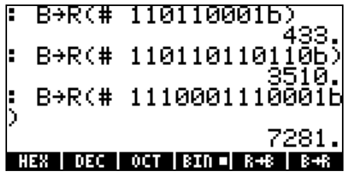
Welk talstelsel er ook is geselecteerd, er wordt naar verwezen als het binaire stelsel vanwege het gebruik van de functies R→B en B→R. Als bijvoorbeeld HEX■ is geselecteerd, zal de functie B→R elk hexadecimaal getal (voorafgegaan door een #) omzetten in een decimaal getal, terwijl de functie R→B precies andersom werkt. Probeer de volgende oefeningen, met HEX als huidig grondtal:

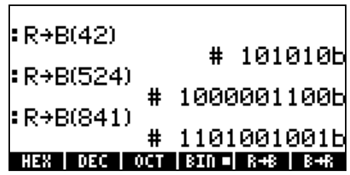


De volgende voorbeelden tonen conversies bij een grondtal in het achttallige stelsel:



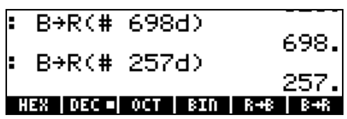
We geven ook transformaties met het binaire stelsel als huidig grondtal:

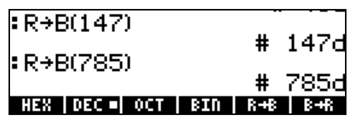




U ziet dat telkens als u een getal invoert dat met # begint, u het cijfer voorafgegaan door een # en gevolgd door de letter h, o of b (hexadecimaal, achttallig of binair) krijgt. Het type letter dat als suffix wordt gebruikt, hangt af van welk niet-decimaal stelsel is geselecteerd, dus HEX, OCT of BIN.

Probeer de volgende conversies om te zien wat er gebeurt als u de instelling DEC gebruikt:





Het enige effect van het selecteren van het DECimaal stelsel is dat decimale getallen, als ze worden voorafgegaan door een #, worden geschreven met het achtervoegsel d.

Woordlengte

De woordlengte is het aantal bits in een binair object. De woordlengte is standaard 64 bits. De functie RCWS (ReCall WordSize) toont de huidige woordlengte. Met de functie STWS (SeT the WordSize) kan de gebruiker de woordlengte voor elk getal tussen 0 en 64 instellen.

Als u de woordlengte wijzigt, heeft dit invloed op de manier waarop handelingen met binaire hele getallen worden uitgevoerd. Als een binair geheel getal bijvoorbeeld groter is dan de huidige woordlengte, dan worden de eerste bits verwijderd voordat er een handeling kan worden uitgevoerd op het getal.

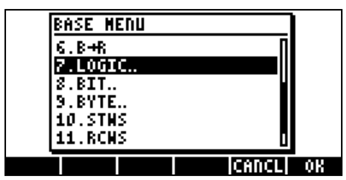
Bewerkingen met binaire gehele getallen

De bewerkingen optellen, aftrekken, tekenveranderingen, vermenigvuldigen en delen worden gedefinieerd voor binaire hele getallen. Hier volgen enkele voorbeelden van optellen en aftrekken voor verschillende huidige grondtallen:

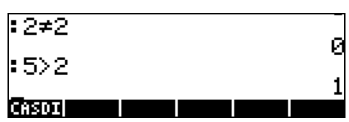
```
#A02h + #12Ah = #B2Ch
#2562d + #298d = #2860d
#5002o + #452o = #5454o
#101000000010b + #100101010b = #101100101100b

#A02h - #12Ah = #8D8h
#2562d - #298d = #2264d
#5002o - #452o = #4330o
#101000000010b - #100101010b = #100011011000b
```

Het menu LOGIC

Het menu LOGIC , beschikbaar via BASE (↱ BASE) biedt de volgende functies:



De functies AND, OR, XOR (exclusief OR) en NOT zijn logische functies. De invoer voor deze functies zijn twee waarden of uitdrukkingen (een in het geval van NOT) die kunnen worden uitgedrukt als binaire, logische resultaten, dus 0 of 1. Vergelijkingen van getallen via de vergelijkingsoperatoren =, ≠, >, <, ≤ en ≥ zijn logische verklaringen die waar (1) of niet waar (0) kunnen zijn. Hieronder volgen enkele voorbeelden van logische verklaringen:

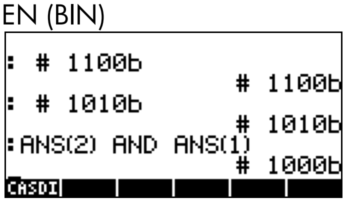


De functies AND, OR, XOR en NOT kunnen worden toegepast op vergelijkingsverklaringen bij de volgende regels:

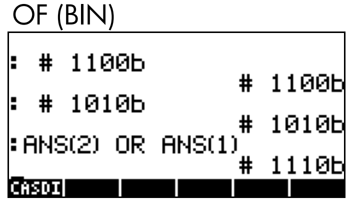
1 AND 1 = 1	1 AND 0 = 0	0 AND 1 = 0	0 AND 0 = 0
1 OR 1 = 1	1 OR 0 = 1	0 OR 1 = 1	0 OR 0 = 0
1 XOR 1 = 0	1 XOR 0 = 1	0 XOR 1 = 1	0 XOR 0 = 0
NOT(1) = 0	NOT(0) = 1		

Deze functies kunnen worden gebruikt om logische verklaringen te maken voor programmeerdoeleinden. In de context van dit hoofdstuk worden ze gebruikt om het resultaat van bit-per-bit-bewerkingen volgens de hierboven genoemde regels te geven. In de volgende voorbeelden wordt het grondtalsysteem tussen haakjes aangegeven:

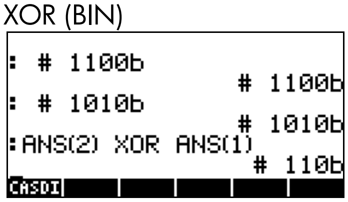
EN (BIN)



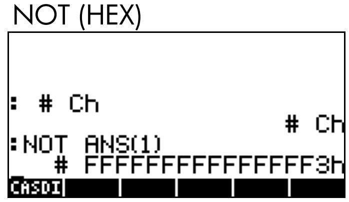
OF (BIN)



XOR (BIN)



NOT (HEX)



Het menu bit

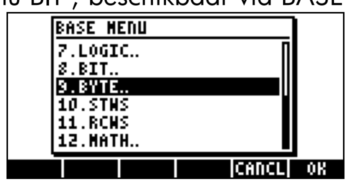
Het menu bit , beschikbaar via BASE (↱ BASE), biedt de volgende functies:

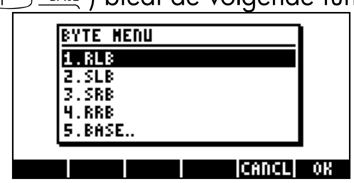
De functies RL, SL, ASR, SR, RR in het menu BIT worden gebruikt om bits in een binair heel getal te bewerken. De definitie van deze functies ziet u hieronder:

RL : Rotate Left: draai een bit naar links, bijv. #1100b → #1001b
SL : Shift Left: schuifbeweging een bit naar links, bijv. #1101b → #11010b
ASR : Arithmetic Shift Right: rekenkundige schuifbeweging een bit naar rechts, bijv. #1100010b → #110001b
SR : Shift Right: schuifbeweging een bit naar rechts, bijv. #11011b →#1101b
RR : Rotate Right: draai een bit naar rechts, bijv. #1101b → #1110b

Het menu BYTE

Het menu BIT , beschikbaar via BASE (↱ BASE) biedt de volgende functies:





De functies RLB, SLB, SRB, RRB in het menu BIT worden gebruikt om bits in een binair heel getal te bewerken. De definitie van deze functies ziet u hieronder:

RLB: Rotate Left: draait een byte naar links, bijv. #1100b → #1001b
SLB: Shift Left: schuift een byte naar links, bijv. #1101b → #11010b
SRB: Shift Right: schuift een byte naar rechts, bijv. #11011b →#1101b
RRB: Rotate Right: draait een byte naar rechts, bijv. #1101b → #1110b

Hexadecimale getallen voor pixelreferenties

Veel specificaties voor plotopties gebruiken pixelreferenties als invoer, bijvoorbeeld { #332h #A23h } #Ah 0. 360. ARC om een boog van een cirkel te tekenen. We gebruiken de functies C→PX en PX→C om coördinaten voor gebruiker-eenheid en pixelreferenties eenvoudig in elkaar om te zetten. U vindt deze functies via de commandocatalogus (⇨ CAT).

Hieronder staan enkele voorbeelden:

Hoofdstuk 20
Menu's en toetenbord aanpassen

Door het gebruik van de vele rekenmachinemenu's bent u vertrouwd geraakt met de werking van de menu's voor een verscheidenheid aan toepassingen. U bent ook vertrouwd met de vele functies die beschikbaar zijn met de toetsen op het toetsenbord, hetzij door hun hoofdfunctie, hetzij door ze te combineren met de linkershifttoets (←), de rechtershifttoets (→) of de toets ALPHA (ALPHA). In dit hoofdstuk laten we voorbeelden zien van aangepaste menu's en toetsenbordtoetsen die handig kunnen zijn voor uw eigen toepassingen.

Menu's aanpassen

Een aangepast menu is een menu dat is aangemaakt door de gebruiker. De specificaties voor het menu worden opgeslagen in de daarvoor gereserveerde variabelen CST. Om een menu aan te maken, moet u dus deze variabele samenstellen met de functies die u in uw menu afgebeeld wilt hebben en de handelingen die de softmenutoetsen moeten uitvoeren. Om voorbeelden te laten zien van het aanpassen van menu's is het nodig dat systeemvlag 117 is ingesteld op SOFTmenus. Zorg ervoor dat u dit doet alvorens verder te gaan (zie Hoofdstuk 2 voor instructies over het instellen van de systeemvlaggen
).

Het menu PRG/MODES/MENU

Commando's die handig zijn bij het aanpassen van menu's wordstaan in het menu MENU dat toegankelijk is via het menu PRG (← PRG). Met systeemvlag 117 ingesteld op SOFT menus geeft de toetsencombinatie ← PRG NXT MODES MENU het volgende softmenu MENU:

De beschikbare functies zijn:

MENU: Activeert een menu met het menunummer

CST: Verwijzing naar de CST-variabele, bijv. → CST geeft de CST-inhoud weer.

TMENU: In plaats van MENU gebruiken om een tijdelijk menu aan te maken zonder de inhoud van CST te overschrijven
RCLMENU: Geeft het menunummer van het huidige menu

Menunummers (functies RCLMENU en MENU)

Ieder voorgedefinieerd menu heeft een nummer. Stel bijvoorbeeld dat u het menu MTH activeert (← MTH). Zoek vervolgens met de functiecatalogus (→ CAT) de functie RCLMENU en activeer deze. U drukt gewoon op ENTER in de ALG-modus wanneer `RCLMENU()` in het scherm verschijnt. Het resultaat is het nummer 3.01. U kunt dus het menu MTH activeren door `MENU(3.01)` in de ALG-modus of `3.01 MENU` in de RPN-modus.

De meeste menu's kunnen met het toetsenbord worden geactiveerd zonder dat u hun nummers kent. Enkele menu's zijn echter niet toegankelijk via het toetsenbord. Het softmenu STATS bijvoorbeeld is alleen toegankelijk met de functie MENU. Het nummer van dit menu is 96.01. Gebruik `MENU(96.01)` in de ALG-modus of `96.01 MENU` in de RPN-modus voor het softmenu STAT.

Opmerking: het nummer 96.01 in dit voorbeeld staat voor het eerste (01) submenu van menu 96.

Aangepaste menu's (functies MENU en TMENU)

Stel dat u vier functies moet activeren voor een bepaalde toepassing. Stel dat u snel toegang moet kunnen hebben tot de functies EXP, LN, GAMMA en ! (ALPHA → 2) en dat u deze wilt plaatsen in een softmenu dat u voor enige tijd geactiveerd houdt. U kunt dit doen door een tijdelijk menu aan te maken met de functie TMENU of een meer permanent menu met de functie MENU. Het belangrijkste verschil is dat de functie MENU een variabele CST aanmaakt en TMENU niet. Met de variabele CST blijvend aangemaakt in uw subdirectory kunt u het menu altijd opnieuw activeren met de specificaties in CST door op ← CUSTOM te drukken. Met TMENU gaan de menuspecificaties verloren wanneer u het tijdelijke menu door een nieuw tijdelijk menu vervangt.

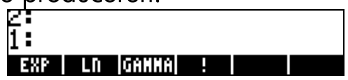
In de RPN-modus bijvoorbeeld wordt een menu aangemaakt met:

{EXP LN GAMMA !} ENTER TMENU ENTER

of

{EXP LN GAMMA !} ENTER MENU ENTER

om het volgende menu te produceren:

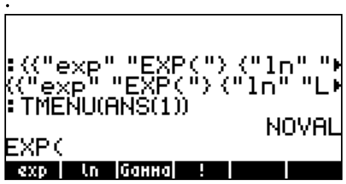


Om deze functies te activeren, moet u gewoon het functieargument (nummer) invoeren en dan op de bijbehorende softmenutoets drukken.

In de ALG-modus is de als argument voor functie TMENU of MENU in te voeren lijst ingewikkelder:

{{“exp”,”EXP(“},{“ln”,”LN(“},{“Gamma”,”GAMMA(“},{“!”,”!(“}}

De reden hiervoor is dat in de RPN-modus de commandonamen zowel softmenulabels als commando’s zijn. De commandonamen hebben in de ALG-modus geen actie tot gevolg, omdat ALG-functies gevolgd dienen te worden door haakjes en argumenten. In de hierboven getoonde lijst (in de ALG-modus) heeft u binnen iedere sublijst een label voor de toets, bijv. “exp” gevolgd door de manier waarop de functie in het stapelgeheugen ingevoerd zal worden zodat het argument van de functie kan worden ingevoerd bij het oproepen, bijv. “EXP(“. We hoeven ons geen zorgen te maken over het sluiten van het haakje omdat de rekenmachine dit doet alvorens de functie uit te voeren. De uitvoering van de functie TMENU in de ALG-modus met de hierboven getoonde argumentenlijst is als volgt: Eerst voeren we de lijst in en dan produceren we het tijdelijke menu (zie menutoetslabels) met de functie TMENU(ANS(1)). In de linkerafbeelding wordt het resultaat weergegeven na het indrukken van de softmenutoets EXP, d.w.z. de oproep EXP(. In de rechterafbeelding wordt het resultaat weergegeven na het invoeren van 8 ENTER:



Een eenvoudigere versie van het menu kan worden gedefinieerd met

MENU({{"EXP(","LN(","GAMMA(","!("}).

Verbeterd RPN-menu

De hierboven gepresenteerde reeks voor de ALG-modus kan met een kleine verandering in RPN-modus gebruikt worden. De aangepaste lijst ziet er zo uit:

{{"exp",EXP},{"ln",LN},{"Gamma",GAMMA},{"!",!}}

U kunt deze lijst met MENU of TMENU uitproberen in de RPN-modus om te zien dat u hetzelfde menu krijgt als eerder in de ALG-modus.

Menuspecificatie en CST-variabele

Uit de twee bovenstaande oefeningen blijkt dat de meest algemene menuspecificatielijst een aantal sublijsten bevat die gelijk zijn aan het aantal items dat in uw aangepaste menu weergegeven moet worden. Iedere sublijst bevat een label voor de menutoets gevolgd door een functie, een uitdrukking, een label of een ander object dat het resultaat vormt na het indrukken van de menutoets. U dient goed op te letten bij het specificeren van de menulijst in de ALG-modus versus de RPN-modus. In de RPN-modus kan de bewerking van de menutoets eenvoudigweg een rekenmachinecommando zijn (bijv. EXP, LN, enz. zoals hierboven weergegeven), terwijl in de ALG-modus het een string moet zijn met de commando-oproep wiens argument door de gebruiker gegeven moet worden alvorens op ENTER te drukken en het commando te voltooien. De bovenstaande voorbeelden laten het verschil zien.

De algemene vorm van de argumentenlijst voor de commando's TMENU of MENU in de ALG-modus is:

{"label1","functie1(","ls1(","rs1("}, {"label2", "functie2(","ls2(","rs2("},…}

Terwijl in de RPN-modus de lijst de volgende opmaak heeft

{"label1", functie1, ls1, rs1}, {"label2", functie2, ls2, rs2},…}

Bij deze specificaties geven functie1, functie 2, enz., de hoofdfunctie aan van de toets, terwijl ls1, ls2, …, enz. de links-shift-werking aangeven van de toets. Op gelijke manier geven rs1, rs2, …, enz. De rechts-shift-werking weer van de toets. Deze lijst wordt opgeslagen in de variabele CST als het commando

MENU is gebruikt. Deze lijst wordt opgeslagen in de variabele CST als het commando MENU is gebruikt. U kunt altijd een andere CST-variabele hebben in iedere subdirectory en u kunt altijd de huidige inhoud van CST vervangen door die van andere variabelen die de correct opgemaakte lijst bevatten om een ander aangepast menu te produceren.

Opmerking: U kunt een 21x8 GROB (zie Hoofdstuk 22) gebruiken om een pictogram in de softmenutoetsen te maken. Probeer bijvoorbeeld in de RPN-modus:

{{GROB 21 8 00000EF908FFF900FFF9B3FFF9A2FFF9A3FFF9A0FFF388FF “hp” }}
ENTER MENU

Het hp-logo wordt op de toets F1 geplaatst Als u op F1 drukt, wordt de tekst ‘hp’ in de commandoregel gezet.

Het toetsenbord aanpassen

Iedere toets op het toetsenbord kan worden geïdentificeerd door twee nummers die de rij en de kolom weergeven. De toets VAR (VAR) bijvoorbeeld bevindt zich in rij 3 van kolom 1 en er zal naar worden verwezen als toets 31. Omdat iedere toets maximaal 10 functies kan weergeven, wordt iedere functie gespecificeerd door decimale getallen tussen 0 en 10 aan de hand van de volgende specificaties:

.0 of 1, toets zonder shift	0.01 of 0.11, niet beschikbaar
.2, ktoets in combinatie met ←	.21, en toets tegelijkertijd met ←
.3, ktoets in combinatie met →	.31, en toets tegelijkertijd met →
.4, ktoets in combinatie met ALPHA	.41, ktoets in combinatie met ALPHA
.5, ktoets in combinatie met ALPHA ←	.51, ALPHA-en toets tegelijkertijd met ←
.6, ktoets in combinatie met ALPHA →	.61, ALPHA-en toets tegelijkertijd met →

Dus wordt de functie VAR wordt dus aangeduid als toets 31.0 of 31.1, terwijl de functie UPDIR met toets 31.2, de functie COPY met 31.3, de hoofdletter J met 31.4 en de kleine letter j met 31.5 worden aangeduid. (Toets 31.6 is niet gedefinieerd). In het algemeen wordt een toets beschreven door de schikking XY.Z, waarbij X = rijnummer, Y = kolomnummer, Z = shift.

We kunnen een gegeven toets combineren met de toets USER (linkershifttoets behorende bij de toets ALPHA of ← USER) om een aangepaste toetsactie aan te maken. In principe kan het hele toetsenbord opnieuw gedefinieerd worden om een aantal aangepaste bewerkingen uit te voeren.

Het submenu PRG/MODES/KEYS

Commando's die handig zijn bij het aanpassen van het toetsenbord staan in het menu KEYS dat toegankelijk is via het menu PRG (← PRG). Met systeemvlag 117 ingesteld op SOFT menus geeft de toetsencombinatie ← PRG NXT MODES KEYS

het volgende softmenu KEYS:

De beschikbare functies zijn:

ASN : Koppelt een object aan een door XY.Z gespecificeerde toets
STOKEYS : Slaat de door de gebruiker gedefinieerde toetsreeks op
RCLKEYS : Geeft de door de gebruiker gedefinieerde toetsreeks op
DELKEYS : Ontkoppelt een of meer toetsen in de huidige door de gebruiker gedefinieerde toetsenlijst, de argumenten zijn 0, om alle door de gebruiker gedefinieerde toetsen te ontkoppelen of XY.Z om toets XY.Z te ontkoppelen.

Oproepen van de door de gebruiker gedefinieerde toetsenlijst

Gebruik het commando RCLKEYS om de huidige door de gebruiker gedefinieerde toetsenlijst te bekijken. Voordat er door de gebruiker gedefinieerde toetsen zijn gekoppeld zou het resultaat een lijst moeten geven met de letter S, d.w.z. {S}.

Een object koppelen aan een door de gebruiker gedefinieerde toets

Stel dat u toegang wilt hebben tot het ouderwetse PLOT-commando, dat werd geïntroduceerd bij rekenmachines van de HP 48G-serie, maar die momenteel niet direct beschikbaar zijn via het toetsenbord. Het menunummer voor dit menu is 81.01. U kunt dit menu activeren met

In de ALG-modus: `MENU(81.01)`
In de RPN-modus: `81.01` ENTER `MENU` ENTER

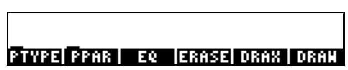
Voor een snelle manier om dit menu te activeren met het toetsenbord kunt u dit menu koppelen aan de toets GRAPH (F3), met referentienummer 13.0, d.w.z. eerste rij, derde kolom, hoofdfunctie. Om een object aan een toets te koppelen, gebruikt u de functie ASN als volgt:

In de ALG-modus: `ASN(<<MENU(81.01)>>,13.0)`
In de RPN-modus: `<< 18.01 MENU >>` ENTER `13.0` ENTER `ASN`

Een ander handig menu is het originele menu SOLVE (wordt aan het eind van Hoofdstuk 6 behandeld) dat kan worden geactiveerd met ↱ (vasthouden) 7.

Door de gebruiker gedefinieerde toetsen gebruiken

Om deze door de gebruiker gedefinieerde toets te gebruiken, drukt u op ↰ USER alvorens op de toets F3 te drukken. U ziet dat nadat u op ↰ USER heeft gedrukt, het scherm de specificatie `1USR` weergeeft in de tweede regel in het beeldscherm. Door op ↰ USER F3 te drukken voor dit voorbeeld, zou u het menu PLOT als volgt oproepen:



Indien u meer dan een door de gebruiker gedefinieerde toets heeft en er meer dan een tegelijk wilt gebruiken, kunt u het toetsenbord vergrendelen in USER-modus met ↰ USER ↰ USER in te voeren alvorens te drukken op de door de gebruiker gedefinieerde toetsen. Met het toetsenbord vergrendeld in USER-modus zal de specificatie `USR` getoond worden in de tweede regel in het beeldscherm. Om het toetsenbord te ontgrendelen, drukt u nogmaals op ↰ USER.

Een door de gebruiker gedefinieerde toets ontkoppelen

Om de hierboven uitgevoerde koppeling te verwijderen, gebruikt u de functie DELKEYS als volgt:

In de ALG-modus: `DELKEYS(13.0)`

In de RPN-modus: `13.0` ENTER `DELKEYS` ENTER

Meerdere door de gebruiker gedefinieerde toetsen koppelen

De makkelijkste manier om verschillende door de gebruiker gedefinieerde toetsen te koppelen is door een lijst met commando's en toetsspecificaties op te geven. Stel bijvoorbeeld dat we de drie trigonometrische functies (SIN, COS, TAN) en de drie hyperbolische functies (SINH, COSH, TANH) als door de gebruiker gedefinieerde toetsen respectievelijk willen koppelen aan de toetsen F1 t/m F6 . Gebruik in de RPN-modus:

`{SIN,11.0,COS,12.0,TAN,13.0,SINH,14.0,COSH,15.0,TANH,16.0}` ENTER `STOKEYS` ENTER

Gebruik in de ALG-modus:
`STOKEYS({"SIN(' ,11.0, "COS(", 12.0, "TAN(", 13.0, "SINH(", 14.0, "COSH(", 15.0, "TANH(", 16.0})` ENTER

Gebruik deze toetsen bijvoorbeeld in RPN-modus met:

5 ← USER F1 4 ← USER F2 6 ← USER F3
2 ← USER F4 1 ← USER F5 2 ← USER F6

Gebruik om alle door de gebruiker gedefinieerde toetsen te ontkoppelen:

In de ALG-modus: `DELKEYS(0)` In de RPN modus: `0 DELKEYS`

Controleer of de gebruikerstoetsdefinities zijn verwijderd met de functie RCLKEYS.

Hoofdstuk 21
Programmeren in de RPL-gebruikerstaal

RPL-gebruikerstaal is de meest gebruikte programmeertaal om de rekenmachine te programmeren. De componenten van het programma kunnen samen worden geplaatst in de regeleditor door ze in de juiste volgorde tussen programmahaakjes « » te zetten. Omdat gebruikers van rekenmachines meer ervaring hebben met het programmeren in de RPN-modus, <u>zullen de meeste voorbeelden in dit hoofdstuk weergegeven worden in de RPN-modus</u>. Om het invoeren van programmeercommando's te vergemakkelijken, raden wij u tevens aan om systeemvlag 117 op SOFT menus in te stellen. De programma's werken even goed in de ALG-modus wanneer ze zijn ge-debugged en getest in de RPN-modus. Indien u verkiest om in de ALG-modus te werken, leer dan programeren in de RPN-modus en stel daarna de modus opnieuw in op ALG om de programma's uit te voeren. Zie de laatste bladzijde van dit hoofdstuk voor een eenvoudig voorbeeld van programmeren in de RPL-gebruikerstaal in de ALG-modus.

Een programmeervoorbeeld

In de loop van de voorgaande hoofdstukken in deze handleiding hebben we een aantal programma's behandeld die kunnen worden gebruikt voor verscheidene toepassingen (bijvoorbeeld de programma's CRMC en CRMT, gebruikt om een matrix aan te maken uit een aantal lijsten, werden voorgesteld in Hoofdstuk 10). In deze paragraaf behandelen wij een eenvoudig programma voor het programmeren van de rekenmachine . Het programma dat we zullen schrijven, zal worden gebruikt om de functie $f(x) = sinh(x)/(1+x^2)$ te definiëren, die lijsten aanvaardt als argument (bijvoorbeeld, x kan een lijst van getallen zijn, zoals beschreven in Hoofdstuk 8). In Hoofdstuk 8 gaven we aan dat het plusteken zich gedraagt als een schakelaar voor lijsten en niet om ze term voor term bij elkaar op te tellen. In plaats daarvan moet u voor een term-voor-term-optelling van lijsten de operator ADD gebruiken. Om de bovenstaande functie te definiëren, zullen we het volgende programma gebruiken:

```
«'x' STO x SINH 1 x SQ ADD / 'x' PURGE »
```

Volg deze instructies om het programma in te toetsen:

Toetsencombinaties	Resulteert in:	Geïnterpreteerd als:
⌐ « »	«	Activeert een RPL-programma
['] ALPHA ⌐ X ▶ STO▶	'x' STO	Slaat niveau 1 op in variabele x
ALPHA ⌐ X	x	Plaatst x op niveau 1
⌐ MTH HYP SINH	SINH	Berekent sinh van niveau 1
1 SPC ALPHA ⌐ X ⌐ x^2	1 x SQ	Voert 1 in en berekent x²
⌐ MTH MTH LIST ADD	ADD	Berekent $(1+x^2)$,
÷	/	deelt daarna
['] ALPHA ⌐ X ▶	'x'	
⌐ PRG MEM DIR PURGE	PURGE	Verwijdert variabele x
ENTER		programma op niveau 1

Gebruik ['] ALPHA ⌐ G STO▶ om het programma op te slaan

Druk op VAR om terug te keren naar uw variabelenmenu en evalueer g(3.5) door de waarde van het argument op niveau 1 in te voeren (3 • 5 ENTER) en dan op g te drukken. Het resultaat is 1.2485..., bijvoorbeeld, g(3.5)= 1.2485. Probeer ook g({1 2 3}) te verkrijgen door de lijst in te voeren op niveau 1 van het venster: ⌐ {} 1 SPC 2 SPC 3 ENTER en op g te drukken. Het resultaat is nu {SINH(1)/2 SINH(2)/5 SINH(3)/10} als het CAS is ingesteld op de `EXACT` modus. Indien uw CAS is ingesteld op de modus APPROXIMATE, zal het resultaat {0.5876.. 0.7253… 1.0017…} zijn.

Globale en lokale variabelen en sub-programma's

Het programma g, hierboven gedefinieerd, kan worden weergegeven als

```
« 'x' STO x SINH 1 x SQ ADD / 'x' PURGE »
```

met ⌐ g.

U ziet dat het programma de variabelenaam x gebruikt om de waarde op niveau 1 van het stapelgeheugen op te slaan door middel van de programmastappen `'x' STO`. De variabele x wordt, terwijl het programma wordt uitgevoerd, opgeslagen in uw variabelenmenu, net als elke andere variabele die u al had opgeslagen. Na het berekenen van de functie

verwijdert het programma de variabele x zodat die niet verschijnt in uw variabelenmenu na de evaluatie van het programma. Indien we de variabele x niet zouden wissen in het programma, zou zijn waarde beschikbaar blijven na de uitvoering van het programma. Daarom wordt de variabele x, zoals gebruikt in dit programma, aangeduid als _een globale variabele_. Een gevolg van het gebruik van x als globale variabele is dat, indien we eerder een variabele met de naam x zouden hebben gedefinieerd, de waarde zou worden vervangen door de waarde die het programma gebruikt en daarna volledig verwijderd zou worden uit uw variabelenmenu na de uitvoering van het programma.
Daarom is, in verband met programmeren, een _globale variabele_ een variabele die toegankelijk blijft voor de gebruiker na het uitvoeren van het programma. Het is mogelijk om een lokale variabele te gebruiken in het programma, die enkel wordt gedefinieerd voor dat programma en niet beschikbaar zal zijn na uitvoering van het programma. Het voorgaande programma zou gewijzigd kunnen worden tot:

```
« → x « x SINH 1 x SQ ADD / »  »
```

Het pijlsymbool (→) krijgt men door de toets rechts-shift ⮣ te combineren met de toets 0, bijvoorbeeld, ⮣ → . U ziet ook dat er een extra set programmeersymbolen is (« ») die de aanwezigheid van een _subprogramma_ aangeeft, namelijk `« x SINH 1 x SQ ADD / »`, binnen het hoofdprogramma. Het hoofdprogramma begint met `→ x`, dat staat voor het toewijzen van de waarde op niveau 1 van het stapelgeheugen aan een _lokale variabele_ x. Daarna wordt het programma uitgevoerd in het subprogramma door *x* in het stapelgeheugen te plaatsen, *SINH(x)* te evalueren, *1* in het stapelgeheugen te plaatsen, *x* in het stapelgeheugen te plaatsen, *x* te kwadrateren, *1* bij *x* op te tellen en niveau 2 van het stapelgeheugen (*SINH(x)*) te delen door niveau 1 van het stapelgeheugen ($1+x^2$). Daarna wordt de programmacontrole weer doorgegeven naar het hoofdprogramma, maar er zijn geen verdere commando's tussen de eerste set van afsluitende programmeersymbolen (») en de tweede, zodat het programma wordt afgesloten. De laatste waarde in het stapelgeheugen, *SINH(x)/* ($1+x^2$), wordt weergegeven als de uitvoer van het programma.

De variabele x in de laatste versie van het programma neemt nooit een plaats in tussen de variabelen in uw variabelenmenu. Er wordt mee gewerkt in het geheugen van de rekenmachine zonder invloed te hebben op elke andere gelijknamige variabele in uw variabelenmenu. Daarom wordt de variabele x in dit geval aangeduid als een variabele die eigen is aan het programma, dus een *lokale variabele*.

Opmerking: plaats het programma in het stapelgeheugen (' ENTER) en gebruik dan ↰ ▼ om het programma te wijzigen. Gebruik de pijltoetsen (◀ ▶ ▲ ▼) om te bewegen in het programma. Gebruik de backspace/delete-toets, ◀ om ongewilde lettertekens te verwijderen. Gebruik ↱ « » om programmahaakjes (bijvoorbeeld « ») toe te voegen, aangezien deze symbolen in paren horen te staan, zult u ze moeten invoeren aan het begin en het einde van het subprogramma en één van de componenten verwijderen met de delete-toets ◀ om het vereiste programma te krijgen, namelijk:

```
« → x « x SINH 1 x SQ ADD / »  ».
```

Druk op ENTER wanneer u klaar bent met het bewerken van het programma. Het gewijzigde programma wordt opnieuw opgeslagen in de variabele .

Bereik van de globale variabele

Elke variabele die u definieert in de HOME-directory of elke andere directory of subdirectory, zal worden beschouwd als een *globale variabele* wat betreft de opbouw van een programma. Het *bereik* van een dergelijke variabele daarentegen, d.w.z. *de plaats in de directory-hiërarchie waar de variabele toegankelijk is*, zal afhangen van de plaats van de variabele in de hiërarchie (zie Hoofdstuk 2).

De regel om het bereik van een variabele te bepalen, is de volgende: *een globale variabele is toegankelijk in de directory waar ze werd gedefinieerd en in elke subdirectory van deze directory, tenzij een variabele met dezelfde naam bestaat in de betreffende subdirectory*. Gevolgen van deze regel zijn:

- Een globale variabele gedefinieerd in de HOME-directory zal toegankelijk zijn vanaf elke directory binnen HOME, tenzij de variabele opnieuw werd rgedefinieerd binnen een directory of subdirectory
- Als u een variabele opnieuw definieert binnen een directory of subdirectory, dan krijgt deze definitie voorrang op elke definitie in de directory's boven de huidige.
- Wanneer u een programma uitvoert dat verwijst naar een gegeven globale variabele, zal het programma de waarde van de variabele gebruiken in de directory van waaruit het programma wordt aangeroepen. Indien er geen variabele met die naam bestaat in deze directory, zal het programma de directory's boven de huidige doorzoeken tot aan de HOME-directory, en de waarde gebruiken overeenkomend met de betreffende variabele in de directory het dichtst boven de huidige.

Een programma, gedefinieerd in een gegeven directory, kan worden bereikt vanaf deze directory en de subdirectory's die daarin staan.

Al deze regels kunnen verwarrend klinken voor een nieuwe gebruiker van de rekenmachine. Zij kunnen allemaal vereenvoudigd worden door deze suggestie te volgen: *Maak directory's en subdirectory's aan met betekenisvolle namen om uw gegevens te ordenen en zorg er voor dat alle benodigde globale variabelen in de juiste subdirectory staan.*

Bereik van de lokale variabele

Lokale variabelen zijn enkel actief binnen een programma of subprogramma. Daarom is hun bereik beperkt tot het programma of subprogramma waarin ze zijn gedefinieerd. Een voorbeeld van een lokale variabele is de index in een FOR-lus (die later in dit hoofdstuk wordt behandeld), bijvoorbeeld `« → n x « 1 n FOR j x NEXT n →LIST » »`

Het menu PRG

In deze paragraaf wordt de inhoud van het menu PRG (programmeren) behandeld met systeemvlag 117 van de rekenmachine ingesteld op SOFT menus. Met deze instelling van de vlag worden submenu's en commando's in het menu PRG getoond als softmenulabels. Dit vergemakkelijkt het invoeren van programmeercommando's in de regeleditor wanneer u een programma samenstelt.

Gebruik de toetsencombinatie ← PRG om toegang te krijgen tot het menu PRG. Binnen het menu PRG onderscheiden we volgende submenu's (druk op NXT om naar de volgende submenu's in het menu PRG te gaan):

Hier volgt een korte beschrijving van de inhoud van deze submenu's en hun submenu's:

STACK: Functies om elementen van het RPN-stapelgeheugen te bewerken
MEM: Functies in verband met het bewerken van het geheugen
DIR: Functies in verband met het bewerken van directory's
ARITH: Functies om indexen, opgeslagen in variabelen, te bewerken
BRCH: Verzameling submenu's voor het 'vertakken' van programma's en lusfuncties
IF: IF-THEN-ELSE-END-constructie voor het 'vertakken'
CASE: CASE-THEN-END-constructie voor het 'vertakken'
START: START-NEXT-STEP-constructie voor het 'vertakken'
FOR: FOR-NEXT-STEP-constructie voor lussen
DO: DO-UNTIL-END-constructie voor lussen
WHILE: WHILE-REPEAT-END-constructie voor lussen
TEST: Vergelijkingenoperatoren, logische operatoren, vlaggentestfuncties
TYPE: Functies voor het omzetten van objecttypes, het splitsen van objecten, enz.
LIST: Functies voor het bewerken van lijsten
ELEM: Functies voor het bewerken van elementen van een lijst
PROC: Functies voor het toepassen van procedures op lijsten
GROB: Functies voor het bewerken van grafische objecten
PICT: Functies voor het aanmaken van tekeningen in het grafische scherm
CHARS: Functies voor het bewerken van karakterstrings
MODES: Functies voor het wijzigen van de modi van de rekenmachine
FMT: Voor het wijzigen van getalnotaties, kommanotaties
ANGLE: Voor het wijzigen van hoekberekening en coördinatensystemen

FLAG: Om vlaggen in- of uit te schakelen en hun status te controleren
KEYS: Om door de gebruiker gedefinieerde toetsen te definiëren en te activeren (Hoofdstuk 20)
MENU: Om eigen menu's te definiëren en activeren (Hoofdstuk 20)
MISC: Overige modusveranderingen (geluidssignalen, klok, enz.)
IN: Functies voor de programmainvoer
OUT: Functies voor de programmainvoer
TIME: Functies gerelateerd aan de tijd
ALRM: Bewerken van het alarmsignaal
ERROR: Functies voor het bewerken van foutmeldingen
IFERR: IFERR-THEN-ELSE-END-constructie voor foutbehandeling
RUN: Functies voor het uitvoeren en debuggen van programma's

Navigeren door RPN submenu's

Start met de toetsencombinatie ← PRG , druk daarna op de bijbehorende softmenutoets (bijvoorbeeld MEM). Als u een submenu wilt activeren binnen dit submenu (bijvoorbeeld DIR binnen het submenu MEM), druk op de overeenkomstige toets. Druk op de toets NXT om naar boven te bewegen in een submenu tot u de verwijzing vindt naar het bovenste submenu (bijvoorbeeld MEM binnen het submenu DIR) of het menu PRG (d.w.z. PRG).

Lijst van functies per submenu

Hierna volgt een lijst van alle functies in het menu PRG, gerangschikt volgens submenu.

STACK	**MEM/DIR**	**BRCH/IF**	**BRCH/WHILE**	**TYPE**
DUP	PURGE	IF	WHILE	OBJ→
SWAP	RCL	THEN	REPEAT	→ARRY
DROP	STO	ELSE	END	→LIST
OVER	PATH	END		→STR
ROT	CRDIR		**TEST**	→TAG
UNROT	PGDIR	**BRCH/CASE**	==	→UNIT
ROLL	VARS	CASE	≠	C→R
ROLLD	TVARS	THEN	<	R→C
PICK	ORDER	END	>	NUM
UNPICK			≤	CHR

PICK3	**MEM/ARITH**	**BRCH/START**	≥	DTAG
DEPTH	STO+	START	AND	EQ→
DUP2	STO-	NEXT	OR	TYPE
DUPN	STOx	STEP	XOR	VTYPE
DROP2	STO/		NOT	
DROPN	INCR	**BRCH/FOR**	SAME	**LIST**
DUPDU	DECR	FOR	TYPE	OBJ→
NIP	SINV	NEXT	SF	→LIST
NDUPN	SNEG	STEP	CF	SUB
	SCONJ		FS?	REPL
MEM		**BRCH/DO**	FC?	
PURGE	**BRCH**	DO	FS?C	
MEM	IFT	UNTIL	FC?C	
BYTES	IFTE	END	LININ	
NEWOB				
ARCHI				
RESTO				

LIST/ELEM	**GROB**	**CHARS**	**MODES/FLAG**	**MODES/MISC**
GET	→GROB	SUB	SF	BEEP
GETI	BLANK	REPL	CF	CLK
PUT	GOR	POS	FS?	SYM
PUTI	GXOR	SIZE	FC?	STK
SIZE	SUB	NUM	FS?C	ARG
POS	REPL	CHR	FS?C	CMD
HEAD	→LCD	OBJ→	FC?C	INFO
TAIL	LCD→	→STR	STOF	
	SIZE	HEAD	RCLF	**IN**
LIST/PROC	ANIMATE	TAIL	RESET	INFORM
DOLIST		SREPL		NOVAL
DOSUB	**PICT**		**MODES/KEYS**	CHOOSE
NSUB	PICT	**MODES/FMT**	ASN	INPUT
ENDSUB	PDIM	STD	STOKEYS	KEY
STREAM	LINE	FIX	RECLKEYS	WAIT
REVLIST	TLINE	SCI	DELKEYS	PROMPT

SORT	BOX	ENG		
SEQ	ARC	FM,	**MODES/MENU**	**OUT**
	PIXON	ML	MENU	PVIEW
	PIXOF		CST	TEXT
	PIX?	**MODES/ANGLE**	TMENU	CLLCD
	PVIEW	DEG	RCLMENU	DISP
	PX→C	RAD		FREEZE
	C→PX	GRAD		MSGBOX
		RECT		BEEP
		CYLIN		
		SPHERE		

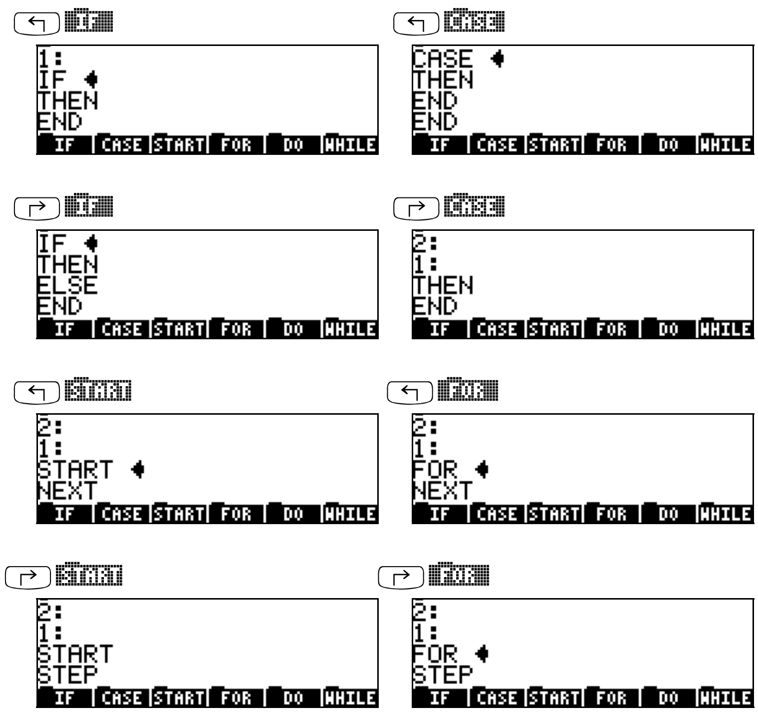
TIME	**ERROR**	**RUN**
DATE	DOERR	DBUG
→DATE	ERRN	SST
TIME	ERRM	SST↓
→TIME	ERR0	NEXT
TICKS	LASTARG	HALT
		KILL
TIME/ALRM	**ERROR/IFERR**	OFF
ACK	IFERR	
ACKALARM	THEN	
STOALARM	ELSE	
RCLALARM	END	
DELALARM		
FINDALARM		

Sneltoetsen in het menu PRG

Veel van de functies voor het menu PRG in de bovenstaande lijst zijn makkelijk te bereiken via andere wegen:

- Vergelijkingenoperatoren (≠, ≤, <, ≥, >) zijn beschikbaar op het toetsenbord.

- Veel functies en instellingen in het submenu MODES kunnen worden geactiveerd door gebruik te maken van de invoerfuncties voorzien met de toets MODE.
- Functies uit het submenu TIME kunnen worden bereikt met de toetsencombinatie ↱ TIME.
- De functies STO en RCL (in het submenu MEM/DIR) zijn beschikbaar via het toetsenbord met de toetsen STO▸ en ↰ RCL.
- De functies RCL en PURGE (in het submenu MEM/DIR) zijn beschikbaar via het menu TOOL (TOOL).
- Door op de toets links-shift (↰) of rechts-shift (↱) te drukken in het submenu BRCH voordat u op een submenu-toets drukt, zullen er constructies aangemaakt worden die horen bij de gekozen submenutoets. Dit werkt alleen met de rekenmachine in de RPN-modus. Voorbeelden worden hieronder getoond:



← DO

← WHILE

U ziet dat de invoegprompt (◆) beschikbaar is achter het sleutelwoord voor elke constructie zodat u kunt beginnen met invoeren op de juiste positie.

Toetsencombinatie voor veelgebruikte commando's

Hier volgen toetsencombinaties om veelgebruikte commando's te activeren die gebruikt worden bij het numeriek programmeren in het menu PRG. De commando's worden eerst weergegeven per menu:

STACK		
	DUP	← PRG STACK DUP
	SWAP	← PRG STACK SWAP
	DROP	← PRG STACK DROP
MEM DIR		
	PURGE	← PRG MEM DIR PURGE
	ORDER	← PRG MEM DIR ORDER
BRCH IF		
	IF	← PRG BRCH IF IF
	THEN	← PRG BRCH IF THEN
	ELSE	← PRG BRCH IF ELSE
	END	← PRG BRCH IF END
BRCH CASE		
	CASE	← PRG BRCH CASE CASE
	THEN	← PRG BRCH CASE THEN
	END	← PRG BRCH CASE END
BRCH START		
	START	← PRG BRCH START START
	NEXT	← PRG BRCH START NEXT
	STEP	← PRG BRCH START STEP

BRCH FOR

FOR	← PRG BRCH FOR FOR
NEXT	← PRG BRCH FOR NEXT
STEP	← PRG BRCH FOR STEP

BRCH DO

DO	← PRG BRCH DO DO
UNTIL	← PRG BRCH DO UNTIL
END	← PRG BRCH DO END

BRCH WHILE

WHILE	← PRG BRCH WHILE WHILE
REPEAT	← PRG BRCH WHILE REPEA
END	← PRG BRCH WHILE END

TEST

==	← PRG TEST ≠
AND	← PRG TEST NXT AND
OR	← PRG TEST NXT OR
XOR	← PRG TEST NXT XOR
NOT	← PRG TEST NXT NOT
SAME	← PRG TEST NXT SAME
SF	← PRG TEST NXT NXT SF
CF	← PRG TEST NXT NXT CF
FS?	← PRG TEST NXT NXT FS?
FC?	← PRG TEST NXT NXT FC?
FS?C	← PRG TEST NXT NXT FS?C
FC?C	← PRG TEST NXT NXT FC?C

TYPE

OBJ→	← PRG TYPE OBJ→
→ARRY	← PRG TYPE →ARRY
→LIST	← PRG TYPE →LIST
→STR	← PRG TYPE →STR
→TAG	← PRG TYPE →TAG
NUM	← PRG TYPE NXT NUM

CHR	← PRG TYPE NXT CHR
TYPE	← PRG TYPE NXT TYPE

LIST ELEM

GET	← PRG LIST ELEM GET
GETI	← PRG LIST ELEM GETI
PUT	← PRG LIST ELEM PUT
PUTI	← PRG LIST ELEM PUTI
SIZE	← PRG LIST ELEM SIZE
HEAD	← PRG LIST ELEM NXT HEAD
TAIL	← PRG LIST ELEM NXT TAIL

LIST PROC

REVLIST	← PRG LIST PROC REVLI
SORT	← PRG LIST PROC NXT SORT
SEQ	← PRG LIST PROC NXT SEQ

MODES ANGLE

DEG	← PRG NXT MODES ANGLE DEG
RAD	← PRG NXT MODES ANGLE RAD

MODES MENU

CST	← PRG NXT MODES MENU CST
MENU	← PRG NXT MODES MENU MENU
BEEP	← PRG NXT MODES MISC BEEP

IN

INFORM	← PRG NXT IN INFOR
INPUT	← PRG NXT IN INPUT
MSGBOX	← PRG NXT OUT MSGBO
PVIEW	← PRG NXT OUT PVIEW

RUN

DBUG	← PRG NXT NXT RUN DBG
SST	← PRG NXT NXT RUN SST
SST↓	← PRG NXT NXT RUN SST↓
HALT	← PRG NXT NXT RUN HALT
KILL	← PRG NXT NXT RUN KILL

Programma's voor het aanmaken van lijsten met nummers

U ziet dat de functies in het menu PRG niet de enige functies zijn die kunnen worden gebruikt bij het programmeren. Bijna alle functies in de rekenmachine kunnen worden ingepast in een programma. Zo kunt u, bijvoorbeeld, functies uit het menu MTH gebruiken. Meer specifiek kunt u functies gebruiken voor bewerkingen met lijsten zoals SORT, ΣLIST, enz., beschikbaar in het menu MTH/LIST.

Als bijkomende programmeeroefeningen, en om de toetsencombinaties hierboven aangegeven uit te proberen, stellen we hierbij drie programma's voor om lijsten aan te maken en te bewerken. De programmanamen en de lijsten zijn als volgt:

LISC:

```
« → n x « 1 n FOR j x NEXT n →LIST » »
```

CRLST:

```
« → st en df « st en FOR  j j df STEP en st - df / FLOOR 1 +
→LIST » »
```

CLIST:

```
« REVLIST DUP DUP SIZE 'n' STO ΣLIST SWAP TAIL DUP SIZE 1 - 1
SWAP FOR j DUP ΣLIST SWAP TAIL NEXT 1 GET n →LIST REVLIST 'n'
PURGE »
```

De werking van deze programma's is als volgt:

(1) *LISC:* maakt een lijst aan van n elementen, alle gelijk aan een constante c.
Werking: voer n in, voer c in, druk op LISC
Voorbeeld: 5 ENTER 6.5 ENTER LISC maakt de lijst {6.5 6.5 6.5 6.5 6.5} aan

(2) *CRLST:* maakt een lijst aan met getallen van n_1 tot n_2 met stap Δn, d.i. $\{n_1, n_1+\Delta n, n1+2\cdot\Delta n, \ldots n_1+N\cdot\Delta n \}$, waarbij $N= \text{floor}((n_2-n_1)/\Delta n)+1$.
Werking: voer n_1 in, voer n_2 in, voer Δn in, druk op CRLST

Voorbeeld: .5 ENTER 3.5 ENTER .5 ENTER CALIST geeft: {0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5}

(3) *CLIST:* maakt een lijst met cumulatieve sommen van de elementen, d.w.z. als de originele lijst {x_1 x_2 x_3 … x_N} is, dan maakt CLIST de volgende lijst aan:

$$\{x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, ..., \sum_{i=1}^{N} x_i\}$$

Werking: plaats de originele lijst op niveau 1, druk op CLIST.
Voorbeeld: {1 2 3 4 5} ENTER CLIST geeft {1 3 6 10 15}.

Voorbeelden van sequentieel programmeren

Over het algemeen bestaat een programma uit elke reeks van instructies voor de rekenmachine tussen de programmahaakjes « en ». Subprogramma's kunnen worden ingevoegd als onderdeel van een programma. De voorbeelden die eerder in deze handleiding werden gegeven (d.w.z. in hoofdstukken 3 en 8), kunnen er hoofdzakelijk 6 worden onderverdeeld in twee types: (a) programma's aangemaakt door het definiëren van een functie; en (b) programma's die een volgorde van bewerkingen van het stapelgeheugen simuleren. Deze twee programmatypes worden hierna beschreven. De algemene vorm van deze programma's is invoer→verwerking→uitvoer, daarom duiden we ze aan als sequentiële programma's.

Programma's voortkomen uit het definiëren van een functie

Dit zijn programma die voortvloeien uit het gebruik van de functie DEFINE (← DEF) met een argument in de vorm:

'functie_naam(x_1, x_2, …) = een uitdrukking met de variabelen x_1, x_2, …'
…'

Het programma is opgeslagen in een variabele `function_name`. Wanneer het programma opnieuw wordt opgeroepen naar het stapelgeheugen met → function_name, verschijnt het programma als volgt:

« → x_1, x_2, … 'uitdrukking met de variabelen x_1, x_2, …'».

Om de functie voor een reeks invoervariabelen x_1, x_2, …, in de RPN-modus te evalueren, voer dande variabelen in de juiste volgorde in in het stapelgeheugen (d.w.z. eerst x_1, gevolgd door x_2, dan x_3, enz.) en druk op de softmenutoets met het label function_name. De rekenmachine zal de waarde van de functie functie_naam (x_1, x_2,…) weergeven.

<u>Voorbeeld:</u> vergelijking van Manning voor een breed rechthoekig kanaal.
Bekijk als voorbeeld de volgende vergelijking die de eenheid van afvoer (afvoer per breedte-eenheid) q berekent in een breed rechthoekig kanaal met gebruikmaking van de vergelijking van Manning.

$$q = \frac{C_u}{n} y_0^{5/3} \sqrt{S_0}$$

waarbij C_u een constante is die afhankelijk is van het systeem van gebruikte eenheden [C_u = 1.0 voor eenheden van het internationaal systeem (S.I.) en C_u = 1.486 voor eenheden van het Engelse systeem (E.S.)], n is de weerstandscoëfficiënt van Manning die afhangt van het type bedding en van andere factoren, y_0 is de diepte van de stroom en S_0 is de helling van de kanaalbedding, gegeven als een dimensieloze breuk.

Opmerking: waarden van de coëfficient van Manning, n, staan in tabellen als dimensieloze getallen, typisch tussen 0.001 en 0.5. De waarde van Cu wordt ook gebruikt zonder dimensies. Zorg er echter wel voor dan de waarde van y0 de juiste eenheden heeft, d.w.z. m in S.I. en ft in E.S. Het resultaat voor q wordt weergegeven in de juiste eenheden van het overeenomstig gebruikte systeem, dus m^2/s in S.I. en ft^2/s in E.S. De vergelijking van Manning is dus niet *dimensioneel consistent*.

Stel dat we een functie q(Cu, n, y0, S0) willen maken om de eenheid van afvoer q te berekenen voor dit geval. Gebruik de vergelijking

‘q(Cu,n,y0,S0)=Cu/n*y0^(5./3.)*√S0’,

als argemument voor de functie DEFINE . U ziet dat de exponent 5./3. in de vergelijking staat voor een verhouding van reële getallen, door de decimale punten. Druk VAR, indien nodig, om de variabelenlijst op te roepen. Nu zal er een variabele met de naam q in uw softmenutoetsenlabels staan. Gebruik ↱ q om de inhoud van q te zien, . Het programma dat wordt aangemaakt door het definiëren van de functie `q(Cu,n,y0,S0)` wordt weergegeven als:

« → Cu n y0 S0 'Cu/n*y0^(5./3.)*√S0' ».

Dit moet worden gelezen als "Voer Cu, n, y0, S0 in , in die volgorde, bereken dan de vergelijking tussen aanhalingstekens." Gebruik om bijvoorbeeld q te berekenen voor Cu = 1.0, n = 0.012, y0 = 2 m en S0 = 0.0001 in de RPN-modus:

1 ENTER 0.012 ENTER 2 ENTER 0.0001 ENTER q

Het resultaat is 2.6456684 (of q = 2.6456684 m^2/s).

U kunt de ingevoerde gegevens ook scheiden met spaties in een enkele regel in het stapelgeheugen, in plaats van ENTER te gebruiken.

Programma's die een reeks van bewerkingen in het stapelgeheugen simuleren

In dit geval wordt aangenomen dat de termen die moeten worden gebruikt in de reeks van bewerkingen, reeds aanwezig zijn in het stapelgeheugen. Het programma wordt ingevoerd door eerst de programmahaakjes te openen met ↱ « » . Vervolgens wordt de reeks bewerkingen ingegeven die moeten worden uitgevoerd. Wanneer alle bewerkingen zijn ingegeven, druk dan ENTER om het programma af te werken. Indien dit een programma is dat slechts één keer wordt gebruikt, kunt u nu op EVAL drukken om het programma uit te voeren met de beschikbare invoergegevens. Een permanent programma moet worden opgeslagen in een variabelenaam.

De beste manier om dit soort programma's te beschrijven, is met een voorbeeld:

Voorbeeld: *Snelheidshoogte voor een rechthoekig kanaal.*
Stel dat we de snelheidshoogte h willen berekenen in een rechthoekig kanaal met breedte b, met een stroomdiepte y met een afvoer Q heeft. De specifieke energie wordt berekend als $h_v = Q^2/(2g(by)^2)$, waarbij g de versnelling van de zwaartekracht is (g = 9.806 m/s^2 in S.I. eenheden of g = 32.2 ft/s^2 in E.S. eenheden). Indien we h_v zouden berekenen voor Q = 23 cfs (kubieke voet per seconde = ft^3/s), b = 3 ft, en y = 2 ft, zouden we gebruiken: $h_v = 23^2/(2\cdot 32.2\cdot (3\cdot 2)^2)$. Door de RPN-modus van de rekenmachine interactief te gebruiken, kunnen we deze hoeveelheid berekenen als:

[2] [ENTER] [3] [×] [←] x² [3] [2] [.] [2] [×]
[2] [×] [2] [3] [←] x² [▶] [÷]

Dit resulteert in 0.228174 of h_v = 0.228174.

Om deze berekening als programma samen te stellen, moeten we de invoergegevens (Q, g, b, y) in het stapelgeheugen zetten in de volgorde waarin ze zullen worden gebruikt in de berekening. Voor wat betreft de variabelen Q, g, b, en y wordt de berekening die we zojuist hebben uitgevoerd, geschreven als (het volgende niet invoeren):

y [ENTER] b [×] [←] x² g [×] [2] [×] Q [←] x² [▶] [÷]

Zoals u kunt zien wordt y eerst gebruikt, daarna b, g en als laatste Q, in die volgorde. Daarom moeten we voor deze berekening de variabelen in omgekeerde volgorde invoeren, dus (het volgende niet invoeren):

Q [ENTER] g [ENTER] b [ENTER] y [ENTER]

Voor deze specifieke waarden gebruiken we:

23 [ENTER] 32.2 [ENTER] 3 [ENTER] 2 [ENTER]

Het programma zelf zal enkel deze toetsencombinaties (of commando's) bevatten die het resultaat zijn van het verwijderen van de ingevoerde waarden uit de eerder getoonde interactieve bewerking, d.w.z. het verwijderen van Q, g, b en y uit (het volgende niet invoeren):

y [ENTER] b [×] [←] x² g [×] [2] [×] Q [←] x² [▶] [÷]

en het houden van enkel de hieronder getoonde bewerkingen (tik het volgende niet in):

ENTER × ← × 2 × ← x² ▶ ÷

Opmerking: gebruik de toets ▶ niet bij het invoeren van een programma, maar gebruik de toetsencombinatie: ← PRG STACK SWAP.

In tegenstelling tot het interactief gebruik van de rekenmachine dat we eerder hebben toegepast, moeten we de niveaus 1 en 2 van het stapelgeheugen binnen het programma omwisselen. Om het programma te schrijven, gebruiken we daarom:

→ « »	Opent de programmasymbolen
×	Vermenigvuldigt y met b
← x²	Berekent de macht (b·y)
×	Vermenigvuldigt $(b\cdot y)^2$ met g
2 ×	Voert een 2 in en vermenigvuldigt ze met g·$(b\cdot y)^2$
← PRG STACK SWAP	Verwisselt Q met 2·g· $(b\cdot y)^2$
← x²	Berekent de macht van Q
← PRG STACK SWAP	Verwisselt 2·g· $(b\cdot y)^2$ met Q^2
÷	Deelt Q^2 door 2·g· $(b\cdot y)^2$
ENTER	Voert het programma in

Het resulterende programma ziet er als volgt uit:

```
« * SQ * 2 * SWAP SQ SWAP / »
```

Opmerking: `SQ` is de functie die voortkomt uit de toetsencombinatie ← x² .

Laten we een extra kopie van het programma maken en deze opslaan in de variabele hv:

' ALPHA ← H ALPHA ← V STO▶

Een nieuwe variabele hv moet nu in uw softtoetsenmenu. (Druk op VAR om uw lijst met variabelen te zien Het programma dat is achtergebleven in het stapelgeheugen kan worden geëvalueerd met de functie EVAL. Het resultaat zou, zoals voorheen, 0.228174… moeten zijn. Het programma is tevens beschikbaar voor toekomstig gebruik in de variabele hv. Gebruik bijvoorbeeld voor Q = 0.5 m^3/s, g = 9.806 m/s^2, b = 1.5 m en y = 0.5 m:

0.5 SPC 9.806 SPC 1.5 SPC 0.5 hv

Opmerking: SPC is hier gebruikt als een alternatief voor ENTER bij het invoeren van invoergegevens.

Het resultaat is nu 2.26618623518E-2, dus hv = $2.26618623518 \times 10^{-2}$ m.

Opmerking: aangezien de vergelijking in hv dimensioneel consistent is, kunnen we eenheden in de invoer gebruiken.

Zoals al eerder gezegd, zijn de twee types programma's die in deze sectie worden voorgesteld, *sequentiële programma's* in de zin dat het programma een enkelvoudig pad, dus INPUT→ OPERATION →OUTPUT. Het vertakken van de programmaloop is mogelijk door de commando's te gebruiken in het menu ← PRG BRCH . Meer gegevens over het vertakken van programma's wordt hieronder gegeven

Interactieve invoer in programma's

In de voorbeelden van sequentiële programma's in de vorige paragraaf is de volgorde waarin de variabelen in het stapelgeheugen moeten worden geplaatst alvorens het programma wordt uitgevoerd, niet altijd even duidelijk voor de gebruiker. In het geval van het programma q, geschreven als

« →Cu n y0 S0 'Cu/n*y0^(5/3)*√S0' »,

is het altijd mogelijk de programmadefinitie op te roepen naar het stapelgeheugen (→ q) om de volgorde te zien waarin de varabelen moeten worden ingevoerd, namelijk → `Cu n y0 S0`. Echter, in het geval van het programma ▒▒▒, geeft de definitie

« * SQ * 2 * SWAP SQ SWAP / »

geen aanwijzing over de volgorde waarin de gegevens moeten worden ingevoerd, tenzij u natuurlijk heel ervaren bent met RPN en de RPL gebruikerstaal.

Eén manier om het resultaat van het programma als formule te controleren, is het invoeren van symbolische variabelen in plaats van numerieke resultaten in het stapelgeheugen, en het programma te laten werken met deze variabelen. Om deze aanpak efficient te maken moet het CAS van de rekenmachine (Calculator Algebraic System) ingesteld zijn op de modi `symbolic` en `exact` . Dit doet u door MODE ▒▒▒ te gebruiken en aan te nemen dat de controletekens in de opties `_Numeric` en `_Approx` verwijderd zijn. Druk op ▒▒▒ ▒▒▒ om terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine. Druk op VAR voor het variabelenmenu.

We zullen deze laatste aanpak als volgt gebruiken om te zien welke formule resulteert uit het gebruik van het programma ▒▒▒ . We weten dat er vier keer gegevens zijn ingevoerd in het programma, dus gebruiken we de symbolische variabelen S4, S3, S2 en S1 om de niveaus van het stapelgeheugen aan te geven bij de invoer:

ALPHA S 4 ENTER ALPHA S 3 ENTER ALPHA S 2 ENTER ALPHA S 1 ENTER

Druk daarna op ▒▒▒. De resulterende formule kan er zo uitzien

`'SQ(S4)/(S3*SQ(S2*S1)*2)',`

als uw scherm niet is ingesteld op de stijl Textbook, of als volgt

$$\frac{SQ(S4)}{S3 \cdot SQ(S2 \cdot S1) \cdot 2}$$

als de stijl Textbook is geselecteerd. Aangezien we weten dat de functie SQ( ) staat voor x^2, interpreteren we het laatste resultaat als:

$$\frac{S4^2}{2\cdot S3\cdot(S2\cdot S1)^2},$$

wat de positie aangeeft van de verschillende invoerniveaus van het stapelgeheugen in de formule. Door dit resultaat te vergelijken met de originele formule die we hebben geprogrammeerd, d.w.z.

$$h_v = \frac{Q^2}{2g(by)^2},$$

zien we dat we y moeten invoeren op niveau 1 van het stapelgeheugen (S1), b op niveau 2 van het stapelgeheugen (S2), g op niveau 3 van het stapelgeheugen (S3) en Q op niveau 4 van het stapelgeheugen (S4).

Prompt met een invoerstring

Deze twee manieren om de volgorde van de invoergegevens te bepalen, zijn niet bepaald efficient. U kunt echter de gebruiker helpen bij het identificeren van de te gebruiken variabelen door hem of haar te prompten met de naam van de variabelen. Van de verschillende methodes beschikbaar in de RPL"-gebruikerstaal is de simpelste methode om een invoerstring en de functie INPUT (← PRG NXT IN INPUT) te gebruiken om uw invoergegevens te laden.

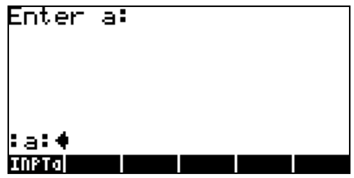
Het volgende programma prompt de gebruiker voor de waarde van een variabele a en plaatst de invoer op niveau 1 van het stapelgeheugen:

```
« "Enter a: " {"↵:a: " {2 0} V } INPUT OBJ→ »
```

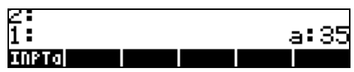
Dit programma bevat de symbolen :: (tag) en ↵(return), beschikbaar met de toetsencombinaties ← :: en → ↵, beiden verbonden met de toets . . Het tag-symbool (::) wordt gebruikt om strings van de labels invoer en uitvoer te voorzien. Het symbool return(↵) is vergelijkbaar met een harde return in een computer. De strings tussen aanhalingstekens (" ") worden direct ingevoerd met het alfanumeriek toetsenbord.

Sla het programma op in een variabele met de naam INPTa (voor INPuT a).

Probeer het programma uit te voeren door op de softmenutoets met het label INPTa te drukken.



Het resultaat is een stapelgeheugen dat de gebruiker vraagt naar de waarde van a en dat de cursor precies voor de prompt :a plaatst. Voer een waarde voor a in, bijvoorbeeld 35, druk op ENTER Het resultaat is de invoerstring `:a:35` op niveau 1 van het stapelgeheugen.



Een functie met een invoerstring

Als u dit codefragmentzou gebruiken om de functie f(a) = 2*a^2+3 te berekenen, zou u het programma als volgt kunnen veranderen:

```
« "Enter a: " {"↵:a: " {2 0} V }
INPUT OBJ→ → a « '2*a^2+3' » »
```

Sla dit nieuwe programma op onder de naam 'FUNCa' (FUNCtie van a):

Voer het programma uit door op FUNCa te drukken. Wanneer u wordt gevraagd de waarde van a in te geven, voer dan bijvoorbeeld 2 in en druk op ENTER. Het resultaat is simpelweg het algebraïsche $2a^2+3$, wat een onjuist resultaat is. De rekenmachine heeft functies voor het debuggen van programma's en zo logische fouten tijdens de uitvoering van programma's te identificeren, zoals hieronder getoond.

Het programma debuggen

Om uit te vinden waarom het programma niet werkte, gebruiken we de functie DBUG van de rekenmachine als volgt:

' FUNCa ENTER	Kopieert de naam van het programma op niveau 1 van het stapelgeheugen
← PRG NXT NXT RUN DBG	Activeer de debugger
SST↓	Stap-voor-stap debugging, resultaat "Voer a: in"
SST↓	Resultaat: {" ↵ a:" {2 0} V}
SST↓	Resultaat: gebruiker wordt gevraagd de waarde van a in te geven
2 ENTER	Voert een waarde van 2 in voor a. Resultaat: "↵a:2"
SST↓	Resultaat: a:2
SST↓	Resultaat: maakt stapelgeheugen leeg, is →a aan het uitvoeren
SST↓	Resultaat: maakt stapelgeheugen leeg, activeert het subprogramma «
SST↓	Resultaat: '2*a^2+3'
SST↓	Resultaat: '2*a^2+3', sluit de subprogramma » af
SST↓	Resultaat:'2*a^2+3', sluit het hoofdprogramma» af

Het nogmaals op de softmenutoets SST↓ drukken, geeft geen verder resultaat, aangezien we stap voor stap door het hele programma zijn gegaan. Het uitvoeren van de debugger heeft geen informatie verschaft waarom het programma niet de waarde van $2a^2+3$ voor a = 2 berekent. Om te zien wat de waarde van a in het subprogramma is, moeten we de debugger opnieuw uitvoeren en a evalueren binnen het subprogramma. Probeer het volgende:

VAR	Activeert het variabelenmenu opnieuw op
' FUNCa ENTER	Kopieert de naam van het programma op niveau 1 van het stapelgeheugen
← PRG NXT NXT RUN DBG	Activeert de debugger
SST↓	Stap-voor-stap debugging, resultaat "Voer a: in"

SST↓	Resultaat: {" ↵a:" {2 0} V}
SST↓	Resultaat: gebruiker wordt gevraagd de waarde van a in te geven
2 ENTER	Voert een waarde van 2 in voor a. Resultaat: "↵a:2"
SST↓	Resultaat: a:2
SST↓	Resultaat: maakt stapelgeheugen leeg, is →a aan het uitvoeren
SST↓	Resultaat: maakt stapelgeheugen leeg, activeert het subprogramma «

Op dit moment zijn we binnen het subprogramma « '2*a^2+3' » dat de lokale variabele a gebruikt. Gebruik het volgende om de waarde van a te bekijken:

ALPHA ← A EVAL Dit toont inderdaad dat de locale variabele a = 2

Laten we de debugger hier afbreken aangezien we toch het resultaat kennen dat we zullen krijgen. Druk op KILL om de debugger af te breken. U krijgt de melding `<!> Interrupted` die aangeeft dat u de debugger afbreekt. Druk op ON om terug te keren naar het normale scherm van de rekenmachine.

Opmerking: in de debugging modus wordt, iedere keer dat we op SST↓ drukken, het scherm weergegeven van de programmastap die wordt uitgevoerd. De softtoetsfunctie SST is ook beschikbaar in het submenu RUN in het PRG menu. Dit kan worden gebruikt om elk subprogramma direct uit te voeren dat is geactiveerd vanuit het hoofdprogramma. Voorbeelden van de toepassing van SST zullen later worden getoond.

Het programma herstellen

De enig mogelijke oplossing voor het weigeren van het programma om een numeriek resultaat weer te geven, is het ontbreken van het commando →NUM na de algebraïsche uitdrukking '2*a^2+3'. Bewerk het programma bewerken door de ontbrekende functie EVAL aan toe te voegen. Na het bewerken zou het programma er als volgt uit moeten zien:

```
« "Enter a: " {"↵:a: " {2 0} V } INPUT
   OBJ→ → a « '2*a^2+3' →NUM » »
```

Sla het opnieuw op in de variabele FUNCa en voer het programma opnieuw uit met a = 2. Dit keer is het resultaat 11, d.w.z. $2*2^2+3 = 11$.

Invoerstring voor twee of drie invoerwaarden

In deze paragraaf maken we een subdirectory aan in de HOME directory die voorbeelden van invoerstrings bevat voor één, twee en drie waarden van invoergegevens. Dit zullen generieke invoerstrings zijn die kunnen worden opgenomen in elk toekomstig programma, als men telkens de variabelennamen verandert volgens de behoeften van elk programma.

Laten we beginnen met het maken van een subdirectory met de naam PTRICKS (Programming TRICKS) die de programmafragmenten bevat die we later kunnen lenen in ingewikkeldere programmeeroefeningen. Om de subdirectory te maken, zomoet u in de HOME directory staan. Gebruik in de HOME directory de volgende toetsen om de subdirectory PTRICKS aan te maken:

' ALPHA ALPHA P T R I C K S ENTER	Voert de directorynaam 'PTRICKS' in
← PRG MEM DIR CRDIR	Maakt de directory
VAR	Roept de lijst van variabelen opnieuw op

Een programma kan meer dan 3 invoerwaarden hebben. Wanneer we gebruik maken van invoerstrings willen we het aantal invoerwaarden beperken tot 5 tegelijk om de simpele reden dat er over het algemeen slechts 7 niveaus van het stapelgeheuigen zichtbaar zijn. Als we niveau 7 van het stapelgehegen gebruiken om de invoerstring een titel te geven en niveau 6 van het stapelgeheugen leeg laten zodat het scherm makkelijker af te lezen is, hebben we enkel niveaus 1 tot 5 van het stapelgeheugen om invoervariabelen te definiëren.

Programma voor een invoerstring met twee invoerwaarden

Het programma voor een invoerstring met twee invoerwaarden, laten we zeggen a en b, ziet er als volgt uit:

```
« "Enter a and b: " {"↵:a:↵:b: " {2 0} V } INPUT OBJ→ »
```

Dit programmma kan makkelijk worden aangemaakt door de inhoud van INPTa aan te passen. Sla dit programma op in de variabele INPT2.

Toepassing: het evalueren van een functie met twee variabelen
Neem de ideale gaswet, pV = nRT, waar p = gasdruk (Pa), V = gas volume(m^3), n = aantal mol (gmol), R = universele gasconstante = 8.31451_J/(gmol*K) en T = absolute temperatuur (K).

We kunnen de druk p definiëren als een functie met twee variabelen V en T, met p(V,T) = nRT/V voor een gegeven gasmassa, aangezien n ook constant zal blijven. Neem aan dat n = 0.2 gmol, dan is de te programmeren functie:

$$p(V,T) = 8.31451 \cdot 0.2 \cdot \frac{T}{V} = (1.662902\_\frac{J}{K}) \cdot \frac{T}{V}$$

We kunnen de functie definiëren door het volgende programma in te voeren

```
« →V T '(1.662902_J/K)*(T/V)' »
```

en het op te slaan in variabele [p].

De volgende stap is de invoerstring toe te voegen die de gebruiker zal vragen naar de waarden van V en T. Pas het programma in [p] als volgt aan om deze invoerstroom aan te maken:

```
« "Enter V and T: " {"↵ :V:↵ :T: " {2 0} V }
INPUT OBJ→ → V T '(1.662902_J/K)*(T/V)' »
```

Sla het nieuwe programma opnieuw op in de variabele [p]. Druk op [p] om het programma uit te voeren. Voer de waarden V = 0.01_m^3 en T

= 300_K in in de invoerstring en druk daarna op ENTER. Het resultaat is 49887.06_J/m^3. De eenheden J/m^3 zijn equivalent aan Pascal (Pa), de voorkeurseenheid van druk in het S.I.-systeem.

Opmerking: omdat we bewust eenheden hebben gebruikt in de definitie van de functie, moeten de invoerwaarden ook eenheden meekrijgen in de invoer voor het juiste resultaat.

Programma voor invoerstring met drie invoerwaarden

Het programma voor een invoerstring met drie invoerwaarden, bijvoorbeeld a, b en c, ziet er als volgt uit:

```
« "Enter a, b and c: " {"↵ :a:↵ :b:↵ :c: " {2 0} V }
                          INPUT OBJ→ »
```

Dit programma kan vereenvoudigd worden door de inhoud van INPT2 aan te passen zodat het er hetzelfde uitziet als onmiddellijk hierboven. Het resulterende programma kan dan worden opgeslagen in een variabele met de naam INPT3. Met dit programma maken we de verzameling programma's voor invoerstrings compleet, waarmee we één, twee of drie gegevenswaarden in te voeren. Houd deze programma's als referentie en kopiier ze en pas ze aan aan de behoeften van nieuwe programma's die u zult schrijven.

Toepassing: het evalueren van een functie met drie variabelen

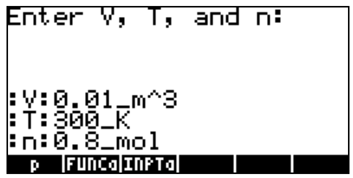
Stel dat we de ideale gaswet willen programmeren met inbegrip van het aantal mols, n, als een bijkomende variabele, d.w.z. we willen de functie

$$p(V,T,n) = (8.31451\_\frac{J}{K})\frac{n \cdot T}{V},$$

definiëren en aanpassen om de invoerstring voor drie variabelen toe te passen. De procedure om deze functie samen te stellen is bijna gelijk aan de procedure die we eerder gebruikten bij het definiëren van de functie p(V,T). Het resulterende programma zal er als volgt uitzien:

```
« "Enter V, T, and n:" {" ↵ :V:↵ :T:↵ :n:" {2 0} V }
INPUT OBJ→ →V T n  '(8.31451_J/(K*mol))*(n*T/V)'»
```

Sla dit resultaat opnieuw op in de variabele p. Druk op p om het programma uit te voeren.
Voer de waarden V = 0.01_m^3, T = 300_K en n = 0.8_mol in. Voor u op ENTER drukt, zal het stapelgeheugen er als volgt uitzien:



Druk op ENTER om het volgende resultaat te krijgen: 199548.24_J/m^3 of 199548.24_Pa = 199.55 kPa.

Invoer via invoerschermen

De functie INFORM (← PRG NXT IN INFOR.) kan worden gebruikt om gedetailleerde invoerschermen voor een programma te maken. De functie INFORM heeft vijf argumenten nodig, in deze volgorde:

1. Een titel: een karakterstring met een beschrijving van het invoerscherm
2. Velddefinities: een lijst met één of meer velddefinities {s_1 s_2 … s_n}, waarbij elke velddefinitie s_i, één van deze twee notaties kan hebben:
   a. Een eenvoudige veldlabel: een karakterstring
   b. Een lijst van specificaties in de vorm {"label" "helpInfo" $type_0$ $type_1$ … $type_n$}. Het "label" is een veldlabel. De "helpInfo" is een karakterstring met een gedetailleerde beschrijving van het veldlabel en de type-specificaties zijn een lijst van variabelentypes toegelaten voor het veld (zie Hoofdstuk 24 voor objecttypes).
3. Informatie over de veldnotatie: één enkel getal *col* of een lijst (*col* tabs). In deze specificatie staat *col* voor het aantal kolommen in het invoervak, en *tabs* (optioneel) duidt het aantal tab stops aan tussen de labels en de velden in het venster. De lijst kan ook een lege lijst zijn. Standaardwaarden zijn col = 1 en tabs = 3.

4. Een lijst van reset-waarden: een lijst met de waarden om de verschillende velden naar terug te zetten wanneer de optie RESET wordt geselecteerd bij het gebruik van het invoerscherm .
5. Een lijst van initiële waarden: een lijst met de initiële waarden van de velden.

De lijsten in punt 4 en 5 kunnen lege lijsten zijn. Tevens kunt u, als er geen waarden moeten worden geselecteerd voor deze opties, het commando NOVAL gebruiken (← PRG NXT IN NOVAL).

Nadat de functie INFORM is geactiveerd, zult u als resultaat een nul krijgen, ingeval de optie CANCEL wordt ingevoerd, of een lijst met de waarden die in de gegeven volgorde zijn ingegeven in de velden en het getal 1, d.w.z. in het RPN-stapelgeheugen:

```
2:   {v1 v2 … vn}
1:             1
```

Dus, als de waarde op niveau 1 van het stapelgeheugen nul is, is er niets ingevoerd; als de waarde 1 is, dan zijn de invoerwaarden beschikbaar op niveau 2 van het stapelgeheugen.

Voorbeeld 1 – Als voorbeeld nemen we het volgende programma, INFP1 (INput Form Program 1) om de afvoer Q te berekenen in een open kanaal met de formule van Chezy: $Q = C\cdot(R\cdot S)^{1/2}$, waar C de coëfficient van Chezy is, een functie voor de ruwheid van het oppervlak van het kanaal (standaardwaarden 80-150), R is de hydraulische straal van het kanaal (een lengte) en S is de helling van de kanaalbedding (een dimensieloos getal, standaard 0.01 tot 0.000001). Het volgende programma definieert een invoerscherm via de functie INFORM:

```
« " CHEZY'S EQN" { { "C:" "Chezy's coefficient" 0} { "R:"
"Hydraulic radius" 0 } { "S:" "Channel bed slope" 0} } { }
{ 120 1 .0001} { 110 1.5 .00001 }  INFORM »
```

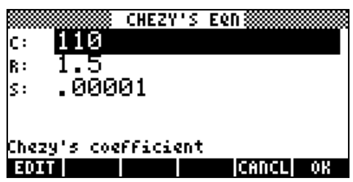
In het programma kunnen we de 5 componenten van de invoer als volgt identificeren:

1. Titel: " CHEZY'S EQN"
2. Velddefinities: er zijn er drie, met de labels "C:", "R:", "S:", de informatiestrings "coëfficient van Chezy", "Hydraulische radius", "Helling van kanaalbedding" en allemaal accepteren ze allen gegevenstype 0 (reële getalen) voor de drie velden:

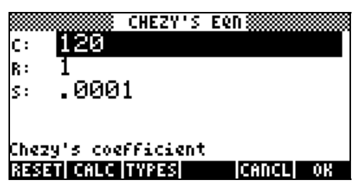
```
{ { "C:" "Chezy's coefficient" 0} { "R:" "Hydraulic
radius" 0 } { "S:" "Channel bed slope" 0} }
```

3. Informatie over veldnotatie: `{ }` (een lege lijst, de standaardwaarden worden gebruikt)
4. Lijst van reset-waarden: `{ 120 1 .0001}`
5. Lijst van initiële waarden: `{ 110 1.5 .00001}`

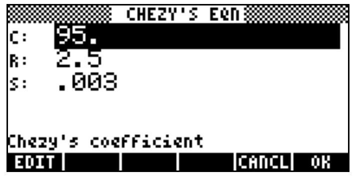
Sla het programma op in variabele INFP1. Druk op INFP1 om het programma uit te voeren. Het invoerscherm, met de initiële waarden, is als volgt:



Gebruik NXT RESET om het effect te zien wanneer u deze waarden terugzet (selecteer *Reset all* om de veldwaarden te terug te zetten):



Voer nu verschillende waarden in voor de drie velden, bijvoorbeeld C = 95, R = 2.5 en S = 0.003 en druk op OK na het invoeren van elk van deze drie waarden. Het invoerscherm zal er als volgt uitzien:



Voer nu deze waarden in het programma in en druk nogmaals op OK. Dit activeert de functie INFORM en geeft de volgende resultaten in het stapelgeheugen:

Zo hebben we het gebruik van de functie INFORM aangetoond. Pas het programma als volgt aan om te zien hoe u deze invoerwaarden in een berekening gebruikt:

```
« " CHEZY'S EQN" { { "C:" "Chezy's coefficient" 0} { "R:"
"Hydraulic radius" 0 } { "S:" "Channel bed slope" 0} } { }
{ 120 1 .0001} { 110 1.5 .00001 }  INFORM IF THEN OBJ→ DROP →
C R S 'C*(R*S)' →NUM "Q" →TAG ELSE "Operation cancelled"
MSGBOX END »
```

De bovenstaande programmastrappen na het commando INFORM, bevatten een vertakking van de beslissing met de IF-THEN-ELSE-END-constructie (uitvoerig beschreven elders in dit hoofdstuk) De programmacontrole kan naar één van twee mogelijkheden worden gestuurd, afhankelijk van de waarde op niveau 1 van het stapelgeheugen. Als deze waarde 1 is, wordt de controle toegepast op de commando's:

```
OBJ→ DROP → C R S 'C*√(R*S)' →NUM "Q" →TAG
```

Deze commando's zullen de waarde van Q berekenen en er een tag (of label) bij plaatsen. Anderzijds, als de waarde op niveau 1 van het stapelgeheugen 0 is (wat gebeurt als er op CANCEL wordt gedrukt in het invoerscherm), wordt de programmacontrole toegepast op de commando's:

```
"Operation cancelled" MSGBOX
```

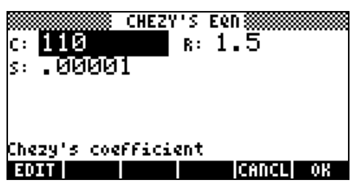
Deze commando's zullen een berichtvenster laten verschijnen dat aangeeft dat de bewerking werd afgebroken.

> **Opmerking:** de functie MSGBOX behoort tot de uitvoerfuncties in het submenu PRG/OUT. De commando's IF, THEN, ELSE, END zijn beschikbaar in het submenu PRG/BRCH/IF. De functies OBJ→, →TAG zijn beschikbaar in het menu PRG/TYPE. De functie DROP is beschikbaar in het menu PRG/STACK. De functies → en →NUM zijn beschikbaar op het toetsenbord.

Voorbeeld 2 – Het illustreren van het gebruik van punt 3 (Informatie over veldnotatie) in de argumenten van de function INFORM. Verander de lege lijst die u hebt gebruikt in programma INFP1 naar { 2 1 }, dus 2 kolommen in plaats van de standaard 3 en slechts één tabstop tussen de labels en de waarden. Sla dit nieuwe programma op in de variabele INFP2:

```
« " CHEZY'S EQN" { { "C:" "Chezy's coefficient" 0}
{ "R:" "Hydraulic radius" 0 } { "S:" "Channel bed slope"
0} } { 2 1 } { 120 1 .0001} { 110 1.5 .00001 }  INFORM
IF THEN OBJ→ DROP → C R S 'C*(R*S)' →NUM "Q" →TAG ELSE
"Operation cancelled" MSGBOX END »
```

Het uitvoeren van programma INFP2 geeft het volgende invoerscherm:



Voorbeeld 3 – Verander de lijst met informatie over de veldnotatie naar { 3 0 } en sla het veranderde programma op in variabele INFP3. Voer dit programma uit om het nieuwe invoerscherm te zien:

Een keuzevenster maken

Met de functie CHOOSE (PRG NXT IN CHOOS) kan de gebruiker een keuzevenster aanmaken in een programma. De functie vereist de volgende argumenten:

1. Een prompt (een karakterstring met de beschrijving van het keuzevenster)
2. Een lijst van keuzedefinities {c_1 c_2 … c_n}. De keuzedefinitie c_i kan elke van deze twee notaties hebben:
   a. Een object, bijv. een getal, algebraïsch, enz. dat wordt weergegeven in het keuzevenster en tevens het resultaat van de keuze zal zijn.
   b. Een lijst {object_displayed object_result} zodat object_displayed wordt getoond in het keuzevak en object_result is geselecteerd als het resultaat wanneer deze keuze wordt geselecteerd.
3. Een getal dat de positie aangeeft van de standaardkeuze in de lijst van keuzedifinities. Als dit getal 0 is, wordt er geen standaardkeuze geselecteerd.

Activeren van de functie CHOOSE zal een nul als resultaat geven, wanneer CANCEL wordt gebruikt, of, indien er een keuze wordt gemaakt, de geselecteerde keuze (bijv. v) en het nummer 1, d.w.z. in het stapelgeheugen van RPN:

```
2:          v
1:          1
```

Voorbeeld 1 –Vergelijking van Manning voor de berekening van de snelheid in de stroom van een open kanaal bevat een coefficient, C_u, die afhangt van het gebruikte eenhedensysteem. Als men het S.I. (Systeme International) gebruikt, dan is C_u = 1.0; indien men echter het E.S. (English System) gebruikt, dan is C_u = 1.486. Het volgende programma gebruikt een keuzevenster om de gebruiker de waarde van C_u te laten bepalen door het eenhedensysteem te kiezen. Sla het op in variabele CHP1 (CHoose Program 1):

```
« "Units coefficient" { { "S.I. units" 1}
```

```
{ "E.S. units" 1.486}  } 1 CHOOSE »
```

Het volgende keuzevenster wanneer dit programma wordt uitgevoerd (druk op CHP2) :

Afhankelijk of u het `S.I. units` of het `E.S. units` selecteert, plaatst CHOOSE een waarde van 1 of een waarde van 1.486 op stapelgeheugenniveau 2 en een 1 op niveau 1. Als u het keuzevenster annuleert, geeft CHOICE een nul weer (0).

Met de waarden weergegeven door de functie CHOOSE kan verder worden gewerkt door andere programmacommando's, zoals wordt weergegeven in het aangepaste programma CHP2:

```
« "Units coefficient" { { "S.I. units" 1} { "E.S. units"
1.486}  } 1 CHOOSE IF THEN "Cu" →TAG ELSE "Operation
cancelled" MSGBOX END »
```

De commando's na de functie CHOOSE in dit nieuwe programma geven een beslissing aan, gebaseerd op de waarde van op niveau 1 van het stapelgeheugen via de IF-THEN-ELSE-END-constructie. Als de waarde op niveau 1 van het stapelgeheugen 1 is, zullen de commando's `"Cu" →TAG` een getagd resultaat weergeven in het scherm. Als de waarde op niveau 1 van het stapelgeheugen nul is, zullen de commando's `"Operation cancelled" MSGBOX` een berichtvenster weergeven dat aangeeft dat de bewerking werd afgebroken.

Uitvoer in programma's identificeren

eenvoudigste manier om de uitvoer van een numeriek programma te identificeren, is door het resultaat van het programma te "taggen". Een tag is eenvoudigweg een string, gehecht aan een getal of welk object dan ook. De string zal de naam zijn die wordt verbonden aan het object. Bijvoorbeeld, wanneer we eerder de programma's INPTa (of INPT1) en INPT2 debugden, kregen we als resultaat de getagde uitvoer: a:35.

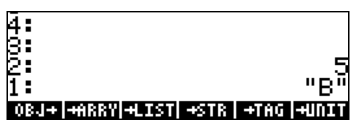
Een numeriek resultaat taggen

Om een numeriek resultaat te taggen, moet u het getal op niveau 2 en de tagstring op niveau 2 van het stapelgeheugen plaatsen en dan de functie →TAG (← PRG TYPE →TAG) gebruiken. Gebruik bijvoorbeeld voor het getagde resultaat B:5.:

5 ENTER → "" ALPHA B ← PRG TYPE →TAG

Een getagd numeriek resultaat opdelen in een getal en een tag

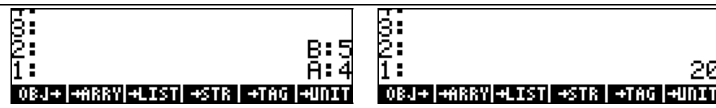
Gebruik de functie OBJ→ (← PRG TYPE OBJ→) om een getagd resultaat op te delen in zijn numerieke waarde en zijn tag. Het resultaat van het opdelen van een getagd getal met →OBJ is dat de numerieke waarde op niveau 2 van het stapelgeheugen wordt geplaatst en de tag op niveau 1 van het stapelgeheugen. Als u enkel geïnteresseerd bent in het gebruiken van de numerieke waarde, dan kunt u de tag verwijderen met de backspace toets ⬅. Het opdelen van de getagde hoeveelheid B:5 (zie hierboven), zal bijvoorbeeld het volgende geven:



Een getagde hoeveelheid "de-taggen"

"De-taggen" betekent het object uit een getagde hoeveelheid verwijderen. Deze functie wordt geactiveerd met de toetsencombinatie: ← PRG TYPE NXT DTAG. Bij de gegeven getagde hoeveelheid a:2, geeft DTAG bijvoorbeeld de numerieke waarde 2 als resultaat.

Opmerking: voor wiskundige berekeningen met getagde hoeveelheiden, zal de rekenmachine automatisch de hoeveelheid "detaggen" voor de bewerking. Bijvoorbeeld, de linkerafbeelding toont twee getagde hoeveelheden voor en na het indrukken van de toets × in de RPN-modus:



Voorbeelden van getagde uitvoer

Voorbeeld 1 – de uitvoer van de functie FUNCa taggen

Laten we de functie FUNCa, die we eerder hebben gedefinieerd, aanpassen zodat ze een getagde uitvoer geeft. Gebruik ↱ FUNCa om de inhoud van FUNCa opnieuw op te roepen naar het stapelgeheugen. Het originele programma van de functie ziet er als volgt uit

```
« "Enter a: " {"↵:a: " {2 0} V } INPUT OBJ→ → a «
              '2*a^2+3' →NUM » »
```

Pas het als volgt aan:

```
« "Enter a: " {"↵:a: " {2 0} V } INPUT OBJ→ → a «
          '2*a^2+3' →NUM "F" →TAG » »
```

Sla het programma opnieuw op in FUNCa met ↰ FUNCa. Voer daarna het programma uit door op FUNCa te drukken. Voer de waarde 2 in wanneer u daarom wordt gevraagd en druk op ENTER. Het resultaat is nu het getagde resultaat `F:11.`

Voorbeeld 2 – de invoer en de uitvoer van FUNCa taggen

In dit voorbeeld passen we het programma FUNCa aan zodat de uitvoer niet alleen de geëvalueerde functie, maar ook een kopie van de invoer met een tag omvat.

Gebruik ↱ FUNCa om de inhoud van FUNCa weer op te roepen naar het stapelgeheugen.

```
« "Enter a: " {"↵:a: " {2 0} V } INPUT OBJ→ → a «
          '2*a^2+3' →NUM "F" →TAG » »
```

Pas het als volgt aan:

```
« "Enter a: " {"↵:a: " {2 0} V } INPUT OBJ→ → a «
       '2*a^2+3' EVAL "F" →TAG a SWAP» »
```

(De functie SWAP is beschikbaar met ↰ PRG STACK SWAP). Sla het programma opnieuw op in FUNCa met ↰ FUNCa. Voer daarna het programma uit door op FUNCa te drukken. Voer de waarde 2 in wanneer u daarom wordt gevraagd en druk op ENTER. Het resultaat zijn nu twee getagde getallen `a:2.` op niveau 2 van het stapelgeheugen en `F:11.` op niveau 1 van het stapelgeheugen.

Opmerking: omdat we een invoerstring gebruiken om de waarde van de invoergegevens te krijgen, slaat de locale variabele in feite een getagde waarde (`:a:2` in het voorbeeld hierboven) op. Daarom moeten we het niet taggen in de uitvoer. Alles wat we moeten doen is een a voor de functie SWAP plaatsen in het subprogramma hierboven en de getagde invoer wordt in het stapelgeheugen geplaatst. Houd er rekening mee dat bij het maken van de bewerking van de functie de tag van de getagde invoer a automatisch wordt weggelaten en dat alleen de numerieke waarde wordt gebruikt in de berekening.

Om de werking van de functie FUNCa stap voor stap te bekijken, kunt u de functie DBUG als volgt gebruiken:

' FUNCa ENTER	Kopieert de programmanaam op niveau 1 van het stapelgeheugen
← PRG NXT NXT RUN DBG	Activeert de debugger
SST↓	Stap-voor-stap debugging, resultaat "Voer a: in"
SST↓	Resultaat: {" ↵a:" {2 0} V}
SST↓	Resultaat: gebruiker wordt gevraagd de waarde van a in te geven
2 ENTER	Voert een waarde van 2 in voor a. Resultaat: "↵:a:2"
SST↓	Resultaat: a:2
SST↓	Resultaat: maakt stapelgeheugen leeg, is →a aan het uitvoeren
SST↓	Resultaat: maakt stapelgeheugen leeg, activeert het subprogramma «
SST↓	Resultaat: '2*a^2+3'
SST↓	Resultaat: maakt stapelgeheugen leeg, aan het berekenen

SST↓	Resultaat: 11.,
SST↓	Resultaat: “F”
SST↓	Resultaat: F: 11.
SST↓	Resultaat: a:2.
SST↓	Resultaat: verwisselt niveaus 1 en 2
SST↓	Sluit subprogramma » af
SST↓	Sluit hoofdprogramma » af

Voorbeeld 3 – taggen van de invoer en uitvoer van functie p(V,T)
In dit voorbeeld passen we het programma p zodat de uitvoer de getagde invoerwaarden en het getagde resultaat geeft. Gebruik ↱ p om de inhoud van het programma weer op te roepen naar het stapelgeheugen.

```
« “Enter V, T, and n:“ {“↵ :V:↵ :T:↵ :n:“ {2 0} V }
INPUT OBJ→ →V T n  ‘(8.31451_J/(K*mol))*(n*T/V)‘ »
```

Pas het als volgt aan:

```
« “Enter V, T and n: “ {“↵ :V:↵ :T:↵ :n:“  {2 0} V }
INPUT OBJ→ →V T n « V T n
‘(8.31451_J/(K*mol))*(n*T/V)‘ EVAL “p” →TAG » »
```

Opmerking: u ziet dat we de berekening en het taggen van de functie p(V,T,n), voorafgegaan door het opnieuw oproepen van de invoervariabelen V T n in een subprogramma hebben geplaatst [de volgorde van instructies binnen de binnenste set van programmasymbolen « »]. Dit is nodig omdat het programma zonder de programmasymbolen die de twee lijsten van invoervariabelen (V T N « V T n) scheiden, ervan uitgaat dat het invoercommando

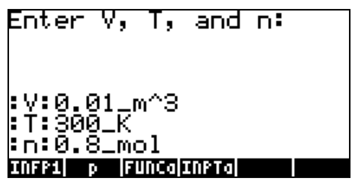
→V T N V T n

zes invoervariabelen nodig heeft, terwijl er maar drie beschikbaar zijn. Het resulaat zou een foutboodschap zijn en het programma zou zijn onderbroken.

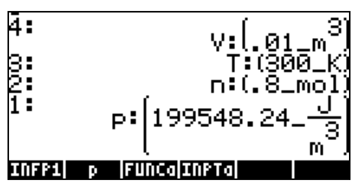
Om het hierboven genoemde subprogramma op te nemen in de aangepaste definitie van het programma , moet u « » gebruiken aan het begin en het einde van het subprogramma. Omdat de programmasymbolen in paren voorkomen, moet u, telkens als « » wordt opgeroepen, het afsluitende programmasymbool (») aan het begin en het openingsprogrammasymbool («) aan het einde van het subprogramma wissen.

Een karakter wissen tijdens het bewerken van het programma: plaats de cursor rechts van het karakter dat moet worden gewist en gebruik de backspace toets .

Sla het programma weer op in de variabele p met . Voer daarna het programma uit door op te drukken. Voer de waarden V = 0.01_m^3, T = 300_K en n = 0.8_mol in wanneer u daarom wordt gevraagd. Voor u op ENTER drukt voor de invoer, zal het stapelgeheugen er als volgt uitzien:



Na de uitvoering van het programma zal het stapelgeheugen er als volgt uitzien::



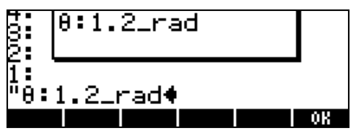
In het kort: de gewone werkwijze in de drie bovenstaande voorbeelden is het gebruik van tags om de invoer- en uitvoervariabelen te identificeren. Als we een invoerstring gebruiken om onze invoerwaarden te krijgen, dan zijn deze waarden reeds vooraf getagd en kunnen makkelijk opnieuw naar het stapelgeheugen opgeroepen voor de uitvoer. Met het commando →TAG kunt u de uitvoer van een programma identificeren.

Een berichtvenster gebruiken

Een berichtvenster is een leukere manier om de uitvoer van een programma weer te geven. Het commando een berichtvenster in de rekenmachine wordt geactiveerd met ← PRG NXT OUT MSGBOX te gebruiken. Het commando een berichtvenster vereist dat de uitvoerstring die in het venster moet worden geplaatst, beschikbaar is op niveau 1 van het stapelgeheugen. Probeer de volgende oefening om de werking van het commando MSGBOX te zien:

→ "" ALPHA → T ALPHA ← :: / • 2
→ _ ALPHA ← R ALPHA ← A ALPHA ← D
← PRG NXT OUT MSGBOX

Het resultaat is het volgende berichtvenster:



Druk OK om het berichtvenster te annuleren.

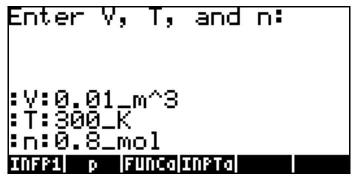
U zou een berichtvenster voor de uitvoer van een programma kunnen gebruiken door een getagde uitvoer, omgezet in een string, te gebruiken als uitvoerstring voor MSGBOX. Om een getagd resultaat om te zetten of om een algebraïsche waarde of een niet-getagde waarde om te zetten in een string, gebruikt u de functie →STR, beschikbaar via ← PRG TYPE →STR.

Een berichtvenster gebruiken voor de uitvoer van een programma

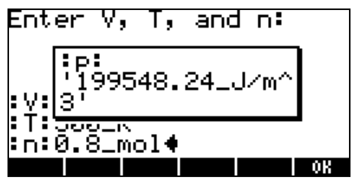
De functie FUNCa uit het laatste voorbeeld kan als volgt worden aangepast:

```
« "Enter V, T and n: " {"↵ :V:↵ :T:↵ :n: " {2 0} V } INPUT
OBJ→ →V T n « V T n '(8.31451_J/(K*mol))*(n*T/V)' EVAL "p"
→TAG →STR MSGBOX » »
```

Sla het programma weer op in de variabele p met . Voer daarna het programma uit door op te drukken. Voer de waarden V = 0.01_m^3, T = 300_K en n = 0.8_mol in wanneer u daarom wordt gevraagd.
Zoals bij een vorige versie van , zal het stapelgeheugen er als volgt uitzien voor u op ENTER drukt voor de invoer:



De eerste programma-uitvoer is een berichtvenster met de string:



Druk op om de uitvoer van het berichtvenster te annuleren. Het stapelgeheugen zal er nu als volgt uitzien:

Invoer en uitvoer integreren in een berichtvenster
We zouden het programma zo kunnen aanpassen dat niet enkel de uitvoer, maar ook de invoer in een berichtvenster wordt geplaatst. Bij het programma zal het aangepaste programma er als volgt uitzien:

```
« "Enter V, T and n: " {"↵ :V:↵ :T:↵ :n: " {2 0} V }
INPUT OBJ→ →V T n « V →STR "↵ " + T →STR "↵ " + n →STR
"↵ " + '(8.31451_J/(K*mol))*(n*T/V)' EVAL "p" →TAG →STR +
+ + MSGBOX » »
```

U ziet dat u het volgende codefragment moet toevoegen na de naam van elke variabele V, T en n in het subprogramma:

→STR "↵ " +

Gebruik het volgende om dit codefragment voor het eerst in te voeren:

PRG TYPE →STR "" ↵ ▶ +

Omdat de functies van het menu TYPE beschikbaar blijven in de softmenutoetsen, is alles wat u hoeft te gebruiken bij de tweede en derde keer dat het codefragment (→STR "↵ " +) in het subprogramma voorkomt (dus respectievelijk na de variabelen T en n):

→STR "" ↵ ▶ +

U zult zien dat er een nieuwe lijn wordt aangemaakt in het stapelgeheugen nadat u de toetsencombinatie ↵ heeft ingevoerd.

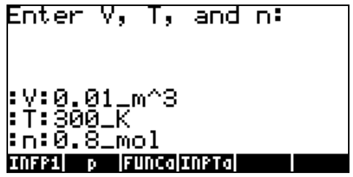
De laatste aanpassing die moet worden gedaan, is het driemaal invoeren van het plusteken aan het eind van het subprogramma, op de posities wanneer de functie werd aangeroepen.

Opmerking: het plusteken (+) in dit programma wordt gebruikt om strings samen te voegen. *Concatenatie* betekent gewoon het samenvoegen van individuele karakterstrings.

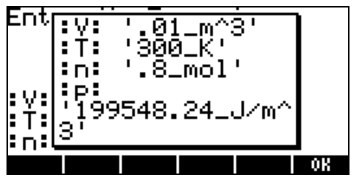
Om het programma in werking te zien:

- Sla het programma opnieuw op in de variabele p met .
- Voer het programma uit door op te drukken.
- Voer de waarden V = 0.01_m^3, T = 300_K en n = 0.8_mol in wanneer u daarom wordt gevraagd.

Zoals bij een vorige versie van [p], zal het stapelgeheugen er als volgt uitzien voor u op [ENTER] drukt voor de invoer:



De eerste programma-uitvoer is een berichtvenster met de string:



Druk op OK om de uitvoer van het berichtvenster te annuleren.

Eenheden in een programma plaatsen

Zoals u heeft kunnen zien in alle voorbeelden bij de verschillende versies van het programma p die we in dit hoofdstuk hebben laten zien, is het vaak een vervelend process om eenheden te koppelen aan invoerwaarden. U kunt het programma zelf deze eenheden aan de in- en uitvoerwaarden laten koppelen. We zullen deze opties illustreren door het programma p nog eens aan te passen.

Roep de inhoud van het programma p opnaar het stapelgeheugen met ↱ p en pas die als volgt aan:

> **Opmerking**: ik heb het programma willekeurig verdeeld in verschillende lijnen om het leesbaarder te maken. Het programma hoeft er niet hetzelfde uit te zien in het stapelgeheugen van de rekenmachine. De volgorde van de commando's is echter wel correct. Het karakter ↵ is niet zichtbaar in het stapelgeheugen; het maakt alleen een nieuwe lijn aan.

```
« "Enter V,T,n [S.I.]: " {"↵ :V:↵ :T:↵ :n: " {2 0} V }
INPUT OBJ→ → V T n
« V '1_m^3' *  T '1_K' *  n '1_mol' * → V T n
« V "V" →TAG →STR "↵ " + T "T" →TAG →STR "↵ " +  n
"n" →TAG →STR "↵ " +
```

```
'(8.31451_J/(K*mol))*(n*T/V)' EVAL "p" →TAG →STR + + +
MSGBOX » » »
```

Deze nieuwe versie van het programma bevat een extra niveau van subprogrammering (dus een derde niveau van programmasymbolen « » en enkele stappen die gebruik maken van lijsten, d.w.z.

```
V '1_m^3' * { }+ T '1_K' * + n '1_mol' * + EVAL → V T n
```

De *interpretatie* van dit codefragment is als volgt. (We gebruiken de in de invoerstring de waarden `:V:0.01`, `:T:300` en `:n:0.8`):

1. `V` : De waarde van V als getagde invoer, wordt in het stapelgeheugen geplaatst (b.v. V:0.01)

2. `'1_m^3'` : De S.I. waarden overeenkomende met V worden daarna in niveau 1 van het stapelgeheugen geplaatst, de getagde invoer voor V wordt verplaatst naar niuveau 2 van het stapelgeheugen.

3. `*` : Door de inhoud van niveaus 1 en 2 van het stapelgeheugen te vermenigvuldigen, krijgen we een getal met eenheden (b.v. 0.01_m^3), maar de tag is verloren.

4. `T '1_K' *` : Berekenen van de waarde van T met S.I. eenheden

5. `n '1_mol' *` : Berekenen van de waarde van n met de eenheden

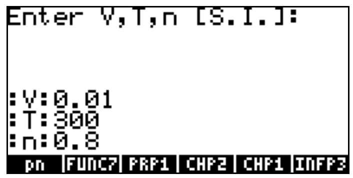
6. `→ V T n` : De waarden van V, T en n, respectievelijk geplaatst in niveaus 3,2 en 1 van het stapelgeheugen, worden doorgegeven naar het volgende niveau van subprogrammatie.

Voer het volgende uit om deze versie van het programma in werking te zien:

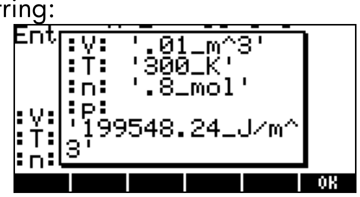
- Sla het programma opnieuw op in de variabele p met
  [↰][p]

- Voer het programma uit door op [p] te drukken.
- Voer de waarden V = 0.01, T = 300 en n = 0.8 in, wanneer u daarom wordt gevraagd (nu zijn er geen eenheden nodig).

Voor u op ENTER drukt voor de invoer, ziet het stapelgeheugen er als volgt uit:



Druk op ENTER om het programma uit te voeren. De uitvoer is een berichtvenster met de string:



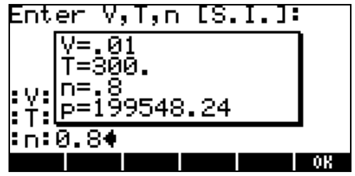
Druk op OK om de uitvoer van het berichtvenster te annuleren.

Berichtvenster van uitvoer zonder eenheden

Pas het programma p nog maar eens een keer aan om het gebruik van eenheden uit te schakelen. Het programma zonder eenheid zal er als volgt uitzien:

```
« "Enter V,T,n [S.I.]: " {"↵ :V:↵ :T:↵ :n: " {2 0} V }
INPUT OBJ→ →V T n
« V DTAG  T DTAG  n DTAG →  V T n
« "V=" V →STR + "↵ "+ "T=" T →STR + "↵ "+ "n=" n →STR +
"↵ "+
'8.31451*n*T/V' EVAL →STR "p=" SWAP + + + + MSGBOX » » »
```

En wanneer het wordt uitgevoerd met de invoergegevens V = 0.01, T = 300 en n = 0.8, geeft het volgend berichtvenster als uitvoer:



Druk op OK om de uitvoer van het berichtvak te annuleren.

Relationele en logische operatoren

Tot nu toe hebben we hoofdzakelijk met sequentiële programma's gewerkt. De RPL-gebruikerstaal geeft beweringen die de programmaloop kunnen vertakken en in een lus kunnen plaatsen. Vele daarvan maken hun beslissingen op basis van het feit of een logische bewering al dan niet waar is. In deze paragraaf stellen we enkele van de elementen voor die worden gebruikt om zulke logische beweringen op te bouwen, namelijk relationele en logische operatoren.

Relationele operatoren

Relationele operatoren zijn operatoren die worden gebruikt om de relatieve positie van twee objecten te vergelijken. Relationele operatoren, die enkel met reële getallen werken, worden bijvoorbeeld gebruikt om een bewering te geven over de relatieve positie van één of meer reële getallen. Afhankelijk van de effectieve getallen die worden gebruikt, kan zo'n bewering waar (vertegenwoordigd door de numerieke waarde van 1. in de rekenmachine) of niet waar (vertegenwoordigd door de numerieke waarde van 0. in de rekenmachine) zijn.

De beschikbare relationele operatoren voor het programmeren van de rekenmachine zijn:

Operator	**Betekenis**	**Voorbeeld**
==	"is gelijk aan"	'x==2'
≠	"is niet gelijk aan"	'3 ≠ 2'

<	"is kleiner dan"	'm<n'
>	"is groter dan"	'10>a'
≥	"is groter of gelijk aan"	'p ≥ q'
≤	"is kleiner of gelijk aan"	'7≤12'

Al deze operatoren, met uitzondering van == (dat kan worden ingevoerd met → = → =), zijn beschikbaar op het toetsenbord. Ze zijn ook beschikbaar via ← PRG TEST.

Twee getallen, variabelen of algebraïsche waarden verbonden door een relationele operator vormen een logische uitdrukking die de waarde waar (1.) of niet waar (0.) kan aannemen of die niet geëvalueerd kan worden. Bepalen of een logische bewering waar is of niet: plaats de bewering op niveau 1 van het stapelgeheugen en druk op EVAL (EVAL). Voorbeelden:

'2<10' EVAL, resultaat: 1. (waar)

'2>10' EVAL, resultaat: 0. (niet waar)

In het volgende voorbeeld wordt aangenomen dat de variabele m niet geïnitialiseerd is (het heeft geen numerieke waarde gekregen):

'2==m' EVAL, resultaat: '2==m'

Het feit dat het resultaat van de evaluatie van de bewering hetzelfde is als de originele bewering, betekent dat de bewering niet eenduidig geëvalueerd kan worden.

Logische operatoren

Logische operatoren zijn logische partikels die worden gebruikt om eenvoudige logische beweringen samen te voegen of aan te passen. De logische operatoren beschikbaar in de rekenmachine kunnen makkelijk worden geactiveerd met de toetsencombinatie ← PRG TEST NXT.

De beschikbare logische operatoren zijn: AND, OR, XOR (exclusieve of), NOT en SAME. De operatoren zullen resulaten geven die waar of niet waar zijn, afhankelijk van de waarheidswaarde van de betrokken logische beweringen. De operator NOT (negatief) heeft betrekking op één enkele logische bewering. Al de andere hebben betrekking op twee logische beweringen.

Als we alle mogelijke combinaties van één of twee beweringen samen met de resulterende waarde bij de toepassing van een bepaalde logische operator in een tabel zetten, krijgen we de zogenoemde waarheidstabel van de operator. Hieronder staan de waarheidstabellen van elke logische standaardoperatoren die beschikbaar zijn in de rekenmachine:

p	NOT p
1	0
0	1

p	q	p AND q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	p OR q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	p XOR q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

De rekenmachine bevat ook de logische operator SAME. Dit is een niet-standaard logische operator die wordt gebruikt om te bepalen of twee objecten identiek zijn. Indien ze identiek zijn, wordt een waarde 1 (waar) weergegeven, indien ze niet identiek zijn, wordt een waarde 0 (niet waar) weergegeven. De volgende oefening in de RPN-modus geeft bijvoorbeeld een waarde 0:

‘SQ(2)’ ENTER 4 ENTER SAME

U ziet dat het gebruik van SAME een heel strikte interpretatie van het woord “identiek” inhoudt. Daarom is SQ(2) niet identiek aan 4, hoewel ze bij evaluatie allebei de numerieke waarde 4 geven.

Vertakken van programma’s

Het vertakken van de loop van een programma houdt in dat het programma een keuze maakt tussen twee of meer richtingen die de programmaloop uitgaat. De RPL-gebruikerstaal biedt een aantal commando’s die kunnen worden gebruikt voor het vertakken van programma’s. De menu’s met deze commando's kunnen worden geactiveerd met de toetsencombinatie:

← PRG BRCH

Dit menu toont submenu’s voor de programmaconstructies

De programmaconstructies IF…THEN..ELSE…END en CASE…THEN…END worden beschouwd als constructies om een programma te vertakken. De overige constructies, namelijk START, FOR, DO en WHILE zijn geschikt voor de controle van repetitieve processen binnen een programma en zullen worden aangeduid als programmaluscontructies. Dit laatste type programmaconstructies zal verderop uitvoeriger worden behandel.

Vertakken met IF

In deze paragraaf geven we voorbeelden met de constructies IF…THEN…END en IF…THEN…ELSE…END.

De IF…THEN…END-constructie

De IF…THEN…END is de eenvoudigste programmaconstructie met IF. De algemene notatie van deze constructie is:

`IF` *`logical_statement`* `THEN` *`program_statements`* `END`.

De werking van deze constructie is als volgt:

1. Evalueer de logische bewering.
2. Indien de logische bewering waar is, voer dan de programmabeweringen uit en voer het programma verder uit na de bewering END.
3. Indien de logische bewering niet waar is, sla dan de programmabeweringen over en voer het programma verder uit na de bewering END.

Gebruik het volgende om de partikels IF, THEN, ELSE en END in te voeren:

← PRG BRCH IF

De functies IF THEN ELSE END zijn beschikbaar in dat menu om selectief ingevoerd te worden door de gebruiker. Gebruik als alternatief om een IF…THEN…END-constructie direct in het stapelgeheugen te plaatsen:

← PRG BRCH ← IF

Dit zal de volgende invoer geven in het stapelgeheugen:

Met de cursor ⬅ voor de IF-bewering, wordt de gebruiker gevraagd naar de logische bewering die de IF-constructie zal activeren wanneer het programma wordt uitgevoerd.

<u>Voorbeeld</u>: voer het volgende programma in:

« → x « IF ‘x<3’ THEN ‘x^2‘ EVAL END ”Done” MSGBOX » »

en sla het op onder de naam ‘f1’. Druk op VAR en controleer of de variabele f1 daadwerkelijk beschikbaar is in uw variabelenmenu. Controleer de volgende resultaten:

0	f1 Resultaat:	0	1.2	f1 Resultaat:	1.44
3.5	f1 Resultaat:	geen actie	10	f1 Resultaat:	geen actie

Deze resultaten bevestigen de correcte werking van de IF…THEN…END constructie. Het programma berekent de functie $f_1(x) = x^2$, als $x < 3$ (en geeft geen uitvoer indien dit niet zo is).

De IF…THEN…ELSE…END-constructie

De IF…THEN…ELSE…END-constructie laat twee alternatieve paden voor de programmaloop toe, gebaseerd op de waarheidswaarde van de logische bewering. De algemene notatie van deze constructie is:

IF *logical_statement* THEN *program_statements_if_true*
ELSE *program_statements_if_false* END.

De werking van deze constructie is als volgt:

1. Evalueer de logische bewering.
2. Indien de logische bewering waar is, voer dan de programmabeweringen uit indien waar en voert het programma verder uit na de bewering END.
3. Indien de logische bewering niet waar is, voer dan de programmabeweringen uit indien niet waar en voert het programma verder uit na de bewering END.

Gebruik om een IF…THEN…ELSE…END-constructie direct in het stapelgeheugen te maken:

← PRG BRCH → IF

Ditz al de volgende invoer geven in het stapelgeheugen:

Voorbeeld: Voer het volgende programma in:

```
« → x « IF ‘x<3’ THEN ‘x^2‘ ELSE ‘1-x’ END EVAL ”Done” MSGBOX
» »
```

en sla het op onder de naam ‘f2’. Druk op VAR en controleer dat variabele f2 daadwerkelijk aanwezig is in uw variabelenmenu. Controleer de volgende resultaten:

0 f2 Resultaat: 0 1.2 f2 Resultaat: 1.44
3.5 f2 Resultaat: -2.5 10 f2 Resultaat: -9

Deze resultaten bevestigen de correcte werking van de IF…THEN…ELSE…END-constructie. Het programma berekent de functie

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2, \text{ if } x < 3 \\ 1 - x, \text{ otherwise} \end{cases}$$

> **Opmerking**: in dit specifieke geval zou het een geldig alternatief geweest zijn om een IFTE functie in de vorm: ‘f2(x) = IFTE(x<3,x^2,1-x)’ te gebruiken.

Geneste IF…THEN…ELSE…END-constructies

In de meeste computerprogrammeertalen waar de IF…THEN…ELSE…END-constructie beschikbaar is, is de volgende notatie de algemeen gebruikte notatie voor programmaweergave:

```
IF logical_statement THEN
      program_statements_if_true
ELSE
      program_statements_if_false
END
```

Bij het ontwerpen van een rekenmachineprogramma met IF-constructies zou u kunnen starten door met de hand de pseudo-code voor de IF- constructies te schrijven zoals hierboven getoond. Voor programma f2 bijvoorbeeld, zou u het volgende kunnen schrijven

```
IF x<3 THEN
       x^2
ELSE
       1-x
END
```

Terwijl deze simpele constructie behoorlijk werkt wanneer uw functie slechts twee takken heeft, is het mogelijk dat u IF…THEN…ELSE…END-constructies moet nesten voor de functies met drie of meer takken. Bekijk bijvoorbeeld de functie

$$f_3(x) = \begin{cases} x^2, if \;\; x < 3 \\ 1 - x, \;\; if \;\; 3 \le x < 5 \\ \sin(x), if \;\; 5 \le x < 3\pi \\ \exp(x), if \;\; 3\pi \le x < 15 \\ -2, \; elsewhere \end{cases}$$

Hier is een mogelijke manier om deze functie te evalueren met IF… THEN … ELSE … END-constructies:

```
IF x<3 THEN
        x^2
ELSE
        IF x<5 THEN
                1-x
        ELSE
                IF x<3π         THEN
                        sin(x)
                ELSE
                        IF x<15 THEN
                                exp(x)
                        ELSE
                                -2
                        END
```

END
END
END
Een complexe IF-constructie als deze wordt een set van *geneste* IF … THEN … ELSE … END-constructies genoemd.

Een mogelijke manier om f3(x) te evalueren, gebaseerd op de bovenstaande geneste IF-constructie, is om het programma als volgt te schrijven:

```
« → x « IF ‘x<3‘ THEN ‘x^2‘ ELSE IF ‘x<5‘ THEN ‘1-x‘ ELSE IF
‘x<3*π‘ THEN ‘SIN(x)‘ ELSE IF ‘x<15‘ THEN ‘EXP(x)‘ ELSE –2
END END END END EVAL » »
```

Sla het programma op in de variabele f3 en probeer de volgende evaluaties:

1.5 f3	*Resultaat*	2.25 (d.i. x^2)
2.5 f3	*Resultaat*:	6.25 (d.i. x^2)
4.2 f3	*Resultaat*:	-3.2 (d.i. 1-x)
5.6 f3	*Resultaat*:	-0.631266… (d.i.., sin(x), met x in radialen)
12 f3	*Resultaat*:	162754.791419 (d.i. exp(x))
23 f3	*Resultaat*:	-2. (d.i. -2)

De CASE-constructie

De CASE-contructie kan worden gebruikt om verschillende paden van de programmaloop te coderen, zoals in het geval van de reeds eerder aangehaalde geneste IF-constructies. De algemene notatie van deze constructie is als volgt:

```
CASE
Logical_statement1 THEN program_statements1 END
Logical_statement2 THEN program_statements2 END
.
.
.
Logical_statement THEN program_statements END
```

```
Default_program_statements (optional)
END
```

Bij het evalueren van deze contructie test het programma iedere *logische_bewering* tot het er één vindt die waar is. Het programma voert de bijbehorende *programmabeweringen* uit en geeft de programmaloop door naar de verklaring volgende op de END-verklaring.

De verklaringen CASE, THEN en END zijn beschikbaar voor selectief invoeren via de toetsencombinatie ← PRG BRCH CASE.

Indien u in het menu BRCH staat, (← PRG BRCH) kunt u de volgende sneltoetsen gebruiken om uw CASE-constructie in te voeren (De positie van de cursor wordt aangegeven door het symbool ⬅):

- ← CASE: Start de case-constructie met de prompts: CASE ⬅ THEN END END
- → CASE: Maakt een lijn in CASE door de partikels THEN ⬅ END toe te voegen

Voorbeeld – programma $f_3(x)$ met gebruik van de CASE-verklaring
De functie wordt gedefinieerd door de volgende 5 uitdrukkingen:

$$f_3(x) = \begin{cases} x^2, \textit{if } x < 3 \\ 1-x, \textit{ if } 3 \le x < 5 \\ \sin(x), \textit{if } 5 \le x < 3\pi \\ \exp(x), \textit{if } 3\pi \le x < 15 \\ -2, \textit{elsewhere} \end{cases}$$

Door de CASE-verklaring te gebruiken in de RPL-gebruikerstaal, kunnen we deze functie als volgt coderen:

```
« → x « CASE ‘x<3‘ THEN ‘x^2‘ END ‘x<5‘ THEN ‘1-x‘ END
‘x<3*π‘ THEN ‘SIN(x)‘ END ‘x<15‘ THEN ‘EXP(x)‘ END -2 END
EVAL » »
```

Sla het programma op in een variabele met de naam f3c. Probeer daarna de volgende oefeningen:

1.5 f3c	*Resultaat*	2.25 (d.i. x^2)
2.5 f3c	*Resultaat*:	6.25 (d.i. x^2)
4.2 f3c	*Resultaat*:	-3.2 (d.i. 1-x)
5.6 f3c	*Resultaat*:	-0.631266… (d.w.z. sin(x), met x in radialen)
12 f3c	*Resultaat*:	162754.791419 (d.w.z. exp(x))
23 f3c	*Resultaat*:	-2. (d.i. -2)

Zoals u kunt zien, geeft f3c exact dezelfde resultaten als f3. Het enige verschil tussen de programma's is de constructie die is gebruikt voor het vertakken. In het geval van de functie $f_3(x)$, die vijf uitdrukkingen nodig heeft voor zijn definitie, kan de CASE constructie makkelijker te coderen zijn dan een aantal geneste IF … THEN … ELSE … END-constructies.

Programmalussen

Programmalussen zijn constructies die het programma toelaten een aantal beweringen herhaaldelijk uit te voeren. Stel dat u bijvoorbeeld de som van de machten van de hele getallen van 0 tot n wilt berekenen, d.i.

$$S = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

Om deze som te berekenen, hoeft u alleen de toets ⓡ Σ te gebruiken in de vergelijkingeneditor en de limieten en de uitdrukking voor de som laden (voorbeelden van sommen worden gegeven in hoofdstukken 2 en 13). Echter, om het gebruik van programmalussen te illustreren, zullen we deze som berekenen met onze eigen codes in de RPL-gebruikerstaal. Er zijn vier verschillende commando's die kunnen worden gebruikt om een programmalus te schrijven in de RPL-gebruikerstaal; nl. START, FOR, DO en WHILE. De commando's START en FOR gebruiken een index of teller om te bepalen hoeveel keer de lus wordt uitgevoerd. De commando's DO en WHILE vallen terug op een logische bewering om te beslissen wanneer de uitvoering van een lus wordt gestopt. De werking van de luscommando's wordt hierna uitvoerig behandeld.

De START-constructie

De START-constructie gebruikt twee waarden van een index om een aantal beweringen herhaald uit te voeren. Er zijn twee versies van de START-constructie: START…NEXT en START…STEP. De versie START…NEXT wordt gebruikt wanneer de verhoging van de index gelijk is aan 1 en de versie START…STEP wordt gebruikt wanneer de verhoging van de index wordt bepaald door de gebruiker.

Commando's in verband met de START-constructie kunnen geactiveerde worden met:

← PRG BRCH START START

In het menu BRCH (← PRG BRCH) zijn de volgende toetsen beschikbaar om START constructies te maken (het symbool geeft de positie van de cursor aan):

- ← START : Start de START…NEXT-constructie: START ⇐ NEXT
- → START : Start de START…STEP-constructie: START ⇐ STEP

De START…NEXTconstructie

De algemene vorm van deze bewering is:

```
start_value end_value START program_statements NEXT
```

Omdat in dit geval de verhoging 1 is, moet u ervoor zorgen dat de `start_value < end_value` om de lus te stoppen. Anders maakt u wat men noemt een <u>infinite loop</u> of <u>oneindige lus</u>.

Voorbeeld – berekenen van de som S hierboven gedefinieerd
De START…NEXT-constructie bevat een index waarvan de waarde niet toegankelijk is voor de gebruiker. Omdat voor de berekening van de som de index zelf (k, in dit geval) nodig is, moeten we onze eigen index k aanmaken die we steeds zullen verhogen in de lus, wanneer die lus wordt uitgevoerd. Een mogelijke implementatie voor de berekening van S is het programma:

```
« 0. DUP →n S k « 0. n START k SQ S + 1. ‘k‘ STO+ ‘S‘ STO
NEXT S “S” TAG » »
```

Voer het programma in en sla het op in een variabele met de naam S1.

Hier volgt een korte uitleg over hoe het programma werkt:

1. Dit programma heeft een heel getal nodig als invoer, daarom bevindt dit getal (n) zich voor de uitvoering van het programma op niveau 1 van het stapelgeheugen. Daarna wordt het programma uitgevoerd.
2. Er wordt een nul ingevoerd, wat in verplaatst naar niveau 2 van het stapelgeheugen.
3. Het commando DUP, dat kan worden ingevoerd als ALPHA ALPHA D U P ALPHA, kopieert de inhoud van niveau 1 van het stapelgeheugen, verplaatst alle niveaus van dat stapelgeheugen naar boven en plaatst de kopie die het zojuist heeft gemaakt op niveau 1 van het stapelgeheugen. Dus bevindt n zich, nadat DUP is uitgevoerd, op niveau 3 van het stapelgeheugen en bevatten de niveaus 1 en 2 een nul.
4. Het codefragment `→n S k` slaat de waarden van respectievelijk n, 0 en 0 op in de locale variabelen n, S en k. We zeggen dat de variabelen n, S en k werden <u>geïnitialiseerd</u> (S en k naar nul, n naar een waarde die de gebruiker kiest).
5. Het codefragment `0. n START` identificeert START lus waarvan de index de waarden 0, 1, 2, …, n zal aannemen.
6. De som S wordt verhoogd met k^2 in het codefragment : `k SQ S +`
7. De index k wordt verhoogt met 1 in het codefragment: `1. k +`
8. Op dit moment zijn de bijgewerkte waarden van S en k beschikbaar op respectievelijk niveaus 2 en 1 van het stapelgeheugen. Het codefragment `‘k‘ STO` slaat de waarde van niveau 1 van het stapelgeheugen op in de

locale variabele k. De bijgewerkte waarde van S staat nu op niveau 1 van het stapelgeheugen.

9. Het codefragment ‘S‘ STO slaat de waarde van niveau 1 van het stapelgeheugen op in de locale variabele k. Het stapelgeheugen is nu leeg.
10. Het partikel NEXT verhoogt de index met één en stuurt de controle naar het begin van de lus (stap 6).
11. De lus wordt uitgevoerd tot de index van de lus de maximale waarde, n, bereikt.
12. Het laatste deel van het programma roept de laatste waarde van S (de som) weer op, tagt deze en plaatst de waarde op niveau 1 van het stapelgeheugen, waar de gebruiker het ziet als uitvoer van het programma.

Om het programma stap voor stap in werking te zien, kunt u de debugger als volgt gebruiken (gebruik n = 2). Laat SL1 staan op niveau 1 van het stapelgeheugen:

VAR 2 ['] S1 ENTER	Plaatst een 2 op niveau 2 en de programmanaam, ‘S1’, op niveau 1
← PRG NXT NXT RUN DBG	Activeert de debugger. SL1 = 2.
SST↓	SL1 = 0., SL2 = 2.
SST↓	SL1 = 0., SL2 = 0., SL3 = 2. (DUP)
SST↓	Maakt het stapelgeheugen leeg (-> n S k)
SST↓	Maakt het stapelgeheugen leeg (« - activeert het subprogramma)
SST↓	SL1 = 0., (startwaarde van de lusindex)
SST↓	SL1 = 2.(n), SL2 = 0. (eindwaarde van de lusindex)
SST↓	Maakt het stapelgeheugen leeg (START – start van de lus)

--- uitvoering nummer 1 van de lus voor k = 0

SST↓	SL1 = 0. (k)
SST↓	SL1 = 0. (SQ(k) = k^2)
SST↓	SL1 = 0.(S), SL2 = 0. (k^2)

SST↓	SL1 = 0. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 1., SL2 = 0. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 0.(k), SL2 = 1., SL3 = 0. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 1.(k+1), SL2 = 0. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 'k', SL2 = 1., SL3 = 0. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 0. (S + k^2) [Slaat de waarde van SL2 = 1 op in SL1 = 'k']
SST↓	SL1 = 'S', SL2 = 0. (S + k^2)
SST↓	Maakt het stapelgeheugen leeg [Slaat de waarde van SL2 = 0 op in SL1 = 'S']
SST↓	Maakt het stapelgeheugen leeg (NEXT – einde van de lus)

--- uitvoering nummer 2 van de lus voor k = 1

SST↓	SL1 = 1. (k)
SST↓	SL1 = 1. (SQ(k) = k^2)
SST↓	SL1 = 0.(S), SL2 = 1. (k^2)
SST↓	SL1 = 1. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 1., SL2 = 1. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 1.(k), SL2 = 1., SL3 = 1. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 2.(k+1), SL2 = 1. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 'k', SL2 = 2., SL3 = 1. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 1. (S + k^2) [Slaat de waarde van SL2 = 2 op in SL1 = 'k']
SST↓	SL1 = 'S', SL2 = 1. (S + k^2)
SST↓	Maakt het stapelgeheugen leeg [Slaat de waarde van SL2 = 1 op in SL1 = 'S']
SST↓	Maakt het stapelgeheugen leeg (NEXT – einde van de lus)

--- uitvoering nummer 3 van de lus voor k = 2

SST↓	SL1 = 2. (k)
SST↓	SL1 = 4. (SQ(k) = k^2)
SST↓	SL1 = 1.(S), SL2 = 4. (k^2)
SST↓	SL1 = 5. (S + k^2)
SST↓	SL1 = 1., SL2 = 5. (S + k^2)

SST↓	SL1 = 2.(k), SL2 = 1., SL3 = 5. (S + k²)
SST↓	SL1 = 3.(k+1), SL2 = 5. (S + k²)
SST↓	SL1 = ‘k’, SL2 = 3., SL3 = 5. (S + k²)
SST↓	SL1 = 5. (S + k²) [Slaat de waarde van SL2 = 3 op in SL1 = ‘k’]
SST↓	SL1 = ‘S’, SL2 = 5. (S + k²)
SST↓	Maakt het stapelgeheugen leeg [Slaat de waarde van SL2 = 0 op in SL1 = ‘S’]
SST↓	Maakt het stapelgeheugen leeg (NEXT – einde van de lus)

--- voor n = 2 is de lusindex uitgeput en de controle wordt doorgegeven aan de bewering na NEXT

SST↓	SL1 = 5 (S wordt weer opgeroepen naar het stapelgeheugen1)
SST↓	SL1 = “S”, SL2 = 5 (“S” wordt in het stapelgeheugen geplaatst)
SST↓	SL1 = S:5 (taggen van de uitvoerwaarde)
SST↓	SL1 = S:5 (sluit het subprogramma » af)
SST↓	SL1 = S:5 (sluit het hoofdprogramma » af)

De stapsgewijze lijst is ten einde. Het resultaat is S:5 als u programma S1 uitvoert met n = 2.

Controleer ook de volgende resultaten: VAR

3	S1	Resultaat: `S:14`	4	S1	Resultaat: `S:30`
5	S1	Resultaat: `S:55`	8	S1	Resultaat: `S:204`
10	S1	Resultaat: `S:385`	20	S1	Resultaat: `S:2870`
30	S1	Resultaat: `S:9455`	100	S1	Resultaat: `S:338350`

De START…STEP constructie

De algemene vorm van deze bewering bestaat uit:

```
start_value end_value START program_statements increment
NEXT
```

De startwaarde, eindwaarde en verhoging van de lusindex kunnen positieve of negatieve hoeveelheden zijn. Voor `verhoging > 0`, blijft de uitvoering doorgaan zolang de index kleiner of gelijk is aan de `eindwaarde`. Voor `verhoging < 0`, blijft de uitvoering doorgaan zolang de index groter of gelijk is aan `eindwaarde`.

Voorbeeld – een lijst van waarden aanmaken
Stel dat u een lijst van waarden van x wilt aanmaken van x = 0.5 tot x = 6.5 in stappen van 0.5. U kunt het volgende programma schrijven:

```
« → xs xe dx « xs DUP xe START DUP dx + dx STEP DROP xe
xs – dx / ABS 1 + →LIST » »
```

en het opslaan in variabele GLIST.

In dit programma is, xs = startwaarde van de lus, xe = eindwaarde van de lus en dx = de waarde van de verhoging voor de lus. Het programma plaatst waarden voor xs, xs+dx, xs+2·dx, xs+3·dx, … in het stapelgeheugen. Daarna berekent het het aantal aangemaakte elementen met het codefragment: `xe xs – dx / ABS 1. +`

Tenslotte stelt het programma een lijst samen met de elementen die het in het stapelgeheugen heeft geplaatst.

- Zorg ervoor dat de programmaroep 0.5 ENTER 2.5 ENTER 0.5 ENTER GLIST de lijst {0.5 1. 1.5 2. 2.5} geeft.
- Gebruik het programma DBUG voor een korte lijst om de werking stap voor stap te zien, bijvoorbeeld:

VAR 1 SPC 1.5 SPC 0.5 ENTER	Voert de parameters 1 1.5 0.5 in
['] GLIST ENTER	Voert de programmanaam in op niveau 1
← PRG NXT NXT RUN DBG	Activeert de debugger.

Gebruik SST↓ om stapsgewijs door het programma te lopen en de gedetailleerde werking van elk commando te zien.

De FOR-constructie

Zoals bij het commando START, heeft het FOR-commando twee varieties: de FOR…NEXT-constructie, waarbij de verhoging van de lusindex 1 is, en de FOR…STEP-constructie, waarbij de verhoging van de lusindex wordt gekozen door de gebruiker. In tegenstelling tot het START-commando echter, vereist het FOR-commando dat we een naam geven aan de lusindex (bijv. j, k, n). We hoeven ons niet druk te maken over het verhogen van de index zelf, zoals in de voorbeelden bij het gebruik van START. De waarde van de index is beschikbaar voor berekeningen.

Commando's in verband met de FOR-constructie zijn beschikbaar via:

← PRG BRCH FOR

In het menu BRCH (← PRG BRCH) zijn de volgende toetsen beschikbaar voor het maken van FOR-constructies (het symbool ⇐ duidt de positie van de cursor aan):

- ← FOR: Start de FOR…NEXT-constructie: FOR ⇐ NEXT
- → FOR: Start de FOR…STEP-constructie: FOR ⇐ STEP

De FOR…NEXT-constructie

De algemene vorm van deze bewering bestaat uit:

```
start_value end_value FOR loop_index program_statements
NEXT
```

Zorg ervoor dat `start_value < end_value` om een oneindige lus te vermijden.

Voorbeeld – bereken de som S met een FOR…NEXT-constructie
Het volgende programma berekent de som

$$S = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

Met een FOR…NEXT-lus:

```
« 0 →n S « 0 n FOR k k SQ S + 'S' STO NEXT S "S" TAG » »
```

Sla dit programma op in een variabele [S2]. Controleer de volgende oefeningen: [VAR]

3	[S2]	Resultaat: `S:14`	4	[S2]	Resultaat: `S:30`
5	[S2]	Resultaat: `S:55`	8	[S2]	Resultaat: `S:204`
10	[S2]	Resultaat: `S:385`	20	[S2]	Resultaat: `S:2870`
30	[S2]	Resultaat: `S:9455`	100	[S2]	Resultaat: `S:338350`

U zult gezien hebben dat het programma veel eenvoudiger is dan het programma dat is opgeslagen in [S1]. U hoeft k niet te initialiseren of te verhogen binnen het programma. Het programma zorgt zelf voor zulke verhogingen.

De FOR…STEP-constructie

De algemene vorm van deze bewering bestaat uit:

```
start_value end_value FOR loop_index program_statements
increment STEP
```

De startwaarde, eindwaarde en `verhoging` van de lusindex kunnen positieve of negatieve hoeveelheden zijn. Indien de `verhoging > 0,` dan gaat de uitvoering door zolang de index kleiner of gelijk is aan `eindwaarde.` Indien `verhoging < 0,` dan gaat de uitvoering door zolang de index groter of gelijk is aan `eindwaarde.` De programmabeweringen worden minstens één keer uitgevoerd (b.v. `1 0 START 1 1 STEP` geeft 1).

Voorbeeld – maak een lijst aan van getallen met een FOR…STEP-constructie
Voer dit programma in:

```
« → xs xe dx « xe xs – dx / ABS 1. + → n « xs xe FOR x
x dx STEP n →LIST » » »
```

en sla het op in variabele GLIST.

- Zorg ervoor dat de programmaroep 0.5 ENTER 2.5 ENTER 0.5 ENTER GLIST de lijst {0.5 1. 1.5 2. 2.5} geeft.
- Gebruik het programma DBUG voor een korte lijst om de werking stap voor stap te zien, bijvoorbeeld:

VAR 1 SPC 1.5 SPC 0.5 ENTER	Voert de parameters 1 1.5 0.5 in
[‘] GLIST ENTER	Voert de programmanaam in op niveau 1
← PRG NXT NXT RUN DBG	Activeert de debugger.

Gebruik SST↓ om stapsgewijs door het programma te lopen en de gedetailleerde werking van elk commando te zien.

De DO-constructie

De algemene structuur van dit commando bestaat uit:

`DO program_statements UNTIL logical_statement END`
Het DO-commando start een oneindige lus die de programmabeweringen uitvoert tot de logische bewering het resultaat FALSE (0) geeft. De `logische bewering` moet hierbij een indexwaarde bevatten waarvan de waarde wordt veranderd door de `programmabeweringen`.

Voorbeeld 1 – Dit programma geeft een teller in de linkerbovenhoek van het scherm weer die telkens 1 optelt in een oneindige lus tot een druk op een toets (elke willekeurige toets) de teller stopt: `« 0 DO DUP 1 DISP 1 + UNTIL KEY END DROP »`

Het commando KEY evalueert als TRUE wanneer op een toets wordt gedrukt.

Example 2 – bereken de som S met een DO…UNTIL…END-constructie
Het volgende programma berekent de som

$$S = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

met een DO…UNTIL…END-lus:

```
« 0. →n S « DO n SQ S + 'S' STO n 1 – 'n' STO UNTIL
'n<0' END S "S" TAG » »
```

Sla dit programma op in de variabele S2. Controleer de volgende oefeningen: VAR

3 S2	Resultaat: `S:14`	4 S2	Resultaat: `S:30`
5 S2	Resultaat: `S:55`	8 S2	Resultaat: `S:204`
10 S2	Resultaat: `S:385`	20 S2	Resultaat: `S:2870`
30 S2	Resultaat: `S:9455`	100 S2	Resultaat: `S:338350`

Voorbeeld 3 – Maak een lijst aan met een DO…UNTIL…END-constructie
Tik het volgende programma in

```
« → xs xe dx « xe xs – dx / ABS 1. + xs → n x « xs DO
'x+dx' EVAL DUP 'x' STO UNTIL 'x≥xe' END n →LIST » » »
```

en sla het op in variabele GLIS2.

- Zorg ervoor dat de programmaroep 0.5 ENTER 2.5 ENTER 0.5 ENTER GLIS2 de lijst {0.5 1. 1.5 2. 2.5} geeft.
- Gebruik het programma DBUG voor een korte lijst om de werking stap voor stap te zien, bijvoorbeeld:

VAR 1 SPC 1.5 SPC 0.5 ENTER	Voert de parameters 1 1.5 0.5 in
['] GLIS2 ENTER	Voert de programmanaam in op niveau 1
← PRG NXT NXT RUN DBG	Activeer de debugger.

Gebruik SST↓ om stapsgewijs door het programma te lopen en de gedetailleerde werking van elk commando te zien.

De WHILE-constructie

De algemene structuur van dit commando bestaat uit:

```
WHILE logische bewering REPEAT programmabeweringen END
```

De bewering WHILE zal de `programmabeweringen` herhalen zolang de `logische bewering` waar is (niet nul). Indien dit niet het geval is, dan wordt de programmacontrole doorgegeven aan het commando direct na END. De `programmabeweringen` moeten een lusindex bevatten die wordt veranderd voordat de `logische bewering` wordt gecontroleerd aan het begin van de volgende herhaling. In tegenstelling met het DO-commando wordt, wanneer de eerste evaluatie van de logische bewering niet waar is, de lus nooit uitgevoerd.

Voorbeeld 1 – bereken de som S met een WHILE…REPEAT…END-constructie
Het volgend programma berekent de som

$$S = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

Met een WHILE…REPEAT…END- lus:

```
« 0. →n S « WHILE ‘n≥0‘ REPEAT n SQ S + ‘S‘ STO n 1 –
‘n‘ STO END S “S” TAG » »
```

Sla dit programma op in een variabele S4. Controleer de volgende oefeningen: VAR

3	S4	Resultaat: `S:14`	4	S4	Resultaat: `S:30`
5	S4	Resultaat: `S:55`	8	S4	Resultaat: `S:204`
10	S4	Resultaat: `S:385`	20	S4	Resultaat: `S:2870`

30 @S1@ Resultaat: `S:9455` 100 @S1@ Resultaat: `S:338350`

Voorbeeld 2 – Mmaak een lijst aan met een WHILE…REPEAT…END-constructie
Voer het volgende programma in

```
« → xs xe dx « xe xs – dx / ABS 1. + xs → n x « xs
WHILE 'x<xe' REPEAT 'x+dx' EVAL DUP 'x' STO END n →LIST » »
»
```

en sla het op in variabele @GLIST.

- Zorg ervoor dat de programmaroep 0.5 `ENTER` 2.5 `ENTER` 0.5 `ENTER` @GLIST de lijst {0.5 1. 1.5 2. 2.5} geeft.
- Gebruik het programma DBUG voor een korte lijst om de werking stap voor stap te zien, bijvoorbeeld:

`VAR` 1 `SPC` 1.5 `SPC` 0.5 `ENTER`	Voert de parameters 1 1.5 0.5 in
['] @GLIST `ENTER`	Voert de programmanaam in op niveau 1
`←` PRG `NXT` `NXT` @RUN @DBG	Activeert de debugger.

Gebruik @SST↓ om stapsgewijs door het programma te lopen en de gedetailleerde werking van elk commando te zien.

Fouten en het ontdekken van fouten

De functies in het submenu PRG/ERROR bieden manieren om om te gaan met fouten in de rekenmachine en om fouten in programma's te ontdekken. Het submenu PRG/ERROR, beschikbaar via `←` PRG `NXT` `NXT` @ERROR , bevat volgende functies en submenu's:

DOERR

Deze functie voert een door de gebruiker gedefinieerde fout uit en zorgt er zo voor dat de rekenmachine zich gedraagt alsof die bepaalde fout zich had voorgedaan. De functie kan als argument een heel getal, een binair heel getal, een foutmelding of het getal nul (0) hebben. Het invoeren van 5 ENTER DOERR in de RPN-modus, geeft de volgende foutmelding: *Error: Memory Clear*

Als u #11h ENTER DOERR invoert, verschijnt de volgende melding: *Error: Undefined FPTR Name*

Als u "TRY AGAIN" ENTER DOERR invoert, verschijnt de volgende melding: *TRY AGAIN*

Tenslotte geeft 0 ENTER DOERR de melding: *Interrupted*

ERRN

Deze functie geeft een getal weer dat staat voor de meest recente fout. Als u bijvoorbeeld 0 1/x ON ERRN invoert, verschijnt het nummer #305h. Dit is het binaire hele getal dat de fout *Infinite Result* voorstelt.

ERRM

Deze functie geeft een karakterstring weer met de foutmelding van de meest recente fout. In de Approx-modus krijgt u de volgende string met deze toetsencombinatie 0 1/x ON ERRM: *"Infinite Result"* .

ERR0

Deze functie verwijdert het laatste foute getal, zodat naderhand bij het activeren van ERRN in de Approx-modus # 0h wordt gegeven. Bijvoorbeeld, indien u
0 1/x ON ERR0 ERRN invoert, verschijnt # 0h. Tevens, als u
0 1/x ON ERR0 ERRM invoert, verschijnt de lege string " ".

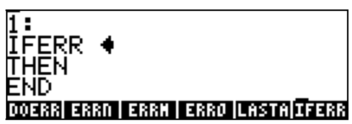
LASTARG

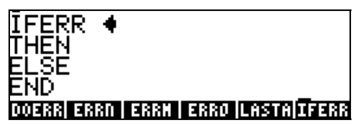
Deze functie geeft kopieën van de argumenten van het commando of de functie die het laatst werd uitgevoerd. Als u bijvoorbeeld in de RPN-modus 3 ÷ 2 ENTER gebruikt en daarna de functie LASTARG gebruikt (LASTA), verschijnen de waarden 3 en 2 in het stapelgeheugen. Een ander voorbeeld in de RPN-modus is het volgende: 5 TAN ENTER. Als u na deze invoer LASTARG gebruikt, verschijnt een 5.

Submenu IFERR

Het submenu IFERR heeft de volgende functies:

Dit zijn de componenten van de IFERR … THEN … END-constructie of van de IFERR … THEN … ELSE … END-constructie. Beide logische constructies worden gebruikt voor het vinden van fouten tijdens de uitvoering van het programma. In het submenu ERROR zal door het invoeren van ← IFERR of → IFERR de componenten van de IFERR-structuur in het stapelgeheugen worden geplaatst, klaar voor de gebruiker om de ontbrekende termen in te vullen, d.w.z.





De algemene notatie van de twee constructies voor foutopsporing is als volgt:

IF opsporingsclausule THEN foutclausule END

IF opsporingsclausule THEN foutclausule ELSE normale clausule END

De werking van deze logische constructies is gelijk aan die van de IF … THEN … END- en van de IF … THEN … ELSE … END-constructies. Indien een fout wordt gevonden tijdens de uitvoering van de opsporingsclausule, dan wordt de foutclausule uitgevoerd. In het andere geval wordt de normale clausule uitgevoerd.

Neem als voorbeeld het volgende programma (ERR1) dat als invoer twee matrices heeft, A en b en dat controleert of er een fout zit in de opsporingsclausule: A b / (RPN modus, A/b). Indien er een fout iswordt gevonden, activeert het programma de functie LSQ (Least SQuares, zie Hoofdstuk 11) om het systeem van vergelijkingen op te lossen:

```
« → A b « IFERR A b / THEN LSQ END »  »
```

Probeer dit met de argumenten A = [[2, 3, 5] , [1, 2, 1]] en b = [[5] , [6]]. Een eenvoudige deling van deze twee argumenten geeft de foutmelding: */Error: Invalid Dimension.*

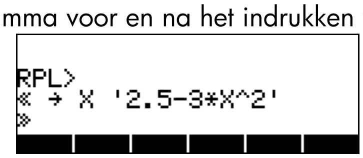
Echter, met de foutopsporingsconstructie, IFERR, geeft het met dezelfde argumenten: [0.262295…, 0.442622…].

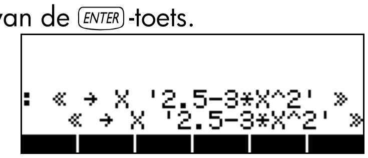
Programmeren met de RPL-gebruikerstaal in de algebraïsche modus

Terwijl alle eerdere programma's worden gemaakt en uitgevoerd in de RPN-modus, kunt u altijd een programma invoeren in de RPL-gebruikerstaal terwijl u in de algebraïsche modus staat met de functie RPL>. Deze functie is beschikbaar via de commandocatalogus. Probeer bijvoorbeeld het volgende programma in de algebraïsche modus en sla dit op in de variabele P2:

```
« → X '2.5-3*X^2' »
```

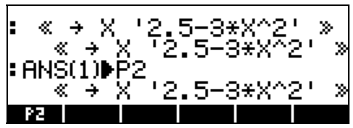
Activeer eerst de functie RPL> via de commandocatalogus (→ CAT). Bij alle functies die in de ALG-modus worden geactiveerd, is er een paar haakjes aan hun naam gekoppeld. De functie RPL> is geen uitzondering, behalve dat de haakjes moeten worden verwijderd voordat we een programma in het scherm kunnen invoeren. Gebruik de pijltoetsen (◄ ►) en de deletetoets (⌫) om de haakjes uit de RPL>()-stelling te verwijderen. U kunt nu het RPL-programma invoeren. In de volgende afbeeldingen zien we het commando RPL> met het programma voor en na het indrukken van de ENTER-toets.



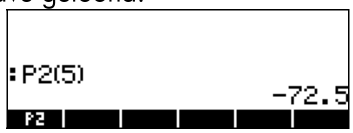


Sla het programma als volgt op met het commando STO:

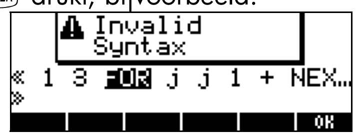
← ANS STO► ALPHA P 2 ENTER



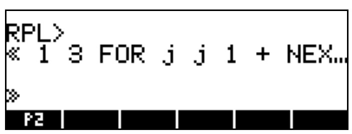
Een evaluatie van programma P2 voor het argument X = 5 wordt in de volgende schermweergave getoond:

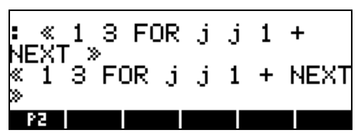


U kunt wel programma's in de algebraïsche modus schrijven zonder de functie RPL> te gebruiken, maar sommige RPL-constructies geven een foutmelding als u op ENTER drukt, bijvoorbeeld:



Als u daarentegen RPL gebruikt, zijn er geen problemen bij het laden van dit programma in de algebraïsche modus:





Hoofdstuk 22
Programma's voor het werken met grafieken

Dit hoofdstuk bevat een aantal voorbeelden die u tonen hoe u de functies van de rekenmachine gebruikt voor het interactief of via programma's werken met grafieken. Net zoals in Hoofdstuk 21 raden we u aan om de RPN-modus te gebruiken en systeemvlag 117 in te stellen op SOFT menu labels. « »

Er zijn een aantal grafische toepassingen van de rekenmachine behandeld in Hoofdstuk 12. De voorbeelden in Hoofdstuk 12 zijn voorbeelden van het interactief aanmaken van grafieken door de invoerschermen voorgeprogrammeerd in de rekenmachine te gebruiken. Het is ook mogelijk om grafieken te gebruiken in uw programma's, bijvoorbeeld om numerieke resultaten aan te vullen met grafieken. Om dergelijke taken uit te voeren, geven we eerst de functies in het menu PLOT.

Het menu PLOT

Commando's voor het instellen en produceren van diagrammen zijn beschikbaar via het menu PLOT. U komt in het menu PLOT met:
8 1 . 0 1 ← PRG NXT MODES MENU MENU.

Dit menu geeft de gebruiker toegang tot diverse grafische functies. Voor de toepassing van de volgende voorbeelden definiëren we voor de gebruiker de toets F3 (GRAPH) om dit menu te activeren. Zie hieronder.

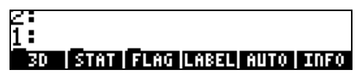
Door de gebruiker gedefinieerde toets voor het menu PLOT

Geef de volgende toetsencombinatie om uit te maken of er al door de gebruiker gedefinieerde toetsen zijn opgeslagen in uw rekenmachine:
← PRG NXT MODES KEYS RCLK. Tenzij u reeds enkele toetsen zelf hebt gedefinieerd, moet u als resultaat een lijst krijgen waarin een S, d.w.z. {S}

voorkomt. Dit geeft aan dat het Standaard toetsenbord de enige toetsendefinitie is die is opgeslagen in uw rekenmachine.
Om zelf een toets te definiëren, moet u een programma of lijst aan deze lijst toevoegen, gevolgd door een verwijzing naar de toets (zie Hoofdstuk 20). Voer de lijst `{ S << 81.01 MENU >> 13.0 }` in in het stapelgeheugen en gebruik de functie STOKEYS (← PRG NXT MODES KEYS STOK) om de toets F3 zelf te definiëren om het menu PLOT te activeren. Controleer of een dergelijke lijst is opgeslagen in uw rekenmachine met ← PRG NXT MODES KEYS RCLK.

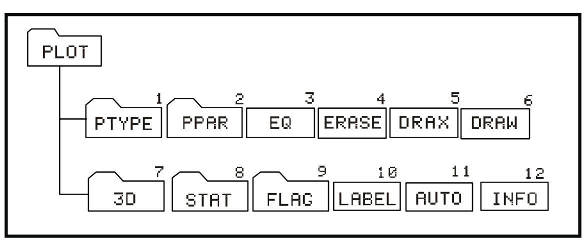
Opmerking: we zullen geen enkele oefening uitwerken in het menu PLOT, zijn functies of submenu's. Deze paragraaf dient eerder als een rondleiding door de inhoud van het menu PLOT, omdat deze verband houdt met de verschillende diagramtypen die beschikbaar zijn in de rekenmachine.

Om een door de gebruiker gedefinieerde toets te activeren, moet u op ← USER drukken (hetzelfde als de toets ALPHA) voor u de betreffende toets of toetsencombinatie indrukt. Druk op ← USER F3 om het menu PLOT te activeren met de hierboven gedefinieerde toets. U krijgt het volgende menu (druk op NXT om naar het volgende menu te gaan).



Beschrijving van het menu PLOT

Het volgende diagram toont de menu's in PLOT. Het nummer bij de verschillende menu's en functies in het diagram wordt gebruikt bij de beschrijving van deze objecten.



De softmenutoetsen met de labels 3D, STAT, FLAG, PTYPE en PPAR geven extra menu's die later uitvoeriger zullen worden behandeld. Hier beschrijven we de functies die direct toegankelijk zijn via de softmenutoets voor menu nummer 81.02. Dit zijn:

LABEL (10)
De functie LABEL wordt gebruikt om de assen in een diagram te labelen met inbegrip van de variabelennamen en de maximumwaarden van de assen. De variabelennamen worden geselecteerd uit informatie in de variabele PPAR.

AUTO (11)
De functie AUTO (AUTOscale) berekent een schermbereik voor de x-y-as of voor de x- en y-as in tweedimensionele diagrammen volgens het diagramtype gedefinieerd in PPAR. Voor driedimensionele plots voert de functie AUTO geen bewerkingen uit. Voor tweedimensionel diagrammen worden de volgende bewerkingen uitgevoerd door AUTO:

- FUNCTION: gebaseerd op het diagrambereik van x, maakt deze functie een voorbeeld aan van de functie in EQ en berekent de minimum- en maximumwaarden van y.
- CONIC: maakt de schaal van de y-as gelijk aan de schaal van de x-as
- POLAR: gebaseerd op de waarden van de onafhankelijke variabele (meestal θ), maakt het een voorbeeld aan van de functie in EQ en berekent de minimum- en maximumwaarden van x en y.
- PARAMETRIC: geeft hetzelfde resultaat als POLAR gebaseerd op de waarden van de parameter die de vergelijkingen voor x en y bepaalt.
- TRUTH: geeft geen bewerking.
- BAR: het bereik van de x-as wordt ingesteld van 0 tot $n+1$, waarbij n staat voor het aantal elementen in ΣDAT. Het bereik van de waarden van y is gebaseerd op de inhoud van ΣDAT. De minimum- en maximumwaarden van y worden zo bepaald dat de x-as altijd zichtbaar is in de grafiek.
- HISTOGRAM: hetzelfde als de functie BAR.
- SCATTER: bepaalt het bereik van de x- en y-as gebaseerd op de inhoud van de onafhankelijke en de afhankelijke variabelen van ΣDAT.

INFO (12)
De functie INFO is enkel interactief (d.w.z. ze kan niet worden geprogrammeerd). Wanneer men op de bijbehorende softmenutoets drukt, geeft deze functie informatie over de parameters van het huidige diagram.

EQ (3)
De variabelenaam EQ wordt door de rekenmachine voorbehouden om de huidige vergelijking in diagrammen op te slaan of als oplossing van vergelijkingen (zie hoofdstuk...) De softmenutoets met het label EQ kan worden gebruikt zoals in uw variabelenmenu, d.w.z. als u op [EQ] drukt, zal het de huidige inhoud van die variabele worden weergegeven.

ERASE (4)
De functie ERASE wist de huidige inhoud van het grafisch venster. Bij het programmeren kan het worden gebruikt om er zeker van te zijn dat het grafisch venster leeg is voor u een nieuwe grafiek begint te plotten.

DRAX (5)
De functie DRAX tekent de assen in het huidige diagram, als die zichtbaar zijn.

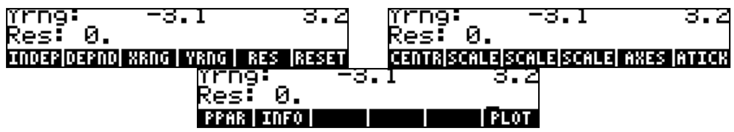
DRAW (6)
De functie DRAW tekent het diagram gedefinieerd in PPAR.

Het menu PTYPE onder PLOT (1)
Het menu PTYPE geeft een lijst van alle tweedimensionele diagramtypes die zijn voorgeprogrammeerd in de rekenmachine. Het menu bevat de volgende menutoetsen:

Deze toetsen komen overeen met de diagramtypes *Function, Conic, Polar, Parametric, Truth* en *Diff Eq*, die al eerder zijn behandeld. Door een van deze softmenutoetsen in te drukken terwijl u een programma invoert, plaatst de corresponderende functie in het programma. Druk op NXT PLOT om naar het hoofdmenu PLOT terug te keren.

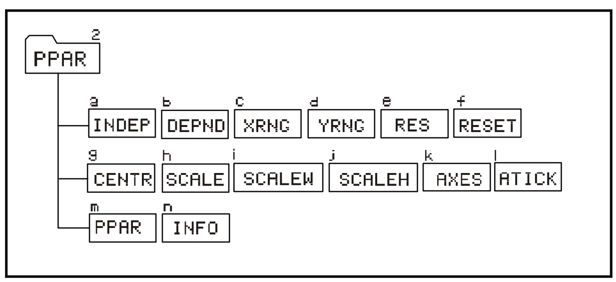
Het menu PPAR (2)

Het menu PPAR geeft een lijst van de verschillende opties voor de variabele PPAR zoals ze worden gegeven bij de volgende softmenutoetsenlabels. Druk op NXT om naar de volgende menu's te gaan:



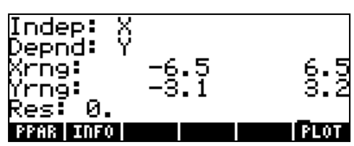
Opmerking: het commando SCALE hier staan eigenlijk voor SCALE, SCALEW en SCALEH, in die volgorde.

Het volgende diagram illustreert de functies die beschikbaar zijn in het menu PPAR. De letters verbonden met elke functie in het diagram worden gebruikt als verwijzing in de onderstaande beschrijving van de functies.



INFO (n) en PPAR (m)

Als u op INFO drukt of ↱ PPAR invoert terwijl u in dit menu bent, verschijnt een lijst van de huidige instellingen van PPAR, bijvoorbeeld:



Deze informatie geeft aan dat X de onafhankelijke variabele (Indep) is, Y de afhankelijke variabele (Depnd), het x-as-bereik reikt van –6.5 tot 6.5 (Xrng) en het y-as-bereik reikt van –3.1 tot 3.2 (Yrng). Het laatste stukje informatie in het scherm, de waarde van Res (resolutie) bepaalt de interval van de onafhankelijke variabele gebruikt bij het maken van het diagram.

De softmenutoetsenlabels in het menu PPAR(2) vertegenwoordigen commando's die kunnen worden gebruikt in programma's. Deze commando's zijn:

INDEP (a)

Het commando INDEP specifieert de onafhankelijke variabele en zijn diagrambereik. Deze specificaties worden opgeslagen als de derde parameter in de variabele PPAR. De standaardwaarde is 'X'. De waarden die kunnen worden toegekend aan de specificatie van de onafhankelijke variabele zijn:

- Een variabelenaam, bijv. '`Vel`'
- Een variabelenaam in een lijst, bijv. { `Vel` }
- Een variabelenaam en een bereik in een lijst, bijv. { `Vel 0 20` }
- Een bereik zonder een variabelenaam, bijv. { `0 20` }
- Twee waarden die een bereik aanduiden, bijv. `0 20`

In een programma zullen elk van deze specifiaties gevolgd worden door het commando INDEP.

DEPND (b)

Het commando DEPND specifieert de naam van de afhankelijke variabele. Bij TRUTH diagrammen duidt het ook het diagrambereik aan. De standaardwaarde is Y. Het specificatietype voor de variabele DEPND is hetzelfde als voor de variabele INDEP.

XRNG (c) en YRNG (d)

Het commando XRNG duidt het diagrambereik voor de x-as aan, terwijl YRNG staat voor het diagrambereik van de y-as. De invoer voor elk van deze commando's zijn twee getallen die staan voor de minimum- en maximumwaarden van x of y. De waarden van het bereik van de x- en y-as worden opgeslagen als geordende paren (x_{min}, y_{min}) en (x_{max}, y_{max}) in de twee eerste elementen van de variabele PPAR. Standaardwaarden voor x_{min} en x_{max} zijn respectievelijk -6.5 en 6.5. Standaardwaarden voor x_{min} en x_{max} zijn respectievelijk -3.1 en 3.2.

RES (e)
Het commando RES (RESolution) specifieert de interval tussen de waarden van de onafhankelijke variabele bij het maken van een specifiek diagram. De resolutie kan worden uitgedrukt in gebruikerswaarden als reëel getal of in pixels als een binair heel getal (getallen beginnend met #, bijv. #10). De resolutie wordt als vierde item opgeslagen in de variabele PPAR.

CENTR (g)
Het commando CENTR neemt als argument een geordend paar (x,y) of een waarde x, en past de eerste twee elementen in de variabele PPAR, d.w.z. (x_{min}, y_{min}) en (x_{max}, y_{max}) aan, zodat het midden van het diagram respectievelijk (x,y) of (x,0) is.

SCALE (h)
Het commando SCALE bepaalt de schaal van het diagram vertegenwoordigd door het aantal gebruikerseenheden per merkstreepje. De standaardschaal is 1 gebruikerseenheid per merkstreepje. Wanneer het commando SCALE wordt gebruikt, neemt het als argumenten twee getallen x_{scale} en y_{scale}, die staan voor de nieuwe horizontale en verticale schaal. Het resultaat van het commando SCALE is om de parameters (x_{min}, y_{min}) en (x_{max}, y_{max}) in PPAR aan te passen aan de gewenste schaal. Het midden van het diagram blijft hetzelfde.

SCALEW (i)
Bij een factor x_{factor} vermenigvuldigt het commando SCALEW de horizontale schaal met die factor. De W in SCALEW staat voor 'width' (breedte). De uitvoering van SCALEW verandert de waarden van x_{min} en x_{max} in PPAR.

SCALEH (j)
Bij een factor y_{factor} vermenigvuldigt het commando SCALEH de verticale schaal met die factor. De H in SCALEH staat voor 'height' (hoogte). De uitvoering van SCALEH verandert de waarden van y_{min} en y_{max} in PPAR.

Opmerking: veranderingen door het gebruik van SCALE, SCALEW of SCALEH kunnen worden gebruikt om in- of uit te zoomen in een diagram.

ATICK (l)

Het commando ATICK (Axes TICK mark) wordt gebruikt om de merkstreepjes voor de assen in te stellen. De invoerwaarde voor het commando ATICK kan één van de volgende zijn:

- Een reële waarde x: stelt de merkstreepjes voor de x-as en de y-as beide in op x-eenheden
- Een lijst van twee reële waarden { x y }: stelt de merkstreepjes voor de x-as en de y-as respectievelijk in op x- en y-eenheden
- Een binair heel getal #n: stelt de merkstreepjes voor de x-as en de y-as beide in op #n pixels.
- Een lijst van twee binaire hele getallen {#n #m }: stelt de merkstreepjes voor de x-as en de y-as respectievelijk in op #n en #m pixels.

AXES (k)

De invoerwaarde voor het commando AXES bestaat ofwel uit een geordend paar (x,y) of uit een lijst {(x,y) *atick* "x-as label" "y-as label"}. De parameter *atick* staat voor de specificatie van de merkstreepjes zoals hierboven beschreven bij het commando ATICK. Het geordend paar vertegenwoordigd het midden van het diagram. Wanneer alleen een geordend paar wordt gegeven als invoer bij AXES, wordt enkel het begin van de as veranderd. Het argument voor het commando AXES, of het nu gaat om een geordend paar of om een lijst van waarden, wordt opgeslagen als de vijfde parameter in PPAR.

Druk op PLOT om terug te keren naar het menu PLOT .

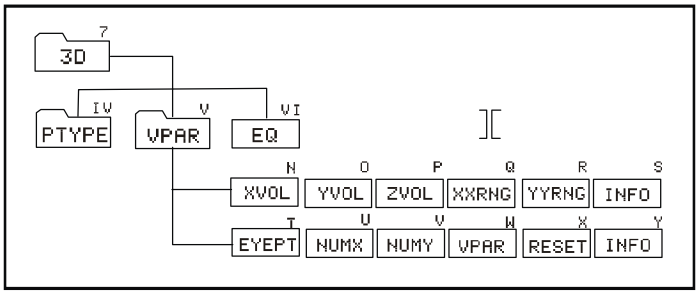
Druk op NXT om het tweede menu in de menureeks PLOT te activeren.

RESET (f)

Deze knop herstelt de waarden van het diagram in de standaardwaarden.

Het menu 3D in PLOT (7)

Het menu 3D bevat twee submenu's , PTYPE en VPAR, en één variabele, EQ. We zijn reeds bekend met de betekenis van EQ en zullen ons daarom concentreren op de inhoud van de menu's PTYPE en VPAR. Het onderstaande diagram toont de structuur van het menu 3D.



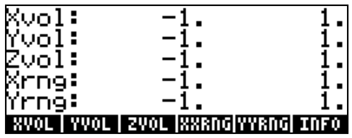
Het menu PTYPE in 3D (IV)

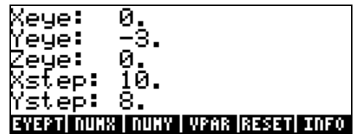
Het menu PTYPE in 3D bevat de volgende functies:

Deze functies komen overeen met de grafische opties *Slopefield, Wireframe, Y-Slice, Ps-Contour, Gridmap* en *Pr-Surface* die reeds eerder in dit hoofdstuk zijn behandeld. Door een van deze softmenutoetsen in te drukken terwijl u een programma invoert, plaatst de bijbehorende functie in het programma. Druk op NXT 3D om naar het hoofdmenu 3D terug te keren.

Het menu VPAR in 3D (V)

De variabele VPAR staat voor Volume PARameters en verwijst naar een parallellopipedum in de ruimte waarin de driedmensionele grafiek zal worden gemaakt. Wanneer u op [VPAR] drukt in het menu 3D, krijgt u de volgende functies. Druk op NXT om naar het volgende menu te gaan:





Hierna beschrijven we de betekenis van deze functies:

INFO (S) en VPAR (W)

Wanneer u op INFO (S) drukt, krijgt u de informatie zoals weergegeven in het bovenstaande linkerbeeldscherm. Het bereik in *Xvol*, *Yvol* en *Zvol* beschrijven de grootte van het parallelopipedum in de ruimte waar de grafiek zal worden gemaakt. *Xrng* en *Yrng* beschrijven het bereik van respectievelijk de waarden van x en y als onafhankelijke variabelen in het x-y-vlak dat zal worden gebruikt voor het maken van functies in de vorm z = f(x,y).

Druk op NXT en INFO (Y) voor de informatie uit het bovenstaande rechterbeeldscherm. Dit zijn de waarde en de plaats van het oogpunt voor de driedimensionele grafiek (Xeye, Yeye, Zeye) en het aantal stappen in x en y om een rooster te maken voor oppervlaktediagrammen.

XVOL (N), YVOL (O) en ZVOL (P)

Deze functies hebben als invoer een minimum- en een maximumwaarde en worden gebruikt om de grootte te bepalen van het parallellopipedum waar de grafiek zal worden gemaakt (het kijk-parallellopipedum). Deze waarden worden opgeslagen in de variabele VPAR. De standaardwaarden voor de bereiken XVOL, YVOL en ZVOL zijn –1 tot 1.

XXRNG (Q) en YYRNG (R)

Deze functies hebben als invoer een minimum- en een maximumwaarde en worden gebruikt om de bereiken van variabelen x en y te bepalen om functies z = f(x,y) te maken. De standaardwaarde van de bereiken XXRNG en YYRNG zal dezelfde zijn als die van XVOL en YVOL.

EYEPT (T)

De functie EYEPT heeft als invoer reële waarden x, y en z die de plaats van het oogpunt voor een driedimensionale grafiek aanduiden. Het oogpunt is een punt in de ruimte van waaruit de driedimensionele grafiek wordt bekeken. Door het oogpunt te veranderen zullen verschillende weergaven van de grafiek worden weergegeven. De onderstaande afbeelding illustreert oogpunt in de actuele grafische ruimte en de projectie in het vlak van het scherm.

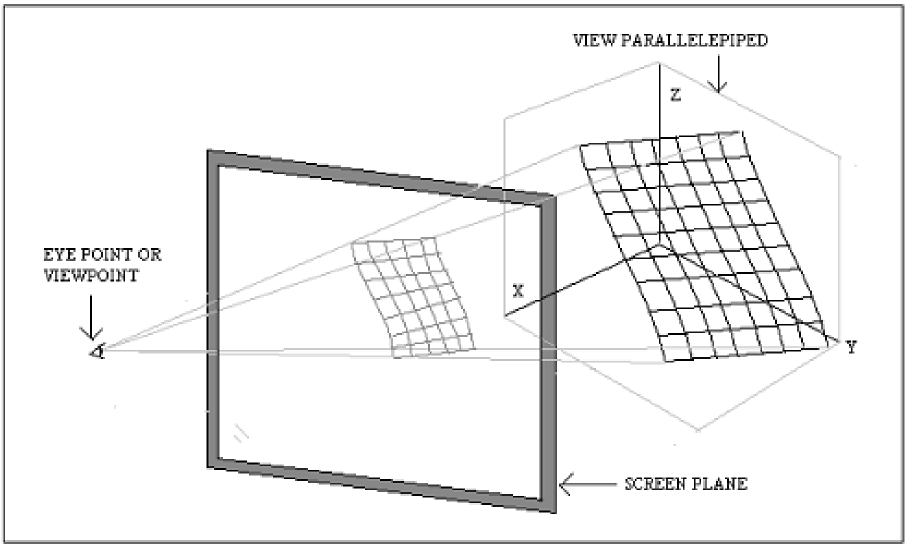
NUMX(U) en NUMY (V)
De functies NUMX en NUMY worden gebruikt om het aantal punten of stappen in elke richting aan te duiden die moeten worden gebruikt bij het genereren van het basisrooster voor het verkrijgen van de waarden van z = f(x,y).

VPAR (W)
Dit is enkel een verwijzing naar de variabele VPAR.

RESET (X)
Zet de parameters in het scherm weer op hun standaardwaarden.

Druk op NXT 3D om terug te keren naar het menu 3D.

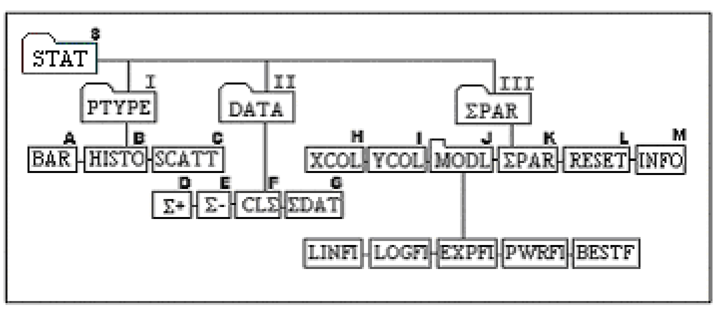
Druk op PLOT om terug te keren naar het menu PLOT.



Het STAT menu in PLOT

Het menu STAT geeft toegang tot diagrammen met betrekking tot statistische analyse. In dit menu staan de volgende menu's:

Het onderstaande diagram toont de structuur van het menu STAT in PLOT. De nummers en letters bij elke functie worden gebruikt als verwijzing in de beschrijvingen die volgen op de afbeelding.



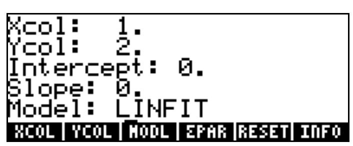
Het menu PTYPE in STAT (I)
Het menu PTYPE in bevat de volgende functies:

Deze functies komen overeen met de diagramtypes *BAR(A), Histogram (B)* en *Scatter (C)* die al eerder zijn behandeld. Door een van deze softmenutoetsen in te drukken terwijl u een programma invoert, wordt de bijbehorende functie in het programma geplaatst. Druk op STAT om naar het hoofdmenu STAT terug te keren.

Het menu DATA in STAT (II)
Het menu DATA voorziet volgende functies:

De functies in dit menu dienen om de statistische matrix ΣDAT te behandelen. De functies Σ+ (D) en Σ- (E) voegen rijen gegevens toe of verwijderen ze uit de matrix ΣDAT. CLΣ (F) wist de ΣDAT (G) matrix en de softmenutoets met het label ΣDAT wordt alleen gebruikt als een verwijzing voor interactieve toepassingen. Meer informatie over het gebruik van deze functies wordt behandeld in een later hoofdstuk over statistische functies. Druk op STAT om terug te keren naar het menu STAT.

Het menu ΣPAR in STAT (III)
Het menu ΣPAR biedt de volgende functies:



<u>INFO (M) en ΣPAR (K)</u>
De toets INFO in ΣPAR biedt de informatie zoals in het beeldscherm hierboven. De informatie in het scherm zit in de variabele ΣPAR. De getoonde

waarden zijn de standaardwaarden voor de x-kolom, de y-kolom, het snijpunt en de helling van een pasmodel waarvan het modeltype overeenkomt met de gegevens in ΣDAT.

<u>XCOL (H)</u>
Het commando XCOL wordt gebruikt om aan te geven welke van de kolommen van ΣDAT, indien er meer dan één is, de x-kolom of de kolom van de onafhankelijke variabele is.

<u>YCOL (I)</u>
Het commando YCOL wordt gebruikt om aan te geven welke van de kolommen van ΣDAT, indien er meer dan één is, de y-kolom of de kolom van de afhankelijke variabele is.

<u>MODL (J)</u>
Het commando MODL verwijst naar het te selecteren model om de gegevens in ΣDAT te zetten, indien een aanpassing van de gegevens wordt toegepast. Druk op MODL om te zien welke opties beschikbaar zijn . Het volgende menu zal verschijnen:

Deze functies komen overeen met Linear Fit, Logarithmic Fit, Exponential Fit, Power Fit of Best Fit. Het passend maken van gegevens wordt uitvoeriger behandeld in een later hoofdstuk. Druk op ΣPAR om terug te keren naar het menu ΣPAR.

<u>ΣPAR (K)</u>
ΣPAR is slechts een verwijzing naar de variabele ΣPAR voor interactief gebruik.

<u>RESET (L)</u>
Deze functie zet de inhoud van ΣPAR terug op de standaardwaarden.

Druk op NXT STAT om terug te keren naar het menu STAT. Druk op [PLOT] om terug te keren naar het hoofdmenu PLOT.

Het menu FLAG in PLOT

Het menu FLAG is eigenlijk interactief, zodat u elk van de volgende opties kunt selecteren:

- AXES: wanneer dit is geselecteerd, worden de assen binnen de diagramruimte of het volume weergegeven, indien deze zichtbaar zijn..
- CNCT: wanneer dit is geselecteerd, wordt het diagram gemaakt zodat individuele punten verbonden zijn.
- SIMU: wanneer dit is geselecteerd en indien meer dan één grafiek moet worden geplot met dezelfde set assen, worden alle grafieken simultaan geplot.

Druk op PLOT om terug te keren naar het menu PLOT .

Diagrammen genereren met programma's

Afhankelijk van het feit of we te maken hebben met een tweedimensionele grafiek gedefinieerd door een functie, door gegevens van ΣDAT of door een driedimensionele functie, moet u de variabelen PPAR, ΣPAR en/of VPAR instellen voor u een diagram aangemaakt in een programma. Met de commando's uit de vorige paragraaf kunt u dergelijke variabelen instellen.

Hierna beschrijven we de algemene opmaak van de variabelen die nodig zijn voor het maken van de verschillende diagramtypes die beschikbaar zijn in de rekenmachine.

Tweedimensionele grafieken

De tweedimensionele grafieken aangemaakt via functies, namelijk *Function, Conic, Parametric, Polar, Truth* en *Differential Equation* gebruiken PPAR met de notatie:

{ (x_{min}, y_{min}) (x_{max}, y_{max}) indep res axes ptype depend }

De tweedimensionele grafieken opgemaakt met gegevens in de statistische matrix ΣDAT, namelijk *Bar, Histogram* en *Scatter* gebruiken de variabele ΣPAR met de volgende notatie:

{ `x-column y-column slope intercept model` }

terwijl ze tegelijk PPAR met de hierboven getoonde notatie gebruiken.

De betekenis van de verschillende parameters in PPAR en ΣDAT werd weergegeven in de voorgaande paragraaf.

Driedimensionele grafieken

De beschikbare driedimensionele grafieken, namelijk de opties *Slopefield, Wireframe, Y-Slice, Ps-Contour, Gridmap* en *Pr-Surface*, gebruiken de variabele VPAR met de volgende notatie:

$\{x_{left}, x_{right}, y_{near}, y_{far}, z_{low}, z_{high}, x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}, x_{eye}, y_{eye}, z_{eye}, x_{step}, y_{step}\}$

Deze waardenparen van x, y en z vertegenwoordigen het volgende:

- Dimensies van het weergaveparallelopipedum ($x_{left}, x_{right}, y_{near}, y_{far}, z_{low}, z_{high}$)
- Bereik van de onafhankelijke variabelen x en y ($x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}$)
- Plaats van het oogpunt ($x_{eye}, y_{eye}, z_{eye}$)
- Aantal stappen in de richting van x en y (x_{step}, y_{step})

Driedimensionele grafieken vereisen tevens de variabele PPAR met de hierboven getoonde parameters.

De variabele EQ

Alle diagrammen, behalve die gebaseerd zijn op ΣDAT, vereisen ook dat u de te plotten functie of functies definieert door de uitdrukkingen of verwijzingen naar deze functies op te slaan in de variabele EQ.

In het kort: om een diagram in een programma aan te maken, moet u zonodig EQ laden. Laad daarna PPAR, PPAR en ΣPAR of PPAR en VPAR.

Gebruik tenslotte de naam van het juiste diagramtype: FUNCTION, CONIC, POLAR, PARAMETRIC, TRUTH, DIFFEQ, BAR, HISTOGRAM, SCATTER, SLOPE, WIREFRAME, YSLICE, PCONTOUR, GRIDMAP of PARSURFACE om uw diagram te maken.

Voorbeelden van interactieve plots met het PLOT menu

Probeer de volgende voorbeelden van interactieve diagrammen met het menu PLOT om beter te begrijpen hoe een programma werkt met de commando's en variabelen PLOT.

Voorbeeld 1 – Een functie-diagram:

← USER F3	Activeert het menu PLOT (*) diagramtype
PTYPE FUNCT	Kiest FUNCTION als het
'√r' ENTER ← EQ	Slaat de functie '√r' op in EQ
PPAR	Toont de parameters van het diagram
ALPHA ← R ENTER INDEP	Definieert 'r' als de onafh. variabele
ALPHA ← S ENTER DEPND	Definieert 's' als de afhankelijke variabele
1 +/- SPC 10 XRNG	Definieert (-1, 10) als het x-bereik
1 +/- SPC 5 YRNG NXT	Definieert (-1, 5) als het y-bereik
{ (0,0) {.4 .2} "Rs" "Sr"}	Definitielijst van de assen
AXES	Definieert het midden van de assen, de merkstreepjes en de labels
NXT PLOT	Keert terug naar het menu PLOT
ERASE DRAX NXT LABEL	Wist diagram, tekent assen en labels
NXT DRAW	Tekent de functie en toont hetdiagram
EDIT NXT MENU	Wist de menulabels
NXT NXT PICT CANCL	Keert terug naar het normale beeldscherm van de rekenmachine

(*) Het menu PLOT is beschikbaar via de door de gebruiker gedefinieerde toets F3 zoals eerder in dit hoofdstuk weergegeven.

Voorbeeld 2 – Een parametrisch diagram (Gebruik RAD als hoek):

← USER F3	Activeert het menu PLOT
PTYPE PARAM	Kiest PARAMETRIC als het diagramtype
{ 'SIN(t)+i*SIN(2*t)' } ENTER	Definieert de complexe functie X+iY

← EQ	Slaat de complexe functie op in EQ
PPAR	Toont de parameters van het diagram
{t 0 6.29} ENTER INDEP	Definieert ‘r’ als de onafh. variabele
ALPHA Y ENTER DEPND	Definieert ‘Y’ als de afhankelijke variabele
2.2 +/- SPC 2.2 XRNG	Definieert (-2.2,2.2) als het x-bereik
1.1 +/- SPC 1.1 YRNG NXT	Definieert (-1.1,1.1) als het y-bereik
{ (0,0) {.4 .2} “X(t)” “Y(t)”} ENTER	Definitielijst van de assen
AXES	Definieert het midden van de assen, de merkstreepjes en de labels
NXT PLOT	Keert terug naar het menu PLOT
ERASE DRAX NXT LABEL	Wist diagram, tekent assen en labels
NXT DRAW	Tekent de functie en toont het diagram
EDIT NXT MENU NXT NXT PICT CANCL	Beëindigt het diagram

Voorbeeld 3 – Een polair diagram:

← USER F3	Activeert het menu PLOT
PTYPE POLAR	Kiest POLAR als het diagramtype
‘1+SIN(θ)’ ENTER ← EQ	Slaat de complexe funct. r = f(θ) op in EQ
PPAR	Toont de parameters van het diagram
{ θ 0 6.29} ENTER INDEP	Definieert ‘θ’ als de onafh. variabele
ALPHA Y ENTER DEPND	Definieert ‘Y’ als de afhankelijke variabele
3 +/- SPC 3 XRNG	Definieert (-3,3) als het x-bereik
0.5 +/- SPC 2.5 YRNG NXT	Definieert (-0.5,2.5) als het y-bereik
{ (0,0) {.5 .5} “x” “y”} ENTER	Definitielijst van de assen
AXES	Definieert het midden van de assen, de merkstreepjes en de labels
NXT PLOT	Keert terug naar het menu PLOT
ERASE DRAX NXT LABEL	Wist diagram, tekent assen en labels
NXT DRAW	Tekent de functie en toont het diagram
EDIT NXT MENU	Wist de menulabels
NXT NXT PICT CANCL	Keert terug naar het normale beeldscherm van de rekenmachine

Uit deze voorbeelden zien we een patroon voor het interactief aanmaken van een tweedimensionele grafiek via het menu PLOT:

1 – Kies PTYPE.
2 – Sla de te plotten functie op in variabele EQ (met de passende notatie, bijv., ‘X(t)+iY(t)’ voor PARAMETRIC).
3 – Voer de naam in (en bereik, indien nodig) van de onafhankelijke en afhankelijke variabelen
4 – Voer de specificaties van de assen in als een lijst { center atick x-label y-label }
5 – Gebruik ERASE, DRAX, LABEL, DRAW om een volledig gelabelde grafiek met assen te maken.

Dezelfde aanpak kan worden gebruikt om diagrammen te maken met een programma, behalve dat u in een programma het commando PICTURE moet toevoegen na het oproepen van de functie DRAW om het grafische scherm terug naar het stapelgeheugen op te roepen.

Voorbeelden van diagrammen gemaakt met programma’s

In deze paragraaf laten we hoe u de laatste drie voorbeelden kunt implementeren met programma’s. Activeer het menu PLOT voor u het programma invoert om het invoeren van grafische commando’s te vergemakkelijken (← USER F3 , zie hierboven).

Voorbeeld 1 – Een functie-diagram. Voer het volgende programma in:

`«`	Activeert het programma
`{PPAR EQ} PURGE`	Wist de huidige PPAR en EQ
`‘√r’ STEQ`	Slaat ‘√r’ op in EQ
`‘r’ INDEP`	Stelt ‘r’ als de onafh. variabele in
`‘s’ DEPND`	Stelt ‘s’ als de afhankelijke variabele
`FUNCTION`	Kiest FUNCTION als het diagramtype
`{ (0.,0.) {.4 .2}` `“Rs” “Sr” } AXES`	Stelt de assen-informatie in
`-1. 5. XRNG`	Bepaalt het x-bereik
`-1. 5. YRNG`	Bepaalt het y-bereik
`ERASE DRAW DRAX LABEL`	Wist en tekent het diagram, assen en

	labels
`PICTURE »`	Roept het grafische scherm op in het stapelgeheugen

Sla het programma op in de variabele PLOT1. Druk, indien nodig, op VAR en daarna op PLOT1 om het programma te activeren.

Voorbeeld 2 –Een parametrisch diagram. Voer hetvolgende programma in:

`«`	Activeert het programma
`RAD {PPAR EQ} PURGE`	Verandert naar radialen, wist variabelen
`'SIN(t)+i*SIN(2*t)' STEQ`	Slaat 'X(t)+iY(t)' op in EQ
`{ t 0. 6.29} INDEP`	Stelt 'r' als de onafh. variabele in, met bereik
`'Y' DEPND`	Stelt 'Y' als de afhankelijke variabele
`PARAMETRIC`	Kiest PARAMETRIC als het diagramtype
`{ (0.,0.) {.5 .5} "X(t)"`	
`"Y(t)" } AXES`	Stelt de assen-informatie in
`-2.2 2.2 XRNG`	Bepaalt het x-bereik
`-1.1 1.1 YRNG`	Bepaalt het y-bereik
`ERASE DRAW DRAX LABEL`	Wist en tekent het diagram, assen en labels
`PICTURE`	Roept het grafische scherm naar het stapelgeheugen
`»`	Beëindigt het programma

Sla het programma op in de variabele PLOT2. Druk, indien nodig, op VAR en daarna PLOT2 om het programma te activeren.

Voorbeeld 3 – Een polaie diagram. Voer het volgende programma in:

`«`	Activeert het programma
`RAD {PPAR EQ} PURGE`	Verandert naar radialen, wist variabelen.
`'1+SIN(θ)' STEQ`	Slaat 'f(θ)' op in EQ
`{ θ 0. 6.29} INDEP`	Stelt 'θ' als de onafh. variabele in, met bereik

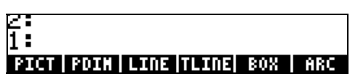
`'Y' DEPND`	Stelt 'Y' als de afhankelijke variabele in
`POLAR`	Kiest POLAR als het diagramtype
`{ (0.,0.) {.5 .5}`	
`"x" "y"} AXES`	Stelt de assen-informatie in
`-3.  3. XRNG`	Bepaalt het x-bereik
`-.5  2.5 YRNG`	Bepaalt het y-bereik
`ERASE DRAW DRAX LABEL`	Wist en tekent het diagram, assen en labels
`PICTURE`	Roept het grafische scherm op in het stapelgeheugen
`»`	Beëindigt het programma

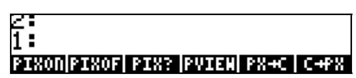
Sla het programma op in de variabele PLOT3. Druk, indien nodig, op VAR en daarna PLOT3 om het programma te activeren.

Deze oefeningen illustreren het gebruik van PLOT commando's in programma's. Zij laten slechts het topje van de ijsberg zien van de programmeertoepassingen van diagrammen. De gebruiker kan zelf de oefeningen proberen voor het programmeren van diagrammen.

Tekencommando's voor gebruik bij het programmeren

U kunt figuren direct vanuit een programma in het grafische venster tekenen door commando's te gebruiken zoals die in het menu PICT, toegankelijk via ← PRG NXT PICT. De beschikbare functies in dit menu zijn de volgende. Druk NXT om naar het volgende menu te gaan:





Vanzelfsprekend voeren de commando's LINE, TLINE en BOX dezelfde bewerkingen uit als hun interactieve tegenhanger met de juiste invoer. Deze en andere functies in het menu PICT verwijzen naar de grafische vensters waarvan het x- en y-bereik is bepaald in de variabele PPAR, zoals hierboven gedemonstreerd voor de verschillende diagramtypes. De functies in het commando PICR worden hierna beschreven:

PICT

Deze softtoets verwijst naar een variabele met de naam PICR dat de huidige inhoud van het grafische venster opslaat. Deze variabelenaam kan echter niet tussen aanhalingstekens worden geplaatst en kan enkel grafische objecten opslaan. In die zin verschilt PICT van alle andere variabelen van de rekenmachine.

PDIM

De functie PDIM heeft als invoer 2 geordende paren (x_{min},y_{min}) (x_{max} y_{max}) of 2 binaire hele getallen #w en #h. PDIM vervangt de huidige inhoud van PICT door een leeg scherm. Wanneer het argument (x_{min},y_{min}) (x_{max} y_{max}) is, worden deze waarden het bereik van de door de gebruiker gedefinieerde coördinaten in PPAR. Wanneer het argument #w en #h is, blijft het bereik van de door de gebruiker gedefinieerde coördinaten onveranderd, maar de grootte van de grafiek verandert naar #h x #w pixels.

PICT en het grafische scherm

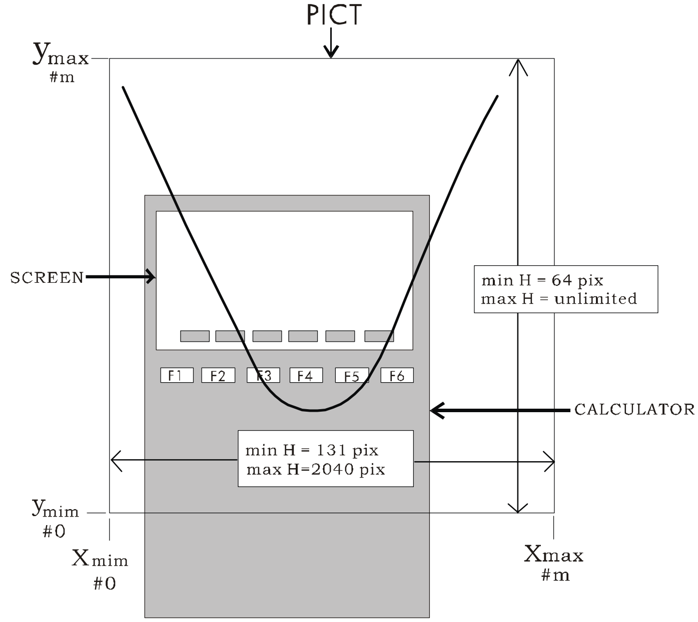
PICT, de opslagruimte voor de huidige grafiek, kan worden beschouwd als een tweedimensionele grafiek met een minimumafmeting van 131 pixels in de breedte en 64 pixels in de hoogte. De maximumbreedte van PICT is 2048 pixels, zonder beperkingen voor de maximumhoogte. Een pixel is elk puntje in het scherm van de rekenmachine dat kan worden aangezet (donker) of uitgezet (licht) om tekst of grafieken te maken. Het scherm van de rekenmachine heeft 131 x 64 pixels, d.w.z. de minimumafmeting voor PICT. Als uw PICT groter is dan het scherm, dan kan het diagram PICT beschouwd worden als een tweedimensioneel domein die door het scherm van de rekenmachine kan schuiven, zoals weergegeven in het volgende diagram.

LINE

Dit commando heeft als invoer twee geordende paren (x_1,y_1) (x_2, y_2) of twee paren van pixelcoördinaten {$\#n_1$ $\#m_1$} {$\#n_2$ $\#m_2$}. Het tekent de lijn tussen deze coördinaten.

TLINE

Dit commando (Toggle LINE) heeft als invoer twee geordende paren (x_1,y_1) (x_2, y_2) of twee paren van pixelcoördinaten {#n_1 #m_1} {#n_2 #m_2}. Het tekent de lijn tussen deze coördinaten en zet daarbij pixels uit in het pad van de lijn die aan staan en vice versa.



BOX

Dit commando heeft als invoer twee geordende paren (x_1,y_1) (x_2, y_2) of twee paren van pixelcoördinaten {#n_1 #m_1} {#n_2 #m_2}. Het tekent het vierkant waarvan de diagonalen worden vertegenwoordigd door de twee coördinatenparen in de invoer.

ARC

Dit commando wordt gebruikt om een boog te tekenen. ARC heeft als invoer de volgende objecten:

- Coördinaten van het midden van de boog als (x,y) in gebruikerscoördinaten of {#n, #m} in pixels.
- De straal van de boog als r (gebruikerscoördinaten) of #k (pixels).
- Oorspronkelijke hoek θ_1 en uiteindelijke hoek θ_2.

PIX?, PIXON en PIXOFF

Deze functies hebben als invoer de puntcoördinaten in gebruikerscoördinaten (x,y) of in pixels {#n, #m}.

- PIX? Controleert of de pixel op positie (x,y) of {#n, #m} aan staat.
- PIXOFF zet de pixel op positie (x,y) of {#n, #m} uit.
- PIXON zet de pixel op positie (x,y) of {#n, #m} aan.

PVIEW

Dit commando heeft als invoer de coördinaten van een punt als gebruikerscoördinaten (x,y) of pixels {#n, #m} en plaatst de inhoud van PICT met de linkerbovenhoek op dat specifieke punt. U kunt ook een lege lijst als argument gebruiken, waarbij de afbeelding wordt gecentreerd op het scherm. PVIEW activeert de grafische cursor en het afbeeldingenmenu niet. Gebruik PICTURE om deze functies te activeren.

PX→C

De functie PX→C zet pixelcoördinaten {#n #m} om in gebruikerscoördinaten (x,y).

C→PX

De functie C→PX zet gebruikerscoördinaten (x,y) om in pixelcoördinaten {#n #m}.

Programmeervoorbeelden met gebruik van tekenfuncties

In deze sectie gebruiken we de hierboven beschreven commando's om grafieken te maken met programma's. Programmalijsten worden gegeven op de bijgevoegde diskette of cd-rom.

<u>Voorbeeld 1</u> - Een programma dat tekencommando's gebruikt

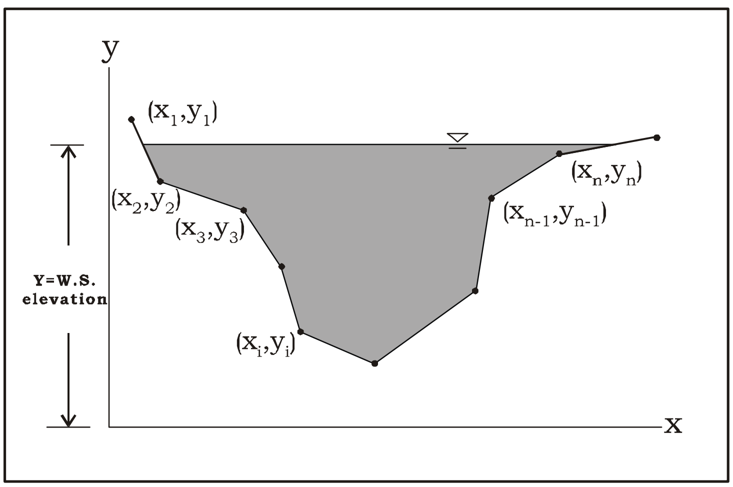
Het volgende programma maakt een tekening in het grafische scherm. (Dit programma heeft geen andere bedoeling dan te tonen hoe u commando's van de rekenmachine gebruikt om tekeningen op het scherm te maken).

«	Activeert het programma
DEG	Selecteert graden voor hoekberekeningen
0. 100. XRNG	Bepaalt het x-bereik
0. 50. YRNG	Bepaalt het y-bereik
ERASE	Wist het diagram
(5., 2.5) (95., 47.5) BOX	Tekent een rechthoek van (5,5) naar (95,95)
(50., 50.) 10. 0. 360. ARC	Tekent middelpunt van cirkel (50,50), r =10.
(50., 50.) 12. –180. 180. ARC	Tekent middelpunt van cirkel (50,50), r= 12.
1 8 FOR j	Tekent 8 lijnen in de cirkel
(50., 50.) DUP	Lijnen worden gecentreerd als (50,50)
'12*COS(45*(j-1))' →NUM	Berekent x, ander eind op 50 + x
'12*SIN(45*(j-1))' →NUM	Berekent y, ander eind op 50 + y
R → C	Converteert x y naar (x,y), complex getal
+	Telt (50,50) op bij (x,y)
LINE	Tekent de lijn
NEXT	Einde van FOR-lus
{ } PVIEW	Toon tekening
»	

<u>Voorbeeld 2</u> – Een programma om een dwarsdoorsnede van een natuurlijke rivier te plotten.

Deze toepassing kan nuttig zijn voor het bepalen van het gebied en de vochtige perimeters van doorsnedes van natuurlijke rivieren. Normaal wordt de doorsnede van een rivier opgemeten en een reeks van punten wordt opgemaakt die de coördinaten x en y vertegenwoordigen met betrekking tot een willekeurige reeks van coördinatenassen. Deze punten kunnen worden geplot en een schets van de dwarsdoorsnede kan worden gemaakt voor een bepaalde verhoging van het wateroppervlak. De onderstaande afbeelding geeft de termen weer die in deze paragraaf worden gebruikt.

Het programma, beschikbaar op de diskette of cd-rom die bij uw rekenmachine hoort, gebruikt vier subprogramma's FRAME, DXBED, GTIFS en INTRP. Het hoofdprogramma, XSECT, heeft als invoer een matrix van waarden voor x en y en de hoogte van het wateroppervlak Y (zie de bovenstaande afbeelding), in die volgorde. Het programma maakt een grafiek van de doorsnede waarbij de ingevoerde gegevens worden aangeduid met punten in de grafiek en de vrije oppervlakte in de doorsnede worden weergegeven.



Het wordt aanbevolen dat u een afzonderlijke subdirectory maakt om de programma's in op te slaan. U kunt de subdirectory RIVIER noemen, aangezien we bezig zijn met doorsnedes van onregelmatige open kanalen, typisch voor rivieren.

Gebruik de volgende gegevens om het programma XSECT in werking te zien. Voer ze in als matrices van twee kolommen, de eerste x en de tweede y. Sla de matrices op in variabelen met namen zoals XYD1 (X-Y gegevens 1) en

XYD2 (X-Y gegevens 2). Plaats om het programma uit te voeren één van de gegevensreeksen in het stapelgeheugen, b.v. VAR XYD1, voer daarna een hoogte van het wateroppervlak in, bijv. 4.0 en druk op XSECT. De rekenmachine zal een schets van de doorsnede tonen met het corresponderende wateroppervlak. Druk op ON om het grafische scherm te verlaten.

Probeer de volgende voorbeelden:

XYD1 2 XSECT
XYD1 3 XSECT
XYD1 4 XSECT
XYD1 6 XSECT

Wees geduldig als u het programma XSECT uitvoert. Het kan enige tijd (ongeveer 1 minuut) in beslag nemen om de grafiek aan te maken door het relatief hoog aantal grafische functies dat wordt gebruikt, om nog maar te zwijgen van de numerieke herhalingen.

Gegevens reeks 1

x	y
0.4	6.3
1.0	4.9
2.0	4.3
3.4	3.0
4.0	1.2
5.8	2.0
7.2	3.8
7.8	5.3
9.0	7.2

Gegevens reeks 2

x	y
0.7	4.8
1.0	3.0
1.5	2.0
2.2	0.9
3.5	0.4
4.5	1.0
5.0	2.0
6.0	2.5
7.1	2.0
8.0	0.7
9.0	0.0
10.0	1.5
10.5	3.4
11.0	5.0

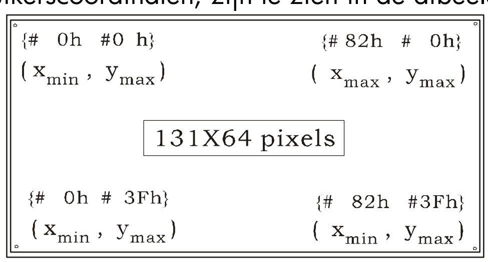
Opmerking: Het programma FRAME, zoals het origineel is geprogrammeerd (zie de diskette of CD ROM), behoudt niet de juiste schaal van de grafiek. Als u de originele schaal wilt behouden, vervangt u FRAME door het volgende programma:

```
« STOΣ MINΣ MAXΣ 2 COL→ DUP →COL DROP – AXL ABS AXL 20
/ DUP NEG SWAP 2 COL→ + →ROW DROP SWAP → yR xR « 131
DUP R→B SWAP yR OBJ→ DROP – xR OBJ→ DROP - / * FLOOR
R→B PDIM yR OBJ→ DROP YRNG xR OBJ→ DROP XRNG ERASE » »
```

Dit programma laat de breedte van de variabele PICT staan op 131 pixels – de minimumpixelgrootte voor de horizontale as – en past het aantal pixels in de verticale as aan zodat een schaal van 1:1 wordt behouden tussen de verticale en horizontale assen.

Pixelcoördinaten

De onderstaande afbeelding toont de grafische coördinaten voor het typische (minimum) scherm van 131 x 64 pixels. Pixelcoördinaten worden gemeten vanaf de linkerbovenhoek in het scherm (# 0h # 0h), wat overeenkomt met de door de gebruiker gedefinieerde coördinaten (x_{min}, y_{max}). De maximumcoördinaten met betrekking tot pixels komen overeen met de rechteronderhoek van het scherm (# 82h #3Fh), wat in gebruikerscoördinaten het punt (x_{max}, y_{min}) is. De coördinaten van de twee andere hoeken, zowel in pixels als in gebruikerscoördinaten, zijn te zien in de afbeelding.



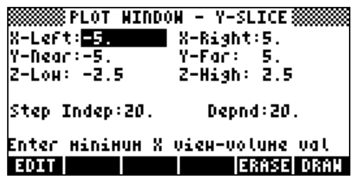
Grafieken laten bewegen

Hier geven we een manier om animaties te maken met het diagramtype Y-Slice. Stel dat u de bewegende golf f(X,Y) = 2.5 sin(X-Y) wilt laten bewegen.

In de animatie kunnen we X als tijd beschouwen en diagrammen aan te maken van f(X,Y) vs. Y voor verschillende waarden van X. Om deze grafiek te maken, gebruiken we het volgende:

- ← 2D/3D tegelijkertijd indrukken. Kies Y-Slice als TYPE. '2.5*SIN(X-Y)' als EQ. 'X' als INDEP. Druk op NXT OK.

- ← WIN, gelijktijdig indrukken (in de RPN-modus). Gebruik de volgende waarden:



- Druk op ERASE DRAW. Geef de rekenmachine de tijd om de nodige grafieken te genereren. Wanneer deze klaar is, zal het een bewegende sinusoïdale curve weergegeven in uw scherm.

Een verzameling van grafieken laten bewegen

De rekenmachine biedt de functie ANIMATE om een aantal grafieken te animeren die zijn opgeslagen in het stapelgeheugen. U kunt een grafiek maken in het grafische scherm door de commando's in de menu's PLOT en PICT te gebruiken. Gebruik PICT RCL om de gemaakte grafiek in het stapelgeheugen te plaatsen. Wanneer u *n* grafieken in niveaus *n* tot 1 van het stapelgeheugen heeft, kunt u het commando ANIMATE gebruiken om een animatie te maken van de grafieken die u in het stapelgeheugen heeft geplaatst.

Voorbeeld 1 – Een rimpel in een wateroppervlak laten bewegen.
Voer als voorbeeld het volgende programma in dat 11 grafieken genereert met een cirkel in het midden van het grafische scherm waarvan de straal in elke volgende grafiek vermeerdert met een constante waarde.

«	Activeert het programma
RAD	Stelt de hoekeenheden in op

	radialen
131 R→B 64 R→B PDIM	Stelt PICT in op 131×64 pixels
0 100 XRNG 0 100 YRNG	Stelt de x- en y-bereiken in op 0-100
1 11 FOR j	Activeert de lus met j = 1 .. 11
ERASE	Wist de huidige PICT
(50., 50.) '5*(j-1)' →NUM	Middelpunten van de cirkels (50,50)
0 '2*π' →NUM ARC	Tekent het middelpunt van de cirkel r = 5(j-1)
PICT RCL	Plaatst de huidige PICT in het stapelgeheugen
NEXT	Beëindigt de FOR-NEXT lus
11 ANIMATE	Laat de grafieken bewegen
»	Sluit het programma af

Sla dit programma op in een variabele met de naam PANIM (Plot ANIMation). Druk op VAR (indien nodig) PANIM om het programma uit te voeren. Het kost de rekenmachine meer dan een minuut om de grafieken te genereren en de animatie te starten. Daarom moet u hierbij een beetje geduld hebben. U zult gedurende wat een lange tijd lijkt de zandloper op het scherm zien voordat de animatie, die lijkt op de rimpels wanneer een platte steen op een stilstaand wateroppervlak wordt gegooid in het scherm verschijnt. Druk op ON om de animatie te stoppen.

De 11 grafieken die door het programma zijn gemaakt zijn nog steeds beschikbaar in het stapelgeheugen. Als u de animatie opnieuw wilt starten, gebruik dan: 11 ANIMATE. (De functie ANIMATE is beschikbaar via ← PRG NXT GROB NXT ANIMA). De animatie zal opnieuw starten. Druk op ON om de animatie opnieuw te stoppen. U ziet dat het getal 11 nog steeds in niveau 1 van het stapelgeheugen staat. Druk op ◄ om het uit het stapelgeheugen te verwijderen.

Stel dat u de afbeeldingen van deze animatie wilt bijhouden in een variabele. U kunt een lijst van deze afbeeldingen aanmaken, een WLIST, met:

[/] [/] [←][PRG] [TYPE] [→LIST] ['] [ALPHA][ALPHA][W][L][I][S][T][ALPHA] [STO▶]

Druk op [VAR] om uw lijst met variabelen weer op te roepen. De variabele [WLIST] zou nu bij uw softmenutoetsen moeten staan. Om deze lijst met variabelen opnieuw te animeren, zou u het volgende programma kunnen gebruiken:

«	Activeert het programma
WLIST	Plaatst de lijst WLIST in het stapelgeheugen
OBJ→	Breekt de lijst af, stapelgeheugen niveau 1 = 11
ANIMATE	Start animatie
»	Sluit het programma af

Sla dit programma op in een variabele met de naam RANIM (Re-ANIMate). Druk op [RANIM] om het programma te activeren.

Het volgende programma zal de grafieken in WLIST zowel vooruit als achteruit laten bewegen:

«	Activeert het programma
WLIST DUP	Plaatts de lijst WLIST in het stapelgeheugen, Maakt een extra kopie
REVLIST +	Keert de volgorde om, verbindt de 2 lijsten
OBJ→	Breekt de lijst af in elementen, niveau 1 = 22
ANIMATE	Start animatie
»	Sluit het programma af

Sla dit programma op in een variabele met de naam RANI2 (Re-ANIMate, versie 2). Druk op [RANI2] om het programma te activeren. De animatie simuleert nu een rimpel in het oppervlak van het voor het overige stille water die terug naar het midden wordt weerkaatst vanaf de wanden van een cirkelvormige tank. Druk op [ON] om de animatie te stoppen.

<u>Voorbeeld 2</u> – Het plotten van verschillende machtsfuncties animeren
Stel dat u het plotten van de functies $f(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$ in dezelfde assen wilt animeren. U zou het volgend programma kunnen gebruiken:

«	Activeert het programma
RAD	Stelt de hoekeenheden in op radialen
131 R→B 64 R→B PDIM	Stelt PICT in op 131×64 pixels
0 2 XRNG 0 20 YRNG	Stelt de x- en y-bereiken in
0 4 FOR j	Start lus met j = 0,1,…,4
'X^j' STEQ	Slaat 'X^j' op in de variabele EQ
ERASE	Wist de huidige PICT
DRAX LABEL DRAW	Tekent assen, labels, functie
PICT RCL	Plaatst de huidige PICT in het stapelgeheugen
NEXT	Beëindigt FOR-NEXT lus
5 ANIMATE	Laat het diagram bewegen
»	

Sla dit programma op in een variabele met de naam PWAN (PoWer function ANimation). Druk op VAR (indien nodig) PWAN om het programma te activeren. U zult zien dat de rekenmachine elke individuele machtsfunctie zal tekenen alvorens de animatie te starten waarin de vijf functies snel na elkaar zullen geplot worden. Druk op ON om de animatie te stoppen.

Meer informatie over de functie ANIMATE

De functie ANIMATE zoals ze wordt gebruikt in de twee voorgaande voorbeelden, gebruikte als invoer de te animeren grafieken en hun aantal. U kunt aanvullende informatie gebruiken om de animatie te maken, zoals het tijdsinterval tussen de grafieken en het aantal herhalingen van de grafieken. De algemene notatie van de functie ANIMATE is in die gevallen de volgende:

```
n-graphs   { n {#X #Y} delay rep }  ANIMATE
```

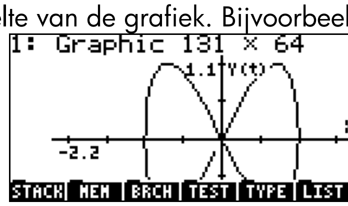
`n` staat voor het aantal grafieken, `{#X #Y}` staan voor de pixelcoördinaten van de rechter onderhoek van het te plotten gebied (zie de onderstaand eafbeelding), `delay` is het aantal toegestane seconden tussen de opeenvolgende grafieken in de animatie en `rep` is het aantal herhalingen van de animatie.

Grafische objecten (GROBs)

Het woord GROB staat voor GRafische OBjecten en wordt in de programmeeromgeving van de rekenmachine gebruikt om de pixel-voor-pixel-beschrijving voor te stellen van een afbeelding in het scherm van de rekenmachine. Daarom wordt een afbeelding, wanneer ze wordt geconverteerd naar een GROB, een reeks van binaire getallen (*bi*naire dig*its* = *bits*), d.w.z. 0's en 1's. Bekijk de volgende oefening voor GROBs en de conversie van afbeeldingen naar GROBs.

Wanneer we een grafiek maken met de rekenmachine, wordt die grafiek de inhoud van een speciale variabele met de naam PICT. Dus zou u, om de laatste inhoud van PICT te zien, PICT RCL (← PRG NXT PICT PICT ← RCL) kunnen gebruiken.

Het scherm toont op niveau 1 van het stapelgeheugen de lijn `Graphic 131×64` (als u de standaardschermgrootte gebruikt), gevolgd door een schets van het bovenste gedeelte van de grafiek. Bijvoorbeeld:



Als u op ▼ drukt, wordt de grafiek op niveau 1 weergegeven in het grafische scherm van de rekenmachine. Druk op CANCL om terug te keren naar het normale scherm van de rekenmachine.

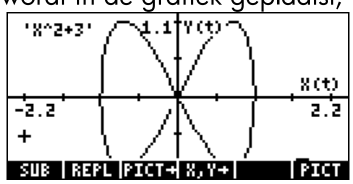
De grafiek op niveau 1 staat nog altijd niet in de GROB-opmaak, hoewel het, per definitie, een grafisch object is. Om een grafiek in het stapelgeheugen om te zetten in een GROB, gebruikt u 3 ENTER ← PRG NXT GROB →GROB. Nu hebben we de volgende informatie op niveau 1:

Het eerste deel van de beschrijving is gelijk aan wat we oorspronkelijk hadden staan, namelijk `Graphic 131×64`, maar nu wordt het uitgedrukt als

Graphic 13128 × 8. Het grafische scherm is nu vervangen door een reeks nullen en enen die de pixels van de originele grafiek voorstellen. Dus is die originele grafiek nu omgezet naar zijn equivalent in bits.

U kunt ook vergelijkingen omzetten naar GROBs. Voer bijvoorbeeld de vergelijking 'X^2+3' in op niveau 1 van het stapelgeheugen met de Vergelijkingenschrijver en druk daarna op [/] [ENTER] [←] PRG [NXT] GROB →GROB .
U heeft nu in niveau 1 het GROB staan, beschreven als:

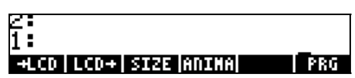
Als grafisch object kan deze vergelijking nu in het grafische scherm worden geplaatst. Druk op [◄] om het grafische scherm weer op te roepen . Plaats dan de cursor in een lege sector in de grafiek en druk op EDIT [NXT] [NXT] REPL.
De vergelijking 'X^2-5' wordt in de grafiek geplaatst; bijvoorbeeld:



Zo kunnen GROBs worden gebruikt om grafieken te documenteren door vergelijkingen of tekst in het grafisch scherm te plaatsen.

Het menu GROB

Het menu GROB , beschikbaar via [←] PRG [NXT] GROB →GROB, bevat de volgende functies. Druk op [NXT] om naar het volgend menu te gaan:



→GROB

Van deze functies hebben we reeds SUB, REPL (van het grafische menu EDIT), ANIMATE [ANIMA] en →GROB gebruikt. ([*PRG*] is gewoon een manier om terug te keren naar het programmeermenu.) Terwijl we →GROB gebruikten in de twee voorgaande voorbeelden is het u misschien opgevallen dat er een 3 is gebruikt om de grafiek te converteren naar een GROB, terwijl een 1 is gebruikt om de vergelijking te converteren naar een GROB. Deze parameter van de functie →GROB geeft de grootte van het object dat wordt geconverteerd naar een GROB als 0 of 1 – voor een klein object, 2 – een medium en 3 – een groot object. De andere functies in het menu GROB worden hierna beschreven.

BLANK

De functie BLANK, met argumenten #n en #m, maakt een blanco grafisch object aan waarbij de breedte en de hoogte gespecifieerd worden door de waarden #n en #m. Dit is gelijk aan de functie PDIM in het menu GRAPH.

GOR

De functie GOR (Graphics OR) heeft als invoer *grob*$_2$ (een doel-GROB), een reeks coördinaten en *grob*$_1$ en geeft de superpositie van *grob*$_1$ op *grob*$_2$ (of PICT) beginnend bij de gegeven coördinaten. De coördinaten kunnen worden gespecifieerd als gebruikerscoördinaten (x,y) of pixels [#n #m]. GOR gebruikt de functie OR om de status van iedere pixel te bepalen (d.w.z. aan of uit) in het overlappend gebied tussen *grob*$_1$ en *grob*$_2$.

GXOR

De functie GXOR (Graphics XOR) voert dezelfde bewerking uit als GOR, maar gebruikt XOR om de status van de pixels in het overlappende gebied tussen de grafische objecten *grob*$_1$ en *grob*$_2$ te bepalen.

Opmerking: in zowel GOR als GXOR geven deze functies geen uitvoer wanneer *grob2* wordt vervangen door PICT. Om de uitvoer te zien moet u PICT opnieuw oproepen in het stapelgeheugen met PICT RCL of PICTURE.

→LCD

Neemt een specifiek GROB en geeft dit weer in het scherm van de rekenmachine, beginnend in de linkerbovenhoek.

LCD→

Kopieert de inhoud van het stapelgeheugen en het menuscherm in een GROB van 131 x 64 pixels.

SIZE

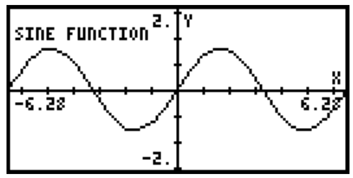
De functie SIZE, wanneer ze wordt toegepast op een GROB, toont de afmetingen van het GROB's in de vorm van twee getallen. Het eerste getal, weergegeven op niveau 2 van het stapelgeheugen, is de breedte van het grafische object, het tweede getal, op niveau 1 van het stapelgeheugen, geeft de hoogte.

Een voorbeeld van een programma dat GROB gebruikt

Het volgende programma maakt de grafiek van de sinusfunctie met een kader – getekend met de functie BOX – en een GROB om de grafiek van een label te voorzien. Hier is de opmaak van het programma:

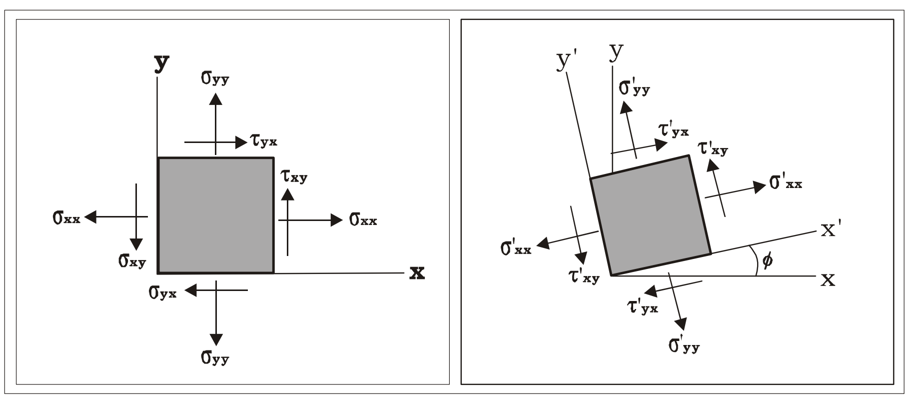
«	Activeert het programma
RAD	Stelt hoekeenheden in op radialen
131 R→B 64 R→B PDIM	Stelt het PICT-scherm in op 131×64 pixels
-6.28 6.28 XRNG –2. 2. YRNG	Bepaalt de x- en y-bereiken
FUNCTION	Kiest het type FUNCTION voor grafieken
'SIN(X)' STEQ	Slaat de sinusfunctie op in EQ
ERASE DRAX LABEL DRAW	Wist, tekent assen, labels en grafiek
(-6.28,-2.) (6.28,2.) BOX	Tekent een kader rond de grafiek
PICT RCL	Plaatst de inhoud van PICT in het stapelgeheugen
"SINE FUNCTION"	Plaatst de string voor het grafieklabel in het stapelgeheugen
1 →GROB	Zet de string om in een klein GROB
(-6., 1.5) SWAP	Coördinaten om het label GROB te plaatsen
GOR	Combineert PICT met het label GROB
PICT STO	Slaat de gecombineerde GROB op in PICT
{ } PVIEW	Brengt PICT in het stapelgeheugen
»	Sluit het programma af

Sla het programma op onder de naam GRPR (GROB PRogram). Druk op GRPR om het programma te activeren. De uitvoer zal er als volgt uitzien:



Een programma met plot- en tekenfuncties

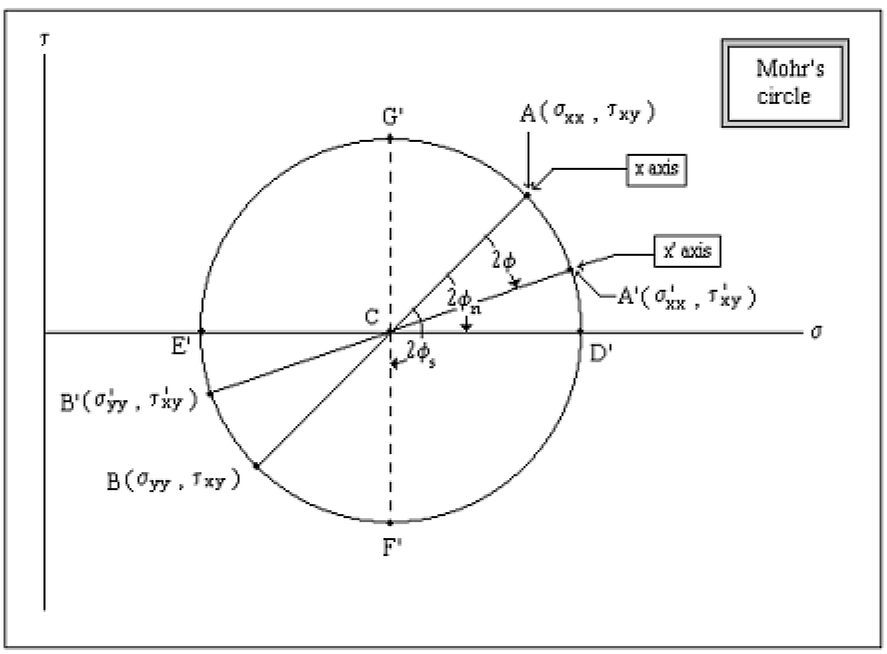
In deze paragraaf maken wij een programma aan om de cirkel van Mohr voor een gegeven voorwaarde van tweedimensionele druk te maken, te tekenen en van een label te voorzien. De linkerafbeelding toont de gegeven staat van druk in twee dimensies met σ_{xx} en σ_{yy} als normale drukpunten en $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ als schuine drukpunten. De rechterafbeelding toont de status van druk wanneer het element wordt gedraaid volgens een hoek ϕ. In dit geval zijn de normale drukpunten σ'_{xx} en σ'_{yy} en de schuine drukpunten τ'_{xy} en τ'_{yx} .



De verhouding tussen de originele status van drukpunten (σ_{xx}, σ_{yy}, τ_{xy}, τ_{yx}) en de status van druk wanneer de assen tegen de klok in worden gedraaid met f (σ'_{xx}, σ'_{yy}, τ'_{xy}, τ'_{yx}), kan grafisch worden voorgesteld door de constructie in de onderstaande afbeelding.

Om de cirkel van Mohr te construeren, gebruiken we een Cartesisch coördinatensysteem waarbij de x-as overeenkomt met de normale drukpunten (σ) en de y-as correspondeert met de schuine drukpunten (τ). Bepaal de punten A(σ_{xx},τ_{xy}) en B (σ_{yy}, τ_{xy}) en teken het segment AB. Het punt C, waar het segment AB de σ_n –as kruist, zal het middelpunt van de cirkel zijn. U ziet dat de coördinaten van punt C (½·(σ_{yy} + σ_{xy}), 0) zijn. Wanneer u de cirkel met de hand maakt, kunt u een passer gebruiken om de cirkel te traceren, aangezien u de positie van het middelpunt C en van twee punten A en B kent.

Laat het segment AC de x-as voorstellen in de oorspronkelijke staat van druk. Wanneer u de staat van druk wilt bepalen voor de assen x'-y', met de klok mee gedraaid volgens een hoek ϕ ten opzichte van de oorspronkelijke assen x-y, teken dan segment A'B', gecentreerd in C en met de klok mee gedraaid volgens een hoek 2ϕ ten opzichte van segment AB. De coördinaten van punt A' zullen de waarden (σ'_{xx},τ'_{xy}) geven, terwijl die van punt B' de waarden (σ'_{yy},τ'_{xy}) zullen geven.



De voorwaarde waarvoor de schuine druk, τ'_{xy}, gelijk is aan nul, aangegeven door segment D'E', geeft de zgn. *voornaamste drukpunten* σ^P_{xx} (bij punt D') en σ^P_{yy} (bij punt E'). Om de voornaamste drukpunten te verkrijgen, moet u het coördinatenstelsel x'-y' tegen de klok in draaien volgens een hoek ϕ_n ten opzichte van het systeem x-y. Bij de cirkel van Mohr meet de hoek tussen de segmenten AC en D'C $2\phi_n$.
De voorwaarde waarvoor de schuine druk τ'_{xy}, het maximum is, wordt aangegeven door segment F'G'. Onder deze voorwaarden zijn beide normale drukpunten, $\sigma'_{xx} = \sigma'_{yy}$ gelijk. De hoek die overeenkomend komt met deze rotatie is ϕ_s . De hoek tussen segment AC en segment F'C in de afbeelding vertegenwoordigt $2\phi_s$.

Modulair programmeren

Om een programma te ontwikkelen dat de cirkel van Mohr voor een gegeven drukstatus zal plotten, zullen we modulair programmeren gebruiken. Deze aanpak bestaat in het opdelen van het programma in een aantal subprogramma's die als afzonderlijke variabelen in de rekenmachine worden aangemaakt. Deze subprogramma's worden dan verbonden door een hoofdprogramma dat we *MOHRCIRL* zullen noemen. We zullen eerst een subdirectory met de naam MOHRC aanmaken in de HOME directory en in die directory de programma's schrijven.

De volgende stap is het maken van het hoofdprogramma en de subprogramma's in de subdirectory.

Het hoofdprogramma MOHRCIRCL gebruikt de volgende subprogramma's:

- INDAT: Vereist de invoer van σx, σy, τxy van de gebruiker, maakt een lijst σL = {σx, σy, τxy} aan als uitvoer.
- CC&r: Gebruikt σL als invoer, geeft σc = ½(σx+σy), r = straal van de cirkel van Mohr, φn = hoek voor de voornaamste drukpunten als uitvoer.
- DAXES: Gebruikt σc en r als invoer, bepaalt het bereik van de assen en tekent de assen vooor de constructgie van de cirkel van Mohr.
- PCIRC: Gebruikt σc, r, en φn als invoer, tekent de cirkel van Mohr door het maken van het diagram PARAMETRIC.

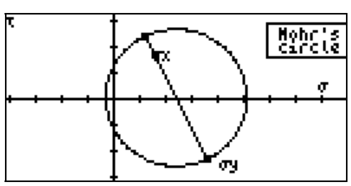
- DDIAM: Gebruikt σL als invoer, tekent segment AB (zie de bovenstaande afbeelding van de cirkel van Mohr) en verbindt de punten van de ingevoerde gegevens in de cirkel van Mohr.
- σLBL: Gebruikt σL als invoer, plaatst labels om de punten A en B te identificeren met labels "σx" en "σy".
- σAXS: Plaatst de labels "σ" en "τ" bij respectievelijk de x- en de y-assen.
- PTTL: Plaatst de titel "cirkel van Mohr" bij de afbeelding.

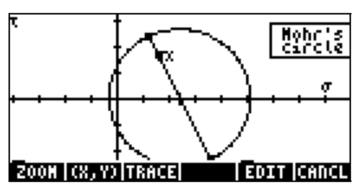
Het programma activeren

Als u de programma's hebt ingevoerd in de volgorde zoals hierboven aangegeven, zult u in uw subdirectory MOHRC de volgende variabelen hebben: PTTL, σAXS, PLPNT, σLBL, PPTS, DDIAM. Door op NXT te drukken, vindt u ook: PCIRC, DAXES, ATN2, CC&r, INDAT, MOHRC. Activeer het programma eenmaal door op de softtoets met het label MOHRC te drukken voor u de variabelen herschikt. Gebruik het volgende:

MOHRC	start het hoofdprogramma MOHRCIRCL
2 5 ▼	Voert $\sigma x = 25$ in
7 5 ▼	Voert $\sigma y = 75$ in
5 0 ENTER	Voert $\tau xy = 50$ in en beëindigt de gegevensinvoer.

Nu roept het programma MOHRCIRCL de subprogramma's op om de cirkel te maken. Wees geduldig. De resulterende cirkel van Mohr zal er uit zien als de linkerafbeelding.





Omdat deze weergave van PICT werd aangeroepen via de functie PVIEW, kunnen we geen andere informatie uit het diagram krijgen dan de afbeelding zelf. Om aanvullende informatie te verkrijgen van de cirkel van Mohr, sluit u het programma af door op [ON] te drukken. Druk daarna op [◄] om de inhoud van PICT weer op te roepen in de grafische omgeving. De cirkel van Mohr ziet er nu uit als in de rechterafbeelding (zie hierboven).

Druk op de softmenutoetsen TRACE en (X,Y). Onder in het scherm vindt u de waarde van ϕ die overeenkomt met het punt A(σx, τxy), d.w.z. `φ = 0, (2.50E1, 5.00E1).`

Druk op de pijltoets naar rechts ([►]) om de waarde van ϕ te verhogen en de corresponderende waarde (σ'_{xx}, τ'_{xy}) te bekijken. Bijvoorbeeld, voor ϕ = 45°, hebben we de waarden (σ'_{xx}, τ'_{xy}) = (1.00E2, 2.50E1) = (100, 25). De waarde van σ'_{yy} zal worden gevonden in een hoek van 90° vooruit, d.w.z. ϕ = 45 + 90 = 135°. Druk op [►] totdat we de waarde van ϕ aantreffen. We vinden het volgende: (σ'_{yy}, τ'_{xy}) = (-1.00E-10,-2.5E1) = (0, 25).

Om de voornaamste normale waarden te vinden, drukt u op [◄] tot de cursor terugkeert naar het snijpunt van de cirkel met de positieve sectie van de σ-as. De waarden die nu worden gevonden, zijn ϕ = 59° en (σ'_{xx}, τ'_{xy}) = (1.06E2,-1.40E0) = (106, -1.40). Nu hadden we de waarde van τ'_{xy} = 0 verwacht op de plaats van de voornaamste assen. Wat er gebeurt is dat we het precieze punt waar de schuine druk nul wordt, missen omdat we de resolutie van de onafhankelijke variabele hebben beperkt tot $\Delta\phi$ = 1°. Wanneer u nogmaals op [◄] drukt, vindt u waarden van ϕ = 58° en (σ'_{xx}, τ'_{xy}) = (1.06E2,5.51E-1) = (106, 0.551). Deze informatie vertelt ons dat ergens tussen ϕ = 58° en ϕ = 59° de schuine druk, τ'_{xy}, nul wordt.

Druk op [ON] om de precieze waarde van ϕn te vinden. Voer dan de lijst in die overeenkomt met de waarden {σx σy τxy}; in dit geval: `{ 25 75 50 } [ENTER]`

Druk vervolgens op [PRNST]. Het laatste resultaat in de uitvoer, 58.2825255885°, is de precieze waarde van ϕn.

Een programma om de voornaamste drukpunten te berekenen

De hierboven gevolgde procedure om ϕn te berekenen, kan als volgt worden geprogrammeerd:

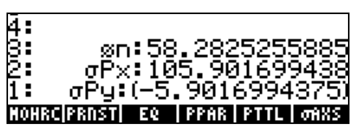
Programma PRNST:

«	Activeert het programma PRNST (PRiNcipal STresses)
INDAT	Voert gegevens in in het programma MOHRCIRC
CC&r	Berekent σc, r, en fn, zoals in MOHRCIRC
"ϕn" →TAG	Voorziet de hoek voor voornaamste drukpunten van een tag
3 ROLLD	Verplaatst de getagde hoek naar niveau 3
R→C DUP	Converteert σc en r naar (σc, r), dupliceer
C→R + "σPx" →TAG	Berekent de voornaamste druk σPx, voorziet een tag
SWAP C→R - "σPy" →TAG	Wisselt, berekent druk σPy, voorziet een tag.
»	Sluit het programma PRNST af

Het programma activeren:

VAR PRNST	Activeert het programma PRNST
2 5 ▼	Voert σx = 25 in
7 5 ▼	Voert σy = 75 in
5 0 ENTER	Voert τxy = 50 in en beëindigt de gegevensinvoer.

Het resultaat is:



De variabelen ordenen in de subdirectory

Het voor de eerste keer uitvoeren van het programma MOHRCIRCL heeft een aantal nieuwe variabelen opgeleverd, nl. PPAR en EQ. Dit zijn de Plot PARameter en Equation-variabelen die nodig zijn om de cirkel te plotten. Het

wordt aanbevolen om de variabelen in de subdirectory te herschikken zodat de programma's MOHRC en PRNST de eerste twee variabelen zijn in de softmenutoetslabels. Dit wordt gedaan door het aanmaken van de lijst { MOHRCIRCL PRNST } met: VAR ← {} MOHRC PRNST ENTER
En daarna de lijst te rangschikken met: ← PRG MEM DIR ORDER.

druk op VAR nadat de functie ORDER is geactiveert . U zult zien dat de programma's MOHRCIRCL en PRNST als twee eerste variabelen in het menu staan, zoals verwacht.

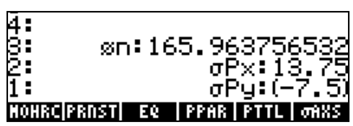
Een tweede voorbeeld van de berekening van de cirkel van Mohr

Bepaal de voornaamste drukpunten voor de drukstatus gedefinieerd als σ_{xx} = 12.5 kPa, σ_{yy} = -6.25 kPa, en τ_{xy} = - 5.0 kPa. Teken de cirkel van Mohr en bepaal uit de afbeelding de waarden van σ'_{xx}, σ'_{yy}, en τ'_{xy} bij de hoek ϕ = 35°.

Gebruik het programma PRNST als volgt om de voornaamste drukpunten te bepalen :

VAR PRNST	Activeert het programma PRNST
1 2 . 5 ▼	Voert σx = 12.5 in
6 . 2 5 +/- ▼	Voert σy = -6.25 in
5 +/- ENTER	Voert τxy = -5 in en beëindigt de gegevensinvoer.

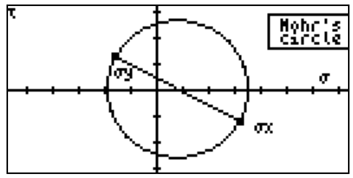
Het resultaat is:



Gebruik het programma MOHRC als volgt om de cirkel va Mohr te tekenen :

VAR MOHRC	Activeert het programma PRNST
1 2 . 5 ▼	Voert σx = 12.5 in
6 . 2 5 +/- ▼	Voert σy = -6.25 in
5 +/- ENTER	Voert τxy = -5 in en beëindigt de gegevensinvoer.

Het resultaat is:



Om de waarden de vinden van de drukpunten die corresponderen met een rotatie van 35° in de hoek van het partikel onder druk, gebruiken we:

ON ◄	Wist eht scherm, toont PICT in het grafische scherm
TRACE (X,Y).	Beweegt de cursor over de cirkel en toont ϕ en (x,y)

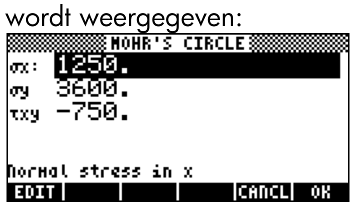
Druk daarna op ► totdat u ϕ = 35 ziet. De corresponderende coördinaten zijn (1.63E0, -1.05E1), d.w.z. voor ϕ = 35°, σ'_{xx} = 1.63 kPa en σ'_{yy} = -10.5kPa.

Een invoerscherm voor het programma van de cirkel van Mohr

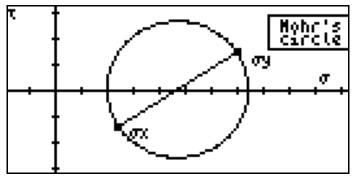
Voor een leukere manier om de gegevens in te voeren, kunnen we het subprogramma INDAT vervangen door het programma date en het invoerscherm aan te maken:

```
« "MOHR'S CIRCLE" { { "σx:" "Normal stress in x" 0 }
{ "σy:" "Normal stress in y" 0 } { "τxy:" "Shear stress"
0} }   { } { 1 1 1 } { 1 1 1 }  INFORM DROP »
```

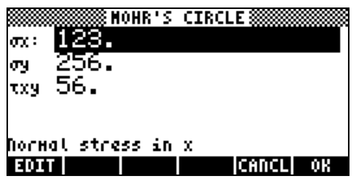
Met deze vervanging in het programma zal MOHRC een invoerscherm aanmaken zoals hierna wordt weergegeven:



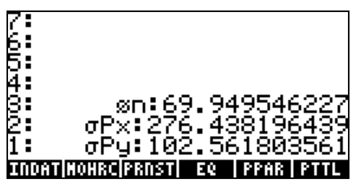
Druk op OK om het programma verder uit te voeren. Het resultaat is de volgende afbeelding:



Aangezien het programma INDAT ook wordt gebruikt voor het programma PRNST (PRiNcipal STresses), zal ook dit programma bij activering een invoerscherm gebruiken, bijvoorbeeld:



Het volgende resultaat wordt weergegeven, nadat u op OK hebt gedrukt:

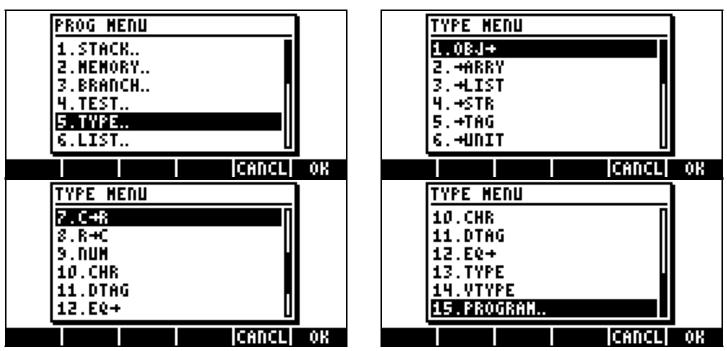


Hoofdstuk 23
Karakterstrings

Karakterstrings zijn rekenmachine-objecten ingesloten tussen dubbele aanhalingstekens. Ze worden door de rekenmachine behandeld als tekst. De string “SINE FUNCTION” bijvoorbeeld, kan worden omgevormd tot een GROB (Grafisch Object) om een grafiek van een label te voorzien, of de string kan worden gebruikt als uitvoer in een programma. Elke karakters reeks die wordt ingevoerd door de gebruiker als invoer in een programma, wordt beschouwd als string. Ook veel objecten bij programma-uitvoer zijn strings.

Functies met betrekking tot strings in het submenu TYPE

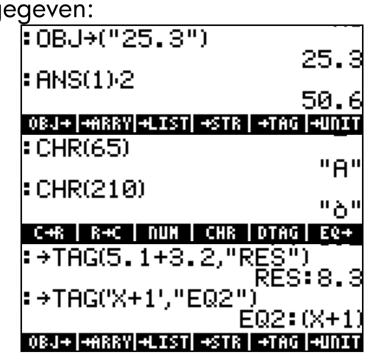
Het submenu TYPE is bereikbaar via het menu PRG (programmeren, d.w.z. ← PRG . De functies voorzien in het submenu TYPE worden tevens hieronder weergegeven.

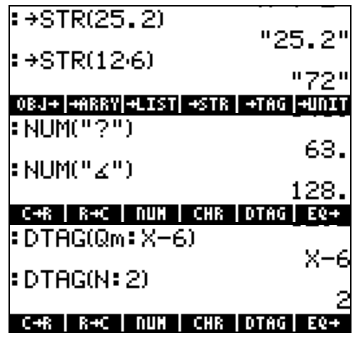


De volgende functies in het menu TYPE zijn nuttig voor het bewerken van strings:

OBJ→: Converteert de string naar het object dat het vertegenwoordigt
→STR: Converteert een object naar zijn stringweergave
→TAG: Identificeert een hoeveelheid
DTAG: Verwijdert de tag van een geïdentificeerde hoeveelheid (de-tagt)
CHR: Maakt een string aan van één karakter die overeenkomt met het

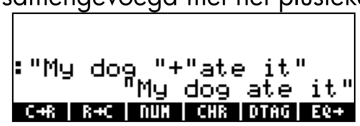
getal gebruikt als argument
NUM: Geeft de code voor het eerste karakter in een string
Voorbeelden van de toepassing van deze functies voor strings worden hierna weergegeven:





Samenvoegen van strings

Strings kunnen worden samengevoegd met het plusteken +, bijvoorbeeld:



Het samenvoegen van strings is een praktische manier om uitvoer te genereren in programma's. Door bijvoorbeeld het samenvoegen van "YOU ARE " AGE + "YEAR OLD" wordt de string "YOU ARE 25 YEAR OLD" aangemaakt, waarbij 25 wordt opgeslagen in de variabele AGE.

Het menu CHARS

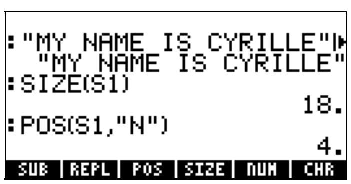
Het submenu CHARS is bereikbaar via het menu PRG (programmeren, d.w.z. ← PRG .

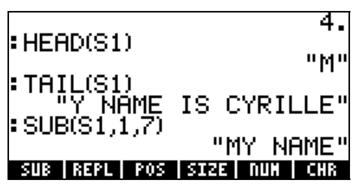
De functies voorzien in het submenu CHARS zijn de volgende:

De werking van NUM, CHR, OBJ→, en →STR is al eerder in dit hoofdstuk al behandeld. Ook de functies SUB en REPL met betrekking tot grafische afbeeldingen hebben we al eerder in dit hoofdstuk behandeld. De functies SUB, REPL, POS, SIZE, HEAD en TAIL hebben dezelfde uitwerking als in lijsten, namelijk:

SIZE: grootte van een substring in een string (spaties inbegrepen)
POS: positie waar een karakter voor het eerst in een string voorkomt
HEAD: extraheert het eerste karakter in een string
TAIL: verwijdert het eerste karakter in een string
SUB: extraheert een substring met een gegeven start- en eindpositie
REPL: vervangt karakters in een string door een substring beginnende op een gegeven positie
SREPL: vervangt een substring door een andere substring in een string

Probeer de volgende oefeningen om deze uitwerkingen in praktijk te zien: sla de string "MY NAME IS CYRILLE" op in variabele S1. We zullen deze string gebruiken om voorbeelden van deze functies in het menu CHARS weer te geven:





De lijst van karakters

De volledige verzameling van karakters aanwezig in de rekenmachine kan worden bereikt via de toetsen ↱ CHARS . Wanneer u een karakter markeert, bijv. het karakter voor een nieuwe regel ↵ , zult u links onder in het scherm de toetsencombinatie zien voor dergelijk karakter (↱. in dit geval) samen met de numerieke code behorende bij het karakter (10 in dit geval).

Niet-gedefinieerde karakters verschijnen als een donkere rechthoek in de lijst van karakters (▪) en geven (None) weer onder in het scherm, hoewel er een numerieke code bestaat voor alle karakters. Numerieke karakters tonen het bijbehorende getal onder in het scherm.

Letters tonen de code α (bijv. ALPHA) gevolgd door de bijbehorende letter, bijvoorbeeld wanneer u de letter M markeert, zult u αM afgebeeld zien links onder in in het scherm, wat het gebruik van ALPHA M aanduidt. Anderzijds toont m de toetsencombinatie α↰M, of ALPHA ↰ M .

Griekse karakters zoals σ, geven de code α↱S of ALPHA ↱ S weer. Aan sommige karakters, zoals ρ, is geen toetsencombinatie verbonden. Daarom kunnen dergelijke karakters alleen verkregen worden via de lijst van karakters, door het gewenste karakter te markeren en op ECHO1 of ECHO te drukken.

Gebruik ECHO1 om één karakter naar het stapelgeheugen te kopiëren en onmiddellijk terug te keren naar het normale beeldscherm. Gebruik ECHO om een karakterreeks s naar het stapelgeheugen te kopiëren. Gebruik de toets ON om terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine.

LRaadpleeg bijlage D voor meer informatie over het gebruik van speciale karakters. Appendix G toont tevens sneltoetsen voor speciale karakters.

Hoofdstuk 24
Objecten en vlaggen in de rekenmachine

Getallen, lijsten, vectoren, matrices, algebraïsche tekens, enz. zijn rekenmachine-objecten. Ze worden naargelang hun aard onderverdeeld in 30 verschillende types, die hieronder worden beschreven. Vlaggen zijn variabelen die kunnen worden gebruikt voor het instellen van de eigenschappen van de rekenmachine. Vlaggen werden behandeld in Hoofdstuk 2

Beschrijving van rekenmachine-objecten

De rekenmachine herkent de volgende types objecten:

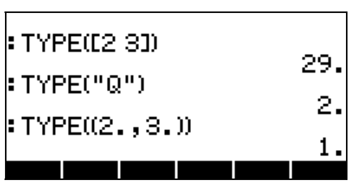
Nummer	Type	Voorbeeld
0	Reëel getal	-1.23E-5
1	Complex getal	(-1.2,2.3)
2	String	"Hello, world "
3	Reële array	[[1 2][3 4]]
4	Complexe array	[[(1 2) (3 4)] [(5 6) (7 8)]]
5	Lijst	{3 1 'PI'}
6	Globale naam	X
7	Lokale naam	y
8	Programma	<< → a 'a^2' >>
9	Algebraïsch object	'a^2+b^2'
10	Binair heel getal	# A2F1E h
11	Grafisch object	Graphic 131×64
12	Getagged object	R: 43.5
13	Object van eenheid	3_m^2/s
14	XLIB naam	XLIB 342 8
15	Directory	DIR Σ END
16	Bibliotheek	Library 1230"...
17	Backupobject	Backup MYDIR

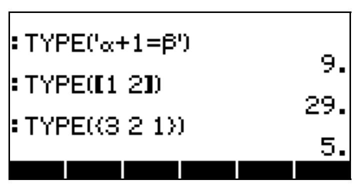
18	Ingebouwde functie	COS
19	Ingebouwd commando	CLEAR

Nummer	Type	Voorbeeld
21	Uitgebreid reëel getal	Long Real
22	Uitgebreid complex getal	Long Complex
23	Gekoppelde array	Linked Array
24	Karakterobject	Character
25	Code-object	Code
26	Bibliotheekgegevens	Library Data
27	Extern object	External
28	Heel getal	3423142
29	Extern object	External
30	Extern object	External

De functie TYPE

Deze functie, beschikbaar in het submenu PRG/TYPE () of via het commandocatalogus, wordt gebruikt om het type van een object te bepalen. Het argument van de functie is het betreffende object. De functie geeft het objecttype weer zoals aangeduid door de bovenstaande nummers.





De functie VTYPE

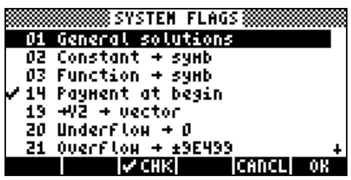
Deze functie werkt op dezelfde manier als de functie TYPE, maar heeft betrekking op een variabele naam en geeft het objecttype dat is opgeslagen in de variabele.

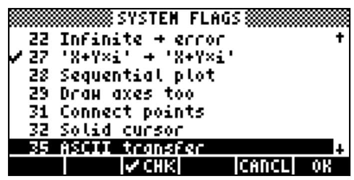
Vlaggen van de rekenmachine

Een vlag is een variable die al of niet ingesteld kan worden. De status van een vlag heeft invloed op het gedrag van de rekenmachine, als het een systeemvlag is, of van een programma als het een gebruikersvlag is. Ze worden hierna meer uitvoerig behandeld.

Systeemvlaggen

Systeemvlaggen kunnen worden geactiveerd met MODE FLAGS. Druk op de pijltoets naar beneden om een lijst van alle systeemvlaggen met hun nummer en een korte beschrijving te zien. De eerste twee schermen met systeemvlaggen ziet u hieronder:





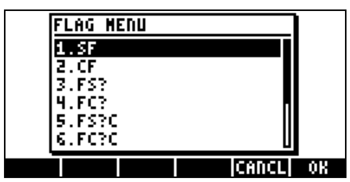
U zult vele van deze vlaggen herkennen omdat ze aan- of uitgezet worden in het menu MODES (bijvoorbeeld, vlag 95 in de Algebraïsche modus, 103 in de Complexe modus, enz.). In dit gebruikshandleiding hebben we het verschil benadruk tussen CHOOSE boxes (keuzevensters) en SOFT menus (softtoetsmenu's), die worden geselecteerd door systeemvlag 117 aan of uit te zetten. Een ander voorbeeld van het instellen van een systeemvlag is dat van de vlaggen 60 en 61 die betrekking hebben op de constantenbibliotheek (CONLIB, zie Hoofdstuk 3). Deze vlaggen werken als volgt:

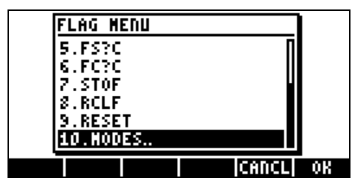
- systeemvlag 60: uitgeschakeld (standaard): SI-eenheden, ingeschakeld: ENGL-eenheden
- systeemvlag 61: uitgeschakeld (standaard): gebruik eenheden, ingeschakeld: alleen waarde

Functies om vlaggen in te stellen en te veranderen

Deze functies kunnen worden gebruikt om systeem- of gebruikersvlaggen in- of uit te schakelen of de status ervan te controleren. Wanneer ze samen worden gebruikt met deze functies worden systeemvlaggen aangeduid door getallen met negatieve hele getallen. Zo zal naar systeemvlag 117 worden verwezen als vlag -117. Anderzijds worden bij toepassing van deze functies gebruikersvlaggen aangeduid met positieve hele getallen. Het is belangrijk om te begrijpen dat gebruikersvlaggen enkel toepassing vinden bij het programmeren om de werking van het programma te helpen beheren. Functies voor het hanteren van vlaggen van de rekenmachine zijn beschikbaar in het menu PRG/MODES/FLAG. Het menu PRG wordt geactiveerd met ← PRG . De volgende beeldschermen (met systeemvlag 117 ingesteld op CHOOSE boxes) tonen de opeenvolging van schermen om bij het menu FLAG te komen:

De functies in het menu FLAG zijn de volgende:





De werking van deze functies is als volgt:

SF	Stelt een vlag in
CF	Verwijdert een vlag
FS?	Geeft waarde 1 indien de vlag is ingesteld, 0 indien niet ingesteld
FC?	Geeft waarde 1 indien de vlag verwijderd is (niet ingesteld), 0 indien wel ingesteld
FS?C	Test een vlag zoals FS doet en verwijdert deze daarna
FC?C	Test een vlag zoals FC doet en verwijdert deze daarna
STOF	Slaat de instellingen van nieuwe systeemvlaggen op.
RCLF	Roept bestaande instellingen van vlaggen opnieuw op
RESET	Stelt de huidige veldwaarden opnieuw in (kan gebruikt worden om

een vlag opnieuw in te stellen)

Gebruikersvlaggen

Voor programmeerdoeleinden zijn de vlaggen 1 tot 256 beschikbaar voor de gebruiker.
Zij hebben geen betekenis voor de werking van de rekenmachine.

Hoofdstuk 25
De functies Date en Time

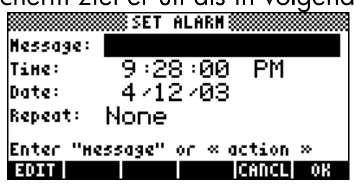
In dit hoofdstuk demonstreren we enkele van de functies en bewerkingen die gebruik maken van tijden en data.

Het menu TIME

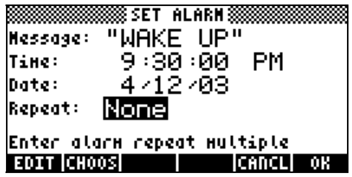
Het menu TIME, beschikbaar via de toetsencombinatie ↱ TIME (de toets 9) bevat de volgende functies, die hierna worden beschreven:

Een alarm instellen

Optie *2. Set alarm..* geeft een invoerscherm voor de gebruiker om een alarm in te stellen. Het invoerscherm ziet er uit als in volgende afbeelding:



In het invoerveld Message: kunt u een karakterstring invoeren die het alarm benoemt. In het veld Time: kunt u de tijd invoeren waarop het alarm wordt geactiveerd. Het veld Date: wordt gebruikt voor het invoeren van een datum voor het alarm (of voor wanneer het de eerste keer wordt geactiveerd, indien een herhaling is vereist. U zou bijvoorbeeld het volgende alarm kunnen zien. De linkerafbeelding toont het alarm zonder herhaling. De rechterafbeelding toont de opties voor herhaling, na een druk op CHOOS. Nadat op OK is gedrukt, wordt het alarm ingesteld.



Bladeren door alarms

Met optie *1. Browse alarms…* in het menu TIME kunt u uw huidige alarmen bekijken. Deze optie geeft het volgende beeldscherm na het invoeren van het alarm in het bovenstaande voorbeeld:

Dit scherm bevat vier labels van softmenutoetsen:

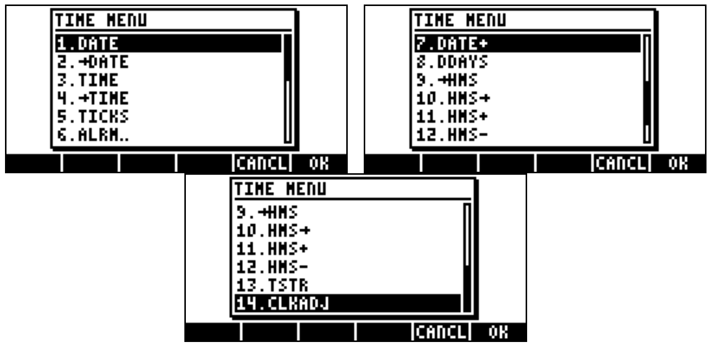
EDIT: Om het geselecteerde alarm te bewerken, met een invoerscherm om het alarm in te stellen
NEW: Om een nieuw alarm te programmeren
PURG Om een alarm te verwijderen
OK: Om terug te keren naar het normale beeldscherm.

Tijd en datum instellen

Optie *3. Set time, date…* biedt het volgende invoerscherm waarmee de gebruiker de huidige tijd en datum kan instellen. Raadpleeg Hoofdstuk 1 voor meer informatie.

TIME Tools

Optie *4. Tools…* biedt een aantal handige functies voor de werking van de klok en voor berekeningen met tijden en data. De volgende afbeelding toont de beschikbare functies in het menu TIME Tools:

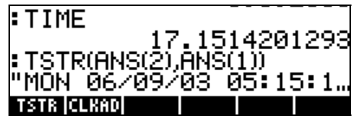


De toepassing van deze functies wordt hieronder aangetoond.

DATE: Plaatst de huidige tijd in het stapelgeheugen
→DATE: Stelt de systeemdatum in op een bepaalde waarde
TIME: Plaatst de huidige tijd in de 24-uur UU.MM.SS-notatie
→TIME: Stelt de systeemtijd in op een bepaalde waarde in de 24-uur UU.MM.SS-notatie
TICKS: Geeft de systeemtijd weer als een binair heel getal in de eenheid van kloktikken waarbij 1 tik = 1/8192 sec
ALRM..: Submenu met functies voor het instellen van het alarm (wordt later beschreven)
DATE+: Telt een aantal dagen bij een datum op, of trekt ze ervan af
DDAYS(x,y): Geeft het aantal dagen weer tussen data x en y
→HMS: Zet de tijd om van decimaal naar UU.MM.SS
HMS→: Zet de tijd om van UU.MM.SS naar decimaal
HMS+: Telt twee tijden in UU.MM.SS-notatie bij elkaar op
HMS-: Trekt twee datums in UU.MM.SS-notatie van elkaar af
TSTR(time, date): Zet tijd, datum om in stringnotatie
CLKADJ(x): Telt x tikken op bij de systeemtijd (1 tik = 1/8192 sec)

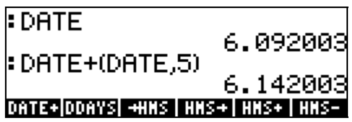
De functies →DATE, →TIME, CLKADJ worden gebruikt om de datum en tijd aan te passen. Hier worden geen voorbeelden van deze functies gegeven.

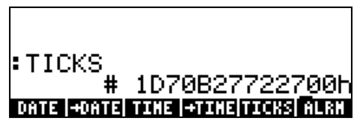
Hier zijn voorbeelden van de functies DATE, TIME en TSTR



Berekeningen met datums

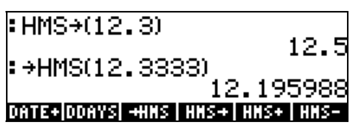
Gebruik de functies DATE+, DDAYS voor berekeningen met datums. Hier is een voorbeeld van de toepassing van deze functies, samen met een voorbeeld van de functie TICKS:

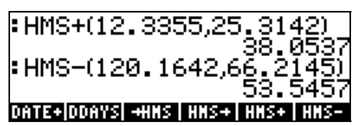




Berekeningen met tijden

De functies →HMS, HMS→, HMS+ en HMS- worden gebruik om waarden in de UU.MM.SS-notatie te bewerken. Dit is dezelfde notatie die wordt gebruikt voor het berekenen van hoekmetingen in graden, minuten en seconden. Dus zijn deze bewerkingen niet alleen nuttig voor berekeningen met tijd, maar ook voor hoekberekeningen.
Voorbeelden vindt u hierna:





Alarmfuncties

Het submenu TIME/Tools…/ALRM… biedt de volgende functies:

De werking van deze functies vindt u hierna:

ACK: Bevestigt een verlopen alarm
ACKALL: Bevestigt alle verlopen alarms
STOALARM(x): Slaat alarm (x) op in de alarmlijst van het systeem
RCLALARM(x): Roept het gegeven alarm (x) op uit de alarmlijst van het systeem
DELALARM(x): Verwijdert alarm x uit de alarmlijst van het systeem
FINDALARM(x): Geeft het eerste alarm weer dat na een gegeven tijd komt

Het argument x in de functie STOALARM is een lijst met een datumverwijzing (mm.dd.jj), de tijd van de dag in 24 uur-notatie (uu.mm), een string met de tekst van het alarm en het aantal herhalingen van het alarm. Bijvoorbeeld, `STOALARM({6.092003,18.25,"Test",0}`. Het argument x in alle andere alarmfuncties is een positief getal dat het getal weergeeft van het alarm dat opnieuw moet worden opgeroepen, verwijderd of gevonden.

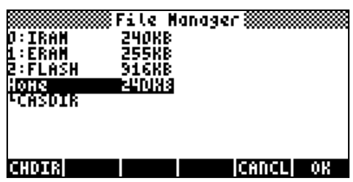
Aangezien het bewerken van alarms gemakkelijk kan worden uitgevoerd met het menu TIME (zie hierboven), zullen de functies met betrekking tot alarmen in deze paragraaf waarschijnlijk vaker gebruikt worden bij het programmeren.

Hoofdstuk 26
Geheugen beheren

In Hoofdstuk 2 van de gebruikshandleiding laten we de basisconcepten en bewerkingen zien voor het aanmaken en beheren van variabelen en directory's. In dit hoofdstuk wordt het beheer behandeld van het geheugen van de rekenmachine met betrekking tot geheugenpartities en technieken om een back-up van de gegevens te maken.

Structuur van het geheugen

De rekenmachine bevat een geheugen van in totaal 2,5 Mb, waarvan 1 Mb wordt gebruikt voor het opslaan van het besturingssysteem (systeemgeheugen) en 1,5 Mb voor de werking van de rekenmachine en de opslag van gegevens (gebruikersgeheugen). Gebruikers hebben geen toegang tot de systeemgeheugencomponent. Om te zien hoe het gebruikersgeheugen is opgedeeld, gebruikt u de functie FILES (FILES). Een mogelijk resultaat wordt hieronder weergegeven:



Dit scherm geeft aan dat er drie geheugenpoorten zijn naast het geheugen dat correspondeert met de HOME directory (zie Hoofdstuk 2 in het gebruikshandleiding).
De beschikbare geheugenpoorten zijn:

- Poort 0 met het label IRAM
- Poort 1 met het label ERAM
- Poort 2 met het label FLASH

Poort 0 en de HOME directory delen hetzelfde geheugengebied, zodat er, hoe meer gegevens zijn opgeslagen in de HOME directory, des te minder plaats is voor de opslag van gegevens op poort 0. De totale grootte van het geheugengebied voor Poort 0/HOME directory bedraagt 241 Kb.

Poort 1 (ERAM) kan tot 255 Kb aan gegevens bevatten. Poort 1 vormt, samen met poort 0 en de HOME directory het RAM (Random Access Memory)segment van het geheugen van de rekenmachine. Het RAM geheugensegment heeft ononderbroken elektrische stroom van de batterijen van de rekenmachine nodig om te werken. Om verlies van de inhoud van het RAM-geheugen te vermijden, is een CR2032 reservebatterij inbegrepen. Zie de aanvullende gegevens aan het eind van dit hoofdstuk.

Poort 2 behoort toe aan het Flash ROM geheugensegment van de rekenmachine, dat geen elektrische stroom nodig heeft. Daarom zal het verwijderen van de batterijen van de rekenmachine geen invloed hebben op het Flash ROM segment van de rekenmachine. Poort 2 kan tot 1085 Kb aan gegevens opslaan.

De HOME directory

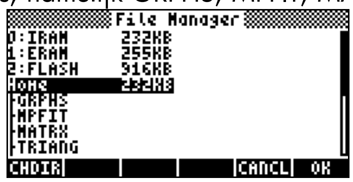
Wanneer u de rekenmachine gebruikt, zult u waarschijnlijk variabelen aanmaken om tussentijdse en uiteindelijke resultaten op te slaan. Sommige bewerkingen van de rekenmachine, zoals grafische of statistische bewerkingen maken hun eigen variabelen aan om gegevens op te slaan. Deze variabelen zullen worden bijgehouden in de HOME directory of één van de directory's. Informatie over het behandelen van variabelen en directory's vindt u in Hoofdstuk 2 van de gebruikshandleiding.

Poortgeheugen

In tegenstelling tot de HOME directory kan het poortgeheugen niet worden onderverdeeld in directory's en kan het enkel back-upobjecten of bibliotheekobjecten bevatten. Deze object typen worden hieronder beschreven.

Objecten in het geheugen controleren

Om de objecten die in het geheugen zijn opgeslagen te zien, kunt u de functie FILES (← FILES) gebruiken. Het scherm toont de HOME directory met tenminste vier directory's, namelijk GRPHS, MPFIT, MATRIX en TRIANG.



De overige directory's kunnen worden bekeken door de cursor naar beneden te bewegen in de hiërarchie van directory's. Of u kunt de cursor naar boven bewegen om een geheugenpoort te kiezen. Wanneer een gegeven directory, subdirectory of poort geselecteerd is, druk dan op OK om de inhoud van geselecteerde object te zien.
Een andere manier om toegang te krijgen tot het poortgeheugen is met het menu LIB ((→ LIB , behorende bij de toets 2). Deze handeling geeft het volgend scherm:

Indien een bibliotheek actief is in uw rekenmachine wordt dat in dit scherm weergegeven. Eén zo'n bibliotheek is de bibliotheek HP49D (demo), weergegeven in bovenstaand scherm. Door op de bijbehorende softmenutoets (F1) te drukken, wordt deze bibliotheek geactiveerd. Door op de softmenutoetsen van de poort te drukken, zal deze geheugenpoort geopend worden. Verdere informatie over bibliotheken wordt hieronder gegeven.

Back-upobjecten

Back-upobjecten worden gebruikt om gegevens te kopiëren van uw home directory naar een geheugenpoort. Het doel van het maken van back-upobjecten in een geheugenpoort is om de inhoud van de objecten te bewaren voor toekomstig gebruik. Back-upobjecten hebben de volgende karakteristieken:

- Back-upobjecten kunnen alleen voorkomen in het poortgeheugen (d.w.z. u kunt geen back-up maken van een object in de HOME directory, hoewel u er wel zoveel kopieën van kunt maken als u wilt)
- U kunt de inhoud van een back-upobject niet wijzigen (u kunt het daarentegen wel terug kopiëren naar een directory in de HOME directory, het object daar wijzigen en een back-up maken van de gewijzigde versie)
- U kunt zowel één enkel object als een hele directory opslaan als back-upobject. U kunt echter niet een back-upobject aanmaken uit een aantal geselecteerde objecten in een directory.

Wanneer u een back-up object aanmaakt in het poortgeheugen, krijgt de rekenmachine een *cyclic redundancy check* (CRC - cyclische redundantiecontrole) of *checksum* waarde (controlesom) gebaseerd op de binaire gegevens in het object. Deze waarde wordt opgeslagen samen met het back-upobject en wordt gebruikt door de rekenmachine om de integriteit van het back-upobject te volgen. Wanneer u een back-upobject terugzet in de HOME directory, krijgt de rekenmachine opnieuw de CRC-waarde en vergelijkt die met de originele waarde. Wanneer een verschil wordt opgemerkt, waarschuwt de rekenmachine de gebruiker dat de teruggezette gegevens misschien onjuist zijn.

Een back-up maken van objecten in het poortgeheugen

De procedure om een back-up te maken van een object van het gebruikersgeheugen naar één van de geheugenpoorten is gelijk aan de procedure om een variabele van de ene subdirectory naar een andere te kopiëren (zie Hoofdstuk 2 van de gebruikshandleiding). U kunt bijvoorbeeld de File Manager (↰ FILES) gebruiken om back-upobjecten te kopiëren en te verwijderen, net zoals u met gewone objecten van de rekenmachine zou doen. Aanvullend zijn er specifieke commando's om back-upobjecten te bewerken, zoals hierna wordt beschreven.

Een back-up maken van de HOME directory en terugzetten

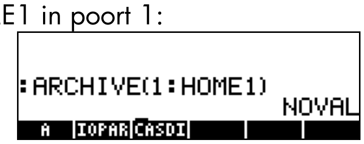
U kunt een back-up maken van de inhoud van de huidige HOME directory in één enkel back-upobject. Dit object zal alle variabelen, toetstoewijzingen en alarmen bevatten die momenteel in de HOME directory zijn gedefinieerd. U kunt de inhoud van uw HOME directory ook terugzetten vanuit een back-upobject dat u eerder heeft opgeslagen in het poortgeheugen. De instructies voor deze bewerkingen worden verderop behandeld.

Een back-up maken van de HOME directory

Om een back-up te maken van de huidige HOME directory met de algebraïsche modus, voert u dit commando in:

ARCHIVE(:Port_Number: Backup_Name)

Hier is het Port_Number 0, 1, 2 (of 3, als er een SD-geheugenkaart aanwezig is – zie hieronder) en de Back-p_Name is de naam van het back-upobject met de inhoud van HOME. De containers : : worden ingevoerd met de toetsencombinatie ↰ :: . Gebruik om bijvoorbeeld een back-up te maken van HOME naar HOME1 in poort 1:



Gebruik het volgende commando om een back-up te maken van de HOME directory in de RPN-modus:

: Port_Number : Backup_Name ENTER ARCHIVE

De HOME directory terugzetten

Gebruik om de HOME directory terug te zetten in de algebraïsche modus het commando:

RESTORE(: Port_Number : Backup_Name)

Gebruik bijvoorbeeld om de HOME directory terug te zetten vanuit het back-upobject HOME1: RESTORE(:1:HOME1)

In de RPN-modus gebruikt u:

: Port_Number : Backup_Name ENTER RESTORE

Opmerking: Wanneer u de back-up van een HOME directory terugzet gebeuren er twee dingen:

- De back-up directory overschrijft de huidige HOME directory. Alle gegevens waarvan geen back-up is gemaakt in de huidige HOME directory zullen verloren gaan.
- De rekenmachine start opnieuw op. De inhoud van de geschiedenis of het stapelgeheugen gaat verloren.

Opslaan, verwijderen en terugzetten van back-upobjecten

Gebruik één van de volgende methodes om een back-up object aan te maken:

- Gebruik de File Manager (← FILES) om het object naar de poort te kopiëren. Als u deze methode gebruikt, zal het back-upobject dezelfde naam hebben als het originele object.
- Gebruik het commando STO om het object naar een poort te kopiëren. Zo gebruikt u bijvoorbeeld in de algebraïsche modus de volgende toetsencombinatie om een back-up te maken van variabele A naar een back-upobject met de naam AA in poort 1:

  STO▶ ← :: / ▶ ALPHA A ALPHA A ENTER
- Gebruik het commando ARCHIVE om een back-up van de HOME directory te maken (zie hierboven).

Een back-upobject uit een poort verwijderen:

- Gebruik de File Manager (← FILES) om het object te verwijderen, net zoals u zou doen met een variabele in de HOME directory (zie Hoofdstuk 2 van de gebruikshandleidingboek).
- Gebruik het commando PURGE als volgt:

  In de algebraïsche modus: PURGE(: Port_Number : Backup_Name)

  In de RPN-modus: : Port_Number : Backup_Name PURGE

Een back-upobject terugzetten:

- Gebruik de File Manager (← FILES) om het back-upobject te kopiëren van het poortgeheugen naar de HOME directory.
- Wanneer een back-upobject wordt teruggezet, voert de rekenmachine een integriteitscontrole uit op het teruggezette object door de CRC-waarde te

berekenen. Elk verschil tussen de berekende en de opgeslagen CRC-waarden resulteert in een foutmelding die wijst op de onjuiste gegevens.

Gegevens gebruiken in back-upobjecten

Hoewel u de inhoud van back-upobjecten niet rechtstreeks kunt wijzigen, kunt u die inhoud wel gebruiken bij bewerkingen met de rekenmachine. U kunt bijvoorbeeld programma's uitvoeren die zijn opgeslagen als back-upobject of u kunt gegevens uit back-upobjecten gebruiken om programma's uit te voeren. Om programma's uit back-upobjecten uit te voeren of gegevens uit back-upobjecten te gebruiken, kunt u de File Manager gebruiken (← FILES) om de inhoud uit een back-upobject te kopiëren naar het scherm. Anderzijds kunt u de functie EVAL gebruiken om een programma uit te voeren dat is opgeslagen in een back-upobject, of de functie RCL gebruiken om gegevens uit een back-upobject opnieuw op te roepen:

- In de algebraïsche modus:
  - Voer om een back-upobject te evalueren het volgendein:
    EVAL(argument(en), : Port_Number : Backup_Name)
  - Voer om een back-upobject opnieuw op te roepen naar de commandoregel het volgende in:
    RCL(: Port_Number : Backup_Name)

- In de RPN-modus:
  - Voer om een back-upobject te evalueren het volgendein:
    Argument(en) ENTER : Port_Number : Backup_Name EVAL
  - Voer om een back-upobject opnieuw op te roepen naar de commandoregel het volgendein:
    : Port_Number : Backup_Name ENTER RCL

SD-kaarten gebruiken

De rekenmachine bezit een geheugenkaartpoort waar u een SD flash kaart kunt invoeren om een back-up te maken van objecten van de rekenmachine of om objecten van andere bronnen te downloaden. De SD-kaart in de rekenmachine zal verschijnen als poort nummer 3.

Toegang krijgen tot een object op de SD-kaart wordt op gelijke manier uitgevoerd als wanneer het object in poorten 0, 1 of 2 staat. Echter, poort 3 zal niet verschijnen in het menu als u de functie LIB (↱ LIB) gebruikt. De SD-bestanden kunnen enkel worden beheerd met de Filer of File Manager (↰ FILES) te gebruiken. Als u de Filer activeert, zal de hiërarchie het volgende tonen:

```
0: IRAM
1: ERAM
2: FLASH
3: SD
HOME
|-- sub-directories
```

Wanneer u iets invoert in de SD-boom, zullen alle objecten verschijnen als back-upobjecten. Daarom is het niet mogelijk om te zeggen uit wat voor type een gegevenobject bestaat door enkel te kijken naar zijn naam in de Filer. Lange namen worden niet ondersteund in de Filer. Dus moeten alle namen in de notatie 8.3 karakters zijn, net als in DOS, d.w.z. namen hebben een maximaal 8 karakters met 3 karakters in het achtervoegsel.

Als een alternatief op het gebruik van de File Manager kunt u de functies STO en RCL gebruiken om objecten op te slaan en weer op te roepen vanaf de SD-kaart, zoals hieronder getoond wordt. U kunt ook het commando PURGE gebruiken om back-upobjecten te wissen van de SD-kaart. Met deze commando's (namelijk STO, RCL en PURGE) kunnen lange bestandsnamen worden gebruikt.

Objecten opslaan op de SD-kaart

U kunt enkel een object opstaan in de rootdirectory van de SD-kaart, d.w.z. er kunnen geen subdirectory's worden opgebouwd in poort 3. (Deze functie zal misschien worden bijgewerkt in een volgende upgrade van de flash ROM). Gebruik Functie STO als volgt om een object op te slaan:

- In de algebraïsche modus:

Voer object in, druk op STO▶, voer de naam in van het opgeslagen object dat poort 3 gebruikt (bijv., :3:VAR1), druk op ENTER.

- In de RPN-modus:
  Voer het object in, voer de naam in van het opgeslagen object dat poort 3 gebruikt (b.v., :3:VAR1), druk op STO▶.

Een object opnieuw oproepen vanaf de SD-kaart

Gebruik de functie RCL als volgt om een object vanaf de SD-kaart opnieuw op te roepen in het scherm:

- In de algebraïsche modus:
  Druk op ← RCL, voer de naam in van het opgeslagen object dat poort 3 gebruikt (bijv., :3:VAR1), druk op ENTER.
- In de RPN-modus:
  Voer de naam in van het opgeslagen object dat poort 3 gebruikt (bijv., :3:VAR1), druk op ← RCL.

Met het commando RCL kunt u variabelen opnieuw oproepen door een pad te specifiëren in het commando, bijv., in de RPN modus: :3: {path} ENTER RCL. Het pad, zoals in een DOS-station, is een reeks van directorynamen die de locatie van een variabele binnen een directory aangeeft. Echter, sommige variabelen die zijn opgeslagen in een back-upobject kunnen niet opnieuw worden opgeroepen door een pad te specifiëren. In dat geval moet het volledige back-upobject (bijv. een directory) opnieuw worden opgeroepen en moeten de individuele variabelen worden geopend in het scherm.

Een object wissen van de SD-kaart

Gebruik de functie PURGE als volgt om een object van de SD-kaart te halen:

- In de algebraïsche modus:
  Druk op TOOL PURGE, voer de naam van het opgeslagen object dat poort 3 gebruikt (bijv., :3:VAR1), druk op ENTER.
- In de RPN-modus:
  Voer de naam van het opgeslagen object dat poort 3 gebruikt (bijv., :3:VAR1), druk op TOOL PURGE.

Bibliotheken gebruiken

Bibliotheken zijn programma's in binaire taal, gemaakt door de gebruiker, die in de rekenmachine kunnen worden geladen en beschikbaar worden gesteld voor gebruik in elke subdirectory van de HOME directory. Bibliotheken kunnen in de rekenmachine worden gedownload als een gewone variabele en daarna worden geïnstalleerd in en gekoppeld aan de HOME directory.

Een bibliotheek installeren en koppelen

Om een bibliotheek te installeren, geeft u de inhoud van de bibliotheek weer in het stapelgeheugen (gebruik de variabele softmenutoets ↱ of de functie RCL) en sla die op in poort 0 of 1. Gebruik om bijvoorbeeld een bibliotheekvariabele in een poort te installeren:

- In de algebraïsche modus: STO(library_variable, port_number)
- In de RPN-modus: library_variabele ENTER port_number STO▶

Nadat u de inhoud van de bibliotheek in het poortgeheugen hebt geïnstalleerd, moet u de bibliotheek koppelen aan de HOME directory. Dit kan gebeuren door de rekenmachine opnieuw op te starten (de rekenmachine uit- en weer aanzetten, of door gelijktijdig op ON F3 te drukken. Nu moet de bibliotheek beschikbaar zijn voor gebruik. Om het menu bibliotheekactivatie te zien, gebruikt u het menu LIB (↱ LIB). De naam van de bibliotheek staat in het menu.

Bibliotheekgetallen

Als u het menu LIB (↱ LIB) gebruikt en de softmenutoets indrukt die overeenkomt met poort 0 of 1, zult u de bibliotheeknummers zien in de softmenutoetsenlabels. Elke bibliotheek heeft een eigen getal van vier cijfers. De nummers worden toegekend door de maker van de bibliotheek en worden gebruikt voor het verwijderen van een bibliotheek.

Een bibliotheek verwijderen

Gebruik om een bibliotheek uit een poort te verwijderen:

- In de algebraïsche modus: PURGE(:port_number: lib_number)

- In de RPN-modus: : port_nubmer : lib_number PURGE

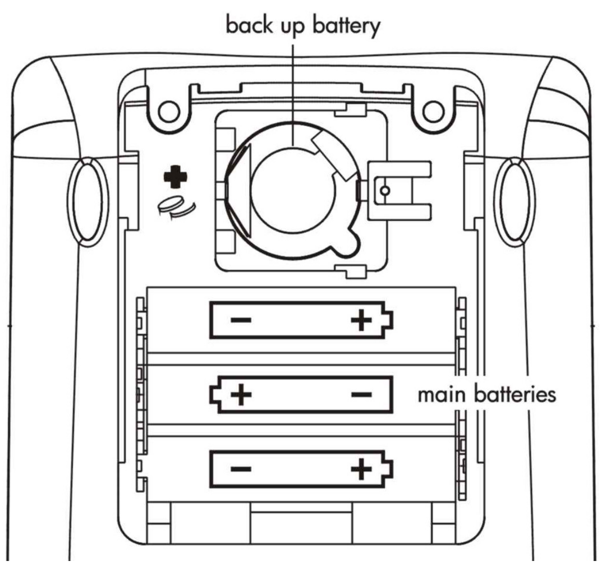
Waarbij lib_nummer staat voor het hierboven beschreven bibliotheeknummer.

Bibliotheken maken

Een bibliotheek kan worden geschreven in de Assembler-taal, in RPL-syteemtaal of met een matrix-aanmakende bibliotheek zoals LBMKR. Dit laatste programma is online beschikbaar (zie bijvoorbeeld http://www.hpcalc.org). Informatie over het programmeren van de rekenmachine in Assembler-taal of in RPL-systeemtaal vallen buiten de opzet van dit document. De gebruiker kan on-line de informatie over dit onderwerp zoeken.

Reservebatterij

Een CR2032 reservebatterij is voorzien in de rekenmachine om reservestroom te voorzien voor het vluchtige geheugen tijdens het verwisselen van de hoofdbatterijen. Het wordt aanbevolen deze batterij om de 5 jaar te vervangen. Een melding in het scherm zal aangeven wanneer de batterij aan vervanging toe is. Het onderstaande diagram geeft de plaats weer van de reservebatterij in het bovenste gedeelte aan de achterzijde van de rekenmachine.



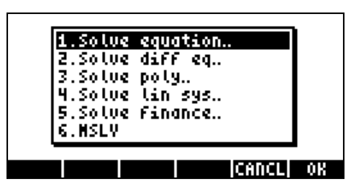
Bijlage A
Werken met invoerschermen

Dit voorbeeld van het instellen van de tijd en de datum illustreert het gebruik van invoerschermen in de rekenmachine. Enkele algemene regels:

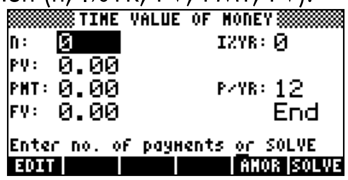
- Gebruik de pijltoetsen (◀ ▶ ▼ ▲) om in het invoerscherm van veld naar het veld te bewegen.
- Gebruik de softmenutoets CHOOS om de mogelijkheden te bekijken die er zijn voor een willekeurig veld in het invoerscherm.
- Gebruik de pijltoetsen (◀ ▶ ▼ ▲) om de gewenste optie voor een bepaald veld te selecteren en druk op de softmenutoets OK (F6) om de selectie te maken.
- In sommige gevallen moet een vinkje geplaatst worden om een optie in een invoerscherm te selecteren. Gebruik in dergelijke gevallen de softmenutoets ✓CHK om het vinkje te plaatsen en te verwijderen.
- Druk op de softmenutoets CANCL om een invoerscherm te sluiten en terug te keren naar het beeldscherm van het stapelgeheugen. U kunt ook op de toets ENTER of ON drukken om het invoerscherm te sluiten.

Voorbeeld – invoerschermen gebruiken in het menu NUM.SLV

Voordat we deze regels uitvoerig behandelen, zullen we enkele van de karakteristieken van de invoerschermen laten zien door het gebruik van invoerschermen van de toepassing voor financiële berekeningen in de numerieke solver. Activeer de numerieke solver met ↱ NUM.SLV (behorende bij de toets 7). Nu verschijnt een keuzevenster in het scherm met de volgende opties:



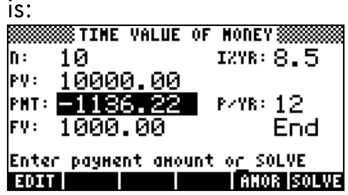
Om te beginnen met financiele berekeningen gebruikt u de pijltoets omlaag (▽) om item *5. Solve finance* te selecteren. Druk op OK om de toepassing te activeren. Het resulterende scherm is een invoerscherm met invoervelden voor een aantal variabelen (n, I%YR, PV, PMT, FV).



In dit geval kunnen we waarden geven aan alle variabelen op een na, bijv. n = 10, I%YR = 8.5, PV = 10000, FV = 1000 en variabele PMT oplossen (de betekenis van deze variabelen zal later worden uitgelegd). Probeer het volgende:

10 OK	Voert n = 10 in.
8.5 OK	Voert I%YR = 8.5 in.
10000 OK	Voert PV = 10000 in.
▽ 1000 OK	Voert FV = 1000 in.
△ ◁ SOLVE	Selecteert en lost op voor PMT.

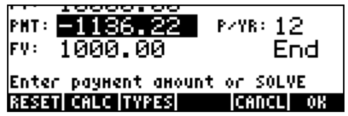
Het resulterende scherm is:



In dit invoerscherm zult u de volgende softmenutoetslabels zien staan:

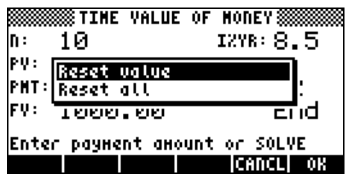
EDIT Voor het bewerken van het gemarkeerde veld .
AMOR Menu Amortization – optie specifiek voor deze toepassing.
SOLVE Voor het oplossen van het gemarkeerde veld

Door op NXT te drukken, verschijnen de volgende softmenutoetslabels:

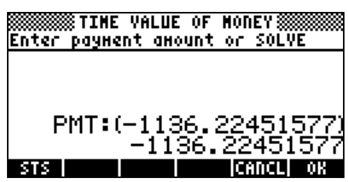


RESET Voor het terugzetten van de velden op de standaardwaarden.
CALC Voor het activeren van het stapelgeheugen voor berekeningen
TYPES Voor het bepalen van het objecttype in het gemarkeerde veld
CANCL Voor het annuleren van de bewerking
OK Voor het accepteren van de invoer

Als u op RESET drukt, zult u gevraagd worden om tussen de twee opties te kiezen:

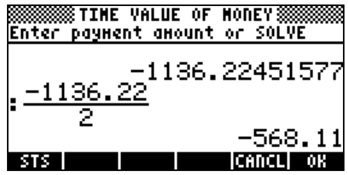


Als u *Reset value* selecteert, zal alleen de gemarkeerde waarden worden worden teruggezet op de standaardwaarden. Als u echter *Rest all*, selecteert, zullen alle velden teruggezet worden op hun standaardwaarden (standaard 0). Op dit punt kunt u uw keuze accepteren (druk op OK) of de handeling annuleren (druk op CANCL). Druk in dit geval op CANCL. Druk op CALC om het stapelgeheugen te activeren. Het resulterende scherm is het volgende:

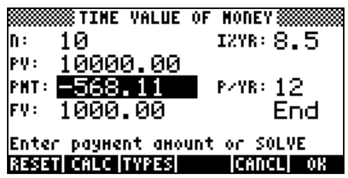


Nu kunt u in het stapelgeheugen werken en de waarde verschijnt die het laatste gemarkeerd werd in het invoerscherm. Stel dat u deze waarde wilt halveren. Het volgende scherm verschijnt in de ALG-modus nadat u het volgende heeft ingevoerd.

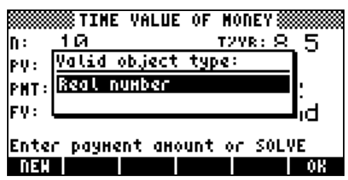
1136.22/2:



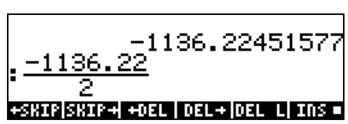
(In de RPN-modus zouden we 1136.22 ENTER 2 ENTER ÷ hebben ingevoerd.) Druk op OK om de nieuwe waarde in te voeren. Het invoerscherm zal er nu als volgt uitzien:



Druk op TYPES om het gegevenstype in het PMT-veld te bekijken (het gemarkeerde veld). Als gevolg hiervan krijgt u de volgende specificatie:



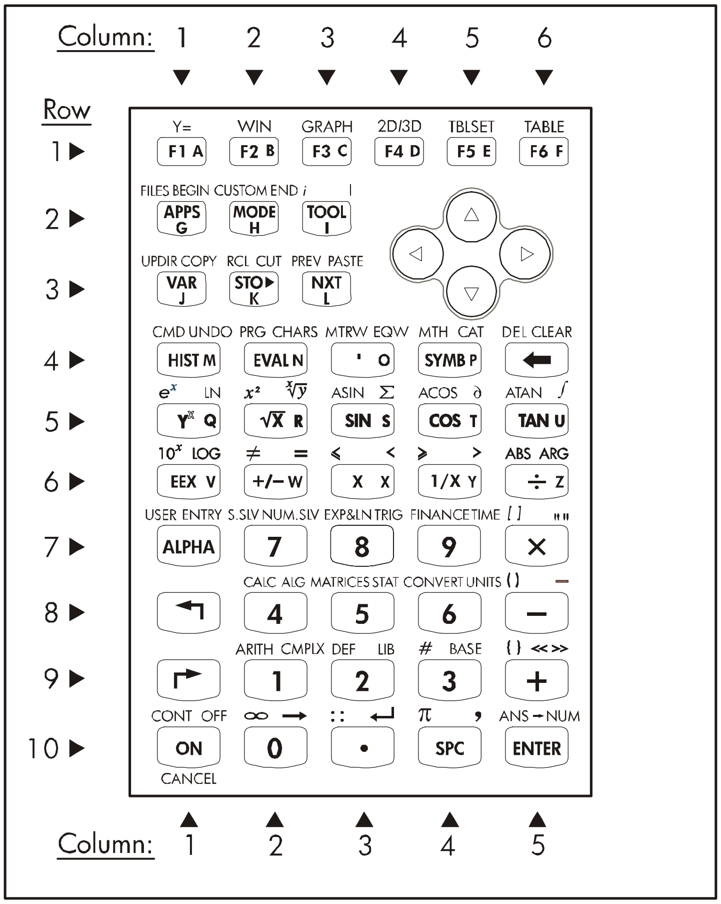
Dit geeft aan dat de waarde in het PMT-veld een reëel getal moet zijn. Druk op OK om terug te keren naar het invoerscherm en druk op L om het eerste menu te herstellen. Vervolgens drukt u op de toets ENTER of ON om naar het stapelgeheugen terug te keren. In dit geval zullen de volgende waarden worden weergegeven:



Het bovenste resultaat is de waarde die werd opgelost voor PMT in het eerste deel van de oefening. De tweede waarde is de berekening die we maakten om de waarde van PMT opnieuw te definieren.

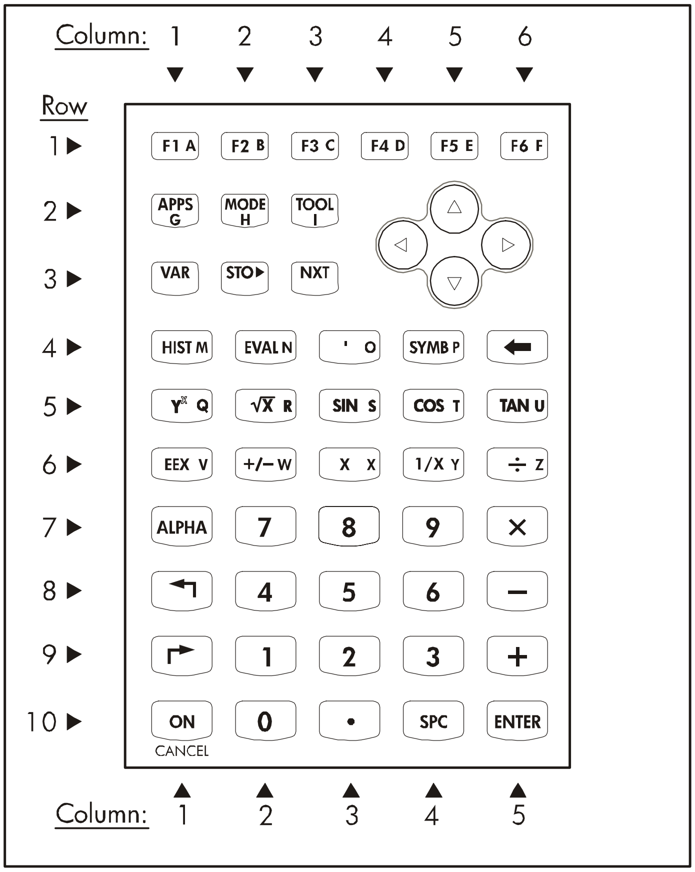
Bijlage B
Het toetsenbord van de rekenmachine

De onderstaande afbeelding toont een diagram van het toetsenbord van de rekenmachine met de nummering van de rijen en kolommen.



De afbeelding toont 10 rijen met toetsen samen met 3, 5 of 6 kolommen. Rij 1 heeft 6 toetsen, de rijen 2 en 3 hebben elk 3 toetsen en de rijen 4 tot en met 10 hebben elk 5 toetsen. Er zijn 4 pijltoetsen die zich bevinden aan de rechterkant van het toetsenbord in rij 2 en 3 – Elke toets heeft drie, vier of vijf functies. De functies van de hoofdtoetsen staan in de onderstaande afbeelding.

Om met de functies van de hoofdtoetsen te werken, drukt u gewoon op de bijbehorende toets. We verwijzen naar de toetsen per rij en kolom waar deze zich in het bovenstaande diagram bevinden, dus: *toets (10,1)* is de toets *ON*.



De functies van de hoofdtoetsen op het toetsenbord van de rekenmachine

Functies van de hoofdtoetsen

De toetsen F1 tot en met F6 zijn verbonden met de opties in het softmenu die onder in het beeldscherm van de rekenmachine worden weergegeven. Deze toetsen zullen een verscheidenheid aan functies activeren die veranderen volgens het actieve menu.

- De pijltoetsen, ▲▼◀▶, worden gebruikt om één teken per keer in de richting van de ingedrukte toets te gaan (omhoog, omlaag, naar links of naar rechts).
- De functie *APPS* activeert het toepassingenmenu.
- De functie *MODE* activeert het modimenu van de rekenmachine.
- De functie *TOOL* activeert een menu met hulpmiddelen die handig zijn voor het werken met variabelen en het verkrijgen van hulp op de rekenmachine. ▪De functie *VAR* toont de variabelen die in de actieve directory zijn opgeslagen, de functie *STO* wordt gebruikt om inhoud in variabelen op te slaan.
- De functie *NXT* wordt gebruikt om extra softmenu-opties of variabelen in een directory te zien.
- De functie *HIST* stelt u in staat de historie van de algebraïsche modus te bekijken, d.w.z. de meest recente opdrachtinvoeren in die modus.
- De toets *EVAL* wordt gebruikt om algebraïsche en numerieke uitdrukkingen te evalueren, de toets apostrof ['] wordt gebruikt om een groep apostroffen voor algebraïsche uitdrukkingen in te voeren.
- De toets *SYMB* activeert het menu voor symbolische bewerkingen.
- De toets Delete ◀ wordt gebruikt om tekens in een regel te verwijderen.
- De toets y^x berekent de macht *x* van *y.*
- De toets $\sqrt{x}$ berekent de wortel van een getal.
- De toetsen *SIN*, *COS* en *TAN* berekenen respectievelijk de sinus, de cosinus en de tangens van een getal.
- De toets *EEX* wordt gebruikt om een macht van tien in te voeren (bijvoorbeeld 5×10^3 wordt ingevoerd als 5 EEX 3 en dit wordt weergegeven als *5E3*).
- De toets *+/-* verandert het teken van een invoergegeven, de toets *X* voert het teken X (hoofdletter) in.
- De toets *1/x* berekent de inverse van een getal, de toetsen +, −, × en ÷ worden gebruikt voor de fundamentele rekenkundige bewerkingen (optellen, aftrekken, vermenigvuldiging en delen, respectievelijk).
- De toets *ALPHA* wordt gecombineerd met andere toetsen om alfabettekens in te voeren.
- De toets *Shift-links* „ en de toets *Shift-rechts* … worden met andere toetsen gecombineerd om menu's te activeren, tekens in te voeren of functies te berekenen, zoals elders beschreven.
- De *numerieke toetsen* (*0* tot en met *9*) worden gebruikt om de cijfers van het decimale getalsstyeem in te voeren.

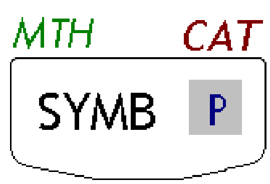
- Er is een *toets voor een decimale punt* (.) en een spatietoets (*SPC*).
- De toets *ENTER* wordt gebruikt om een getal of een functie in het beeldscherm of het stapelgeheugenin te voeren en.
- De toets *ON* wordt gebruikt om de rekenmachine aan te zetten.

Andere toetsfuncties

De groene Shift-links toets, *toets (8,1)*, de rode Shift-rechts toets, *toets (9,1)* en de blauwe ALPHA-toets, *toets (7,1)*, kunnen worden gecombineerd met enkele van de andere toetsen om de andere functies weergegeven op het toetsenbord te activeren. Zo heeft bijvoorbeeld de toets [SYMB], *toets (4,4)*, de volgende zes functies:

[SYMB]	De hoofdfunctie om het menu SYMBolic te activeren
[←] MTH	De functie Shift-links om het menu MTH (Math) te activeren.
[→] CAT	De functie Shift-rechts om de functie CATalog te activeren.
[ALPHA] [P]	De functie ALPHA om de hoofdletter P in te voeren
[ALPHA] [←] [P]	De functie ALPHA Shift-links om de kleine letter p in te voeren
[ALPHA] [→] [P]	De functie ALPHA-Shift-rechts om het symbool P in te voeren

Van de zes functies die bij de toets horen, worden alleen de eerste vier weergegeven op het toetsenbord zelf. De toets ziet er als volgt op het toetsenbord uit.



U ziet dat de kleur en de positie van de labels op de toets, namelijk **SYMB**, *MTH*, *CAT* en **P**, aanduiden wat de hoofdfunctie (**SYMB**) is en welke van de andere drie functies gevormd wordt met de Shift-links [←] (*MTH*), Shift-rechts [→] (*CAT*) en [ALPHA] (**P**) toetsen.

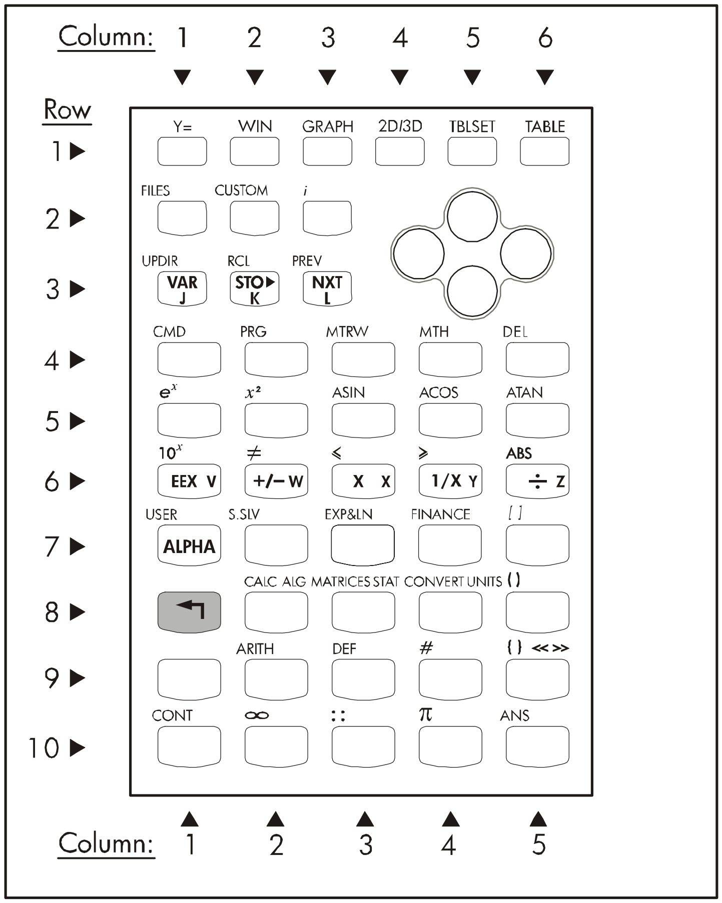
Diagrammen die de functie of het teken tonen na het combineren van de rekenmachinetoetsen met de Shift-links [←], Shift-rechts [→], ALPHA [ALPHA], ALPHA-links Shift[ALPHA] [←] en ALPHA-rechts Shift [ALPHA] [→], worden hierna getoond. In deze diagrammen wordt het teken of de functie voor elke toetsencombinatie op een witte achtergrond weergegeven. Als de Shift-links, Shift-rechts of ALPHA-toetsen worden geactiveerd, worden deze tegen een gearceerde achtergrond weergegeven. Toetsen die niet geactiveerd worden, worden tegen een zwarte achtergrond weergegeven.

Shift-links functies

De volgende afbeelding toont de functies, tekens of menu's behoren bij verschillende rekenmachinetoetsen, wanneer de Shift-links toets ← wordt geactiveerd.

- De zes Shift-links-functies die horen bij de toetsen F1 tot en met F6 hebben te maken met de configuratie en de aanmaak van grafische afbeeldingen en tabellen. Wanneer u deze functies gebruikt in de *ALG*-modus, drukt u eerst op de Shift-links toets ← en vervolgens op een van de willekeurige toetsen in rij 1. Wanneer u deze functies gebruikt in de ***RPN***-modus van de rekenmachine, moet u de Shift-links-toets ← en de toets in rij 1 van uw keuze tegelijkertijd indrukken. De functie *Y=* wordt gebruikt om functies in de vorm *y=f(x)* voor het plotten in te voeren, de functie *WIN* wordt gebruikt om parameters van het tekenvensterin te voeren, de functie *GRAPH* wordt gebruikt om een grafiek te maken, de functie *2D/3D* wordt gebruikt om het grafiektype te selecteren, de functie *TBLSET* wordt gebruikt om parameters in te stellen voor een waardentabel van een functie, de functie *TABLE* wordt gebruikt om een waardentabel van een functie aan te maken.
- De functie *FILE* activeert de bestandsbrowser in het geheugen van de rekenmachine.
- De functie *CUSTOM* activeert de speciale menu-opties, de toets *i* wordt gebruikt om het imaginaire getal van de eenheid *i* in het stapelgeheugen in te voeren ($i^2 = -1$).
- De functie *UPDIR* verplaatst de geheugenpositie een niveau hoger in de bestandsstructuur van de rekenmachine.
- De functie *RCL* wordt gebruikt om waarden van variabelen weer op te roepen.
- De functie *PREV* toont de vorige zes menuopties die behoren bij de softmenutoetsen.
- Naar de *CMD* verrichting uiterlijk vertoon naar de meest vers troepenleiding , naar de *PRG* verrichting activeren naar de programmering

spijskaart , naar de *MTRW* verrichting activeren naar de voedingsbodem writer ,

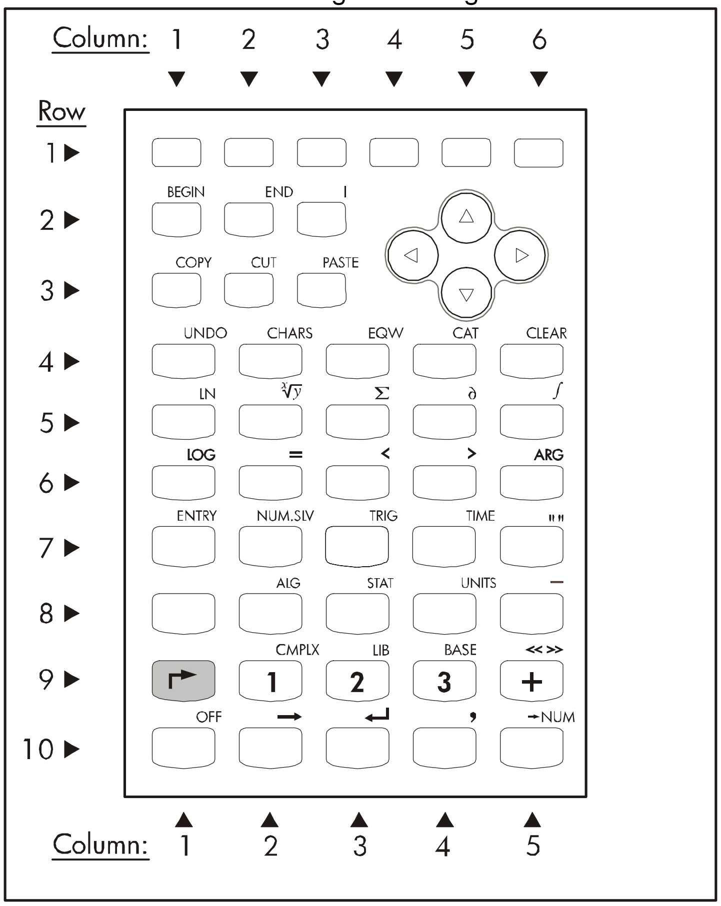


Shift-links ⬑ *functies op het toetsenbord van de rekenmachine*

- De functie *CMD* toont de meest recente opdrachten.
- De functie*PRG*activeert de programmamenu's.
- De functie *MTRW* activeert de Matrixschrijver.
- De functie *MTH* activeert een menu met een wiskundige functie.
- De toets *DEL* wordt gebruikt om variabelen te verwijderen.
- De toets e^x berekent de exponentiële functie van *x*.

- De toets x^2 berekent het kwadraat van *x* (hiernaar wordt verwezen als de functie *SQ*).
- De functies ASIN, ACOS en ATAN berekenen respectievelijk de functies boogsinus, de boogcosinus en de boogtangens.
- De functie 10^x berekent het anti-logaritme van *x*.
- De toetsen $\neq$, $\leq$ en $\geq$ worden gebruikt voor het vergelijken van reële getallen.
- De functie *ABS* berekent de absolute waarde van een reëel getal of de grootte van een complex getal of van een vector.
- De functie *USER* activeert het door de gebruiker gedefinieerde toetsenbordmenu.
- De functie *S.SLV* activeert het symbolische solvermenu.
- De functie *EXP&LN* activeert het menu voor het vervangen van uitdrukkingen met betrekking tot de functies van de exponentiële en natuurlijke logaritmes.
- De functie *FINANCE* activeert een menu voor financiële berekeningen.
- De functie *CALC* activeert een menu voor calculustoepassingen.
- De functie *MATRICES* activeert een menu voor het aanmaken en bewerken met matrices.
- De functie *CONVERT* activeert een menu voor het converteren van eenheden en andere uitdrukkingen.
- De functie *ARITH* activeert een menu van wiskundige functies.
- De toets *DEF* wordt gebruikt om een eenvoudige functie te definiëren als een variabele in het rekenmachinemenu.
- De toets *CONT* wordt gebruikt om met een rekenmachineberwerking door te gaan.
- De toets *ANS* roept het laatste resultaat op wanneer de rekenmachine in de ALG-modus staat.
- De toetsen *[ ]*, *( )* en *{ }* worden gebruikt om accolades, haakjes of … in te voeren.
- De toetsen *#*, $\leq$ en $\geq$ worden gebruikt voor het vergelijken van reële getallen.
- De oneindigheidstoets ∞ wordt gebruikt om het oneindigheidssymbool in een uitdrukking in te voeren.
- De toets pi π wordt gebruikt om de waarde of het symbool in te voeren voor π (de verhouding van de lengte van een omtrek tot zijn diameter).

- De pijtoetsen, in combinatie met de Shift-links-toets, verplaatsen de cursor naar het eerste teken in de richting van de ingedrukte toets.



Shift-rechts ⇨ functies op het toetsenbord van de rekenmachine

Shift-rechts-functies

De afbeelding hierboven toont de functies, tekens of menu's behorende bij de verschillende rekenmachinetoetsen, wanneer de Shift-rechts toets ⇨ wordt geactiveerd.

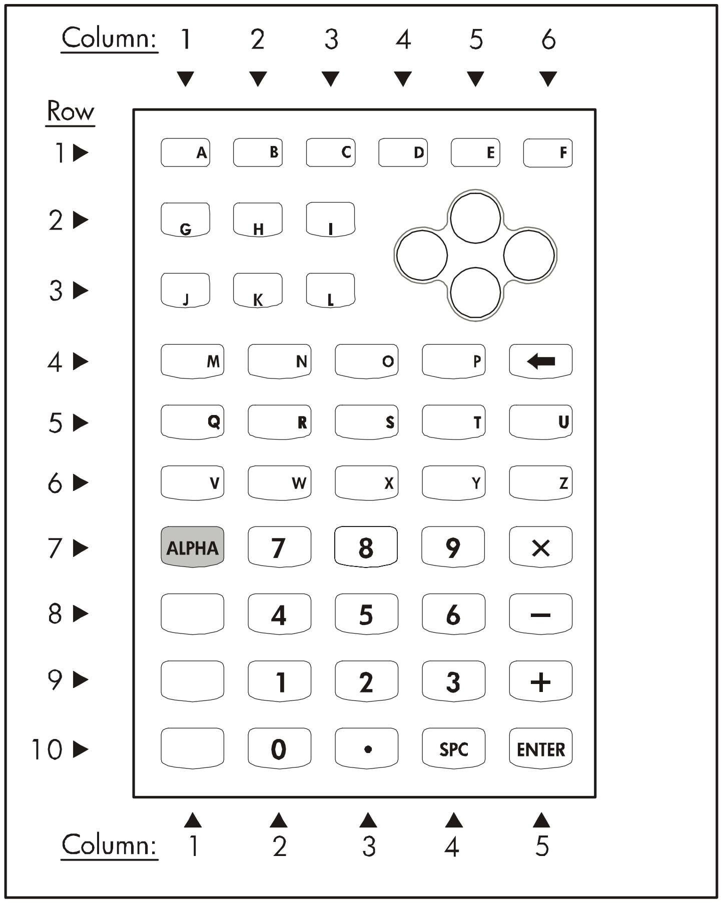
- De functies *BEGIN, END, COPY, CUT* en *PASTE* worden gebruikt voor bewerkingsdoeleinden.

- De toets *UNDO* wordt gebruikt om de laatste bewerking op de rekenmachine ongedaan te maken.
- De functie *CHARS* activeert het menu met speciale tekens.
- De functie *EQW* wordt gebruikt om de vergelijkingenschrijver te activeren.
- De functie *CAT* wordt gebruikt om de opdrachtcatalogus te activeren.
- De functie *CLEAR* schoont het beeldscherm.
- De functie *LN* berekent het natuurlijk logaritme.
- De functie $\sqrt[x]{y}$ berekent de *x* – te wortel van *y.*
- De functie Σ wordt gebruikt om optellingen (of de Griekse hoofdletter sigma) in te voeren.
- De functie ∂ wordt gebruikt om afgeleiden te berekenen.
- De functie $\int$ wordt gebruikt om integralen te berekenen.
- De functie *LOG* berekent het logaritme van grondtal 10.
- De functie *ARG* berekent het argument van een complex getal.
- De functie *ENTRY* wordt gebruikt om de invoermodus bij het bewerken te veranderen.
- De functie *NUM.SLV* activeert het menu NUMerical SOLver.
- De functie *TRIG* activeert het trigonometrische vervangingsmenu.
- De functie *TIME* activeert het tijdmenu.
- De functie *ALG* activeert het algebramenu.
- De functie STAT activeert het menu voor statische bewerkingen.
- De functie *UNITS* activeert het menu voor maateenheden.
- De functie *CMPLX* activeert het menu voor functies met complexe getallen.
- De functie *LIB* activeert de bibliotheekfuncties.
- De functie *BASE* activeert het menu voor conversie van het numerieke grondtal.

- De toets OFF zet de rekenmachine uit, de toets →*NUM* geeft een numerieke (of "drijvende punt") waarde van een uitdrukking.
- De toets " " voert een paar dubbele aanhalingstekens in die gebruikt worden voor het invoeren van tekststrings.
- De toets __ voert een onderliggend streepje in.
- De toets << >> voert het symbool van een programma in.
- De toets → voert een pijl in die een invoergegeven in een programma aanduidt.
- De toets ↵ voer een Return-teken in programma's of tekststrings in.
- De toets (,) voert een komma in.
- De pijtoetsen, in combinatie met de Shift-rechts-toets, verplaatsen de cursor naar het verste teken in de richting van de ingedrukte toets.

ALPHA-tekens

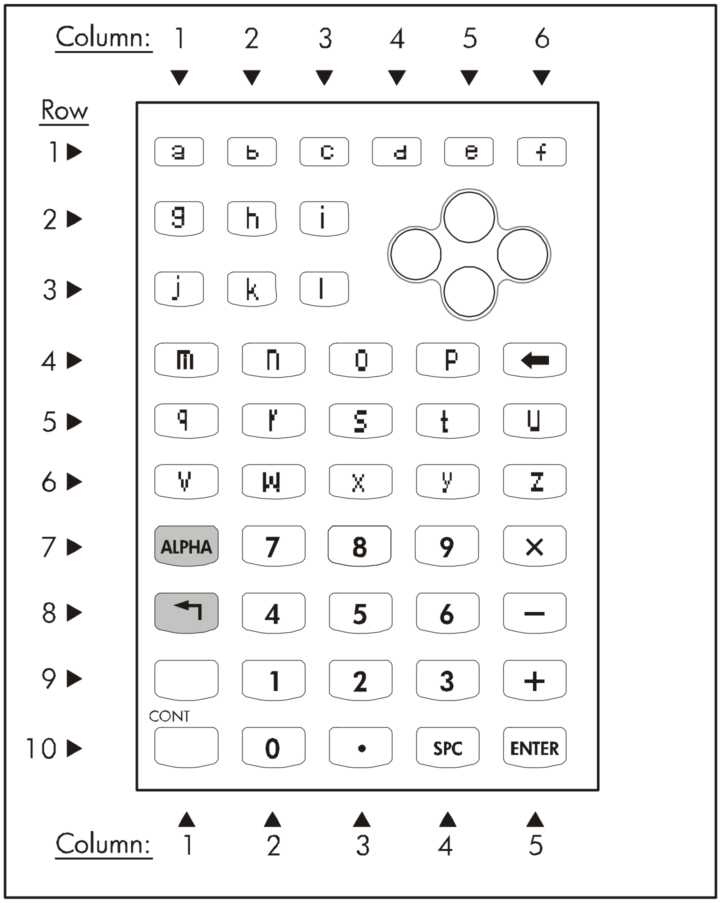
De volgende afbeelding toont de tekens die horen bij de verschillende toetsen van de rekenmachine wanneer de ALPHA ALPHA wordt geactiveerd. U ziet dat de functie ALPHA gewoonlijk wordt gebruikt om de hoofdletters van het Engelse alfabet in te voeren (*A* tot en met *Z*). De getallen, wiskundige symbolen (-, +), het decimaalteken (.) en de spatie (*SPC*) zijn hetzelfde als de hoofdfuncties van deze toetsen. De ALPHA functie geeft een asterisk (*) wanneer deze gecombineerd worden met de maal-toets, ALPHA ×.



Alpha (ALPHA) functies op het toetsenbord van de rekenmachine

Alpha-Shift-links-tekens

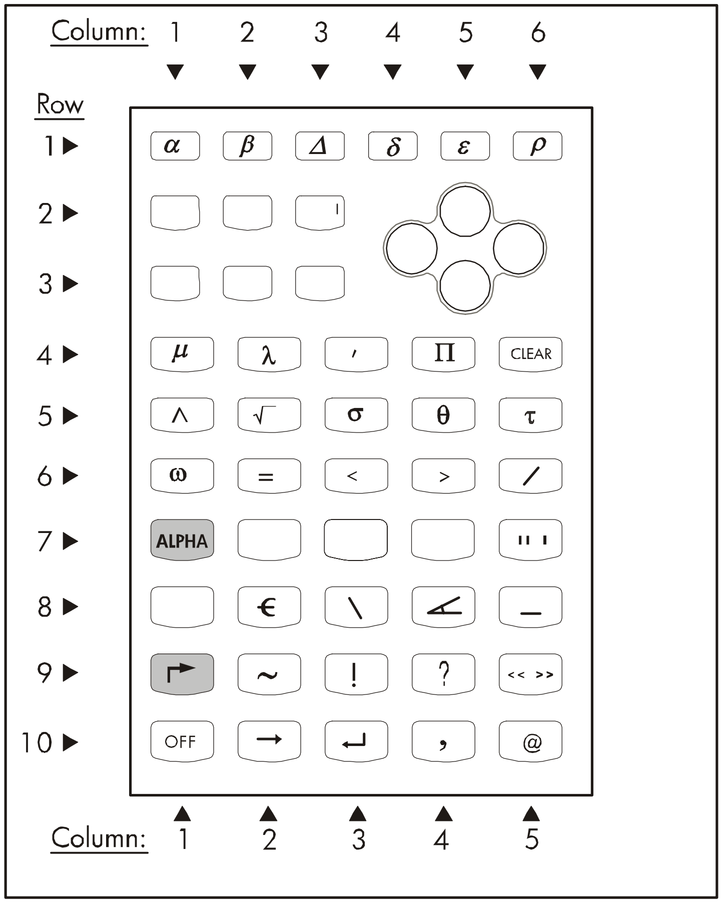
De volgende afbeelding toont de tekens die horen bij de verschillende toetsen van de rekenmachine wanneer de toets ALPHA (ALPHA) wordt gecombineerd met de Shift-links toets (↰). U ziet dat de combinatie (ALPHA)(↰) gewoonlijk wordt gebruikt om de kleine letters van het Engelse alfabet in te voeren (*A* tot en met *Z*). De getallen, wiskundige symbolen (-, *+*, *×*), het decimaalteken (.) en de spatie (*SPC*) zijn hetzelfde als de hoofdfuncties van deze toetsen. De toetsen ENTER en CONT werken ook volgens hun hoofdfunctie, zelfs wanneer de combinatie (ALPHA)(↰) wordt gebruikt.



Alpha ALPHA ← functies op het toetsenbord van de rekenmachine

Alpha-Shift-rechts-tekens

De volgende afbeelding toont de tekens die horen bij de verschillende toetsen van de rekenmachine wanneer de toets ALPHA ALPHA wordt gecombineerd met de rechts-Shift-toets →.



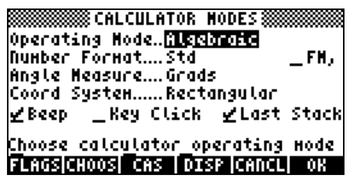
Alpha ALPHA ↱ -functies op het toetsenbord van de rekenmachine

U ziet dat de combinatie ALPHA ↱ hoofdzakelijk wordt gebruikt om een aantal speciale tekens in het stapelgehugen van de rekenmachine in te voeren. De toetsen CLEAR, OFF, →, ↵, komma (,) de toetsen Enter en OFF werken ook als hun hoofdfunctie, zelfs wanneer de combinatie ALPHA ↱ wordt gebruikt. De speciale tekens die gegeven worden door de combinatie ALPHA ↱ bevatten de Griekse letters (α, β, Δ, δ, ε, ρ, μ, λ, σ, θ, τ, ω en Π), andere tekens met de combinatie ALPHA ↱ zijn |, ', ^, =, <, >, /, ", \, __, ~, !, ?, <<>> en @.

Bijlage C
CAS-instellingen

CAS is de afkorting van *C*omputer *A*lgebraic *S*ystem. Dit is het wiskundige hart van de rekenmachine waarin de symbolische wiskundige bewerkingen en functies geprogrammeerd zijn. Het CAS biedt een aantal instellingen die kunnen worden aangepast volgens het gewenste bewerkingstype. De volgende stappen laten de optionele CAS-instellingen zien:

- Druk op de knop MODE om het invoerscherm CALCULATOR MODES te activeren.



Onder in het beeldscherm staan de volgende opties voor softmenutoetsen:

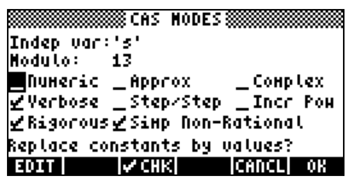
FLAGS	Vermeldt menu's voor het bewerken van rekenmachinevlaggen (*)
CHOOS	Laat de gebruiker opties kiezen in de verschillende velden in het scherm.
CAS	Zorgt voor een invoerscherm om de CAS-instellingen te wijzigen.
DISP	Zorgt voor een invoerscherm om de instellingen van het beeldscherm te wijzigen.
CANCL	Sluit dit invoerscherm en keert terug naar het normale beeldscherm.
OK	Gebruikt om de instellingen te accepteren.

(*) Vlaggen zijn variabelen in de rekenmachine waarnaar verwezen wordt door getallen, die kunnen worden "ingesteld" en "teruggezet" om bepaalde bewerkingsopties van de rekenmachine te wijzigen.

Door te drukken op de toets NXT te drukken, krijgt u de overige opties in het invoerscherm CALCULATOR MODES op het scherm:

RESET	Stelt de gebruiker in staat een gemarkeerde optie terug te zetten.
CANCL	Sluit dit invoerscherm en keert terug naar het normale beeldscherm.
OK	Gebruikt om de instellingen te accepteren.

- Om het oorspronkelijke menu in het invoervenster CALCULATOR MODES te herstellen, drukt u op de toets NXT. Hier is het interessante punt het veranderen van de CAS-instellingen . Dit wordt bereikt door op de softmenutoets CAS te drukken. De standaardwaarden van de CAS-instelling worden hieronder getoond.



- Gebruik de pijltoetsen ◄►▼▲ om door de vele opties in het invoerscherm CAS MODES te bladeren.

- Om een van de bovenstaande instellingen te selecteren of te deselecteren, selecteert u het onderliggende streepje voor de gewenste optie en druk op de softmenutoets ✓CHK totdat u de juiste instelling bereikt. Wanneer er een optie wordt geselecteerd, zal er een vinkje worden getoond op het onderliggende streepje (de bovenstaande opties *Rigorous* en *Simp Non-Rational*). Niet geselecteerde opties krijgen geen vinkje op het onderliggende streepje voor de optie (de bovenstaande opties *_Numeric, _Approx, _Complex, _Verbose, _Step/Step, _Incr Pow*).

- Druk op de softmenutoets OK nadat u alle opties hebt geselecteerd en gedeselecteerd die u in het invoerscherm CAS MODES wilt hebben . Hierdoor keert u terug naar het invoerscherm CALCULATOR MODES.

Druk nogmaals op de softmenutoets OK om terug te keren naar het normale beeldscherm van de rekenmachine .

De onafhankelijke variabele selecteren

Veel van de functies die door het CAS aangeboden worden, gebruiken een vooraf bepaalde onafhankelijke variabele. Standaard wordt elke variabele gekozen als de letter *X* (hoofdletter) zoals u ziet in het bovenstaande invoerscherm CAS MODES. De gebruiker kan deze variabele echter wijzigen in elke andere letter of combinatie van letters en cijfers (de naam van een variabele moet beginnen met een letter) door het veld *Indep var* in het invoervenster CAS MODES te bewerken.

Een variabele met de naam VX staat in de directory {HOME CASDIR} die standaard de waarde 'X' aanneemt. Dit is de naam van de geprefereerde onafhankelijke variabele voor algebraïsche toepassingen en toepassingen met integralen. Om deze reden gebruiken de meeste voorbeelden in dit hoofdstuk X als onbekende variabele. Als u andere namen voor onafhankelijke variabelen gebruikt, bijvoorbeeld met de functie HORNER, zal CAS niet goed werken.

De variabele VX staat permanent in de directory {HOME CASDIR}. Er staan andere CAS-variabelen in de {HOME CASDIR}, bijvoorbeeld REALASSUME (REALA), MODULO (MODUL), CASINFO (CASIN), enz.

U kunt de waarde van VX wijzigen door er een nieuwe algebraïsche naam in op te slaan, bijvoorbeeld 'x', 'y', 'm', enz. Het beste is om 'X' als u VX-variabele te houden voor de voorbeelden in deze handleiding.

Tevens moet u ervoor zorgen dat u de variabele VX niet in uw programma's of vergelijkingen gebruikt, zodat u niet in de war raakt met de VX van CAS'. Gebruik bijvoorbeeld vx of Vx om te verwijzen naar de x-component van snelheid.

De modulus selecteren

De optie *Modulo* in het invoervenster CAS MODES staat voor een getal (standaardwaarde = *13*) dat gebruikt wordt in modulaire rekenkunde. Meer informatie over modulair rekenen wordt elders beschreven.

Numerieke versus symbolische CAS-modus

Wanneer de CAS-modus *Numeric* geselecteerd wordt, worden bepaalde constanten die vooraf gedefinieerd zijn in de rekenmachine weergegeven in hun volledige waarde met "drijvende punt". Standaard is de optie *_Numeric* niet geselecteerd, wat betekent dat die vooraf gedefinieerde constanten als hun symbool en niet als een waarde in het beeldscherm van de rekenmachine worden weergegeven.

Het volgende scherm toont de waarde van de constante π (de verhouding van de lengte van de omtrek tot de diameter) in symbolische opmaak gevolgd door het numerieke (of "drijvende punt") opmaak. Dit voorbeeld komt overeen met de handelingsmodus Algebraic.

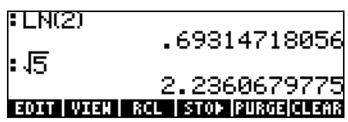
Hetzelfde voorbeeld, alleen dan in de RPN-modus, wordt hierna getoond.

CAS-modus Approximate versus Exact

Wanneer *_Approx* geselecteerd is, zullen symbolische bewerkingen (bepaalde integralen, wortels, enz.) numeriek worden berekend. Wanneer *_Approx* niet geselecteerd is (de Exact-modus is actief), zullen symbolische handelingen berekend worden als algebraïsche uitdrukking met een gesloten vorm, wanneer mogelijk.

Het volgende scherm toont een aantal symbolische expressies ingevoerd met een actieve modus Exact in de handelingsmodus Algebraic.

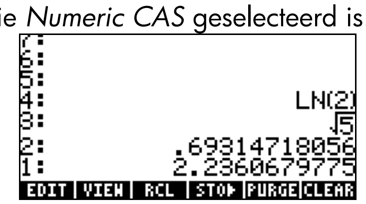
In de Algebraic-modus wordt het object dat door de gebruiker ingevoerd wordt links in het scherm weergegeven, onmiddellijk gevolgd door een resultaat rechts in het scherm. De bovenstaande resultaten tonen de symbolische uitdrukkingen voor *ln(2)*, de natuurlijke logaritme van 2 en $\sqrt{5}$, d.w.z. de wortel van 5. Als de CAS-optie *_Numeric* geselecteerd is, zijn de resultaten voor deze bewerkingen als volgt:



De toetsencombinaties nodig voor het invoeren van deze waarden in de Algebraic-modus zijn als volgt:

↱ LN 2 ENTER √x 5 ENTER

Dezelfde berekeningen kunnen worden uitgevoerd in de PRN-modus. Stapelgeheugenniveaus *3:* en *4:* tonen de berekening in de Exact CAS (de CAS-optie *_Numeric* is niet geselecteerd), op stapelniveaus *1:* en *2:* toont de berekening waarbij de optie *Numeric CAS* geselecteerd is.



De vereiste toetsencombinatie is: 2 ↱ LN 5 √x

Een sneltoets om tussen de modus APPROX en EXACT te wisselen, is door de Shift-rechts-toets vast te houden en de toets ENTER gelijktijdig in te drukken, bijvoorbeeld ↱ (vasthouden) ENTER.

Reële getallen versus hele getallen

CAS-bewerkingen gebruiken hele getallen om tot volledige nauwkeurigheid bij berekeningen te komen. Reële getallen worden opgeslagen in de vorm van een mantisse en een exponent en zijn qua nauwkeurigheid beperkt. In de modus APPROX echter wordt een heel getal altijd omgezet in een reëel getal, zoals hierna weergegeven wordt.

Wanneer de rekenmachine een waarde van een heel getal gevolgd door een decimale punt geeft, duidt dat aan dat het hele getal omgezet is in een reële vorm. Dit geeft aan dat het getal werd ingevoerd, terwijl het CAS was ingesteld op de modus APPROX.

Het wordt aanbevolen dat u de modus EXACT selecteert als standaard CAS-modus en deze wijzigt in de modus APPROX, als u daar door de rekenmachine om wordt gevraagd bij het uitvoeren van een bewerking.

Raadpleeg Hoofdstuk 2 voor meer informatie over reële getallen en hele getallen, evenals andere objecten van de rekenmachine.

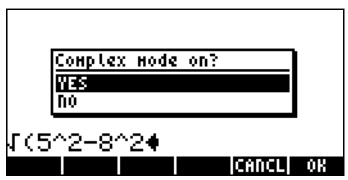
Complexe versus reële CAS-modus

Een complex getal is een getal met de vorm *a+bi*, waarbij *i*, weergegeven door $i^2 = -1$, het imaginaire getal van de eenheid is (elektrotechnici geven de voorkeur aan het symbool *j*) en *a* en *b* zijn reële getallen. Het getal *2 + 3i* is bijvoorbeeld een complex getal. Raadpleeg Hoofdstuk 4 in deze handleiding voor extra informatie over bewerkingen met complexe getallen.

Wanneer de optie _*Complex* CAS geselecteerd wordt, als een bewerking een complex getal oplevert, zal het resultaat weergegeven worden in de vorm *a+bi* of in de vorm van een geordend paar *(a,b)*. Aan de andere kant geldt, dat als de optie _*Complex* CAS niet ingesteld is (de CAS-optie Real is actief) en een bewerking resulteert in een complex getal, u gevraagd zult worden om te wisselen naar de modus Complex. Doet u dit niet, dan zal de rekenmachine een foutmelding geven.

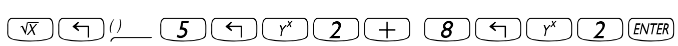
U ziet dat in de modus COMPLEX het CAS in staat is meer bewerkingen uit te voeren dan in de modus REAL, maar de rekenmachine zal ook beduidend langzamer zijn. Het wordt daarom aanbevolen om de modus REAL te selecteren als standaardmodus en dit wijzigt in de modus COMPLEX als de rekenmachine daarom vraagt bij het uitvoeren van een bewerking.

Het volgende voorbeeld toont de berekening van de hoeveelheid $\sqrt{5^2-8^2}$ in de Algebraic-modus, waarbij de CAS-optie Real is geselecteerd. In dit geval wordt u gevraagd of u de modus wil wijzigen in Complex.

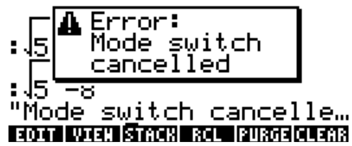


Als u op de softmenutoets OK () drukt, wordt de optie _Complex geforceerd en het resultaat is het volgende:

De volgende toetsencombinatie wordt hierboven gebruikt:



Gebruik F6 wanneer u gevraagd wordt om over te schakelen naar de modus COMPLEX. Als niet naar de modus COMPLEX gaat, krijgt u de volgende foutmelding:



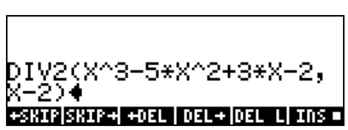
Verbose versus niet-verbose CAS-modus

Wanneer de CAS-optie *_Verbose* geselecteerd is, worden bepaalde calculustoepassingen met opmerkingenregels in het hoofdscherm weergegen. Als de CAS-optie *_Verbose* niet geselecteerd is, zullen er bij die calculustoepassingen geen opmerkingenregels worden weergeven. De opmerkingenregels zullen tijdelijk in de bovenste regels van het beeldscherm verschijnen, wanneer de bewerking wordt berekend.

Stap-voor-stap CAS-modus

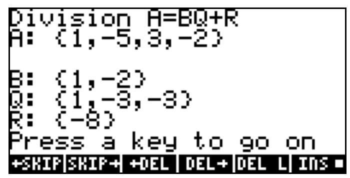
Wanneer de CAS-optie *_Step/step* geselecteerd wordt, zullen bepaalde bewerkingen stapsgewijs in het beeldscherm worden weergegeven. Als de CAS-optie *_Step/step* niet geselecteerd is, zullen de tussenliggende stappen niet worden weergegeven.

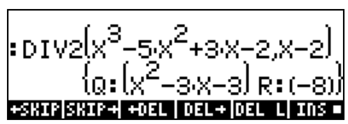
Als u bijvoorbeeld de optie Step/step heeft geselecteerd, tonen de volgende schermen de stapsgewijze deling van twee polynomen, namelijk $(X^3\text{-}5X^2\text{+}3X\text{-}2)/(X\text{-}2)$. Dit wordt bereikt met de functie DIV2 gebruiken zoals hieronder weergegeven. Druk op ENTER om de eerste stap te tonen:



Het scherm vertelt ons dat de rekenmachine werkt aan een deling van polynomen A/B, zodat A = BQ + R, waarbij Q = quotiënt en R = rest. In dit geval is A = X^3-5X^2+3X-2 en B = X-2. Deze polynomen worden in het beeldscherm weergegeven door lijsten van hun coëfficiënten. De uitdrukking A bijvoorbeeld: {1,-5,3,-2} staat voor de polynoom A = X^3-5X^2+3X-2, B:{1,-2} staat voor de polynoom B = X-2, Q: {1} die staat voor de polynoom Q = X, en R:{-3,3,-2} die staat voor de polynoom R = -3X^2+3X-2.

Druk nu op de toets ENTER. Ga door met het indrukken van de toets ENTER voor de extra stappen:





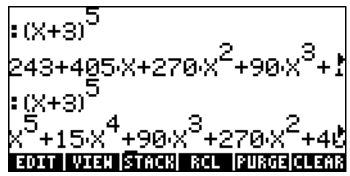
Daarom staan de tussenliggende stappen die weergegeven worden voor de coëfficiënten van het quotiënt en restwaarde van de stapsgewijze synthetische deling zoals deze ook met de hand uitgevoerd zou zijn:

$$\frac{X^3-5X^2+3X-2}{X-2} = X^2 + \frac{-3X^2+3X-2}{X-2} =$$

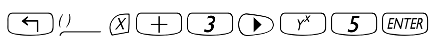
$$X^2-3X+\frac{-3X-2}{X-2} = X^2-3X-3X-\frac{8}{X-2}.$$

De CAS-modus Increasing power

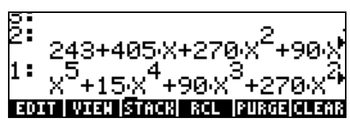
Wanneer de CAS-optie *_Incr pow* geselecteerd is, zullen polynomen worden opgesomd, waarbij de termen steeds hogere machten zullen zijn van de onafhankelijke variabele. Wanneer de CAS-optie *_Incr pow* niet geselecteerd is (standaardwaarde), zullen polynomen worden opgesomd, waarbij de termen steeds lagere machten zullen zijn van de onafhankelijke variabele. Hieronder wordt een voorbeeld weergegeven in de Algebraic-modus.



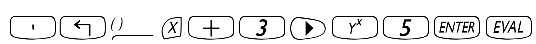
In het eerste geval wordt de polynoom $(X+3)^5$ uitgebreid in een volgorde waarbij de machten van *X* toenemen, terwijl in het tweede geval de polynoom in afnemende volgorde van de machten van *X* wordt weergegeven. De toetsencombinatie is in beide gevallen het volgende:



In het eerste geval was de optie *_Incr pow* geselecteerd, terwijl deze in het tweede geval niet geselecteerd was. Hetzelfde voorbeeld wordt hieronder in de RPN-modus weergegeven:



Dezelfde toetsencombinatie werd gebruikt om elk van de volgende resultaten te geven:



De CAS-instelling Rigourous

Wanneer de CAS-optie *_Rigorous* geselecteerd is, wordt de algebraïsche uitdrukking *|X|, d.w.z.* de absolute waarde, niet vereenvoudigd tot *X*. Als de CAS-optie *_Rigorous* niet geselecteerd is, wordt de algebraïsche uitdrukking *|X|* vereenvoudigd tot *X*.

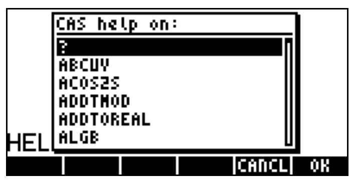
Het CAS kan meer problemen oplossen, als de modus Rigorous niet ingesteld is. Het resultaat of het domein waarop het resultaat van toepassing is, kan echter beperkter zijn.

De CAS-instelling Simplify non-rational

Wanneer de CAS-optie *_Simp Non-Rational* geselecteerd is, zullen niet-rationele uitdrukkingen automatisch worden vereenvoudigd. Wanneer de CAS-optie *_Simp Non-Rational* niet geselecteerd is, zullen niet-rationele uitdrukkingen niet automatisch worden vereenvoudigd.

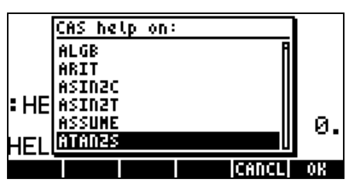
Werken met de HELPvan CAS

Schakel de rekenmachine in en druk op de toets TOOL om het menu TOOL te activeren. Druk vervolgens op de softmenutoets F2, gevolgd door de toets ENTER (de toets in de rechteronderhoek van het toetsenbord) om de HELPte activeren. Het beeldscherm zal er als volgt uitzien:



Nu verschijnt een lijst met alle CAS-opdrachten in alfabetisch volgorde in het scherm. U kunt de pijltoets omlaag , ▼, gebruiken om door de lijst te bladeren. Om u naar boven te verplaatsen in de lijst gebruikt u de pijltoets omhoog, ▲. De pijltoetsen bevinden zich aan de rechterkant van het toetsenbord tussen de eerste en de vierde rij.

Stel dat u informatie wilt zoeken over de opdracht ATAN2S (functie ArcTANgent-to-Sine). Druk op de pijl omlaag, ▼, totdat de opdracht ATAN2S in de lijst wordt gemarkeerd:



U ziet dat in dit geval de softmenutoetsen F5 en F6 de enige toetsen zijn met bijbehorende opdrachten, namelijk:

CANCL	F5	CANCeL de Help
OK	F6	OK om de Help te activeren voor de geselecteerde opdracht

Als u op de toets CANCL F5 drukt, wordt HELP overgeslagen en keert de rekenmachine terug naar het normale beeldscherm.

Om het effect van het gebruik van OK in HELP te bekijken, herhalen we de stappen die hierboven gebruikt werden bij het selecteren van de opdracht ATAN2S in de lijst met CAS-opdrachten: HELP F2 ENTER ▼ ▼ …(tien keer indrukken)

Druk vervolgens op de toetsen OK F6 om informatie te verkrijgen over de opdracht ATAN2S.

HELP duidt aan dat de opdracht of functie ATAN2S de waarde van *atan(x)*, de boogtangens van een waarde *x*, vervangt door het equivalent daarvan van de functie *asin* (boogsinus).

De vierde en vijfde regels in het beeldscherm geven een voorbeeld van de toepassing van de functie ATAN2S. Regel vier, ATAN2S(ATAN(X)), is de uitdrukking van de bewerking die moet worden uitgevoerd, terwijl regel vijf, ASIN(X/√(X^2+1)), het resultaat is.

De onderste regel in het beeldscherm, beginnend met het partikel *See:*, is een regel die verwijst naar andere CAS-opdrachten die betrekking hebben op de opdracht ATAN2S.

U ziet dat er in dit geval zes opdrachten zijn die betrekking hebben op de softmenutoetsen (u kunt dit controleren, omdat het drukken op NXT geen extra menu-items oplevert). De opdrachten van de softmenutoetsen zijn als volgt:

EXIT	F1	EXIT: sluit Helpaf

ECHO F2 ECHO: kopieer de voorbeeldopdracht naar het stapelgeheugen en sluit Help af.
SEE1 F3 SEE1: verwijst naar de eerste koppeling (indien aanwezig) in de lijst met verwijzingen.
SEE2 F4 SEE2: verwijst naar de tweede koppeling (indien aanwezig) in de lijst met verwijzingen.
SEE3 F5 SEE3: verwijst naar de derde koppeling (indien aanwezig) in de lijst met verwijzingen.
MAIN F6 Main: keert terug naar de opdrachtlijst MAIN in HELP.

In dit geval willen we het voorbeeld ECHO-en naar de stapel door te drukken op ECHO F2 . Daarna zal het volgende display op het scherm verschijnen:

Er staan nu vier regels in het beeldscherm met gegevens. De eerste twee regels boven in het scherm komen overeen met de eerste oefening van HELP waarin we het verzoek om hulp annuleren. De derde regel boven in het scherm toont de meest recente aanroep van HELP, terwijl de laatste regel de ECHO van de voorbeeldopdracht toont. Om de opdracht te activeren, drukt u op de toets ENTER. Het resultaat is:

U ziet dat het beeldscherm (of het stapelgeheugen) de bestaande regels naar boven plaats en er onder in het scherm meer gegevens komen te staan, wanneer er nieuwe regels met gegevens ingevoerd worden.

HELP, behandeld in deze paragraaf, is zeer handig om te verwijzen naar de definitie van de vele CAS-opdrachten die in de rekenmachine beschikbaar zijn. Elk gegeven in de CAS-helpfaciliteit zal, wanneer van toepassing, een praktijkvoorbeeld van de opdracht bezitten, evenals verwijzingen zoals in dit voorbeeld weergegeven.

Om snel naar een bepaalde opdracht in de lijst van Help te gaan zonder dat u steeds de pijltoetsen hoeft te gebruiken, kunnen we een sneltoets gebruiken die bestaat uit het invoeren van de eerste letter van de naam van de opdracht. Stel dat we informatie willen vinden over de opdracht IBP (Integration By Parts), wanneer HELP eenmaal geactiveerd is. U gebruikt dan de toets ALPHA (eerste toets in de vierde rij onder in het toetsenbord) gevolgd door de toets voor de letter i (dezelfde als de toets TOOL), dus ALPHA I . Hierdoor gaat u automatisch naar de eerste opdracht die begint met een *i*, namelijk IBASIS. Vervolgens kunt u twee keer op de pijltoets omlaag ▽ drukken voor de opdracht IBP . Door op de toets OK F6 te drukken, activeren we de Help-tekst voor deze opdracht. Druk op MAIN F6 om terug te keren naar de hoofdlijst met opdrachten of EXIT F1 om Help te verlaten.

Verwijzingen naar niet-CAS-opdrachten

HELP bevat gegevens voor alle opdrachten voor het CAS (Computer Algebraic System). Er is een groot aantal andere functies en opdrachten die oorspronkelijk werden ontwikkeld voor de serie HP 48G rekenmachines die niet in HELP zijn opgenomen. Goede verwijzingen naar die opdrachten zijn de *HP 48G Series User's Guide* (HP stuknummer 00048-90126) en de *HP 48G Series Advanced User's Reference Manual* (HP stuknummer 00048-90136) die beide in 1993 zijn gepubliceerd door Hewlett-Packard Company, Corvallis, Oregon, VS.

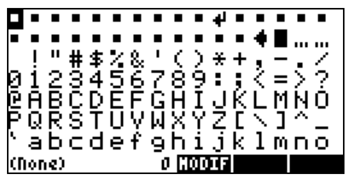
Algemene voorwaarden Eindgebruiker CAS

Het gebruik van de CAS-software vereist van de gebruiker de nodige wiskundige kennis. Er is geen garantie voor de CAS-software, in zoverre is toegestaan door de toepasselijke wetgeving. Tenzij anders schriftelijk vermeld biedt de auteursrechthouder de CAS-software "Zoals ze is" zonder enige vorm van garantie, hetzij uitdrukkelijk of impliciet, met inbegrip van, maar niet beperkt tot impliciete garanties van verkoopbaarheid en geschiktheid voor een bepaald doel. Het volledige risico betreffende kwaliteit en prestatie van de CAS-software ligt bij u. Indien de CAS-software gebreken vertoont, moet u zelf de kosten dragen voor eventueel onderhoud, reparatie of correctie.

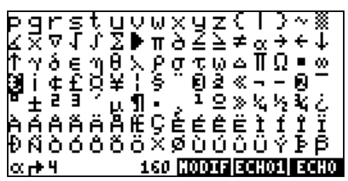
In geen enkel geval, tenzij vereist door de toepasselijke wetgeving, zal enige auteursrechthouder verantwoordelijk zijn voor schade, met inbegrip van algemene, speciale, incidentele of gevolgschade, die kan voortkomen uit het gebruik of de onmogelijkheid van het gebruik van de CAS-software (met inbegrip van, maar niet beperkt tot, het verlies van gegevens of onnauwkeurige gegevens, verliezen opgelopen door u of derde partijen, of de onmogelijkheid van de CAS-software om met enige andere programma's te werken), zelfs indien de houder of een andere partij op de hoogte werd gebracht van de mogelijkheid van dergelijke schadegevallen. Indien dit wordt vereist door de toepasselijke wetgeving, zal het maximum bedrag, dat wordt betaald door de auteursrechthouder voor schadegevallen, het bedrag van het licentierecht dat wordt betaald door Hewlett Packard aan de auteursrechthouder van de CAS-software, niet overschrijden.

Bijlage D
Extra tekenset

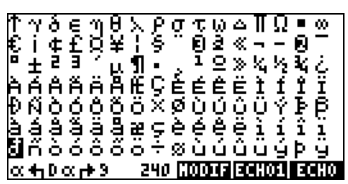
U kunt elke hoofdletter en kleine letter van het alfabet op het toetsenbord gebruiken, terwijl er 255 tekens zijn die op de rekenmachine gebruikt kunnen worden. Hieronder vallen ook speciale tekens zoals θ, λ, enz. die in algebraïsche uitdrukkingen kunnen worden gebruikt. Gebruik de toetsencombinatie ⟨⮣⟩ CHARS (behorende bij de toets EVAL) om deze tekens te kunnen gebruiken. Het resultaat is het volgende scherm:



Door de pijltoetsen ◀ ▶ ▼ ▲ te gebruiken kunnen we door de verzameling tekens bladeren. Door bijvoorbeeld naar beneden te schuiven in het scherm, krijgt u meer tekens in het beeldscherm te zien.



Als u verder naar beneden gaat, zien we deze tekens:



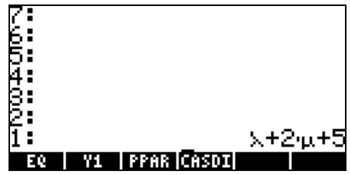
Er zal altijd één teken per keer geselecteerd zijn. De onderste regel in het beeldscherm geeft de sneltoets voor het gemarkeerde teken weer, evenals de code van het ASCII-teken (zie bijvoorbeeld in het bovenstaande scherm: de sneltoets is α←Dα→9, dus ALPHA ← D ALPHA → 9 , en de code is *240*). Het beeldscherm toont ook drie functies die te maken hebben met de softmenutoetsen f4, f5 en f6. Deze functies zijn:

MODIF: Opent een grafische scherm waarin de gebruiker gemarkeerde tekens kan aanpassen. Gebruik deze optie voorzichtig, aangezien het aangepaste teken gewijzigd zal blijven totdat de rekenmachine voor de volgende keer teruggezet zal worden. (Stel u eens het effect voor van het veranderen van het teken 1 in 2!)
ECHO1: Kopieert het gemarkeerde teken naar de opdrachtregel of de Vergelijkingenschrijver (EQW) en verlaat het scherm van de tekenset (d.w.z. een enkel teken wordt naar het stapelgeheugen worden gestuurd).
ECHO: Kopieert het gemarkeerde teken naar de opdrachtregel of de Vergelijkingenschrijver (EQW), maar de cursor blijft in het scherm met de tekenset om de gebruiker in staat te stellen aanvullende tekens te selecteren (dus een string met tekens wordt naar het stapelgeheugen gestuurd). Om het scherm met de tekenset te verlaten, drukt u op `.

Stel dat u bijvoorbeeld de volgende uitdrukking moet invoeren: $\lambda^2 + 2\mu + 5$

Hier volgt een procedure die u kunt uitvoeren, waarbij het stapelgeheugen in de Algebraic of RPN-modus worden gebruikt.

Gebruik de toetscombinatie: ' → CHARS om naar het beeldscherm van de tekenset te gaan. Vervolgens gebruikt u de pijltoetsen om het teken λ te markeren. Druk op ECHO1 (de toets F5) en gebruik de toetscombinaties: + 2 × → CHARS . Vervolgens gebruikt u de pijltoetsen om het teken μ te markeren. Druk op ECHO1 (de toets F5) en gebruik de toetscombinatie: + 5 ENTER . Hier volgt het resultaat van deze oefening in respectievelijk de modi Algebraic en RPN.



Hierna sommen we een aantal van de meest voorkomende toetscombinaties voor [ALPHA][→] op:

Griekse letters

α	(alpha)	[ALPHA][→][A]
β	(bèta)	[ALPHA][→][B]
δ	(delta)	[ALPHA][→][D]
ε	(epsilon)	[ALPHA][→][E]
θ	(thèta)	[ALPHA][→][T]
λ	(lambda)	[ALPHA][→][N]
μ	(mu)	[ALPHA][→][M]
ρ	(rho)	[ALPHA][→][F]
σ	(sigma)	[ALPHA][→][S]
τ	(tau)	[ALPHA][→][U]
ω	(omega)	[ALPHA][→][V]
Δ	(hoofdletter delta)	[ALPHA][→][C]
Π	(hoofdletter pi)	[ALPHA][→][P]

Andere tekens

~	(tilde)	[ALPHA][→][1]
!	(faculteit)	[ALPHA][→][2]
?	(vraagteken)	[ALPHA][→][3]
\	(achterwaartse schuine streep)	[ALPHA][→][5]
∡	(symbool voor hoek)	[ALPHA][→][6]
@	(at)	[ALPHA][→][ENTER]

Sommige tekens die vaak gebruikt worden en geen eenvoudige sneltoetscombinaties hebben zijn: $\bar{x}$ (x-bar), γ (gamma), η (èta), Ω (hoofdletter omega). Deze tekens moet doorgegeven worden vanaf het scherm CHARS: ⬏ CHARS .

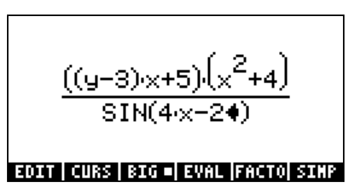
Bijlage E
De selectieboom in de Vergelijkingenschrijver

De uitdrukkingenboom is een diagram dat weergeeft hoe de Vergelijkingenschrijver een uitdrukking interpreteert. De vorm van de uitdrukkingenboom wordt bepaald door een aantal regels die bekend staat als de hiërarchie van de bewerkingen. De regels zijn als volgt:

1. Bewerkingen tussen haakjes worden eerst uitgevoerd, van de binnenste tot de buitenste haakjes en van links naar rechts in de uitdrukking.
2. Argumenten van functies worden vervolgens uitgevoerd, van links naar rechts.
3. Functies worden vervolgens uitgevoerd, van links naar rechts.
4. Machten van getallen worden vervolgens uitgevoerd, van links naar rechts.
5. Vermenigvuldigen en delen worden vervolgens uitgevoerd, van links naar rechts.
6. Optellen en aftrekken worden vervolgens uitgevoerd, van links naar rechts.

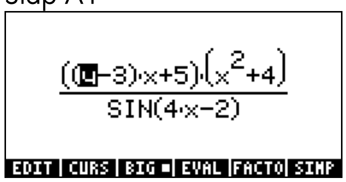
Uitvoering van links naar rechts betekent dat als er twee bewerkingen van dezelfde hiërarchie bestaan, stel dat er twee vermenigvuldigingen in een uitdrukking staan, de eerste meest linkse vermenigvuldiging zal worden uitgevoerd voor de tweede, enzovoorts.

Bekijk bijvoorbeeld de uitdrukking die hieronder wordt weergegeven in de Vergelijkingenschrijver.

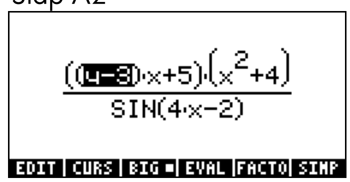


De invoegcursor (⬅) bevindt zich op dit moment rechts van de 2 in het argument van de functie SIN in de noemer. Druk op de pijltoets omlaag ▽ om de doorzichtige bewerkencursor (□) rond de 2 in de noemer te plaatsen. Vervolgens drukt u continu op de pijltoets naar links ◁, totdat de doorzichtige bewerkencursor zich rond de y in de eerste factor in de noemer bevindt. Vervolgens drukt u op de pijltoets omhoog om de selectiecursor (■) rond de y te activeren. Door continu op de pijltoets omhoog △ te drukken, kunnen we de uitdrukkingenboom volgen die de y gebruikt om de uitdrukking te voltooien. Hier volgt de opeenvolging van bewerkingen gemarkeerd door de pijltoets omhoog △:

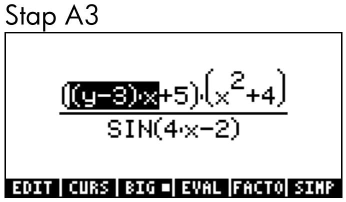
Stap A1



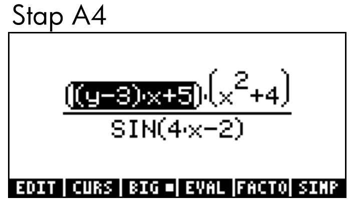
Stap A2



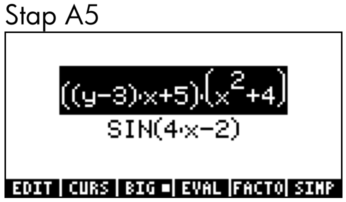
Stap A3



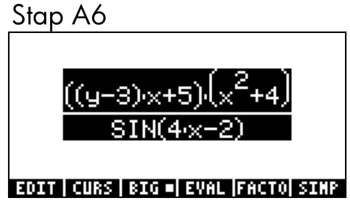
Stap A4



Stap A5

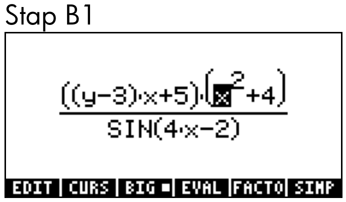


Stap A6

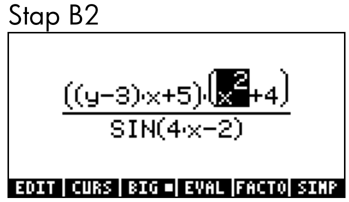


U ziet dat de toepassing van de hiërarchie van handelingen in deze selectie wordt gevolgd. Eerst de y (stap A1). Vervolgens y-3 (stap A2, haakjes). Vervolgens (y-3) x (stap A3, vermenigvuldiging). Vervolgens (y-3)x +5 (stap A4, optelling). Vervolgens ((y-3)x+5)(x^2+4) (stap A5, vermenigvuldiging) en tenslotte ((y-3)x+5)(x^2+4)/SIN(4x-2) (stap A6, delen). Het is belangrijk duidelijk te maken dat de vermenigvuldiging in stap A5 de eerste term ((y-3)x+5) omvat met een tweede term (x^2+4), die al berekend is. Om de stappen te bekijken voor het berekenen van de tweede term drukt u continu op de pijltoets omlaag , totdat de onzichtbare bewerkencursor opnieuw rond de y staat. Vervolgens drukt u op de pijltoets naar rechts totdat deze cursor boven de x in de tweede term in de noemer staat. Vervolgens drukt u op de pijltoets omhoog om deze x te selecteren. De stappen in de evaluatie van de uitdrukking, te beginnen vanaf dit punt, worden hieronder weergegeven:

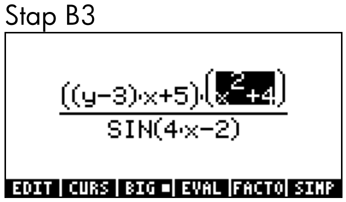
Stap B1



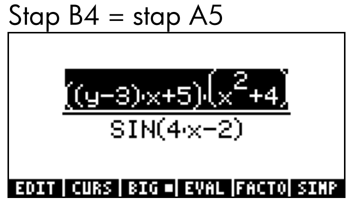
Stap B2



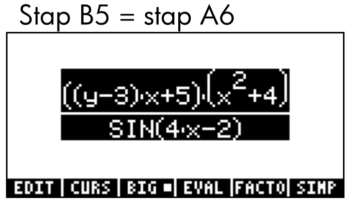
Stap B3



Stap B4 = stap A5

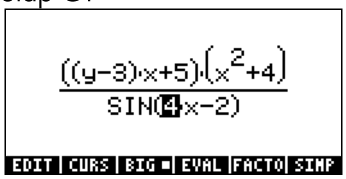


Stap B5 = stap A6

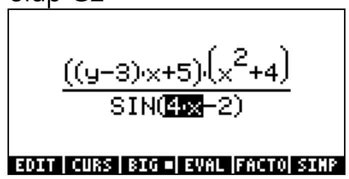


We kunnen ook de evaluatie van de uitdrukking volgen, te beginnen met de 4 in het argument van de functie SIN in de noemer. Druk continu op de pijltoets omlaag , totdat de onzichtbare bewerkencursor opnieuw rond de y staat. Vervolgens drukt u op de pijltoets naar rechts totdat deze cursor boven de 4 in de noemer staat. Vervolgens drukt u op de pijltoets omhoog om deze 4 te selecteren. De stappen in de evaluatie van de uitdrukking, te beginnen vanaf dit punt, worden hieronder weergegeven.

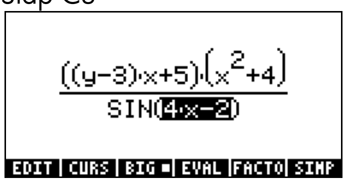
Stap C1



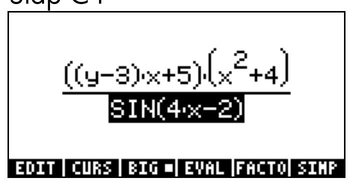
Stap C2



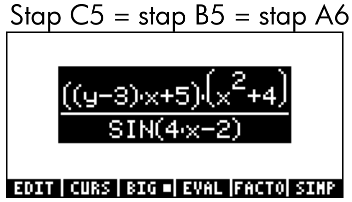
Stap C3



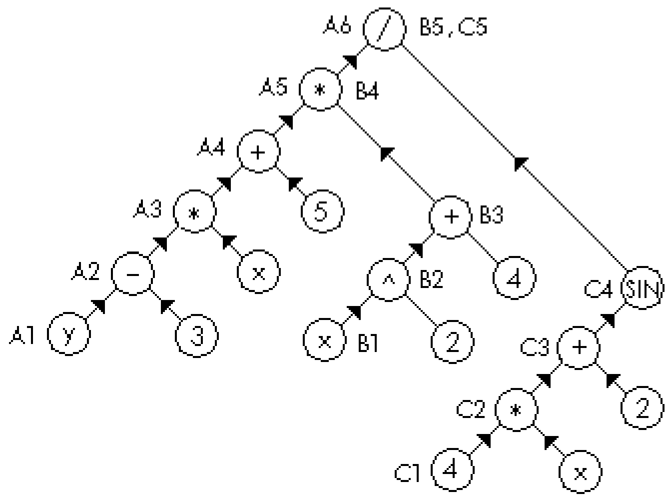
Stap C4



Stap C5 = stap B5 = stap A6



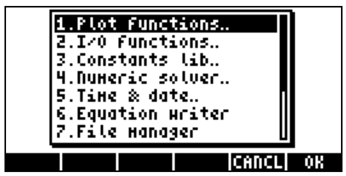
De uitdrukkingenboom voor de uitdrukking hierboven wordt hierna weergegeven.

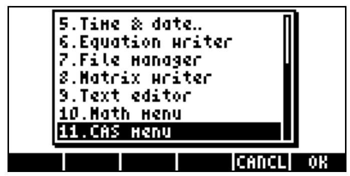


De stappen in de evaluatie van de drie termen (A1 tot A6, B1 tot B5 en C1 tot C5) worden naast de omcirkelde getallen, variabelen of operators weergegeven.

Bijlage F
Het menu Applications (APPS)

Het menu Applications (APPS) is beschikbaar via de toets APPS (eerste toets in tweede rij boven in het toetsenbord). De toets APPS toont de volgende toepassingen:





De verschillende toepassingen worden hierna beschreven.

Plot functions..

Door optie *1. Plot functions..* in de APPS te selecteren, verschijnt de volgende menulijst van opties die met grafieken te maken hebben in het scherm:

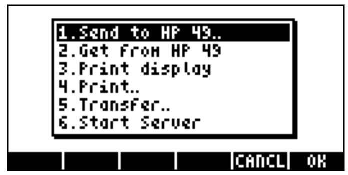
De zes weergegeven opties zijn gelijk aan de onderstaande toetscombinaties.

Invoer vergelijking…	← Y=	Diagramvenster..	← WIN
Grafiekweergave..	← GRAPH	Instelling plotten..	← 2D/3D
Instelling tabel..	← TBLSET	Tabelweergave..	← TABLE

Deze toepassingen worden uitvoerig behandeld in Hoofdstuk 12.

I/O functions..

Door optie *2. I/O functions..* te selecteren in het menu APPS verschijnt de volgende menulijst van invoer/uitvoer-functies in het scherm.

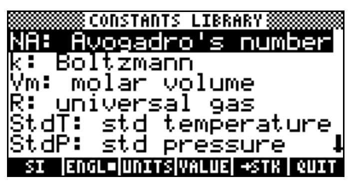


Deze toepassingen worden hierna beschreven.

Send to HP 49..	Stuurt gegevens naar een andere rekenmachine.
Get from HP 49	Ontvangt gegevens van een andere rekenmachine.
Print display	Stuurt scherm naar printer.
Print..	Drukt geselecteerd object af van rekenmachine.
Transfer..	Brengt gegevens over naar andere apparaten.
Start Server..	Rekenmachine ingesteld als server om met computers te communiceren.

Constants lib..

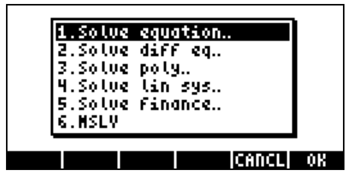
Door optie *3. Constants lib..* in het menu APPS te selecteren, verschijnt de toepassing Constant Library met waarden van fysieke standaardconstanten:



De Constants Library wordt uitvoerig behandeld in Hoofdstuk 3.

Numeric solver..

Door optie *3. Constants lib..* in het menu APPS te selecteren, verschijnt het menu Numerical solver in het scherm:



Deze bewerking is dezelfde als de toetscombinatie ⮣ NUM.SLV . Het menu Numerical solver wordt uitvoerig behandeld in hoofdstuk 6 en 7.

Time & date..

Door optie *5.Time & date..* in het menu APPS te selecteren, verschijnt het menu Time and date in het scherm:

Deze bewerking is dezelfde als de toetscombinatie ⮣ TIME . Het menu Time and date wordt uitvoerig behandeld in Hoofdstuk 26.

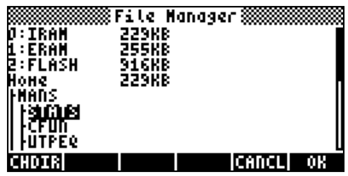
Equation Writer..

Door optie *6.Equation Writer..* in het menu APPS te selecteren, wordt de Vergelijkingenschrijver geactiveerd:

Deze bewerking is dezelfde als de toetscombinatie ⮣ EQW . De Vergelijkingenschrijver wordt uitvoerig behandeld in Hoofdstuk 2. Voorbeelden waarin de Vergelijkingenschrijver wordt gebruikt, zijn beschikbaar in deze hele handleiding.

File manager..

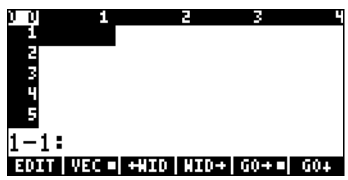
Door optie *7. File manager..* in het menu APPS te selecteren, wordt de toepassing File manager geactiveerd:



Deze bewerking is dezelfde als de toetscombinatie ← FILES . De file manager wordt behandeld in Hoofdstuk 2.

Matrix Writer..

Door optie *8. Matrix Writer..* in het menu APPS te selecteren, wordt de Matrixschrijver geactiveerd:



Deze bewerking is dezelfde als de toetscombinatie ← MTRW . De Matrixschrijver wordt uitvoerig behandeld in Hoofdstuk 10.

Text editor..

Door optie *9. Text editor..* in het menu APPS te selecteren, wordt de regeleditor geactiveerd (line text editor):

De regeleditro kan in veel gevallen worden geactiveerd door op de pijltoets omlaag ▼ te drukken. Als het object in het beeldscherm een algebraïsch object is, zult u door te drukken op ▼ waarschijnlijk de Vergelijkingenschrijver activeren. De regeleditor wordt behandeld in Hoofdstuk 2 en uitvoerig behandeld in bijlage L.

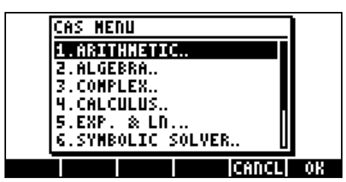
Menu Math ..

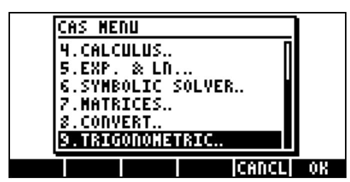
Door optie *10.Math menu..* in het menu APPS te selecteren, verschijnt het menu MTH (mathematics) in het scherm:

Deze bewerking is dezelfde als de toetscombinatie ← MTH . Het menu MTH wordt behandeld in Hoofdstuk 3 (reële getallen). Andere functies van het menu MTH worden behandeld in de hoofdstuk 4 (complexe getallen), 8 (lijsten), 9 (vectoren), 10 (matrixen aanmaken), 11 (bewerkingen met matrixen), 16 (snelle Fourier-transformaties), 17 (toepassingen van waarschijnlijkheid) en 19 (getallen in verschillende grondtallen).

Menu CAS..

Door optie *11.* menu *CAS..* in het menu APPS te selecteren, verschijnt het menu CAS of SYMBOLIC in het scherm:





Deze bewerking kan ook geactiveerd worden met de toets SYMB . Het menu CAS of SYMBOLIC wordt behandeld in Hoofdstuk 5 (algebraïsche en aritmetische bewerkingen). Andere functies in het menu CAS menu worden behandeld in de hoofdstuk 4 (complexe getallen), 6 (oplossingen van vergelijkingen), 10 (matrixen aanmaken), 11 (bewerkingen met matrixen), 13 (calculus), 14 (multi-variabele calculus) en 15 (vectoranalyse).

Bijlage G
Handige sneltoetsen

Hier worden een aantal sneltoetsen gepresenteerd die vaak in de rekenmachine gebruikt worden:

- Beeldschermcontrast aanpassen ON (vasthouden) + of ON (vasthouden) −
- Wissel tussen de RPN-modus en de ALG-modus: MODE +/− OK of MODE +/− ENTER .
- Systeemvlag 95 instellen/wissen (ALG-modus versus RPN-modus)
  MODE FLAGS ▲ ← ▲ ← ▲ ← ▲ ✓CHK
  - In de ALG-modus,
    CF(-95) selecteert de RPN-modus
  - In de RPN-modus,
    95 +/− ENTER SF selecteert de ALG-modus
- De sneltoets om te wisselen tussen de modi APPROX en EXACT bestaat uit het vasthouden van de rechter Shift-toets en het tegelijkertijd indrukken van de toets ENTER , bijvoorbeeld → (vasthouden) ENTER .
- Systeemvlag 105 instellen/wissen (EXACT-modus versus APPROX CAS-modus)

  MODE FLAGS ▲ ← ▲ ← ▲ ▲ ▲ ✓CHK
  - In de ALG-modus,
    SF(-105) selecteert de APPROX CAS-modus
    CF(-105) selecteert de EXACT CAS-modus
  - In de RPN-modus,
    105 +/− ENTER SF selecteert de APPROX CAS-modus
    105 +/− ENTER CF selecteert de EXACT CAS-modus

- Systeemvlag 117 instellen/wissen (CHOOSE boxes versus SOFT menu) MODE FLAGS ▲ ← ▲ ▼ √CHK
  - In de ALG-modus,
    SF(-117) selecteert SOFT menus
    CF(-117) selecteert selecteert CHOOSE BOXES.
  - In de RPN-modus,
    117 +/- ENTER SF selecteert SOFT menus
    117 +/- ENTER CF selecteert SOFT menus
- Hoekmeting wijzigen
  - Naar graden: ALPHA ALPHA D E G ENTER
  - Naar radiaal: ALPHA ALPHA R A D ENTER
- Speciale tekens:
  - Hoeksymbool (∠): ALPHA → 6
  - Faculteitsymbool (!): ALPHA → 2
  - Gradensymbool (°): ALPHA → (vasthouden) 6
- Alpha-toetsenbord vergrendelen/ontgrendelen
  - Alpha-toetsenbord vergrendelen (hoofdletters): ALPHA ALPHA
  - Alpha-toetsenbord ontgrendelen (hoofdletters): ALPHA
  - Alpha-toetsenbord vergrendelen (kleine letters): ALPHA ALPHA ← ALPHA
  - Alpha-toetsenbord ontgrendelen (kleine letters): ← ALPHA ALPHA
- Griekse letters:

Alpha (α):	ALPHA → A	Bèta (β):	ALPHA → B
DELTA (Δ):	ALPHA → C	Delta (d):	ALPHA → D
Epsilon (ε):	ALPHA → E	Rho (ρ):	ALPHA → F
Mu (μ):	ALPHA → M	Lambda (λ):	ALPHA → N
PI (Π):	ALPHA → P	Sigma (σ):	ALPHA → S
Thèta (θ):	ALPHA → T	Tau (t):	ALPHA → U
Omega (ω):	ALPHA → V		

- Bewerkingen op systeemniveau (ON vasthouden, loslaten na de tweede of derde toets te hebben ingevoerd.)

- ON (vasthouden) F1 F6 : "Koude" herstart – al het geheugen wordt gewist
- ON (vasthouden) F2 : Annuleert toetscombinatie
- ON (vasthouden) F3 : "Warme" herstart – geheugen wordt bewaard
- ON (vasthouden) F4 : Start interactieve zelftest
- ON (vasthouden) F5 : Start continue zelftest
- ON (vasthouden) SPC : Afsluiten diepe slaap – timer uit
- ON (vasthouden) F1 :Maakt een screendump van het beeldscherm
- ON (vasthouden) F4 :Annuleert volgende zich herhalende alarm

• Menu's niet toegankelijk via toetsenbord. In de RPN-modus voert u menu_number in, voer MENU in. In de ALG-modus voert u MENU(menu_number) in. Menu_number bestaat uit een van de volgende opties:

- STAT softmenu 96
- PLOT softmenu: 81
- SOLVE softmenu 74 , of gebruik ↱ (vasthouden) 7
- UTILITY softmenu 113

• Andere menu's:

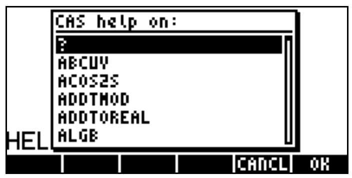
- menu MATHS: ALPHA ALPHA M A T H S ENTER
- menu MAIN: ALPHA ALPHA M A I N ENTER

• Andere toetscombinaties:

- ↱ (vasthouden) 7 : SOLVE menu (menu 74)
- ↰ (vasthouden) MODE : menu PRG/MODES (Hoofdstuk 21)
- ↰ (vasthouden) ▼ : Start tekstbewerker (bijlage L)
- ↰ (vasthouden) UPDIR : HOME(), gaat naar HOME directory
- ↰ (vasthouden) PREV : Herstelt laatste actieve menu
- ↱ (vasthouden) ▼ : Somt inhoud van variabelen of menugegevens op
- ↱ (vasthouden) CHARS : menu PRG/CHAR (Hoofdstuk 21)

Bijlage H
Opsommingen CAS-hulpfaciliteit

Men kan toegang tot de CAS-hulpafaciliteit krijgen door de toetscombinatie: TOOL NXT HELP ENTER . De eerste paar Help-schermen worden hieronder weergegeven.



De opdrachten worden in alfabetische volgorde voorgesteld. Gebruik de verticale pijltjestoetsen ▲▼ om door de lijst van de helpfunctie te navigeren. Hierna volgen een aantal handige tips voor het navigeren door deze help:

- U kunt de pijltjestoets omlaag ▼ ingedrukt houden en kijken op het scherm tot de opdracht die u zoekt, wordt weergegeven. Op dat ogenblik kunt u de pijtjestoets omlaag loslaten. De gewenste opdracht zal op dit punt waarschijnlijk nog niet geselecteerd worden (u kunt zich boven of onder de opdracht bevinden). U kunt echter de verticale toetsen ▲▼ gebruiken, met één aanslag per keer, om de gewenste opdracht aan te duiden. Druk vervolgens op OK.
- Als u te ver voorbij de gewenste opdracht gepasseerd bent, terwijl u de pijltjestoets omlaag ▼ ingedrukt hield, kunt u de pijltjestoets omhoog ▲ ingedrukt houden, om terug naar die opdracht te gaan. Verfijn uw selectie met de verticale toetsen ▲▼, door deze met één toetsaanslag per keer te verplaatsen.
- U kunt de eerste letter van de gewenste opdracht typen, en vervolgens de pijltjestoets omlaag ▼ gebruiken, om die specifieke opdracht te zoeken. U zoekt bijvoorbeeld naar de opdracht DERIV. Typ ALPHA D nadat u de helpfunctie hebt geactiveerd (TOOL NXT HELP ENTER). Hiermee wordt de eerste van de opdrachten die met een D

start, geselecteerd worden, d.i. DEGREE. Om DERIV te vinden, drukt u tweemaal op ▼. Om de opdracht te activeren, drukt u op OK.

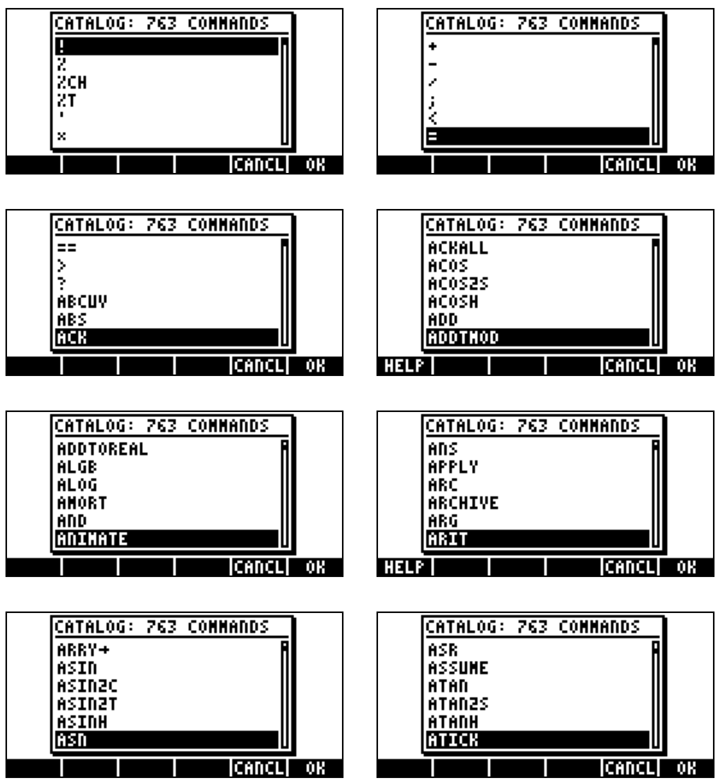
- U kunt twee of meer letters van de gewenste opdracht typen, door het alfabetische toetsenbord te vergrendelen. Hiermee wordt u naar, of in de buurt van de gewenste opdracht gebracht. Daarna moet u het alfatoetsenbord ontgrendelen, en de verticale pijltjestoetsen ▲▼ gebruiken om de opdracht te vinden. Druk op OK om de opdracht te activeren. Om bijvoorbeeld de opdracht PROPFRAC, te vinden kunt u een van de volgende reeksen toetsaanslagen gebruiken:

TOOL NXT HELP ENTER ALPHA ALPHA P R ALPHA ▼ ▼ OK
TOOL NXT HELP ENTER ALPHA ALPHA P R O ALPHA ▼ OK
TOOL NXT HELP ENTER ALPHA ALPHA P R O P ALPHA OK

Zie Appendix C voor meer informatie over het CAS (Computer Algebraïsche Systeem). Appendix C bevat andere voorbeelden voor het toepassen van de CAS helpfunctie.

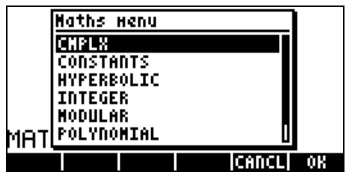
Bijlage I
Commandocataloguslijst

Hier volgt een lijst met alle opdrachten in de commandocatalogus (→ CAT). De opdrachten die behoren tot het CAS (Computer Algebraic System) worden ook genoemd in bijlage H. De gegevens van de helptekst van CAS zijn voor een bepaalde commando beschikbaar als de softmenutoets HELP zichtbaar wordt wanneer u die bepaalde commando markeert. Druk op deze softmenutoets voor de invoer uit de CAS-tekst. De eerste schermen van de catalogus worden hieronder weergegeven:



Bijlage J
Het menu MATHS

Het menu MATHS, toegankelijk via de MATHS (beschikbaar in de catalogus CAT), bevat de volgende submenu's:



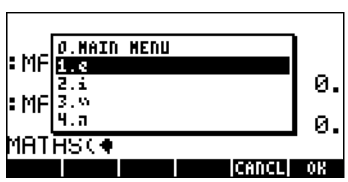
Het submenu CMPLX

Het submenu CMPLX bevat functies die horen bij bewerkingen van complexe getallen.

Deze functies worden behandeld in Hoofdstuk 4:

Het submenu CONSTANTS

Het submenu CONSTANTS geeft toegang tot de wiskundige constanten van de rekenmachine. Deze worden behandeld in Hoofdstuk 3:

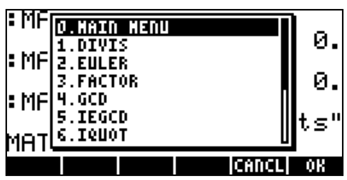


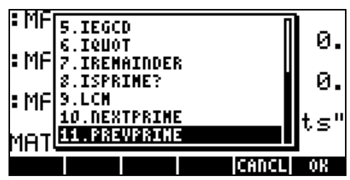
Het submenu HYPERBOLIC

Het submenu HYPERBOLIC bevat de hyperbolische functies en hun inversen. Deze functies worden behandeld in Hoofdstuk 3:

Het submenu INTEGER

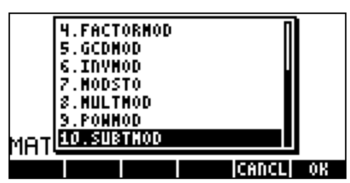
Het submenu INTEGER bevat functies voor het werken met hele getallen en enkele polynomen. Deze functies worden behandeld in Hoofdstuk 5:





Het submenu MODULAR

Het submenu MODULAR bevat functies voor de modulaire rekenkunde met getallen en polynomen. Deze functies worden behandeld in Hoofdstuk 5:



Het submenu POLYNOMIAL

Het submenu POLYNOMINAL bevat functies voor het aanmaken en bewerken van polynomen. Deze functies worden behandeld in Hoofdstuk 5:

Het submenu TESTS

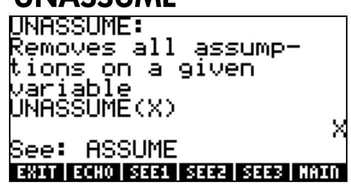
Het submenu TESTS bevat relationele operators (==, <, enz.), logische operators (AND, OR, enz.), de functie IFTE en de functies ASSUME en UNASSUME.

Relationele en logische operators worden in Hoofdstuk 21 behandeld met betrekking tot het programmeren van de rekenmachine in de User RPL-taal. De functie IFTE wordt behandeld in Hoofdstuk 3.

De functies ASSUME en UNASSUME worden hieronder behandeld met behulp van de gegevens van de CAS-helptekst (zie bijlage C).

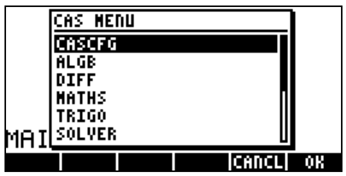
ASSUME

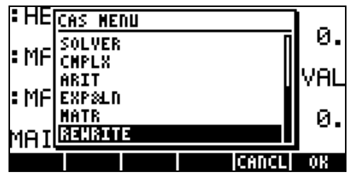
UNASSUME



Bijlage K
Het menu MAIN

Het menu MAIN is beschikbaar in de commandocatalogus. Het menu bevat de volgende submenu's.





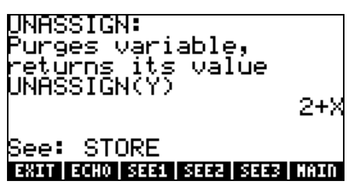
De opdracht CASCFG

Dit is de eerste ingang in het menu MAIN. Deze opdracht configureert het CAS. Zie bijlage C voor informatie over de configuratie van het CAS.

Het submenu ALGB

Het submenu ALGB bevat de volgende opdrachten:

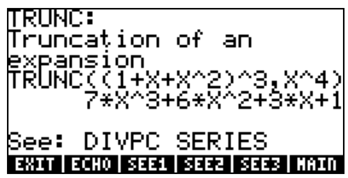
Deze functies, behalve 0.MAIN MENU en 11.UNASSIGN zijn beschikbaar in het toetsenbordmenu ALG (↱ ALG). Raadpleeg Hoofdstuk 5 voor uitvoerige uitleg van deze functies.
De functie UNASSIGN wordt beschreven bij de volgende ingang van het menu CAS.



Het submenu DIFF

Het submenu DIFF bevat de volgende functies:

Deze functies zijn tevens beschikbaar in het submenu CALC/DIFF (geactiveerd met CALC). Deze functies worden beschreven in de hoofdstukken 13, 14 en 15, behalve de functie TRUNC, die hierna wordt behandeld met behulp van de ingang in de CAS-helptekst.



Het submenu MATHS

Het menu MTHAS wordt uitvoerig beschreven in bijlage J.

Het submenu TRIGO

Het submenu TRIGO bevat de volgende functies:

Deze functies zijn ook beschikbaar in het menu TRIG (TRIG).
Een beschrijving van deze functies vindt u ook in Hoofdstuk 5.

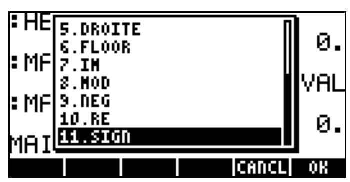
Het submenu SOLVER

Het submenu SOLVER bevat de volgende functies:

Deze functies zijn tevens beschikbaar in het submenu CALC/SOLVE (geactiveerd met CALC). De functies worden beschreven in de hoofdstukken 6, 11 en 16.

Het submenu CMPLX

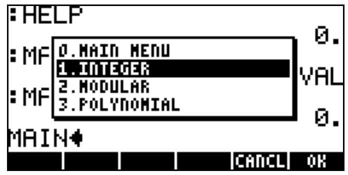
Het submenu CMPLX bevat de volgende functies:



Het menu CMPLX is ook beschikbaar via het toetsenbord (CMPLX). Sommige van de functies in CMPLX zijn ook beschikbaar in het menu MTH/COMPLEX (geactiveerd met MTH). Complexe getalsfuncties worden behandeld in Hoofdstuk 4.

Het submenu ARIT

Het submenu ARIT bevat de volgende submenu's:



De submenu's INTEGER, MODULAR en POLYNOMIAL worden uitvoerig behandeld in bijlage J.

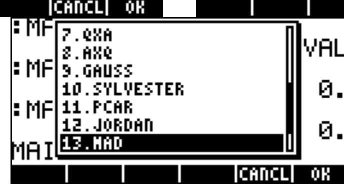
Het submenu EXP&LN

Het submenu EXP&LN bevat de volgende functies:

Het menu kan ook geactiveerde worden via het toetsenbord met ⬑ EXP&LN .
De functies in het dit menu worden behandeld in Hoofdstuk 5.

Het submenu MATR

Het menu MATR bevat de volgende functies:



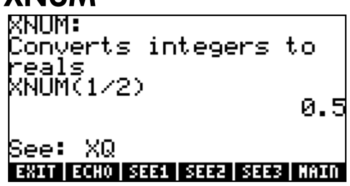
Deze functies zijn tevens beschikbaar via het menu MATRICES op het toetsenbord (⇦ MATRICES). De functies worden beschreven in de hoofdstukken 10 en 11.

Het submenu REWRITE

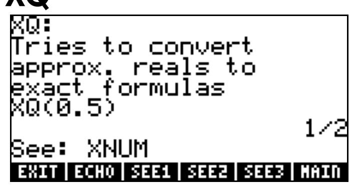
Het menu REWRITE bevat de volgende functies:

Deze functies zijn tevens beschikbaar via het submenu CONVERT/REWRITE (geactiveerd met ⇦ CONVERT). De functies worden behandeld in Hoofdstuk 5, behalve de functies XNUM en XQ, die hierna worden behandeld met behulp van de bijbehorende gegevens in de CAS-helptekst (TOOL NXT HELP):

XNUM

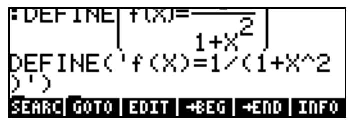


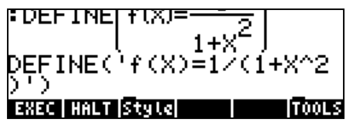
XQ



Bijlage L
Opdrachten van de regeleditor

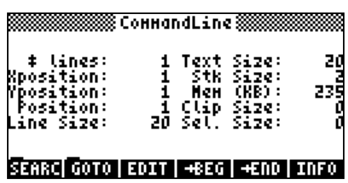
Wanneer u de regeleditor activeert met ← ▼ in het RPN-stapelgeheugen of in de ALG-modus, worden de volgende softmenufuncties weergegeven (druk op NXT om de overige functies te bekijken):





De functies worden in het kort als volgt beschreven:

←SKIP: Slaat tekens aan begin van woord over.
SKIP→: Slaat tekens aan eind van woord over.
←DEL: Verwijdert tekens aan begin van woord.
DEL→: Verwijdert tekens aan eind van woord.
DEL L: Verwijdert tekens in regel.
INS: Voegt, wanneer geselecteerd, tekens in op cursorpositie. Indien niet geselecteerd, vervangt de cursor tekens (overschrijft deze) in plaats van deze in te voegen.
EDIT: Bewerkt selectie.
→BEG: Naar begin van woord
→END: Markeert einde van selectie.
INFO: Levert informatie over de opdracht van de regeleditor, bijvoorbeeld:



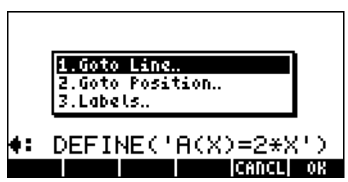
De items die op dit scherm staan, spreken voor zich. Zo betekent bijvoorbeeld *X* en Y *position* de positie van een regel (X) en het regelnummer (Y). *Stk Size* betekent het aantal objecten in de historie van de ALG-modus of in het RPN-stapelgeheugen. *Mem(KB)* betekent de hoeveelheid aan vrij geheugen. *Clip Size* is het aantal tekens op het klembord. *Clip Size* is het aantal tekens in de huidige selectie.

EXEC: Voert geselecteerde opdracht uit.
HALT: Stopt uitvoering opdracht.

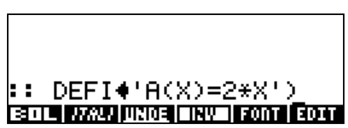
De regeleditor geeft ook de volgende submenu's:

SEARCH: Zoekt tekens of woorden in de opdrachtregel. Omvat ook de volgende functies:

GOTO: Gaat naar een gewenste positie in de opdrachtregel. Omvat ook de volgende functies:



Style: Tekststijlen die kunnen worden gebruikt in de opdrachtregel:



Het submenu SEARCH

De functies van het submenu SEARCH zijn:

Find: Gebruik deze functie om een string in de opdrachtregel te vinden. Het invoerscherm dat bij deze opdracht geleverd wordt, wordt hieronder weergegeven.

Replace: Gebruik deze opdracht om een string te zoeken en te vervangen. Het volgende invoerscherm hoort bij deze opdracht :

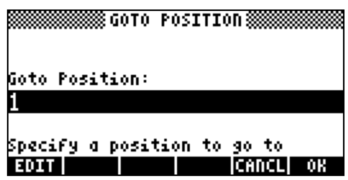
Find next..	: Zoekt het volgende zoekpatroon zoals gedefinieerd in Find.
Replace Selection	:Vervangt selectie met vervangingspatroon gedefinieerd met de opdrachtReplace
Replace/Find Next	:Vervangt een patroon en zoek naar andere keren dat dit voorkomt. Het patroon is gedefinieerd in Replace.
Replace All	:Vervangt alle keren dat een bepaald patroon voorkomt. Deze opdracht vraagt naar bevestiging van de gebruiker voordat het patroon vervangen wordt.
Fast Replace All	:Vervangt alle keren dat een bepaald patroon optreedt zonder dat de gebruiker geraadpleegd wordt.

Het submenu GOTO

De functies van het submenu GOTO zijn de volgende:

Goto Line: Om naar een opgegeven regel te gaan. Het volgende invoerscherm hoort bij deze opdracht:

Goto Position: Gaat naar een opgegeven positie in de opdrachtregel. Het volgende invoerscherm hoort bij deze opdracht:



Labels: Gaat naar een opgegeven label in de opdrachtregel.

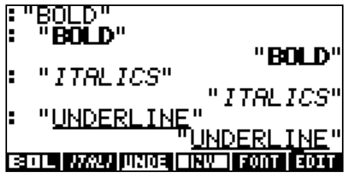
Het submenu Style

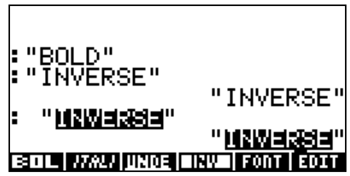
Het submenu Style bevat de volgende stijlen:

BOL: vet
ITALI: cursief
UNDE: onderstrepen
INV : inverteren

De opdracht FONT stelt de gebruiker in staat het lettertype te selecteren voor de opdrachtbewerker.

Voorbeelden van de verschillende stijlen worden hieronder weergegeven:


:"BOLD"
: "BOLD"
"BOLD"
: "ITALICS"
"ITALICS"
: "UNDERLINE"
"UNDERLINE"
BOL ITALI UNDE INV FONT EDIT


:"BOLD"
:"INVERSE"
"INVERSE"
: "INVERSE"
"INVERSE"
BOL ITALI UNDE INV FONT EDIT

Bijlage M
Index

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

S

T

U

V

Beperkte Garantie

hp 49g+ grafische rekenmachine; Garantieperiode: 12 maanden

1. HP garandeert u, de eindgebruiker, dat HP hardware, accessoires en bijgeleverde producten vrij zijn van defecten in materiaal en afwerking na de aankoopdatum voor de hierboven aangegeven periode. Indien HP een mededeling ontvangt van dergelijke defecten gedurende de garantieperiode zal HP, naar eigen goeddunken, de producten die defect blijken te zijn repareren of vervangen. Vervangende producten kunnen nieuw of als nieuw zijn.
2. HP garandeert u dat HP software na de aankoopdatum voor de hierboven aangegeven periode niet ten gevolge van defecten aan materiaal of afwerking zal falen de programma-instructies uit te voeren indien correct geïnstalleerd en gebruikt. Indien HP een mededeling ontvangt van dergelijke defecten gedurende de garantieperiode zal HP de softwaremedia vervangen die de programma-instructies niet uitvoeren ten gevolge van dergelijke defecten.
3. HP garandeert niet dat de werking van HP-producten ononderbroken en foutloos zal zijn. Indien HP niet binnen redelijke tijd in staat is een product te repareren of te vervangen volgens de garantievoorwaarden, dan heeft u recht op een terugbetaling van de aankoopprijs bij direct terugsturen van het product met het aankoopbewijs.
4. HP-producten kunnen hergebruikte of incidenteel gebruikte onderdelen bevatten die in prestatie equivalent zijn aan nieuwe producten.
5. Garantie geldt niet voor defecten die het gevolg zijn van (a) oneigenlijk of onjuist onderhoud of kalibreren, (b) software, koppelingen, onderdelen of niet door HP geleverde componenten, (c) modificaties zonder toestemming of misbruik, (d) gebruik buiten de voor het product gepubliceerde milieuspecificaties of (e) oneigenlijke site preparatie of onderhoud.
6. HP GEEFT GEEN ANDERE SCHRIFTELIJKE OF MONDELINGE EXPLICIETE GARANTIE OF CONDITIE. VOORZOVER TOEGESTAAN DOOR LOKALE WETGEVING, IS ELKE IMPLICIETE GARANTIE OF CONDITIE VAN VERKOOPBAARHEID, BEVREDIGENDE KWALITEIT OF GESCHIKTHEID VOOR SPECIFIEK GEBRUIK BEPERKT TOT DE DUUR VAN DE EXPLICIETE GARANTIE ZOALS HIERBOVEN UITEENGEZET. Sommige landen, staten of provincies staan geen beperkingen toe op

de duur van een impliciete garantie, het kan dus zijn dat de bovenstaande beperking of uitsluiting niet op u van toepassing is. Deze garantie geeft u specifieke wettelijke rechten en u kunt ook andere rechten hebben die van land tot land, staat tot staat of provincie tot provincie variëren.

7. VOORZOVER TOEGESTAAN DOOR LOKALE WETGEVING ZIJN DE REMEDIES IN DEZE GARANTIEVERKLARING UW ENIGE EN EXCLUSIEVE REMEDIES. MET UITZONDERING VAN HETGEEN HIERBOVEN AANGEGEVEN ZIJN HP EN DE HP-LEVERANCIERS IN GEEN GEVAL AANSPRAKELIJK VOOR HET VERLOREN GAAN VAN GEGEVENS OF VOOR DIRECTE, SPECIALE, INCIDENTELE SCHADE, GEVOLGSCHADE (WAARONDER GEMISTE WINST OF VERLOREN GEGANE GEGEVENS) OF ANDERE SCHADE, GEBASEERD OP HET CONTRACT, BENADELING OF ANDERSZINS. Sommige landen, staten of provincies staan geen uitsluiting of beperking van incidentele schade of gevolgschade toe, het kan dus zijn dat de bovenstaande beperking of uitsluiting niet op u van toepassing is.
8. De enige garanties voor HP-producten en diensten zijn uiteengezet in de bijgeleverde expliciete garantieverklaring. HP kan niet aansprakelijk gesteld worden voor enigerlei in dit document vervatte technische of redactionele fouten of weglatingen.

VOOR CONSUMENTENTRANSACTIES IN AUSTRALIË EN NIEUW-ZEELAND: DE GARANTIEVOORWAARDEN IN DEZE BEPALING, MET UITZONDERING VAN HETGEEN TOEGESTAAN DOOR DE WET, BEVATTEN GEEN UITSLUITINGEN, BEPERKINGEN OF WIJZIGINGEN VAN EN ZIJN EEN AANVULLING OP DE VERPLICHTE, WETTELIJK VOORGESCHREVEN RECHTEN DIE VAN TOEPASSING ZIJN OP DE VERKOOP VAN DIT PRODUCT AAN U.

Service

Europa

Land:	Telefoonnummers
Oostenrijk	+43-1-3602771203
België	+32-2-7126219
Denemarken	+45-8-2332844

Oost-Europa	+420-5-41422523
Finland	+35-89640009
Frankrijk	+33-1-49939006
Duitsland	+49-69-95307103
Griekenland	+420-5-41422523
Nederland	+31-2-06545301
Italië	+39-02-75419782
Noorwegen	+47-63849309
Portugal	+351-229570200
Spanje	+34-915-642095
Zweden	+46-851992065
Zwitserland	+41-1-4395358 (Duits) +41-22-8278780 (Frans) +39-02-75419782 (Italiaans)
Turkije	+420-5-41422523
VK	+44-207-4580161
Tsjechische Republiek	+420-5-41422523
Zuid-Afrika	+27-11-2376200
Luxemburg	+32-2-7126219
Andere Europese landen	+420-5-41422523

Azië-Oceanië

Land:	Telefoonnummers
Australië	+61-3-9841-5211
Singapore	+61-3-9841-5211

L-Amerika

Land:	Telefoonnummers
Argentinië	0-810-555-5520
Brazilië	Sao Paulo 3747-7799; RVHL 0-800-157751
Mexico	Mx City 5258-9922; RVHL 01-800-472-6684
Venezuela	0800-4746-8368
Chili	800-360999
Colombia	9-800-114726
Peru	0-800-10111
Midden-Amerika &	1-800-711-2884

Caribische gebied	
Guatemala	1-800-999-5105
Puerto Rico	1-877-232-0589
Costa Rica	0-800-011-0524

N-America

Land:	Telefoonnummers
VS	1800-HP INVENT
Canada	(905) 206-4663 or 800- HP INVENT

RVHL = Rest van het land

Ga naar http://www.hp.com voor de laatste informatie over onze service en ondersteuning.

Regelgeving

Deze paragraaf bevat informatie die laat zien hoe de hp 49g+ grafische rekenmachine voldoet aan de regelgeving in bepaalde regio's. Bij wijzigingen aan de rekenmachine die niet uitdrukkelijk zijn toegestaan door Hewlett-Packard kunnen de autoriteiten ertoe overgaan het gebruik van de 49g+ in deze regio's uit te sluiten.

USA

This calculator generates, uses, and can radiate radio frequency energy and may interfere with radio and television reception. The calculator complies with the limits for a Class B digital device, pursuant to Part 15 of the FCC Rules. These limits are designed to provide reasonable protection against harmful interference in a residential installation.
However, there is no guarantee that interference will not occur in a particular installation. In the unlikely event that there is interference to radio or television reception(which can be determined by turning the calculator off and on), the user is encouraged to try to correct the interference by one or more of the following measures:

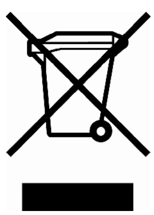
- Reorient or relocate the receiving antenna.
- Relocate the calculator, with respect to the receiver.

Connections to Peripheral Devices
To maintain compliance with FCC rules and regulations, use only the cable accessories provided.

Canada
This Class B digital apparatus complies with Canadian ICES-003. Cet appareil numerique de la classe B est conforme a la norme NMB-003 du Canada.

Japan
この装置は、情報処理装置等電波障害自主規制協議会(VCCI)の基準に基づく第二情報技術装置です。この装置は、家庭環境で使用することを目的としていますが、この装置がラジオやテレビジョン受信機に近接して使用されると、受信障害を引き起こすことがあります。
取扱説明書に従って正しい取り扱いをしてください。

Verwijdering van afgedankte apparatuur door privé-gebruikers in de Europese Unie



Dit symbool op het product of de verpakking geeft aan dat dit product niet mag worden gedeponeerd bij het normale huishoudelijke afval. U bent zelf verantwoordelijk voor het inleveren van uw afgedankte apparatuur bij een inzamelingspunt voor het recyclen van oude elektrische en elektronische apparatuur. Door uw oude apparatuur apart aan te bieden en te recyclen, kunnen natuurlijke bronnen worden behouden en kan het materiaal worden hergebruikt op een manier waarmee de volksgezondheid en het milieu worden beschermd. Neem contact op met uw gemeente, het afvalinzamelingsbedrijf of de winkel waar u het product hebt gekocht voor meer informatie over inzamelingspunten waar u oude apparatuur kunt aanbieden voor recycling.